

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİNİN KUANTUM
ELEKTRODİNAMİĞİNE ETKİLERİ**

**Cavit TEKİNÇAY
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

**HAZİRAN 2024
ANTALYA**

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİNİN KUANTUM
ELEKTRODİNAMİĞİNE ETKİLERİ**

**Cavit TEKİNÇAY
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

**HAZİRAN 2024
ANTALYA**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİNİN KUANTUM
ELEKTRODİNAMİĞİNE ETKİLERİ

Cavit TEKİNÇAY

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 05/06/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof.Dr. Mehmet CENKÇİ

Doç.Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Prof.Dr. Tolga BİRKANDAN

Doç.Dr. Ganim GEÇİM

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİNİN KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİNE ETKİLERİ

Cavit TEKİNÇAY

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf SUCU

Haziran 2024, 82 sayfa

Doğayı oluşturan en temel yapının büyüklüğü veya minimum uzunluk ölçeği, gravitasyon ile kuantum teorisini birleştirme girişimidir. Çünkü, bu varsayımsal en temel yapının bir madde parçacığından ziyade uzay-zamanı veya Einstein teorisi kapsamında gravitasyonu oluşturan yapının çekirdeği olması gerektiği düşünülebilir. Bu bağlamda, minimum uzunluk ölçeğini içeren modeller literatürde gravitasyonun kuantum teorisi ya da kuantum gravite olarak anılmaktadır.

Bu çalışmada, Barut modelinden elde edilen yüksek spinli parçacıkların veya zitterbewegung parçacıklarının çeşitli etkileşmeler altında kuantum elektrodinamiğine genelleştirilmiş belirsizlik ilkesinin etkisi araştırılmıştır. Özellikle spin 3/2 ve spin 2 parçacıklarının Landau ve Nutku osilatörleriyle etkileşmeleri sonucunda nasıl kuantize oldukları enerji seviyeleri üzerinden tartışılmıştır. Ayrıca, dönen karadeliklerin 2+1 boyuta indirgenebilen uzay-zaman zeminleri üzerinden modifiye Hawking sıcaklıkları genelleştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELE: Barut Modeli, Genelleştirilmiş Hawking Sıcaklığı, Genelleştirilmiş Belirsizlik İlkesi, Kerr-Newman Karadeligi, Kesikli Zaman, Landau Osilatörü, Modifiye Dispersiyon Bağıntısı, Nutku Osilatörü, Zitterbewegung Parçacıkları

JÜRİ: Prof.Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof.Dr. Mehmet CENKÇİ

Doç.Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Prof.Dr. Tolga BİRKANDAN

Doç.Dr. Ganim GEÇİM

ABSTRACT

EFFECTS OF GENERALIZED UNCERTAINTY PRINCIPLE ON QUANTUM ELECTRODYNAMICS

Cavit TEKİNÇAY

PhD Thesis in PHYSICS

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf SUCU

June 2024, 82 pages

The size of the most fundamental structure that forms the nature, or the minimum length scale, is an attempt to unify gravity and quantum theory. Because, it can be thought that this hypothetical most fundamental structure should be the nucleus of the structure that creates space-time or gravity within the scope of Einstein theory, rather than a matter particle. In this context, models that include the minimum length scale are referred to the quantum theory of gravity or quantum gravity in the literature.

In this study, the effect of the generalized uncertainty principle on the quantum electrodynamics of high spin particles or zitterbewegung particles obtained from the Barut model under various interactions was investigated. In particular, how spin $3/2$ and spin 2 particles become quantized as a result of their interaction with Landau and Nutku oscillators was discussed in terms of energy levels. In addition, modified Hawking temperatures have been generalized over the space-time backgrounds of rotating black holes, which can be reduced to $2+1$ dimensions.

KEYWORDS: Barut Model, Discrete Time, Generalized Hawking temperature, Generalized Uncertainty Principle, Kerr-Newman Black Hole, Landau Oscillator, Modified Dispersion Relation, Nutku Oscillator, Zitterbewegung Particles

COMMITTEE: Prof.Dr. Yusuf SUCU (Supervisor)

Prof.Dr. Mehmet CENKÇİ

Assoc.Prof.Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Prof.Dr. Tolga BİRKANDAN

Assoc.Prof.Dr. Ganim GEÇİM

ÖNSÖZ

Tez çalışma konumun belirlenmesinde bana önerilerde bulunan danışmanım Prof. Dr. Yusuf Sucu'ya ve Doç. Dr. Ganim Geçim'e; tezimle ilgili yaptıkları öneriler için Doç. Dr. Yusuf Küçükakça'ya, Prof. Dr. Mehmet Cenkci'ye ve Prof. Dr. Tolga Birkandan'a teşekkür ederim. Birçok fedakarlık yaparak beni destekleyen sevgili aileme minnettarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
3. MATERYAL VE METOT	7
3.1. Kuantum Elektrodinamiğinde Temel Denklemler	7
3.1.1. Klein-Gordon-Fock denklemi	7
3.1.2. Dirac denklemi	9
3.1.3. Yüksek spinli parçacıkların denklemleri: Barut modeli	11
3.2. Planck Ölçeği ve Minimum Ölçek	13
3.2.1. Minimum ölçekte kesikli zaman yorumu ve entropi	14
3.2.2. Minimum ölçekte grup hızı	15
3.2.3. Minimum ölçekte Heisenberg belirsizlik ilkesi ve minimum uzun- luk: Genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi	16
4. BULGULAR	18
4.1. Yüksek Spinli Serbest Parçacıkların Kütle-Kabuk Bağlantıları	18
4.2. Kuantum Gravite Altında Spinsiz ve Spinli Osilatörler	20
4.2.1. Landau osilatörü	20
4.2.1.1. Landau osilatörü potansiyelinde spinsiz parçacığın mo- difiye enerji özdeğer denklemi	22
4.2.1.2. Landau osilatörü potansiyelinde spinli parçacıkların den- klemleri	23
4.2.1.3. Landau osilatörü potansiyelinde $s=1/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	25
4.2.1.4. Landau osilatörü potansiyelinde $s=1$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	26
4.2.1.5. Landau osilatörü potansiyelinde $s=3/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	27
4.2.1.6. Landau osilatörü potansiyelinde $s=2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	28
4.2.2. Mekanik osilatör	30
4.2.2.1. Mekanik osilatör potansiyelinde spinsiz parçacığın mo- difiye enerji özdeğer denklemi	30

4.2.2.2.	Mekanik osilatör potansiyelinde spinli parçacıkların denklemleri	32
4.2.3.	Topolojik kütleli gravitasyonel osilatör: Nutku osilatörü	33
4.2.3.1.	Nutku osilatör potansiyelinde spinsiz parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	35
4.2.3.2.	Nutku osilatör potansiyelinde yüksek spinli parçacıkların denklemleri	36
4.2.3.3.	Nutku osilatör potansiyelinde $s=1/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	38
4.2.3.4.	Nutku osilatör potansiyelinde $s=1$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	39
4.2.3.5.	Nutku osilatör potansiyelinde $s=3/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	40
4.2.3.6.	Nutku osilatörü potansiyelinde $s=2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi	41
4.3.	Karadeliklerin 2+1 Boyuta İndirgenmiş Uzay-zaman Zeminleri Üzerinden Modifiye Hawking Sıcaklıklarının Hesaplanması	43
4.3.1.	Kuantum gravite altında spinsiz kuantum parçacığının olay ufkundaki tünellemesi ve modifiye Hawking sıcaklığı	44
4.3.2.	Kuantum gravite altında yüksek spinli kuantum parçacıkların olay ufkundaki tünellemeleri	47
4.3.2.1.	$s=1/2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı	49
4.3.2.2.	$s=1$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı	50
4.3.2.3.	$s=3/2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı	51
4.3.2.4.	$s=2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı ve modifiye Hawking sıcaklığının keyfi bir spine genelleştirilmesi	53
5.	TARTIŞMA	55
5.1.	Osilatörlerin Enerji Seviyeleri	55
5.1.1.	Landau osilatörü potansiyelinde zitterbewegung parçacıklarının modifiye enerji seviyeleri	55
5.1.2.	Nutku osilatör potansiyelinde zitterbewegung parçacıklarının modifiye enerji seviyeleri	60
5.2.	Kerr-Newman Karadelığının Zitterbewegung Parçacıklarının Oluşturduğu Modifiye Hawking Sıcaklığı	70
6.	SONUÇLAR	75
7.	KAYNAKLAR	76
	ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Belirsizlik İlkesinin Kuantum Elektrodinamiğine Etkileri” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

05/06/2024

Cavit TEKİNÇAY



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler :

- γ^a : Dirac tabanları (3+1 düz uzay-zaman)
 σ^a : Dirac tabanları (2+1 düz uzay-zaman)
 β_0 : Genelleştirilmiş belirsizlik ilkesinde minimum ölçek parametresi
 $\bar{\Psi}\Psi$: Spinörün bilinear formu

Kısaltmalar :

- adS : anti-de Sitter
BTZ : Banados-Teitelboim-Zanelli
DKP : Duffin-Kemmer-Petiau
GUP : Genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi
HUP : Heisenberg belirsizlik ilkesi
KG : Klein-Gordon
KN : Kerr-Newman
MDR : Modifiye dispersiyon bağıntısı
MM-GUP : Michele Maggiore-GUP
NC-RN : Non-Komütatif-Reissner-Nordstrom

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 5.1** $s = 1/2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durum ile ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Gerçek enerji seviyesi, standart enerjiden daha düşüktür. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz. 56
- Şekil 5.2** $s = 1$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durum ile ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz. 56
- Şekil 5.3** $s = 3/2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. Kuantum gravitenin etkisini göstermek için non-relativistik limitte $\beta = 0.1$ ve diğerlerinde $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz. 58
- Şekil 5.4** $s = 2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. Kuantum gravitenin etkisini göstermek için non-relativistik limitte $\beta = 0.1$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz. 59
- Şekil 5.5** $s = 1/2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban ve ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin $|\omega|/M$ 'ye göre değişimleri. Sabitler $M = 1, \beta = 0.1$. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. 62

Şekil 5.6	$s = 1$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban ve ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin $ \omega /M$ 'ye göre değişimleri. Sabitler $M = 1, \beta = 0.1$. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir.	63
Şekil 5.7	$s = 3/2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin ω/M 'ye karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir.	64
Şekil 5.8	(4.16) denkleminin taban durumda ($n_{l,r} = 0$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesindeki eğriler sol dairesel ve $\omega < 0$ bölgesindeki eğriler sağ dairesel spin-2 zitterbewegung parçacıklarının dörder enerji özdeğerleridir. $+1/2$ değerinden başlayan yeşil düz çizgi $ 22\rangle$ spin durumunun (sadece sağ dairesel için yarı-normal) enerjisi, $+1/4$ değerinden başlayan mavi noktalı çizgi $ 21\rangle$ spin durumunun (sağ ve sol dairesel için yarı-normal) enerjisi, $-1/4$ değerinden başlayan kırmızı düz çizgi $ 2 - 1\rangle$ spin durumunun (sadece sol dairesel için yarı-normal) enerjisi ve $-1/2$ değerinden başlayan siyah düz çizgi $ 2 - 2\rangle$ spin durumunun (sadece sol dairesel için yarı-normal) enerjisidir.	66
Şekil 5.9	(4.16) denkleminin taban durumda ($n_{l,r} = 0$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Şekil (5.8)'in bağliğında tanımlanan enerji özdeğerlerinin $ \omega > 1$ değerlerine göre değişimleri.	67
Şekil 5.10	(4.16) denkleminin birinci uyarılmış durumda ($n_{l,r} = 1$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Eğriler, Şekil (5.8) başliğında tanımlanmıştır.	68
Şekil 5.11	(4.16) denkleminin birinci uyarılmış durumda ($n_{l,r} = 1$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Şekil (5.9)'in bağliğında tanımlanan enerji özdeğerlerinin $ \omega > 1$ değerlerine göre değişimleri.	69
Şekil 5.12	Sol dairesel $s = 2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) (4.17) taban durumunun denkleminin çözümü olarak imajiner enerji seviyelerinin ω/M 'ye karşı değişimleri. $\beta = 0.0001$ alınmıştır.	70

Şekil 5.13 KN karadeliğinin standart (sürekli çizgi), elektriksel olarak çekici etkileşmeyle modifiye ($q = -1$ noktalı çizgi) ve elektriksel olarak itici etkileşmeyle modifiye ($q = 1$ kesikli çizgi) Hawking sıcaklıklarının karadeliğin kütlesine göre değişimi. Sabitler $a = 1, q_e = 1, q_m = 0, \beta = 0.1, M = 1, \varepsilon = 1, j = 1, s = 2$ 73



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Planck ölçeği (Hossenfelder 2013)	13
--------------------	---	----



1. GİRİŞ

Geçtiğimiz dört yüzyıl boyunca, doğanın sade işleyişini aynı zariflikte tarif etmeyi başaran teoriler ortaya konmuştur. Newton, türev ile integrali birbirine bağlayan kalkülüsün temel teoremini gösterdikten sonra kütleli bir sistemin momentumundaki anlık değişime bu sistemin kütle merkezine etki eden bir dış kuvvetin neden olduğunu ortaya koymuştur. Zamanı mutlak bir parametre olarak ele alan Newton, iki kütle arasındaki kütle çekimsel etkileşmenin merkezi ve korunan bir kuvvet olduğunu öngörmüştür. Newton'un bu varsayımı gündelik deneyimlerle tamamen uyumludur. Birbirine göre sabit hızla hareket eden iki gözlemciye göre Newton teorisinin aynı olduğu Galile dönüşümleri ile ortaya konmuştur. Daha sonra hareketli yüklerin elektrik ve manyetik alanları üzerine çalışan birçok bilim insanının önemli katkıları sonucunda Maxwell, elektrik alanın ve manyetik alanın birbirini ürettiğini ve ışığın bir elektromanyetik alan olduğunu göstererek ilk birleştirilmiş alan teorisini kurmuştur. Özellikle Newton ve Maxwell teorilerinden etkilenen Einstein, evrende ulaşılabilir maksimum hızın ışık hızı olduğunu ve fizik yasalarının ışık hızına yakın hızlarda bile aynı olması gerektiğini düşünerek göreliliğin özel teorisini ortaya koymuştur. Bununla birlikte Einstein, Newton teorisine Maxwell teorisini birleştirebilmek için uzay-zaman zemininin kendisinin gravitasyon olduğunu varsayarak genel relativite teorisini inşa etmiştir.

Diğer taraftan maddenin temel yapıtaşlarını araştıran birçok bilim insanının katkıları sonucunda, maddenin temelde uzayın belirli bir bölgesine sıkışmış dalga paketi veya kuantumlu olabileceği fikrine dayalı olan kuantum mekaniği kurulmuştur. Özellikle Dirac, elektronun relativistik teorisini veya kuantum elektrodinamiğinin temelini inşa etmiştir. Çok kısa sürede Tetrode ve Fock, Dirac teorisini genel göreliliğe adapte etmişlerdir. Dirac teorisinin başarıyla kurulmasından sonra maddenin temel yapı taşının daha yüksek enerjilerde araştırılması son yüzyılın odak noktasıdır. Bir çok elementer parçacık ve bu parçacıkların reaksiyonları standart model çerçevesinde tasniflenmiştir. Standart model çekirdek kuvvetleriyle elektrodinamiği birleştirmeyi başarmıştır ancak gravitasyonla uyumsuz olmasının nedeninin noktasal parçacık tanımından ileri geldiği düşünülmektedir. Bunu aşmak için evrendeki en temel yapıların noktasal değil ancak sicimsel olabileceğini varsayan sicim teorisi kurulmuştur. Sicim teorisinin önemli sonuçlarından biri gravitasyonun etkisini kuantum mekaniğinin temeli olan Heisenberg belirsizlik ilkesine yerleştirmeyi başarmasıdır.

Özellikle son elli yıldaki fizik biliminin ilerleyişi saf bilgiyi üretme biçimine bakılarak incelendiğinde, sadelikten gittikçe uzaklaştığı görülmektedir. Çünkü fizik bilimi mevcut zarif teorilerin sınırlarının onlara bir takım yamalar yapılarak test edildiği bir süreçten geçmektedir. İşin kötü tarafı ise yamalama yöntemi kullanılarak elde edilecek bilgi yığından, evrenin işleyiş mekanizmalarını açıklayabilen daha genel zarif bir teorinin ku-

rulabilmesinin mümkün olup olmadığı bilinmemektedir. Dolayısıyla nereye gideceği tam olarak kestirilemeyen böyle bir yolda yamalı teorilerle bazı fiziksel süreçler açıklanmaya çalışılmaktadır.

Evrenin varlığından günümüze kadar geçirdiği tüm süreçlerin doğasının kuantum mekaniksel olduğu düşünülmektedir. Bu çerçevede gravitasyonun tam bir kuantum teorisini inşa etme çalışmaları hala devam etmektedir. Gravitasyonun kuantum teorisine bir model olan genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi (GUP) sicim teorisinin önemli bir sonucudur. Literatür incelendiğinde özellikle Barut modeli çerçevesinde yüksek spinli parçacıkların kuantum elektrodinamiğine GUP'un etkisinin araştırılmasına yönelik çalışmalara ihtiyaç duyulduğu görülmektedir. Bu bağlamda tezin çerçevesi şu şekildedir:

1. Kaynak Taraması bölümünde alandaki öncü çalışmalar tanıtılmıştır ve eksiklikler belirtilmiştir,
2. Materyal ve Metot bölümünde eğri uzay-zamanda elektromanyetik alanla çiftlenimli Klein-Gordon-Fock denklemi, Dirac denklemi ve zitterbewegung parçacık denklemleri verilmiştir. Sonra kuantum graviteye model olan GUP, minimum ölçek çerçevesinde tanıtılmıştır,
3. Bulgular bölümünde serbest zitterbewegung parçacıklarının kütle-kabuk bağıntıları incelenmiştir. Sonra Landau, mekanik ve Nutku osilatörleriyle etkileşen zitterbewegung parçacıklarının enerji özdeğer denklemleri Dirac denkleminde spin cebri kullanılarak elde edilmiştir ve bunlara kuantum gravite düzeltmesi GUP çerçevesinde modifiye dispersiyon bağıntısıyla elde edilmiştir. Daha sonra dönen karadeliklerin 2+1 boyuta indirgenmiş uzay-zaman zeminleri üzerinden modifiye Hawking sıcaklıkları zitterbewegung parçacıkları için genelleştirilmiştir,
4. Tartışma bölümünde öncelikle osilatörlerin modifiye enerji seviyeleri sayısal çözümlenmeyle elde edilmiştir ve bu çözümler kullanılarak spin-3/2 ve spin-2 parçacıklarının durumlarının ortalama yaşam süreleri tartışılmıştır. Sonra Kerr-Newman karadelisinin modifiye Hawking sıcaklığının karadelik kütlesine göre değişimleri tartışılmıştır,
5. Sonuç bölümünde tartışmalardan elde edilen bilgiler özetlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Doğayı oluşturan en temel yapı nedir? Bu en temel yapının büyüklüğü sonlu mudur? Eğer sonlu ise test edilebilecek bir minimum uzunluğun olması gerekir. Veneziano (1986), Amati vd. (1987), Gross ve Mende (1988), Amati vd. (1989) ve Konishi vd. (1990) tarafından sicim teorisi çerçevesinde minimum fiziksel uzunluğun matematiksel olarak var olması gerektiği gösterilmiştir. Bununla birlikte, kuantum teorisi açısından bu minimum uzunluğun Heisenberg belirsizlik ilkesinde (HUP) var olması gerektiği düşünülerek HUP'un Newton sabitiyle orantılı olarak deforme olduğu da gösterilmiştir. HUP'a bu şekilde yapılan deformasyonlar literatürde, genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi (GUP) olarak anılmaktadır. Ancak, bu konunun oldukça uzun bir tarihi vardır (Garay 1995; Hossenfelder 2013; Tawfik ve Diab 2015).

GUP'un cebirsel yapısı Maggiore (1993) tarafından incelenmiştir. Literatürdeki öneminden dolayı Michele Maggiore-GUP, kısaca MM-GUP olarak ifade edilebilir. MM-GUP, spinli parçacıkları da kapsadığı için Kempf vd. (1995) tarafından yapılan sadece skaler parçacık için geçerli olan fenomenolojik GUP'tan daha geneldir. Başka bir bakış açısına göre, kesikli zaman varsayımının yapılması ve Heisenberg hareket denklemleriyle elde edilen grup hızının standart haliyle aynı olması koşulunda yine MM-GUP üretilmesidir (Fadel ve Maggiore 2022). Kesikli zamanda Wick dönmesi, Unruh (1995) tarafından yapılan karadeliklerin sonik benzerleri çalışmasında kullanılmış ve bu araştırma modifiye dispersiyon bağıntısına (MDR) yol açmıştır.

GUP'un var olabilmesi için uzayın toplam açısal momentum ile orantılı olacak şekilde non-komütatif olması gereklidir. Non-komütatif uzaylar için Szabo (2003) tarafından yapılan çalışma incelenebilir. Bu tez kapsamında elementer parçacıkların kuantum elektrodinamiğine GUP'un etkisi araştırıldığı için GUP parametresinin $\beta \ll 1$ yaklaşıklıkla kullanılmıştır. Kompozit sistemlere GUP'un etkisi araştırılmak istenirse bu yaklaşıklık kullanılamaz ve MM-GUP'un genel ifadesi kullanılmalıdır. Öte yandan MM-GUP, Lorentz dönüşümlerinde sadece boost sektörünü deforme etmektedir. Bu nedenle, Poincare cebirine yapılan deformasyonlarla yakından ilişkilidir (Lukierski vd. 1991, 1992; Lukierski 2017). Dolayısıyla Amelino-Camelia (2001, 2002); Jacobson vd. (2002) tarafından kovaryant bir GUP tartışması yapılarak Einstein'ın dispersiyon bağıntısının modifiye edilmesi gerektiği düşünülmüştür (Magueijo ve Smolin 2002, 2003; Amelino-Camelia vd. 2005; Ling vd. 2006; Todorinov vd. 2019).

Doğayı oluşturan en temel yapının büyüklüğü veya minimum uzunluk ölçeği aynı zamanda gravitasyon ile kuantum teorisini birleştirme girişimidir. Çünkü, bu en temel yapının bir madde parçacığından ziyade uzay-zamanı veya Einstein teorisi kapsamında gravitasyonu oluşturan yapının çekirdeği olması gerektiği düşünülebilir. Bununla birlikte gravitasyon, evrendeki her şeyle perdelenmeksizin etkileşmektedir. Çünkü, tüm fiziksel

evren bir uzay-zaman üzerindedir. Uzay-zaman yok edilemez bir yapıdır. Bu nedenle minimum uzunluk ölçeğini içeren modeller literatürde gravitasyonun kuantum teorisi ya da kuantum gravite olarak anılmaktadır. Dolayısıyla GUP, kuantum gravite teorisi için bir modeldir (Rovelli 2004; Carlip ve Carlip 2003; Kiefer 2007). Ayrıca elementer parçacıkların spini de yok edilemez bir karakteristiğe sahiptir. Bu nedenle uzay-zamanın veya aynı zamanda kuantum vakumun en temel yapısının en temel spine, spin-1/2, sahip olduğu düşünülebilir Rodriguez vd. (2011).

Gravitasyonsuz bir fiziksel evren olası olmadığına göre GUP'un etkisi günümüzde ancak ulaşılabilen 1 TeV mertebesindeki enerjiyle test edilebilen atto ölçekten kozmolojik ölçeğe kadar tüm fiziksel olaylarda kuramsal, deneysel ve gözlemsel olarak araştırılması gereken evrensel bir konudur (Das ve Vagenas 2008). Kuantum elektrodinamiği açısından bu araştırmanın yapılabilmesi için öncelikle GUP çerçevesinde spinsiz veya skaler kuantum parçacığı için Gordon (1926) ve Klein (1927) (KG) denklemi; spin-1/2 parçacığı için Dirac (1928) denklemi; spin-1 parçacığı için Petiau (1936), Kemmer (1939) ve Duffin (1938) (DKP) denklemi; keyfi spinli bir parçacık için Fierz ve Pauli (1939) denkleminin alternatif olarak yarım tamsayı yüksek spinli parçacıklar için Rarita ve Schwinger (1941) denklemi veya tüm bu kuantum spininin denklemlerine alternatif olarak keyfi spinin klasik hareket denklemini de içeren zitterbewegung parçacık denklemi (Barut 1990) modifiye edilmelidir. Daha sonra, evrendeki lokal fiziksel olaylarda bu denklemlerin çözümleri veya genel görelilik teorisi kapsamında spinsiz veya spinli parçacıklar GUP çerçevesinde modifiye edilmiş birer madde alanı olarak ele alınıp Einstein (1916)'nın gravitasyon denklemlerinin çözümleri incelenmelidir. Bu şekilde yapılan ve yapılacak araştırmaların sonuçları belirli bir doygunluğa ulaşabildiğinde, gravitasyonun tam bir kuantum teorisinin nasıl olması gerektiği anlaşılacaktır.

Fizikte gerçeğe daha yakın problemler üzerinde çalışmadan önce üretilen kavramların ve yöntemlerin anlaşılmasında ve tabiki maddenin kuantum mekaniksel davranışının izahında basit harmonik osilatör önemli bir oyuncak modeldir. Kuantum elektrodinamiği çerçevesinde öncelikle Moshinsky ve Szczepaniak (1989) tarafından Dirac osilatörü ve sonra Bruce ve Minning (1993) tarafından KG osilatörü modellendikten sonra Nedjadi ve Barrett (1994) ve Nedjadi ve Barrett (1998) tarafından DKP osilatörü modellenmiştir. Ancak literatürde Rarita-Schwinger osilatörü veya spin-2 osilatörü veya yüksek spinli zitterbewegung osilatörü hakkında yapılan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Öte yandan sabit manyetik alanda yüklü bir parçacığın hareketi de bir basit harmonik osilatördür ve bunun non-relativistik kuantizasyonu ile hesaplanan enerji seviyeleri Landau enerji seviyeleridir. Landau seviyelerinin Dirac denklemi çerçevesinde relativistik olarak incelenmesi (Jellal vd. 2009) atom ve molekül fiziğinde örneğin grafenin davranışının (Li ve Andrei 2007) ve katıhal fiziğinde polaronun davranışının (Peeters ve Devreese 1985) anlaşılması açısından

önemlidir. Bununla birlikte standart model çerçevesinde birden fazla rezonansları olan spini $3/2$ parçacığının veya delta baryonlarının sabit manyetik alandaki davranışının anlaşılmasına yönelik Rarita-Schwinger denkleminin (Hortacsu 1974; Seetharaman vd. 1975; De Paoli vd. 2013) ve zitterbewegung'un ikinci uyarılmış durum denkleminin Dernek (2009) çözümleri araştırılmıştır. Ancak, zitterbewegung modeli çerçevesinde sabit manyetik alanda spin-2 parçacığının çözümlerine rastlanmamıştır. Son olarak Deser vd. (1982) tarafından oluşturulan topolojik kütleli gravitasyon teorisi (Deser vd. 2000) sayesinde Nutku (1993) tarafından 2+1 boyutlu gravitasyonel osilatör çözümü (Nutku osilatör) bulunmuştur. Nutku osilatörü Gürses (1994) tarafından mükemmel akışkan madde ortamında incelenmiştir. Kuantum elektrodinamiği açısından Nutku osilatörü ile etkileşen bir KG-osilatörünün enerji seviyeleri (Ahmed 2019b) ve Dirac parçacığının bu potansiyeldeki enerji seviyeleri (Ahmed 2019a) incelenmiştir. Ancak, zitterbewegung modeli çerçevesinde spin $3/2$ veya spin-2 parçacıklarının Nutku osilatörüyle etkileşiminin incelenmesine yönelik bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Yukarıda bahsedilen üç tip basit osilatörün kuantum gravite çerçevesinde enerji seviyelerine GUP'un etkisinin araştırılması başka bir önemli konudur. Bu bağlamda, Kempf vd. (1995) non-relativistik osilatörün enerji seviyelerine GUP'un etkisini ve Das ve Vagenas (2008) Landau seviyelerine GUP'un etkisini araştırmıştır. Literatürde Dirac osilatörünün sabit manyetik alandaki enerji seviyelerine GUP'un etkisinin (Tyagi vd. 2020) ve DKP osilatörüne GUP'un etkisinin (Wu vd. 2017) araştırıldığı görülmüştür. Hossenfelder vd. (2003) ise GUP'un standart model çerçevesinde kuantum alan teorisine etkisini detaylı olarak incelemiştir.

Maddenin temel etkileşme mekanizmalarının anlaşılması bir yana, kozmolojik ortamda karadeliklerin anlaşılması da evrensel fiziğin bütünlüğü açısından oldukça önemlidir. Yakın zamanda karadelikler üzerine yaptıkları çalışmalar nedeniyle Penrose vd. (2020) Nobel ödülüyle onurlandırılmışlardır. Güneşin kütesinden çok daha büyük yapılar kendi gravitasyon alanında çökerek karadelik olarak tanımlanan uzay-zamandaki lokal bir bölgeyi oluştururlar. Karadelikler sahip oldukları şiddetli gravitasyon alanı sayesinde etrafındaki tüm enerjiyi kendisine doğru yönlendirebilirler. Bu enerji akışının karadeliğin olay ufku olarak tanımlanan yarıçapı geçerek karadeliğin içine doğru girmesi halinde geri dönüşü yoktur. Dolayısıyla karadelikler sadece kendine ait kütlesi, yükü ve açısal momentumu ile tanımlandıkları için saçsızdırlar (Ruffini ve Wheeler 1971). Ancak Hawking (1975) tarafından karadeliklerin kuantum mekaniksel açıdan olay ufkunda parçacık-anti parçacık çifti oluşturabileceği yarı-klasik olarak gösterilmiştir. Pozitif enerjili parçacıklar olay ufkundan sonsuzdaki gözlemciye tünelleme yoluyla kaçabilir ve negatif enerjili parçacıklar karadeliğin içine düşebilirler. Dolayısıyla karadelikler artık kendi adıyla anılan Hawking ışıması yapabilirler ve bu nedenle bir Hawking sıcaklığı oluşturabilirler. Burada

bahsedilen sıcaklığın termal olup olmadığına yönelik bir tartışma için Visser (2015) yapılan çalışma incelenebilir. Dolayısıyla bir kez karadelik olduğu zaman eninde sonunda buharlaşacaktır. Ancak Hawking'in yarı-klasik yaklaşımı kuantum mekaniğinin temelini oluşturan üniterliği yani olasılık korunumunu bozmaktadır. Bir anlamda Hawking sıcaklığı tünelleyen parçacığa ait bilgiyi içermemektedir (Lunin ve Mathur 2002). Dolayısıyla karadelikte bilgi kaybı problemi ortaya çıkmıştır. İşte bu problemin çözülebilmesinde kuantum graviteye bir model olan GUP'un önemli bir rolü vardır (Scardigli 1999). Çünkü, GUP çerçevesinde tekrar hesaplanan Hawking radyasyonu artık parçacığa ait bilgiyi de içermektedir. Dolayısıyla bu sonuç karadeliklerin saçının da varolduğu anlamına gelmektedir.

GUP çerçevesinde karadeliklerde bilginin kaybolmadığını gösteren önemli araştırmalar şunlardır: Dirac parçacıklarının oluşturduğu dilaton (Garfinkle vd. 1991; Horne ve Horowitz 1992) karadeliklerin modifiye Hawking sıcaklığı (Chen vd. 2013); spin-1 parçacıklarının oluşturduğu non-komütatif Reissner-Nordstrom (NC-RN) (Spallucci vd. 2009) karadeliklerin modifiye Hawking sıcaklığı (Övgün ve Jusufi 2016); KG ve Dirac parçacıklarının oluşturduğu Martinez-Zanelli (Martinez ve Zanelli 1996) karadeliklerin modifiye Hawking sıcaklığı (Gecim ve Sucu 2017); KG, Dirac ve spin-1 parçacıklarının oluşturduğu Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) (Banados vd. 1992) karadeliklerin modifiye Hawking sıcaklığı (Gecim ve Sucu 2018); zitterbewegung parçacıklarının oluşturduğu BTZ karadeliklerin modifiye Hawking sıcaklığı (Tekincay vd. 2021a); zitterbewegung parçacıklarının oluşturduğu özlü RN anti-de Sitter (Kiselev 2003) karadeliklerin veya Kiselev karadeliklerinin modifiye Hawking sıcaklığı (Tekincay vd. 2021b); KG ve Dirac parçacıklarının oluşturduğu Euler-Heisenberg (Yajima ve Tamaki 2001) karadeliklerinin modifiye Hawking sıcaklığı (Dernek vd. 2023). Ayrıca bu çalışmalar modifiye Hawking sıcaklığında karadelikte bilgi kaybı olmadığını göstermekle kalmaz, aynı zamanda modifiye Hawking sıcaklığının standart sıcaklıktan daha küçük olduğunu da gösterir. Literatürde, zitterbewegung modeli çerçevesinde, spin-3/2 ve özellikle spin-2 parçacıklarının oluşturduğu özel karadeliklerin Hawking sıcaklıklarının ve modifiye termodinamiklerinin (bu tez kapsamında üretilen Tekincay vd. (2021a) ve Tekincay vd. (2021b) çalışmaları hariç) analizlerine rastlanmamıştır. Bununla birlikte zitterbewegung parçacıklarının ürettiği Hawking sıcaklığı güç spektrumu analizlerine de rastlanmamıştır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Kuantum Elektrodinamiğinde Temel Denklemler

3.1.1. Klein-Gordon-Fock denklemi

Einstein'ın relativistik dispersiyon bağıntısı (Einstein 1905)

$$p^a p_a = -E^2 + p^2 = -M^2$$

şeklindedir. Bu ifadede $[x_a, p_b] = i\hbar\eta_{ab}$ parçacık kuantizasyonu ile kuantize edilen kinetik momentum vektörünün $p_a = -i\hbar\partial_a$ biçimindeki kısmi türev operatörü cinsinden bileşenleri kullanılırsa

$$\partial^a \partial_a \Psi = \frac{M^2}{\hbar^2} \Psi$$

elde edilir. Burada $\Psi(x^a)$ kuantum durum fonksiyonudur. Bu denklem düz uzay-zamanda spinsiz veya skaler kuantum parçacığı için Klein-Gordon denklemdir (Gordon 1926; Klein 1927).

Spinsiz kuantum parçacığının elektromanyetik alanla etkileşmesini incelemek için $L = T(v^a) - U(x^a, v^a)$ Lagranjiyeninden kanonik momentum

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial v^a} = p_a - qA_a$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $T(v^a)$ parçacığın kinetik enerjisidir, $U = qv^a A_a$ elektromanyetik alanın potansiyel enerjisidir ve $q = \pm e$ parçacığın yüküdür. $v_a = (-c, v_i)$ hız vektörünün bileşenleri ve $A_a = (-V/c, A_i)$ vektör potansiyelin bileşenleridir. Kanonik momentumla birlikte Einstein bağıntısı

$$\pi^a \pi_a = -M^2$$

haline gelir. Kanonik momentum $\pi_a = -i\hbar(\partial_a - i\frac{q}{\hbar}A_a)$ biçiminde kuantize edilirse elektromanyetik alanla etkileşen spinsiz parçacık için Klein-Gordon denklemi

$$\left\{ \partial^a \partial_a - 2i\frac{q}{\hbar}A^a \partial_a - \frac{q^2}{\hbar^2}A^a A_a \right\} \Psi = \frac{M^2}{\hbar^2} \Psi$$

şeklinde elde edilir. Burada $\partial_a A^a = 0$ Lorenz ayarıdır.

Spinsiz kuantum parçacığının gravitasyon alanıyla etkileşmesini incelemek için eğri uzay-zamandaki kısmi türev operatörü kovaryant türev ile değiştirildiğinde KG denk-

lemi şu hale gelir (Fock 1926):

$$\left\{ \nabla^\mu \nabla_\mu - 2i \frac{q}{\hbar} A^\mu \partial_\mu - \frac{q^2}{\hbar^2} A^\mu A_\mu \right\} \Psi = \frac{M^2}{\hbar^2} \Psi.$$

Güncel bir inceleme için Kraniotis (2016) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir. Kovaryant türev hesaplanırken metrik uyumluluğu varsayımı yapılmaktadır: $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$. Buna göre

$$\nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu)$$

olur. Ayrıca, dalga fonksiyonunun kovaryant türevi kısmi türevine eşittir: $\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi$. Eğri uzay-zamanda Lorenz ayarı ise şu şekildedir:

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu A^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) = 0.$$

Burada $\Gamma_{\nu\mu}^\mu$, simetrik metrik uyumluluğu varsayımından elde edilen

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

biçimindeki afin bağlantı katsayılarının izidir.

Eğri uzay-zamanda herhangi bir skalerin dış uzaydaki $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu\rho} dx^\rho$ biçiminde verilen sonsuz küçük Lorentz dönüşümleri altında değişmemesi

$$\pi'^\mu \pi'_\mu = \Lambda^{\mu\alpha} \pi_\alpha \Lambda_{\mu\beta} \pi^\beta = \delta_\beta^\alpha \pi_\alpha \pi^\beta = \pi_\alpha \pi^\alpha$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Lorentz dönüşümlerinin ortogonal olması için

$$\Lambda^{\mu\alpha} \Lambda_{\mu\beta} = g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} + (\omega_\beta^\alpha{}_\rho + \omega_\beta^\alpha{}_\rho) dx^\rho = \delta_\beta^\alpha$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bunun için $\omega_\beta^\alpha{}_\rho$ ile gösterilen Ricci dönme katsayılarının

$$\omega_\beta^\alpha{}_\rho + \omega_\beta^\alpha{}_\rho = 0, \quad \omega_{\alpha\beta\rho} + \omega_{\beta\alpha\rho} = 0$$

şeklinde gösterildiği gibi anti-simetrik olması gerekir. Ayrıca, Lorentz dönüşümlerinin kovaryant türevinin sıfır olması için ($\nabla_\mu \Lambda_{\nu\rho} = 0$) Ricci dönme katsayılarının kovaryant türevinin de sıfır olması gerekir ($\nabla_\sigma \omega_{\mu\nu\rho} = 0$).

Eğri uzay-zaman ile düz uzay-zaman arasındaki bağlantı Ricci ve Levi-Civita (1900) tarafından yapılan çalışmadaki tetradlar veya aynı anlamda Einstein'ın vielbein tabanlarıyla (Einstein 1928) yapılabilir: $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^a{}_\nu \eta_{ab}$. Buna göre metrik uyumluluğu

varsayımının geçerli olabilmesi için vielbein tabanlarının kovaryant türevinin sıfır olması gerekir:

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = 0 = \partial_\mu e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} e^a{}_\alpha.$$

Böylece Ricci dönme katsayıları, vielbein tabanları ile afin bağlantı katsayıları cinsinden hesaplanabilir (Ricci ve Levi-Civita 1900):

$$\omega_{ab\mu} = e_a{}^\alpha \partial_\mu e_{b\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} e_a{}^\alpha e_{b\beta} = e_a{}^\alpha e_b{}^\beta \omega_{\alpha\beta\mu}.$$

Eğri uzay-zamanda Einstein alan denklemleri ve kuantum elektrodinamiği üzerine Yopez (2011) tarafından yapılan güncel çalışma incelenebilir.

3.1.2. Dirac denklemi

Düz uzay-zamandaki Einstein bağıntısının karekökü ($\sqrt{p^a p_a}$) spin-1/2 Dirac tabanları tanımlanarak

$$\gamma^a p_a = -iM$$

biçiminde hesaplanabilir. Bu ifadenin iterasyonundan tekrar Einstein bağıntısının elde edilebilmesi koşulu

$$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab}$$

biçimde yazılabilen Dirac'ın anti-komütasyon cebirini ortaya çıkarmaktadır. Bu cebir iç uzay ile dış uzayı birbirine bağlamaktadır. Parçacık kuantizasyonu ve elektromanyetik alanla etkileşme ile birlikte düz uzay-zamanda Dirac denklemi (Dirac 1928)

$$\gamma^a \left(\partial_a - i \frac{q}{\hbar} A_a \right) \Psi = \frac{M}{\hbar} \Psi$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Psi(x^\mu)$ Dirac spinörüdür.

Dirac parçacığının gravitasyon ile etkileşmesini incelemek için kısmi türev operatörü kovaryant türev ile değiştirilir (Tetrode 1928; Fock 1929):

$$\gamma^\mu \left(\nabla_\mu + \Gamma_\mu - i \frac{q}{\hbar} A_\mu \right) \Psi = \frac{M}{\hbar} \Psi.$$

Burada $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$ eğri uzay-zamanda Clifford cebridir (Snygg 1997). $\Gamma_\mu = \frac{i}{2} \omega_{ab\mu} S^{ab}$, Dirac denkleminin dış uzaydaki Lorentz dönüşümleri ile birlikte iç uzaydaki Lorentz dönüşümleri sonucu değişmemesini sağlayan spin bağlantı katsayılarıdır. $S^{ab} =$

$\frac{1}{4i}[\gamma^a, \gamma^b]$, spin açışal momentum tensör operatörüdür. Dirac tabanlarının $\gamma_a^\dagger = -\gamma_0\gamma_a\gamma^0$ Minkowskiyan hermitselliğine göre spin operatörü $S_{ab}^\dagger = \gamma_0 S_{ab}\gamma^0$ eşitliğini sağlar. Buna göre spin bağlantı katsayıları $\Gamma_\mu^\dagger = -\gamma_0\Gamma_\mu\gamma^0$ eşitliğine uyar. Dolayısıyla Minkowskiyan üniter dönüşüm operatörü $U = I + \Gamma_\mu dx^\mu$ biçiminde yazılabilir. Çünkü, $U^\dagger = \gamma_0 U^{-1}\gamma^0$ eşitliği sağlanmaktadır. Bunlara göre Dirac denkleminin Lorentz dönüşümleri altında değişmezliği

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}' \gamma^\mu D'_\mu \Psi' &= \frac{M}{\hbar} \bar{\Psi}' \Psi, \\ \bar{\Psi} (U^{-1} \gamma^\mu U) \Lambda_{\mu\nu} \left(\nabla^\nu \Psi + [U^{-1} (\nabla^\nu + \Gamma^\nu) U] \Psi - i \frac{q}{\hbar} A^\nu \Psi \right) &= \frac{M}{\hbar} \bar{\Psi} U^{-1} U \Psi, \\ \bar{\Psi} \gamma_\nu D^\nu \Psi &= \frac{M}{\hbar} \bar{\Psi} \Psi,\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Dirac tabanları

$$\gamma'_\mu = U^{-1} \gamma_\mu U = \Lambda_{\mu\nu} \gamma^\nu$$

eşitliğini ve spin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_\mu = U^{-1} [\nabla_\mu + \Gamma_\mu] U$$

eşitliğini sağlamaktadır (Snygg 1997). Bu eşitliklerin doğruluğu spin açışal momentumun

$$\begin{aligned}[S_{ab}, \gamma_c] &= -i(\gamma_a \eta_{bc} - \gamma_b \eta_{ac}), \\ [S_{ab}, S_{cd}] &= i(S_{ac} \eta_{bd} + S_{bd} \eta_{ac} - S_{ad} \eta_{bc} - S_{bc} \eta_{ad}),\end{aligned}$$

ile verilen Lie cebri (Itzykson ve Zuber 2006; Zee 2010; Peskin 2018) ve bunların kovaryant türevleri

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \gamma^a &= \nabla_\mu \gamma^a + \gamma^b \omega^a_{b\mu} = \gamma^b \omega^a_{b\mu}, \\ \nabla_\mu S^{ab} &= S^{ac} \omega^b_{c\mu} - S^{bc} \omega^a_{c\mu}, \\ \nabla_\mu \Gamma_\nu &= i \omega^c_{a\mu} \omega_{bc\nu} S^{ab},\end{aligned}$$

kullanılarak gösterilebilir. Spinörün kovaryant türevi kısmi türevine eşittir. Buna göre gravitasyon alanıyla ve elektromanyetik alanla minimal etkileşen spin-1/2 parçacığının Dirac denklemi (Tetrode 1928; Fock 1929)

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - i \frac{q}{\hbar} A_\mu \right) \Psi = \frac{M}{\hbar} \Psi$$

biçiminde yazılabilir. 2+1 boyutlu uzay zaman zeminlerinde Dirac tabanları Pauli tabanları

cinsinden

$$\gamma^\mu = \sigma^\mu = e_a^\mu \gamma^a,$$

$$\sigma^a = (i\sigma_3, \sigma_i) \quad (i = 1, 2),$$

şeklinde yazılabilmektedir (Sucu ve Ünal 2007).

3.1.3. Yüksek spinli parçacıkların denklemleri: Barut modeli

Kuantum spininin klasik hareket denklemlerinin nasıl olacağı Dirac teorisinin (Dirac 1928) başarıyla kurulmasından sonra 1984 yılına kadar çözülememiştir. Bu problemi çözebilmek için Barut ve Zanghi (1984) tarafından elektronun klasik kovaryant Hamilton-yen yoğunluğu

$$\mathcal{H} = \bar{z} \gamma^a z p_a$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $\bar{z} \equiv i\bar{\Psi}$ ve $z \equiv \Psi$ terimleri $\mathcal{M}_4 \times \mathcal{C}_4$ uzayındaki klasik spinör değişkenleridir. Sonra

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \eta^{cd} \left(\frac{\partial f}{\partial x^c} \frac{\partial g}{\partial p^d} - \frac{\partial g}{\partial x^c} \frac{\partial f}{\partial p^d} \right)$$

şeklindeki Poisson parantezleri yardımıyla $\dot{y} = \{y, \mathcal{H}\} + \partial_\tau y$ biçimindeki Hamilton hareket denklemleri şu şekilde incelenmiştir (Barut ve Zanghi 1984):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \not{p} z, \\ \dot{\bar{z}} &= -\bar{z} \not{p} \quad (d(\bar{z}z)/d\tau = 0, \quad \bar{z}z = 1), \\ \dot{x}_a &= \bar{z} \gamma^a z = v_a, \\ \dot{p}_a &= 0, \\ \dot{v}_a &= -4S_{ab} p^b \quad \left(S_{ab} = -\frac{1}{4} \bar{z} [\gamma_a, \gamma_b] z \right), \\ \dot{S}_{ab} &= -(v_a p_b - v_b p_a) = -\dot{L}_{ab} \quad (\dot{J}_{ab} = 0). \end{aligned}$$

Herhangi bir dış alan olmasa bile klasik olarak tanımlanan spinin bir ivmeye ($\dot{v}_a \neq 0$) sahip olduğu görülmektedir. Buna göre toplam açısal momentumun zamanla değişimi dış alan olmadığı için bir tork üretmese bile, klasik spin açısal momentum ile yörüngesel açısal momentumun zamanla değişimleri eşit büyüklükte ancak zıt yönlü tork üretmektedir. Bu durum $\dot{S}_{ab} = \{S_{ab}, \mathcal{H}\}$ biçimindeki klasik spinin Hamilton hareket denklemi üzerinden

incelenirse

$$\ddot{S}_{ab} - 4p^c p_c S_{ab} = -4P^c \Theta_{abc}$$

zoruna salınım yapan bir salıncı denkleminde benzer bir hareket denkleminde karşılaşılmaktadır. Burada $p^c p_c = -M^2$ ve $\Theta_{abc} = p_a S_{bc} + p_b S_{ca} + p_c S_{ab}$. $\dot{\Theta}_{abc} = 0$ olduğuna göre $\Theta_{abc} = 0$ şeklindeki en basit çözüm incelenebilir:

$$\begin{aligned}\ddot{S}_{ab} + 4M^2 S_{ab} &= 0, \\ S_{ab} &= C_{ab} e^{2iM\tau} + D_{ab} e^{-2iM\tau}.\end{aligned}$$

Klasik spin ve aynı şekilde yörüngesel açısal momentum τ invariant zamanında $\omega = 2Mc^2/\hbar$ frekansı ile titreşen bir basit harmonik salıncı çözümü vermektedir. Bu çözüm elektronun klasik zitterbewegung hareketi yaptığını göstermektedir (Barut ve Zanghi 1984).

Barut-Zanghi modeli bir taraftan klasik spini tanımlayıp spinin zitterbewegung hareketi yaptığını gösterirken diğer taraftan klasik zitterbewegung Hamiltonyeninin kuantizasyonu ile Dirac denklemini elde edebilmektedir:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\Psi(x^a; \tau) &= \partial_\tau \Psi(x^a; \tau), \\ \gamma^a p_a \Psi(x^a) &= -iM\Psi(x^a).\end{aligned}$$

Bu bakış açısına göre zitterbewegung hareketinin uyarılmış durumlarının hangi fiziksel sisteme karşılık geldiğini araştırmak doğaldır. Bunun için Barut (1990), klasik Hamiltonyen yoğunluğu ile τ invariant zamanında kovaryant Schrödinger kuantizasyonu yaparken spinörün klasik spin değişkenine bağlı olduğunu varsayarak onu

$$\Phi(\bar{z}, x^a; \tau) = \phi(x^a; \tau) + \frac{\bar{z}}{1!} \Psi(x^a; \tau) + \frac{\bar{z}^2}{2!} \Psi \otimes \Psi + \frac{\bar{z}^3}{3!} \Psi \otimes \Psi \otimes \Psi + \dots$$

biçiminde seriye açmıştır. Klasik spin değişkenleri $\bar{z}z = 1$ eşitliğini sağladığı için $[z, \bar{z}]_- = 1$ biçiminde kanonik kuantize edilmiştir. Buna göre $\mathcal{H} = \bar{z}\not{p}\frac{d}{dz}$ kanonik kuantize Hamiltonyen yoğunluğu ve seriye açılmış klasik spinör,

$$\mathcal{H}\Phi(\bar{z}, x^a; \tau) = \partial_\tau \Phi(\bar{z}, x^a; \tau)$$

biçimindeki kovaryant Schrödinger denkleminde kullanılarak zitterbewegung parçacıkla-

rının hareket denklemleri elde edilir. Taban durum Dirac denklemidir:

$$\bar{z}^1 : \quad \gamma^a p_a \Psi(x^a) = -iM\Psi(x^a).$$

Burada M , Dirac parçacığının kütesidir. İlk uyarılmış durum spin-1 denklemidir:

$$\bar{z}^2 : \quad \not{p}\Psi \otimes \Psi + \Psi \otimes \not{p}\Psi = -iM\Psi \otimes \Psi.$$

Burada M , spin-1 parçacığının durgun-kütle enerjisidir. Benzer şekilde zitterbewegung hareketinin ikinci uyarılmış durumu, $\bar{z}^3$ teriminin katsayısı, spin-3/2 parçacığının hareket denklemidir. Üçüncü uyarılmış durum spin-2 parçacığının hareket denklemidir ve diğer uyarılmış durumlar daha yüksek dereceden spinli parçacıkların hareket denklemlerini üretmektedir (Barut 1990).

3.2. Planck Ölçeği ve Minimum Ölçek

Evrenin başlangıcından günümüze kadar sayısal değerlerinin değişmediği varsayılan evrensel sabitler şunlardır (Hossenfelder 2013): $\hbar$ Planck sabiti, c ışığın boşluktaki hızı, G_N Newton sabiti, k_B Boltzmann sabiti, e elektriksel yük, $1/\alpha = 4\pi\epsilon_0\hbar c/e^2$ ince yapı sabiti ve dolayısıyla boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0 ve manyetik geçirgenliği μ_0 . Planck'ın düşüncesine göre evrensel sabitlerden herhangi bir fiziksel nicelik türetilebilir. Bu niceliklerin Tablo (3.1) ile verilen sayısal değerleri Planck ölçeğidir.

Atomaltı ölçek, Planck ölçeğinden oldukça uzaktır. Örneğin GeV mertebesinde rezonans genişliğine sahip bir atomaltı parçacığın yarıömrü atto saniyenin on milyonda

Tablo 3.1. Planck ölçeği (Hossenfelder 2013)

Fiziksel Nicelikler	Planck Sabitleri	Değer
Kütle	$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}$	$1.22 \times 10^{28} eV/c^2$
Zaman	$t_P = \frac{\hbar}{M_P c^2}$	$5.39 \times 10^{-44} s$
Açısal frekans	$\omega_P = \frac{1}{t_P}$	$1.85 \times 10^{43} rad.Hz$
Uzunluk	$l_P = \frac{\hbar}{M_P c}$	$1.62 \times 10^{-35} m$
Sıcaklık	$T_P = \frac{E_P}{k_B}$	$1.42 \times 10^{32} K$
Magneton	$\mu_P = \frac{e\hbar}{M_P}$	$4.85 \times 10^{-27} eV/T$
Manyetik alan şiddeti	$B_P = \frac{E_P}{\mu_P}$	$2.52 \times 10^{54} T$
Kuvvet	$F_P = \frac{E_P}{l_P} = ecB_P$	$1.21 \times 10^{44} N$
Elektrik alan şiddeti	$E_P = \frac{F_P}{e}$	$7.55 \times 10^{62} N/C$

biri mertebesindedir ve durgun-kütle enerjisi kabaca TeV mertebesindedir. Öte yandan $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ Lorentz çarpanının en yüksek değeri evrende oluşan ilk maddeden günümüze ulaşan fotonların kırmızı kayma çarpanı değeri $z \approx 1 + \gamma \sim 10^3$ mertebesindedir (Padmanabhan ve Finkbeiner 2005; Madhavacheril vd. 2014). Zaman-konum uzayını oluşturduğu düşünülen ölü fotonların zitterbewegung frekansı ile titreştiği varsayılırsa enerji ölçeği yine $2\gamma Mc^2 \sim \text{GeV}$ mertebesindedir. Bu nedenle Planck ölçeği bir şekilde test edilebilir bir ölçeğe, bir minimum ölçeğe yaklaştırılmalıdır. Böylece bir minimum ölçeğin noktanın kuantum elektrodinamiğine etkisinin incelenmesi sonucunda elde edilecek formülasyonlar deney veya gözlemsel verilerle test edilebilir.

3.2.1. Minimum ölçekte kesikli zaman yorumu ve entropi

Bir minimum ölçekte, kesikli zaman varsayımının genelleştirilmiş belirsizlik ilkesini türettiği Fadel ve Maggiore (2022) tarafından gösterilmiştir. Buna göre evrendeki en düzenli temel yapının sıfır entropiye sahip olmasına noktasal parçacık tanımının yol açtığı düşünülebilir. Bir minimum ölçek varsayımı altında, sonlu bir entropi ortaya çıkmaktadır. Zamanı sürekli üreten H_β Hamiltonyeni ve kesikli üreten H Hamiltonyeni olsun. Zamanın $\psi = e^{-i\mathcal{E}t/\hbar}$ öz fonksiyonu için Hamiltonyenlerin öz değerleri

$$H_\beta \psi = i\hbar \frac{d}{dt} \psi = \mathcal{E} \psi,$$

$$H \psi = i\hbar \Delta_t \psi = i \frac{\psi(t + i\sqrt{2\beta}\hbar) - \psi(T - i\sqrt{2\beta}\hbar)}{2i\sqrt{2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\mathcal{E}) \psi = E \psi,$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\beta = \beta_0/(M_P c^2)^2 = \beta_0/(k_B T_P)^2$ minimum ölçeği tanımlayan pozitif gerçel bir parametredir. Ayrıca kesikli zamanın entropiyle ilişkisini kurmak için Wick dönmesi yapılmıştır.

Test edilen zaman sürekli olduğu için üretici olan gerçek enerjiye minimum ölçeğin etkisi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{2\beta} E \approx E \left(1 - \frac{1}{3} \beta E^2 \right)$$

şeklinde veya tersten gidilirse

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh \sqrt{2\beta} \mathcal{E} \approx \mathcal{E} \left(1 + \frac{1}{3} \beta \mathcal{E}^2 \right)$$

biçiminde hesaplanabilir. Burada $\beta \mathcal{E}^2 \ll 1$ yaklaşıklığı yapılmıştır. Çünkü, herhangi bir elementer yapının enerjisi Planck enerjisine göre çok daha küçüktür. $\beta = 0$ için noktanın enerjisi elde edilir: $\mathcal{E} = E$.

Minimum ölçekte noktasal olmayan bir elementer yapının bölüşüm fonksiyonu, $\tilde{\beta} = \sqrt{2\beta} = \sqrt{2\beta_0/(k_B T_P)}$ tanımlaması ile birlikte

$$Z = e^{-\tilde{\beta}\mathcal{E}} = \left(\tilde{\beta}\epsilon + \sqrt{1 + \tilde{\beta}^2 \epsilon^2} \right)^{-1} \approx 1 - \tilde{\beta}\epsilon + \frac{1}{2}\tilde{\beta}^2 \epsilon^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade kullanılarak ortalama iç enerji $\mathcal{U} = -\partial_{\tilde{\beta}} \ln Z$ ve ısı sığası $\mathcal{C} = -\tilde{\beta}^2 \partial_{\tilde{\beta}}^2 \mathcal{U}$ sırasıyla şu şekilde hesaplanabilir:

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}^2 \epsilon^2}} \approx \epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\tilde{\beta}^2 \epsilon^2 \right), \quad \mathcal{C} = \frac{\tilde{\beta}^3 \epsilon^3}{(1 + \tilde{\beta}^2 \epsilon^2)^{3/2}} \approx \tilde{\beta}^3 \epsilon^3.$$

Bununla birlikte, serbest enerji $\mathcal{F} = -\tilde{\beta}^{-1} \ln Z$ ve entropi $\mathcal{S} = -\tilde{\beta}^2 \partial_{\tilde{\beta}}^2 \mathcal{F}$ şu şekilde hesaplanabilir:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\tilde{\beta}} \ln \left(\tilde{\beta}\epsilon + \sqrt{1 + \tilde{\beta}^2 \epsilon^2} \right) \approx \epsilon \left(1 - \frac{1}{6}\tilde{\beta}^2 \epsilon^2 \right) \equiv \mathcal{E},$$

$$\mathcal{S} = \tilde{\beta}(\mathcal{F} - \mathcal{U}) \approx \frac{1}{3}\tilde{\beta}^3 \epsilon^3.$$

Minimum ölçekte, zamanı sürekli üreten H_β Hamiltonyeninin öz değeri olan $\mathcal{E}$ gerçek enerjisinin ortalama iç enerjiye değil serbest enerjiye denk olduğu görülmektedir. Minimum ölçekte noktasal olmayan serbest bir yapının sonlu bir ısı sığası ve entropisi vardır. $\beta = 0$ için noktanın ortalama iç enerjisi ile serbest enerjisi birbirine eşittir: $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Ayrıca, ısı sığası ile entropisi sıfırdır: $\mathcal{C} = \mathcal{S} = 0$.

3.2.2. Minimum ölçekte grup hızı

Minimum ölçeğin grup hızına etkisi Fadel ve Maggiore (2022) tarafından incelenmiştir. Buna göre noktasal serbest parçacığın enerjisi

$$\epsilon = \sqrt{P^2 + M^2}$$

ile sürekli zamanın üretici olan H_β Hamiltonyeninin öz değeri arasında

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcsinh}(\beta\epsilon)$$

ilişkisi vardır. Grup hızını hesaplamak için Heisenberg hareket denklemleri kullanılabilir:

$$\dot{A} = i[\mathcal{E}, A] \quad (\partial_T A = 0).$$

Burada A , açıkça zamanın fonksiyonu olmayan herhangi bir operatördür. Boyutsuz konum zamanla değişimi momentum uzayında

$$\dot{Q}_i = \partial_i \mathcal{E} = \partial_\epsilon \mathcal{E} \partial_i \epsilon, \quad (\partial_i = \partial / \partial P_i)$$

biçiminde hesaplanırsa, grup hızı şu şekilde bulunur:

$$\dot{Q}_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \epsilon^2}} \frac{P_i}{\epsilon}.$$

Minimum ölçekte elementer yapılar için $\beta\epsilon \ll 1$ yaklaşımı yapılsa da kompozit sistemler için kolaylıkla $\beta\epsilon \gg 1$ olabilir. Bu durumda $V_g = \sqrt{(\dot{Q}_i)^2}$ grup hızının büyüklüğü sıfıra gitmektedir:

$$V_g = \sqrt{\frac{1 - M^2/\epsilon^2}{1 + \beta^2 \epsilon^2}} \approx \frac{1}{\beta\epsilon} \rightarrow 0 \quad (\beta\epsilon \rightarrow \infty).$$

Enerjinin Planck-ötesi olduğu durumda, sıfır hıza ulaşılması fiziksel olarak tutarsızdır. Bu sorunu çözebilmek için minimum ölçekte bile grup hızlarının, $\beta = 0$ durumundaki biçimiyle aynı kalması kısıtlaması getirilir. Bunun için konum operatörünün

$$Q_i = if\partial_i$$

biçiminde modifiye edilmesi gerekir. Burada $f = \sqrt{1 + \beta^2 \epsilon^2}$ deformasyon fonksiyonudur ve elementer yapılar için $\beta^2 M^2 \ll 1$ alınabilir. Bu durumda $f = \sqrt{1 + \beta^2 P^2} \approx 1 + \beta^2 P^2/2$ biçimindeki Kempf vd. (1995) tarafından ispatsız kabul edilen sonuca ulaşılır.

3.2.3. Minimum ölçekte Heisenberg belirsizlik ilkesi ve minimum uzunluk: Genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi

Minimum ölçekte kesikli zaman varsayımı ve standart grup hızı kısıtlaması, sonlu entropiye sahip noktasal olmayan bir parçacık tanımına yol açmıştır. Bununla birlikte konum operatörü deformasyona uğradığı için parçacık kuantizasyonu da

$$[Q_i, P_i] = if\delta_{ij}$$

biçiminde deforme olur. Buna bağlı olarak Heisenberg belirsizlik ilkesi

$$\Delta Q_i \Delta P_j \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [Q_i, P_j] \rangle \right| = \frac{1}{2} \langle f \rangle \delta_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\beta_0 \langle \epsilon^2 \rangle} \delta_{ij} \approx \frac{1}{2} (1 + \beta_0 \langle \epsilon^2 \rangle) \delta_{ij}$$

biçiminde modifiye olur. HUP'un bu şekilde modifiye olmuş hali genelleştirilmiş belirsizlik ilkesidir (GUP). Burada $\beta = \sqrt{2\beta_0}$ eşitliği Kempf vd. (1995) tarafından yapılan çalışma ile notasyon uyumu sağlamıştır. Ayrıca, deformasyon fonksiyonundaki beklenen değer hesaplanırken binom serisi ile öz fonksiyonların tamlık bağıntısından faydalanılmıştır.

GUP'un bir minimum uzunluk verip vermediğini incelemek için belirsizliklerde $(\Delta Q)^2 \sim \langle Q^2 \rangle$ yaklaşımı kullanılabilir. Kompozit sistemler için

$$Q \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + 2\beta_0 M^2}{P^2} + 2\beta_0}, \quad Q \equiv \frac{R_0}{l_P} \sim \sqrt{\frac{\beta_0}{2}} \quad (P \rightarrow \infty)$$

biçiminde bir minimum uzunluk elde edilmektedir. Ancak minimum ölçek parametresi için bir üst sınır getirilemez. Öte yandan elementer bir yapı için

$$Q \gtrsim \frac{1}{2P} (1 + \beta_0 P^2) \quad (\beta_0 \ll 1)$$

ifadesi analitik olarak incelenirse,

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{P_0} = 0 \quad \text{ve} \quad \left. \frac{d^2 Q}{dP^2} \right|_{P_0} > 0$$

ifadesinden $P_0 = 1/\sqrt{\beta_0}$ noktasında $Q \equiv R_0/l_P = \sqrt{\beta_0}$ minimumu elde edilebilmektedir. Buna göre minimum ölçek sabiti pozitif gerçel bir sayı olmak zorundadır ve sıfır olduğunda HUP tekrar elde edilir. Örneğin atto metre mertebesi bir minimum uzunluk olarak kabul edilirse,

$$R_0 \gtrsim \sqrt{\beta_0} l_P$$

eşitsizliğinden minimum ölçek sabiti en çok $\beta_0 \lesssim 10^{34}$ mertebesinde olabilir. Kabul edilen ölçek Planck ölçeğine yaklaştıkça en başta yapılan $\beta_0 \ll 1$ yaklaşımı geçersiz hale gelmeye başlar. Bu durumda GUP'un genel ifadesi kullanılmalıdır (Fadel ve Maggiore 2022).

4. BULGULAR

4.1. Yüksek Spinli Serbest Parçacıkların Kütle-Kabuk Bağlılıkları

Serbest Dirac denklemi

$$\gamma^a p_a \psi = -iM\psi$$

$$(i\sigma_3 p_0 + \sigma_i p_i) \psi = -iM\psi$$

spin açısal momentum $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ ile şu şekilde yazılabilir:

$$(-iS_z E + S_i p_i) |sm_s\rangle = -\frac{iM}{2} |sm_s\rangle.$$

$S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ dairesel spin operatörleri (Griffiths ve Schroeter 2018) kullanılırsa yukarıdaki denklem şu hale gelir:

$$\left(S_z E + \frac{i}{2} [S_+ p_- + S_- p_+] \right) |sm_s\rangle = \frac{M}{2} |sm_s\rangle.$$

Bu denklem s spinli bir parçacığın 2+1 boyutlu uzay-zaman zeminlerindeki $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ özdeğerleri üzerinden davranışını incelemek için kullanılabilir. Bunun için

$$S_z |sm_s\rangle = m_s |sm_s\rangle,$$

$$S^2 |sm_s\rangle = s(s+1) |sm_s\rangle,$$

$$S_{\pm} |sm_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |sm_s \pm 1\rangle,$$

ile verilen spin operatörlerinin öz değerleri yeterlidir.

$s = 1/2$ için $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ durumlarının denklemleri

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{2} - \frac{M}{2} \right) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{ip_+}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{E}{2} - \frac{M}{2} \right) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{ip_-}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Durgun çerçevede $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ durumunun enerjisi $E = M$ ve $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M$ 'dir. Lineer denklem sisteminin katsayılar determinantı parçacığın kütle-kabuk bağıntısını verir:

$$E^2 = p^2 + M^2.$$

Burada $p_- p_+ = p_+ p_- = p^2$ olur.

$s = 1$ için $m_s = -1, 0, 1$ durumlarının denklemleri

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{2} - \frac{M}{2}\right) |11\rangle + \frac{i\sqrt{2}p_+}{2} |10\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{M}{2}\right) |10\rangle + \frac{i\sqrt{2}p_-}{2} |11\rangle + \frac{i\sqrt{2}p_+}{2} |1-1\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{E}{2} - \frac{M}{2}\right) |1-1\rangle + \frac{i\sqrt{2}p_-}{2} |10\rangle &= 0, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Durgun çerçevede $|11\rangle$ durumunun enerjisi $E = M/2$, $|10\rangle$ durumunun enerjisi $E = 0$ ve $|1-1\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M/2$ 'dir. Lineer denklem sisteminin katsayılar determinantı parçacığın kütle-kabuk bağıntısını verir:

$$E^2 = p^2 + M^2/4 \quad (M \neq 0).$$

Burada M , spin-1 parçacığının kütlesidir ve açıkça $M_{\text{bağ.}}$ enerjisiyle sıkı bağlı iki Dirac parçacığından oluşmaktadır: $M_1 = 2M_D + M_{\text{bağ.}}$.

$s = 3/2$ için $m_s = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ durumlarının denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3E}{2} - \frac{M}{2}\right) \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{3}p_+}{2} \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle &= 0, \\ \left(\frac{E}{2} - \frac{M}{2}\right) \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{3}p_-}{2} \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_+}{2} \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{E}{2} - \frac{M}{2}\right) \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_-}{2} \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{3}p_+}{2} \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{3E}{2} - \frac{M}{2}\right) \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right\rangle + \frac{i\sqrt{3}p_-}{2} \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Durgun çerçevede $\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$ durumunun enerjisi $E = M/3$, $\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$ durumunun enerjisi $E = M$, $\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M$ ve $\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M/3$ 'dir. Lineer denklem sisteminin katsayılar determinantı parçacığın kütle-kabuk bağıntısını verir:

$$E^2 = p^2 + M^2, \quad E^2 = p^2 + \frac{M^2}{9}.$$

Burada M , spin-3/2 parçacığının kütlesidir ve spin-1 kadar sıkı bağlı olmayan üç Dirac parçacığından oluşmaktadır: $M_{3/2} = 3M_D + M_{\text{bağ.}}$. Çünkü, aynı zamanda spin-1/2 parçacığının kütle-kabuk bağıntısını da içermektedir. Şiddetli bir dış alanda bu sistemin bir spin kuantum durumlarında bozunma beklenebilir.

$s = 2$ için $m_s = -2, -1, 0, 1, 2$ durumlarının denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \left(2E - \frac{M}{2}\right) |22\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_+}{2} |21\rangle &= 0, \\ \left(E - \frac{M}{2}\right) |21\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_-}{2} |22\rangle + \frac{i\sqrt{6}p_+}{2} |20\rangle &= 0, \\ \left(-\frac{M}{2}\right) |20\rangle + \frac{i\sqrt{6}p_-}{2} |21\rangle + \frac{i\sqrt{6}p_+}{2} |2-1\rangle &= 0, \\ \left(-E - \frac{M}{2}\right) |2-1\rangle + \frac{i\sqrt{6}p_-}{2} |20\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_+}{2} |2-2\rangle &= 0, \\ \left(-2E - \frac{M}{2}\right) |2-2\rangle + \frac{i\sqrt{4}p_-}{2} |2-1\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Durgun çerçevede $|22\rangle$ durumunun enerjisi $E = M/4$, $|21\rangle$ durumunun enerjisi $E = M/2$, $|20\rangle$ durumunun enerjisi $E = 0$, $|2-1\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M/2$ ve $|2-2\rangle$ durumunun enerjisi $E = -M/4$ 'tür. Lineer denklem sisteminin katsayılar determinantı parçacığın kütle-kabuk bağıntısını verir:

$$E^2 = p^2 + \frac{M^2}{4}, \quad E^2 = p^2 + \frac{M^2}{16}, \quad (M \neq 0).$$

Burada M , spin-2 parçacığının kütlesidir ve spin-1 kadar sıkı bağlı olmayan dört Dirac parçacığından $M_2 = 4M_D + M_{\text{bağ}}$, veya iki sıkı bağlı spin-1 parçacığından oluşmaktadır: $M_2 = 2M_1 + M_{\text{bağ}}$. Dolayısıyla, $s = 3/2$ parçacığına benzer şekilde $s = 2$ parçacığında bir dış alana maruz bırakıldığında spin kuantum durumlarında bozunma beklenebilir.

4.2. Kuantum Gravite Altında Spinsiz ve Spinli Osilatörler

4.2.1. Landau osilatörü

Sabit manyetik alanda yüklü bir parçacık bir osilatördür ve kuantize edildiğinde enerji seviyeleri verir. Spinsiz ve spinli parçacıkların nasıl kuantumlandığını görebilmek için öncelikle geometrik nicelikler hesaplanmalıdır. 2+1 boyutlu statik ve simetrik uzay-zaman zemini

$$-ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$

olarak ele alınırsa metrik ve metriğin tersi şunlardır:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, 1, r^2), \quad \sqrt{-g} = r, \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, 1, 1/r^2). \end{aligned}$$

Buna göre afin bağlantıları

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r},$$

şeklinde ve triad ile tersi

$$e_{a\mu} = \text{diag}(-1, 1, r),$$

$$e^{a\mu} = \text{diag}(-1, 1, 1/r),$$

şeklinde hesaplanabilir. Bunları kullanarak Ricci dönme katsayısı

$$\omega_{212} = 1$$

biçiminde elde edilir. Eğri uzay-zaman zeminlerindeki Dirac tabanları ise

$$\sigma^0 = 2iS_z, \quad \sigma^1 = 2S_x, \quad \sigma^2 = \frac{2}{r}S_y,$$

şeklinde yazılabilir. Burada yüksek spinli temel parçacıkların da enerji seviyeleri inceleneceği için $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ spin açısal momentumu kullanılmıştır. Bununla birlikte 2+1 boyutlu uzay-zamanda $S^{ab} = \frac{1}{4i}[\gamma^a, \gamma^b]$ spin açısal momentum tensör operatörünün bileşenleri

$$S^{0i} = i\varepsilon_{3ij}S_j, \quad S^{ij} = \varepsilon_{ijk}S_k,$$

şeklinde boost sektöre ve uzaysal sektöre ayrıştırılabilir. Buna göre $\Gamma_{\underline{\mu}} = \frac{i}{2}\omega_{ab\underline{\mu}}S^{ab}$ spin bağlantı katsayısı

$$\Gamma_{\underline{2}} = -iS_z$$

şeklinde hesaplanır. Spin bağlantı skaleri ise şu şekilde elde edilir:

$$\Gamma = \gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{2i}{r}S_y S_z.$$

Sabit manyetik alanı (B) üreten düz uzay-zamandaki ayar potansiyeli $A_a = (0, 0, Br/2)$ eğri uzay-zamanda

$$A_\mu = (0, 0, Br^2/2),$$

$$A^\mu = (0, 0, B/2),$$

$$A = \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu = S_y Br,$$

biçiminde yazılabilir.

4.2.1.1. Landau osilatörü potansiyelinde spinsiz parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

Elektromanyetik alanla etkileşen skaler bir parçacığın eğri uzay-zamanda Klein-Gordon denklemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu) - 2i A^\mu \partial_\mu - q^2 A^\mu A_\mu - M^2 \right\} \Psi = 0, \quad (\nabla_\mu A^\mu = 0)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem $\Psi = e^{-iEt} \psi$ kararlı durum dalga fonksiyonu ve B sabit manyetik alanı için

$$\left\{ E^2 + \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\phi^2}{r^2} \mp 2iM|\omega| \partial_\phi - M^2 |\omega|^2 r^2 \right\} \psi = M^2 \psi$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\omega = qB/(2M)$. Ayrıca $\mp$ işaretlemesinde eksi işareti $q = +e$ durumunu ve artı işareti $q = -e$ durumunu temsil etmektedir. Denklemden $Q = r\sqrt{M|\omega|}$ değişken değişimi kullanılırsa

$$\left\{ E^2 - M|\omega| \left[Q^2 - \partial_Q^2 - \frac{\partial_Q}{Q} - \frac{\partial_\phi^2}{Q^2} \pm 2i\partial_\phi \right] \right\} \psi = M^2 \psi$$

ve dairesel kuantum sayı operatörleri kullanılırsa

$$\left\{ E^2 - M|\omega| \begin{pmatrix} 4N_l + 2 \\ 4N_r + 2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} n_l \\ n_r \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} n_l \\ n_r \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada ket içinde bölme işlemi yoktur. Sol ve sağ dairesel durumların ketleri birlikte yazılmıştır:

$$\begin{pmatrix} n_l \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |n_l\rangle \\ |n_r\rangle \end{pmatrix}.$$

Denklemlerde üst satırdaki operatörler sol dairesel ket üzerinde ve alt satırdaki operatörler sağ dairesel ket üzerinde işlem yaparlar. Buna göre enerji özdeğer denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad E_l^2 &= M^2 + 4M|\omega|(n_l + 1/2), \\ q = -e : \quad E_r^2 &= M^2 + 4M|\omega|(n_r + 1/2). \end{aligned}$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3, \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= M^2 + 4M|\omega|(n_l + 1/2), \\ q = -e : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= M^2 + 4M|\omega|(n_r + 1/2). \end{aligned}$$

4.2.1.2. Landau osilatörü potansiyelinde spinli parçacıkların denklemleri

Dirac denklemi

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma - iqA)\Psi = M\Psi$$

Landau osilatörü potansiyelinde

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + S_x \partial_r + S_y \left(\frac{\partial_\phi - iS_z}{r} \mp iM|\omega|r \right) \right\} \Psi = 0.$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mp$ işaretlemesinde eksi işareti $q = +e$ durumunu ve artı işareti $q = -e$ durumunu temsil etmektedir. Denklemi cebirsel olarak çözmek için $S_\pm = S_x \pm iS_y$ dairesel spin operatörleri kullanılıp,

$$\begin{aligned} \left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \frac{1}{2} S_+ \left(\partial_r + \frac{-i\partial_\phi - S_z}{r} \mp M|\omega|r \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} S_- \left(\partial_r + \frac{i\partial_\phi + S_z}{r} \mp M|\omega|r \right) \right\} \Psi = 0, \end{aligned}$$

kartezyen koordinatlara iç uzayda $U = I + \frac{i}{2}\omega_{ab}S^{ab} = I + i\theta S_z$ dönmesi ve dış uzayda $\Lambda_{ab} = \eta_{ab} + \omega_{ab}$ dönmesi yapılarak geçilebilir. Burada

$$[S_\pm, S_z] = \mp S_\pm, \quad [S^2, S_z] = 0$$

cebirleri ile iç uzaydaki dönüşüm

$$\bar{\Psi}(r, \phi) S_\pm \Psi(r, \phi) = \bar{\Psi}(x, y) U^{-1} S_\pm U \Psi(x, y) = \bar{\Psi} (S_\pm + i\phi[S_\pm, S_z]) \Psi = \bar{\Psi} e^{\mp i\phi} S_\pm \Psi$$

ve dış uzaydaki dönüşümler

$$e^{\mp i\phi} \left(\partial_r \mp \frac{i\partial_\phi}{r} \right) = \partial_{\mp}, \quad e^{\mp i\phi} r = X_{\mp}$$

ile birlikte kullanılırsa denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \frac{1}{2} S_+ (\partial_- \mp M|\omega|X_-) + \frac{1}{2} S_- (\partial_+ \pm M|\omega|X_+) \right\} \Psi = 0.$$

$Q = r\sqrt{M|\omega|}$ değişken değişimi yapıldıktan sonra dairesel yaratma-yoketme operatörlerinin (Cohen-Tannoudji vd. 1986)

$$\begin{aligned} Q_+ &= A_l + A_r^\dagger, & \partial_+ &= A_l - A_r^\dagger, \\ Q_- &= A_r + A_l^\dagger, & \partial_- &= A_r - A_l^\dagger, \end{aligned}$$

tanımları kullanılırsa denklem şu hale gelir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \sqrt{M|\omega|} \left[S_+ \begin{pmatrix} -A_l^\dagger \\ +A_r \end{pmatrix} + S_- \begin{pmatrix} +A_r^\dagger \\ +A_l \end{pmatrix} \right] \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklem s spinli parçacığın $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ özdeğerleri için

$$\Psi = |sm_s\rangle \otimes \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle$$

spinöründe sol dairesel kuantum sayısı

$$n_l = (n_l, n_l + 1, \dots, n_l + 2s)$$

aralığında ve sağ dairesel kuantum sayısı

$$n_r = (n_r + 2s, \dots, n_r + 1, n_r)$$

aralığında olmak üzere yaratma-yoketme operatörlerinin özdeğerleri

$$\begin{aligned} A_{l,r}^\dagger |n_{l,r}\rangle &= \sqrt{n_{l,r} + 1} A_{l,r}^\dagger |n_{l,r} + 1\rangle, \\ A_{l,r} |n_{l,r}\rangle &= \sqrt{n_{l,r}} A_{l,r} |n_{l,r} - 1\rangle, \end{aligned}$$

ile spin operatörünün

$$S^2 |sm_s\rangle = s(s+1) |sm_s\rangle, \quad S_z^2 |sm_s\rangle = m_s |sm_s\rangle, \\ S_{\pm} |sm_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |sm_s \pm 1\rangle,$$

özdeğerleri ile çözülebilir. Dairesel kuantum sayı operatörlerinin özfonksiyonu $|n_{lr}\rangle = C_n(A_{l,r}^\dagger)^{n_{l,r}} e^{-Q^2/2}$ olduğundan $n_{l,r} \geq 0$ 'dır ve baş kuantum sayısı ile yörüngesel açısıl momentum kuantum sayısı cinsinden şu şekildedir (Cohen-Tannoudji vd. 1986):

$$n_r = \frac{1}{2}(n+m), \\ n_l = \frac{1}{2}(n-m).$$

Böylece baş kuantum sayısı operatörü $N = N_r + N_l$ ve yörüngesel açısıl momentum operatörü $L_z = -i\partial_\phi = N_r - N_l$ 'dir. Ancak, Landau osilatörü potansiyelinde sol dairesel ile sağ dairesel durumlar çiftlenmemiştir. Çiftlenme durumunun gerçekleşmesi için topolojik osilatör potansiyeli veya mekanik osilatör potansiyeli gibi başka bir dış alana ihtiyaç vardır.

4.2.1.3. Landau osilatörü potansiyelinde $s=1/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 1/2$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [E - M] \left| \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r} \right\rangle + \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l}{n_r + 1} \right\rangle = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [-E - M] \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l}{n_r + 1} \right\rangle + \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r} \right\rangle = 0.$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi oluşturulup determinantı hesaplanırsa enerji özdeğer denklemleri şunlardır:

$$q = +e : \quad E_l^2 = M^2 + 4|\omega|M(n_l + 1), \\ q = -e : \quad E_r^2 = M^2 + 4|\omega|M(n_r + 1). \quad (4.1)$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3, \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= M^2 + 4|\omega|M(n_l + 1), \\ q = -e : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= M^2 + 4|\omega|M(n_r + 1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2.1.4. Landau osilatörü potansiyelinde s=1 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 1$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[E - \frac{M}{2} \right] |11 \frac{n_l + 2}{n_r} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[-\frac{M}{2} \right] |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} |11 \frac{n_l + 2}{n_r} \rangle \\ + \sqrt{2} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} |1 - 1 \frac{n_l}{n_r + 2} \rangle &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[-E - \frac{M}{2} \right] |1 - 1 \frac{n_l}{n_r + 2} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

Denklem sisteminin katsayılar determinantı enerji özdeğer denklemlerini şu şekilde verir:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad E_l^2 &= \frac{M^2}{4} + 4E_l|\omega| + 4|\omega|M(n_l + 3/2), \\ q = -e : \quad E_r^2 &= \frac{M^2}{4} - 4E_r|\omega| + 4|\omega|M(n_r + 3/2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3, \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= \frac{M^2}{4} + 4|\omega|M(n_l + 3/2), \\ q = -e : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= \frac{M^2}{4} + 4|\omega|M(n_r + 3/2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2.1.5. Landau osilatörü potansiyelinde $s=3/2$ spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 3/2$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [3E - M] \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{n_l + 3}{n_r} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 3} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [E - M] \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 3} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{n_l + 3}{n_r} \right\rangle \\ + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [-E - M] \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle \\ + \sqrt{3} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 3} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{n_l}{n_r + 3} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{M|\omega|}} [-3E - M] \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{n_l}{n_r + 3} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 3} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle = 0$$

Yine bu denklem sisteminin katsayılar determinantı hesaplanırsa enerji özdeğer denklemi bu kez dördüncü dereceden polinom olarak bulunur:

$$E^4 + a_3 E^3 + a_2 E^2 + a_1 E + a_0 = 0. \quad (4.5)$$

Burada katsayılar şunlardır:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad a_0 &= \frac{M^4}{9} + \frac{40}{9} M^3 |\omega| (n_l + 2) + 16 M^2 |\omega|^2 [1 + (n_l + 2)^2], \\ a_1 &= 32 M^2 |\omega| / 3, \\ a_2 &= -8 M |\omega| (n_l + 2) - 10 M^2 / 9 \\ a_3 &= 0, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 q = -e : \quad a_0 &= \frac{M^4}{9} + \frac{40}{9}M^3|\omega|(n_r + 2) + 16M^2|\omega|^2 [1 + (n_r + 2)^2], \\
 a_1 &= -32M^2|\omega|/3, \\
 a_2 &= -8M|\omega|(n_r + 2) - 10M^2/9, \\
 a_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre altıncı dereceden modifiye enerji özdeğer denklemi şu şekildedir:

$$\varepsilon^4 + 4\beta\varepsilon^6 + a_3(\varepsilon^3 + 3\beta\varepsilon^5) + a_2(\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^4) + a_1(\varepsilon + \beta\varepsilon^3) + a_0 = 0. \quad (4.6)$$

4.2.1.6. Landau osilatörü potansiyelinde s=2 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 2$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[2E - \frac{M}{2} \right] |22 \frac{n_l + 4}{n_r} \rangle + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 4} \\ -\sqrt{n_l + 1} \end{pmatrix} |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1} \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[E - \frac{M}{2} \right] |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1} \rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 4} \\ +\sqrt{n_l + 1} \end{pmatrix} |22 \frac{n_l + 4}{n_r} \rangle \\
 + \sqrt{6} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 3} \\ -\sqrt{n_l + 2} \end{pmatrix} |20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[-\frac{M}{2} \right] |20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 3} \\ +\sqrt{n_l + 2} \end{pmatrix} |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1} \rangle \\
 + \sqrt{6} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_l + 3} \end{pmatrix} |2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[-E - \frac{M}{2} \right] \left| 2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \right\rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_l + 3} \end{pmatrix} \left| 20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \right\rangle + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_l + 4} \end{pmatrix} \left| 2 - 2 \frac{n_l}{n_r + 4} \right\rangle = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{M|\omega|}} \left[-2E - \frac{M}{2} \right] \left| 2 - 2 \frac{n_l}{n_r + 4} \right\rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_l + 4} \end{pmatrix} \left| 2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \right\rangle = 0.$$

Lineer denklem sisteminin katsayılar determinanı hesaplanarak dördüncü dereceden enerji özdeğer denklemi elde edilir:

$$E^4 + a_3 E^3 + a_2 E^2 + a_1 E + a_0 = 0. \quad (4.7)$$

Burada katsayılar şunlardır:

$$\begin{aligned} q = +e : \quad a_0 &= \frac{M^4}{64} + \frac{5}{4} M^3 |\omega| (n_l + 5/2) + M^2 |\omega|^2 \left[\frac{31}{32} + (n_l + 5/2)^2 \right], \\ a_1 &= 48M |\omega|^2 (n_l + 5/2) + 21M^2 |\omega|/4, \\ a_2 &= -8M |\omega| (n_l + 5/2) - 5M^2/16, \\ a_3 &= -12|\omega|, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q = -e : \quad a_0 &= \frac{M^4}{64} + \frac{5}{4} M^3 |\omega| (n_r + 5/2) + M^2 |\omega|^2 \left[\frac{31}{32} + (n_r + 5/2)^2 \right], \\ a_1 &= -48M |\omega|^2 (n_r + 5/2) - 21M^2 |\omega|/4, \\ a_2 &= -8M |\omega| (n_r + 5/2) - 5M^2/16, \\ a_3 &= 12|\omega|. \end{aligned}$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre altıncı dereceden modifiye enerji özdeğer denklemi şu şekildedir:

$$\varepsilon^4 + 4\beta\varepsilon^6 + a_3(\varepsilon^3 + 3\beta\varepsilon^5) + a_2(\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^4) + a_1(\varepsilon + \beta\varepsilon^3) + a_0 = 0. \quad (4.8)$$

4.2.2. Mekanik osilatör

İzotropik $\omega > 0$ frekanslı iki boyutlu mekanik osilatörün non-relativistik Hamiltoniyeni

$$2MH = p^2 + M^2\omega^2 r^2$$

kuantum sayı operatörünü inşa etme yöntemi kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$2M(H + \omega/2) = \delta_{ij}(p_i - iM\omega x_i)(p_j + iM\omega x_j),$$

ve $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ kanonik kuantizasyon ile momentumun $p_i = -i\partial_i$ operatör temsili, nabla operatörünün

$$\partial_i \rightarrow \partial_i \pm M\omega x_i$$

biçiminde yazılmasına izin verir. Spinsiz ve spinli kuantum parçacıklarının mekanik osilatör potansiyelinde nasıl kuantumlandığı statik ve simetrik 2 + 1 boyutlu uzay-zaman zeminlerinde incelenebilir.

4.2.2.1. Mekanik osilatör potansiyelinde spinsiz parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

Mekanik osilatör potansiyelindeki skaler bir parçacığın eğri uzay-zamanda Klein-Gordon denklemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu) - M^2 \right\} \Psi = 0,$$

$$\left\{ g^{00} \partial_t^2 + \frac{g^{11}}{r} (\partial_r + M\omega r) [r(\partial_r - M\omega r)] + g^{22} \partial_\phi^2 - M^2 \right\} \Psi = 0,$$

$\Psi = e^{-iEt} \psi$ kararlı durum dalga fonksiyonu için şudur:

$$\left\{ E^2 + \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\phi^2}{r^2} + 2M\omega - M^2|\omega|^2 r^2 \right\} \psi = M^2 \psi.$$

Denklemi cebirsel olarak çözmek için $Q = r\sqrt{M\omega}$ değişimi kullanılır ve $L_z = -i\partial_\phi$ yörüngesel açısal momentumu eklenip çıkarılabilir:

$$\left\{ E^2 - M\omega \left[Q^2 - \partial_Q^2 - \frac{\partial_Q}{Q} - \frac{\partial_\phi^2}{Q^2} \pm 2i\partial_\phi - 2 \right] \right\} \psi = M^2 \psi.$$

Burada $\pm$ işaretlerinde artı işaret sağ dairesel ve eksi işaret sol dairesel kuantum sayı operatörü tanımlanmasına izin verir:

$$\left\{ E^2 - M\omega \left(\frac{4N_l + 2 + 2L_z - 2}{4N_r + 2 - 2L_z - 2} \right) \right\} \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle = M^2 \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle,$$

$$\left\{ E^2 - 4M\omega \left(\frac{N_l + L_z/2}{N_r - L_z/2} \right) \right\} \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle = M^2 \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle.$$

Baş kuantum sayı operatörü ve açısal momentum operatörü cinsinden sol dairesel sayı operatörünün $N_l = (N - L_z)/2$ ve sağ dairesel sayı operatörünün $N_r = (N + L_z)/2$ tanımlarıyla birlikte denklem şu hale gelir:

$$\{E^2 - 2M\omega N\} |nm\rangle = M^2 |nm\rangle.$$

Enerji özdeğer denklemi şu şekildedir:

$$E^2 = M^2 + 2M\omega n.$$

Ancak, osilatörün taban durum enerjisi sıfırdır. Bunun nedeni mekanik osilatörün momentumu değiştirilirken non-relativistik Hamiltonyeni de $2M(H_{nr} + \omega/2)$ biçiminde değişmiş olmasıdır. Dolayısıyla E^2 ifadesi $E^2 + 2M\omega$ 'dır ve enerji özdeğer denklemi şudur:

$$E^2 = M^2 + 2M\omega(n + 1),$$

$$E^+ - M = E_{nr} = \omega(n + 1).$$

Topolojik osilatör ve Landau osilatörünün aksine mekanik osilatör potansiyelindeki spinsiz parçacık sadece sağ dairesel veya sadece sol dairesel durumlardan oluşan tek kuantum fazına sahip değildir. Mekanik osilatörde her iki faz vardır:

$$E^2 = M^2 + 2M\omega(n_l + 1/2 + n_r + 1/2),$$

ve izotropik olduğu için enerjide sağ ve sol faz arasında asimetri yoktur.

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemi şudur:

$$\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^4 = M^2 + 2M\omega(n+1).$$

4.2.2.2. Mekanik osilatör potansiyelinde spinli parçacıkların denklemleri

Mekanik osilatör potansiyeli nabla operatöründe

$$\partial_i \rightarrow \partial_i \pm M\omega x_i = \partial_i + M\omega x_i \beta$$

biçiminde iki özdeğerli (Moshinsky ve Szczepaniak 1989) olduğu için β spin-1/2 dönme grubunun elemanıdır. β terimi S_z ile ortak özdeğerleri ve özvektörleri olan tabandır. Dolayısıyla dairesel spin operatörüyle komütatörü şudur: $[S_{\pm}, \beta] = \mp S_{\pm}$. Buna göre Dirac denklemi (Dirac 1928; Fock 1929)

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma)\Psi = M\Psi$$

mekanik osilatör potansiyelinde

$$(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i (\partial_i + M\omega x_i \beta) + \Gamma)\Psi = M\Psi$$

açıkça şu şekildedir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + S_x (\partial_r + M\omega r \beta) + S_y \left(\frac{\partial_\phi - i S_z}{r} \right) \right\} \Psi = 0.$$

Denklemi cebirsel olarak çözmek için $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$ dairesel spin operatörleri (Griffiths ve Schroeter 2018) kullanılıp,

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \frac{1}{2} S_+ \left(\partial_r - M\omega r + \frac{-i\partial_\phi - S_z}{r} \right) + \frac{1}{2} S_- \left(\partial_r + M\omega r + \frac{i\partial_\phi + S_z}{r} \right) \right\} \Psi = 0,$$

kartezyen koordinatlara iç uzayda $U = I + \frac{i}{2} \omega_{ab} S^{ab} = I + i\theta S_z$ dönmesi ve dış uzayda $\Lambda_{ab} = \eta_{ab} + \omega_{ab}$ dönmesi yapılarak geçilebilir. Burada

$$[S_{\pm}, S_z] = \mp S_{\pm}, \quad [S^2, S_z] = 0$$

cebirleri ile iç uzaydaki dönüşüm

$$\bar{\Psi}(r, \phi) S_{\pm} \Psi(r, \phi) = \bar{\Psi}(x, y) U^{-1} S_{\pm} U \Psi(x, y) = \bar{\Psi} (S_{\pm} + i\phi[S_{\pm}, S_z]) \Psi = \bar{\Psi} e^{\mp i\phi} S_{\pm} \Psi$$

ve dış uzaydaki dönüşümler

$$e^{\mp i\phi} \left(\partial_r \mp \frac{i\partial_{\phi}}{r} \right) = \partial_{\mp}, \quad e^{\mp i\phi} r = X_{\mp}$$

ile birlikte denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \frac{1}{2} S_+ (\partial_- - M\omega X_-) + \frac{1}{2} S_- (\partial_+ + M\omega X_+) \right\} \Psi = 0.$$

$Q = r\sqrt{M\omega}$ değişken değişimi yapıldıktan sonra dairesel yaratma-yoketme operatörlerinin (Cohen-Tannoudji vd. 1986)

$$\begin{aligned} Q_+ &= A_l + A_r^{\dagger}, & \partial_+ &= A_l - A_r^{\dagger}, \\ Q_- &= A_r + A_l^{\dagger}, & \partial_- &= A_r - A_l^{\dagger}, \end{aligned}$$

tanımları kullanılırsa denklem şu hale gelir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} + \sqrt{M\omega} [S_+ (-A_l^{\dagger}) + S_- A_l] \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklem pozitif yüklü spinli parçacığın sabit manyetik alandaki hareket denklemiyle birebir aynıdır ve bu nedenle aynı modifiye özdeğer denklemine sahiptir. Dolayısıyla mekanik osilatör ile etkileşen spinsiz parçacığın aksine, spinli parçacıklar sol dairesel kuantumlanırlar. Sağ ve sol fazların çiftlenmesi için başka bir dış alana daha ihtiyaç vardır.

4.2.3. Topolojik kütleli gravitasyonel osilatör: Nutku osilatörü

Nutku (1993) tarafından, kozmolojik sabit (Λ) içeren topolojik kütleli (μ) gravitasyonun alan denklemlerinin (DJT) (Deser vd. 1982) $\mu = \pm 3\sqrt{-3\Lambda}$ kritik değerinde yalıtılmamış dönen vakum çözümü verdiği gösterilmiştir:

$$-ds^2 = -(dt - \omega r^2 d\theta)^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (4.9)$$

Burada $\omega = \mu/3$ olarak tanımlanmıştır. Aynı uzay-zaman zemini Gürses (1994) tarafından mükemmel akışkan madde alanının varlığında incelenmiştir.

(4.9) uzay-zaman zemininde hareket eden skaler veya spinli parçacıklarının enerjilerinin nasıl kuantumlandığını incelemek için öncelikle gerekli olan geometrik nicelikler hesaplanmalıdır. Metrik ve metriğin tersi şunlardır:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2 - \omega^2 r^4), \quad g_{02} = \omega r^2, \quad \sqrt{-g} = r, \\ g^{\mu\nu} = \text{diag}(\omega^2 r^2 - 1, 1, 1/r^2) \quad g^{02} = \omega.$$

Afin bağlantıları şunlardır:

$$\Gamma_{01}^0 = \omega^2 r, \quad \Gamma_{12}^1 = -\omega^3 r^3, \\ \Gamma_{02}^1 = -\omega r, \quad \Gamma_{22}^1 = 2\omega^2 r^3 - r, \\ \Gamma_{01}^2 = \frac{\omega}{r}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} - \omega^2 r.$$

Triad ve tersi şunlardır:

$$e_{a\mu} = \text{diag}(-1, 1, r), \quad e_{02} = \omega r^2, \\ e^{a\mu} = \text{diag}(-1, 1, 1/r), \quad e^{20} = \omega r.$$

Ricci dönme katsayıları şunlardır:

$$\omega_{210} = \omega, \quad \omega_{201} = \omega, \quad \omega_{012} = \omega r, \quad \omega_{212} = 1 - \omega^2 r^2.$$

Eğri uzay-zamanda Dirac tabanları şunlardır:

$$\sigma^0 = 2iS_z + 2\omega r S_y, \quad \sigma^1 = 2S_x, \quad \sigma^2 = \frac{2}{r} S_y.$$

Burada yüksek spinli temel parçacıklara yönelik $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ spin açısal momentumu kullanılmıştır. Bununla birlikte 2+1 boyutlu uzay-zaman zemininde $S^{ab} = \frac{1}{4i}[\gamma^a, \gamma^b]$ spin açısal momentum tensör operatörünün bileşenleri şu şekildedir:

$$S^{0i} = i\varepsilon_{3ij}S_j, \quad S^{ij} = \varepsilon_{ijk}S_k$$

Buna göre spin bağlantı katsayıları $\Gamma_{\underline{\mu}} = \frac{i}{2}\omega_{ab\underline{\mu}}S^{ab}$ şunlardır:

$$\Gamma_{\underline{0}} = -i\omega S_z, \\ \Gamma_{\underline{1}} = -\omega S_x, \\ \Gamma_{\underline{2}} = -\omega r S_y - i(1 - \omega^2 r^2)S_z.$$

Spin bağlantı skaleri şudur:

$$\Gamma = \gamma^\mu \Gamma_\mu = -2\omega(S^2 - 2S_z^2) - \frac{2i}{r} S_y S_z.$$

4.2.3.1. Nutku osilatör potansiyelinde spinsiz parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

Klein-Gordon denklemi

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu) \Psi = M^2 \Psi$$

$\Psi = e^{-iEt} \psi$ kararlı durum dalga fonksiyonu için topolojik osilatör potansiyelinde şu şekildedir:

$$\left\{ E^2 + \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\phi^2}{r^2} \mp 2iE|\omega| \partial_\phi - E^2 |\omega|^2 r^2 \right\} \psi = M^2 \psi.$$

Burada $\mp$ işaretlemesinde eksi işareti $\omega > 0$ durumunu ve artı işareti $\omega < 0$ durumunu temsil etmektedir. Denklemde $Q = r \sqrt{E|\omega|}$ değişimi kullanılırsa

$$\left\{ E^2 - E|\omega| \left[Q^2 - \partial_Q^2 - \frac{\partial_Q}{Q} - \frac{\partial_\phi^2}{Q^2} \pm 2i\partial_\phi \right] \right\} \psi = M^2 \psi$$

ve dairesel kuantum sayı operatörleri kullanılırsa denklem şu hale gelir:

$$\left\{ E^2 - E|\omega| \binom{4N_l + 2}{4N_r + 2} \right\} \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle = M^2 \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle$$

ve enerji özdeğer denklemleri şu şekildedir:

$$\omega > 0 : \quad E_l^2 = M^2 + 4E_l |\omega| (n_l + 1/2),$$

$$\omega < 0 : \quad E_r^2 = M^2 + 4E_r |\omega| (n_r + 1/2).$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned}\omega > 0 : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= M^2 + 4(\varepsilon_l + \beta\varepsilon_l^3)|\omega|(n_l + 1/2), \\ \omega < 0 : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= M^2 + 4(\varepsilon_r + \beta\varepsilon_r^3)|\omega|(n_r + 1/2).\end{aligned}$$

4.2.3.2. Nutku osilatör potansiyelinde yüksek spinli parçacıkların denklemleri

Dirac denklemi

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma)\Psi = M\Psi$$

topolojik osilatör potansiyelinde şu şekildedir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} \mp i|\omega|(S^2 - 2S_z^2) + S_x \partial_r + S_y \left(\frac{\partial_\phi - iS_z}{r} \mp iE|\omega|r \right) \right\} \Psi = 0.$$

Burada $\mp$ işaretlemesinde eksi işareti $\omega > 0$ durumunu ve artı işareti $\omega < 0$ durumunu temsil etmektedir. Denklemi cebirsel olarak çözmek için $S_\pm = S_x \pm iS_y$ dairesel spin operatörleri kullanılıp,

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} \mp i|\omega|(S^2 - 2S_z^2) + \frac{1}{2}S_+ \left(\partial_r + \frac{-i\partial_\phi - S_z}{r} \mp E|\omega|r \right) + \frac{1}{2}S_- \left(\partial_r + \frac{i\partial_\phi + S_z}{r} \mp E|\omega|r \right) \right\} \Psi = 0,$$

kartezyen koordinatlara iç uzayda $U = I + \frac{i}{2}\omega_{ab}S^{ab} = I + i\theta S_z$ dönmesi ve dış uzayda $\lambda_{ab} = \eta_{ab} + \omega_{ab}$ dönmesi yapılarak geçilebilir. Burada

$$[S_\pm, S_z] = \mp S_\pm, \quad [S^2, S_z] = 0$$

cebirleri ile iç uzaydaki dönüşüm

$$\bar{\Psi}(r, \phi) S_\pm \Psi(r, \phi) = \bar{\Psi}(x, y) U^{-1} S_\pm U \Psi(x, y) = \bar{\Psi} (S_\pm + i\phi[S_\pm, S_z]) \Psi = \bar{\Psi} e^{\mp i\phi} S_\pm \Psi$$

ve dış uzaydaki dönüşümler

$$e^{\mp i\phi} \left(\partial_r \mp \frac{i\partial_\phi}{r} \right) = \partial_\mp, \quad e^{\mp i\phi} r = X_\mp$$

ile birlikte denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} \mp i|\omega|(S^2 - 2S_z^2) + \frac{1}{2}S_+ (\partial_- \mp E|\omega|X_-) + \frac{1}{2}S_- (\partial_+ \pm E|\omega|X_+) \right\} \Psi = 0.$$

$Q = r\sqrt{E|\omega|}$ değişken değişimi yapıldıktan sonra dairesel yaratma-yoketme operatörlerinin

$$\begin{aligned} Q_+ &= A_l + A_r^\dagger, & \partial_+ &= A_l - A_r^\dagger, \\ Q_- &= A_r + A_l^\dagger, & \partial_- &= A_r - A_l^\dagger, \end{aligned}$$

tanımları kullanılırsa denklem şu hale gelir:

$$\left\{ S_z E - \frac{M}{2} \mp i|\omega|(S^2 - 2S_z^2) + \sqrt{E|\omega|} \left[S_+ \begin{pmatrix} -A_l^\dagger \\ +A_r \end{pmatrix} + S_- \begin{pmatrix} +A_r^\dagger \\ +A_l \end{pmatrix} \right] \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklem s spinli parçacığın $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ özdeğerleri için

$$\Psi = |sm_s\rangle \otimes \left| \frac{n_l}{n_r} \right\rangle$$

spinöründe sol dairesel kuantum sayısı

$$n_l = (n_l, n_l + 1, \dots, n_l + 2s)$$

aralığında ve sağ dairesel kuantum sayısı

$$n_r = (n_r + 2s, \dots, n_r + 1, n_r)$$

aralığında olmak üzere yaratma-yoketme operatörlerinin özdeğerleri

$$\begin{aligned} A_{l,r}^\dagger |n_{l,r}\rangle &= \sqrt{n_{l,r} + 1} |n_{l,r} + 1\rangle, \\ A_{l,r} |n_{l,r}\rangle &= \sqrt{n_{l,r}} |n_{l,r} - 1\rangle, \end{aligned}$$

ile spin operatörünün

$$\begin{aligned} S^2 |sm_s\rangle &= s(s+1) |sm_s\rangle, & S_z^2 |sm_s\rangle &= m_s |sm_s\rangle, \\ S_\pm |sm_s\rangle &= \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |sm_s \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

özdeğerleri ile çözülebilir. Dairesel kuantum sayı operatörlerinin özfonksiyonu $|n_{lr}\rangle = C_n(A_{l,r}^\dagger)^{n_{l,r}} e^{-Q^2/2}$ olduğundan $n_{l,r} \geq 0$ 'dır ve baş kuantum sayısı ile yörüngesel açıl momentum kuantum sayısı cinsinden şu şekildedir:

$$\begin{aligned} n_r &= \frac{1}{2}(n + m), \\ n_l &= \frac{1}{2}(n - m). \end{aligned}$$

Böylece baş kuantum sayısı operatörü $N = N_r + N_l$ ve yörüngesel açıl momentum operatörü $L_z = -i\partial_\phi = N_r - N_l$ 'dir. Ancak, topolojik osilatör potansiyelinde sol dairesel ile sağ dairesel durumlar çiftlenmemiştir. Çiftlenme durumunun gerçekleşmesi için başka bir dış alana ihtiyaç vardır.

4.2.3.3. Nutku osilatör potansiyelinde s=1/2 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 1/2$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[E - M \mp \frac{|\omega|}{2} \right] \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r} \right\rangle + \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l}{n_r + 1} \right\rangle &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[-E - M \mp \frac{|\omega|}{2} \right] \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l}{n_r + 1} \right\rangle + \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi oluşturulup determinantı hesaplanırsa enerji özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \omega > 0 : \quad E_l^2 &= \left(M + \frac{|\omega|}{2} \right)^2 + 4|\omega|E_l(n_l + 1), \\ \omega < 0 : \quad E_r^2 &= \left(M - \frac{|\omega|}{2} \right)^2 + 4|\omega|E_r(n_r + 1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned}\omega > 0 : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= \left(M + \frac{|\omega|}{2}\right)^2 + 4|\omega|(\varepsilon_l + \beta\varepsilon_l^3)(n_l + 1), \\ \omega < 0 : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= \left(M - \frac{|\omega|}{2}\right)^2 + 4|\omega|(\varepsilon_r + \beta\varepsilon_r^3)(n_r + 1).\end{aligned}\quad (4.11)$$

4.2.3.4. Nutku osilatör potansiyelinde s=1 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 1$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[E - \frac{M}{2} \right] |11 \frac{n_l + 2}{n_r} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[-\frac{M}{2} \mp 2|\omega| \right] |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} |11 \frac{n_l + 2}{n_r} \rangle \\ + \sqrt{2} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} |1 - 1 \frac{n_l}{n_r + 2} \rangle &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[-E - \frac{M}{2} \right] |1 - 1 \frac{n_l}{n_r + 2} \rangle + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} |10 \frac{n_l + 1}{n_r + 1} \rangle &= 0,\end{aligned}$$

Denklem sisteminin katsayılar determinantı enerji özdeğer denklemlerini şu şekilde verir:

$$\begin{aligned}\omega > 0 : \quad E_l^2 &= \frac{M^2}{4} + M|\omega| + 4|\omega|E_l(n_l + 3/2), \\ \omega < 0 : \quad E_r^2 &= \frac{M^2}{4} - M|\omega| + 4|\omega|E_r(n_r + 3/2).\end{aligned}\quad (4.12)$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre modifiye özdeğer denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned}\omega > 0 : \quad \varepsilon_l^2 + 2\beta\varepsilon_l^4 &= \frac{M^2}{4} + M|\omega| + 4|\omega|(\varepsilon_l + \beta\varepsilon_l^3)(n_l + 3/2), \\ \omega < 0 : \quad \varepsilon_r^2 + 2\beta\varepsilon_r^4 &= \frac{M^2}{4} - M|\omega| + 4|\omega|(\varepsilon_r + \beta\varepsilon_r^3)(n_r + 3/2).\end{aligned}\quad (4.13)$$

4.2.3.5. Nutku osilatör potansiyelinde s=3/2 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 3/2$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[3E - M \pm \frac{3|\omega|}{2} \right] \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{n_l + 3}{n_r} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 3} \\ -\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[E - M \mp \frac{13|\omega|}{2} \right] \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 3} \\ +\sqrt{n_r + 1} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{n_l + 3}{n_r} \right\rangle \\ + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[-E - M \mp \frac{13|\omega|}{2} \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_r + 2} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{n_l + 2}{n_r + 1} \right\rangle \\ + \sqrt{3} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_r + 3} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{n_l}{n_r + 3} \right\rangle &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{E|\omega|}} \left[-3E - M \pm \frac{3|\omega|}{2} \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{n_l}{n_r + 3} \right\rangle + \sqrt{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_r + 3} \end{pmatrix} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n_l + 1}{n_r + 2} \right\rangle &= 0\end{aligned}$$

Yine bu denklem sisteminin katsayılar determinantı hesaplanırsa enerji özdeğer denklemini dördüncü dereceden polinom olarak bulunur:

$$E^4 + a_3E^3 + a_2E^2 + a_1E + a_0 = 0. \quad (4.14)$$

Burada katsayılar şunlardır:

$$\begin{aligned}\omega > 0 : \quad a_0 &= \left(M + \frac{13|\omega|}{2}\right)^2 \left(\frac{M}{3} - \frac{|\omega|}{2}\right)^2, \\ a_1 &= 4|\omega|(n_l + 2) \left(\frac{M}{3} - \frac{|\omega|}{2}\right) \left(\frac{10M}{3} + 11|\omega|\right), \\ a_2 &= 16(n_l + 2)^2|\omega|^2 - \frac{19|\omega|^2}{2} - \left(\frac{M}{3} + \frac{3|\omega|}{5}\right)^2 - \left(M + \frac{4|\omega|}{5}\right)^2, \\ a_3 &= -8|\omega|(n_l + 2),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\omega < 0 : \quad a_0 &= \left(M - \frac{13|\omega|}{2}\right)^2 \left(\frac{M}{3} + \frac{|\omega|}{2}\right)^2, \\ a_1 &= 4|\omega|(n_r + 2) \left(\frac{M}{3} + \frac{|\omega|}{2}\right) \left(\frac{10M}{3} - 11|\omega|\right), \\ a_2 &= 16(n_r + 2)^2|\omega|^2 - \frac{19|\omega|^2}{2} - \left(\frac{M}{3} - \frac{3|\omega|}{5}\right)^2 - \left(M - \frac{4|\omega|}{5}\right)^2, \\ a_3 &= -8|\omega|(n_r + 2).\end{aligned}$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre altıncı dereceden modifiye enerji özdeğer denklemi şu şekildedir:

$$\varepsilon^4 + 4\beta\varepsilon^6 + a_3(\varepsilon^3 + 3\beta\varepsilon^5) + a_2(\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^4) + a_1(\varepsilon + \beta\varepsilon^3) + a_0 = 0. \quad (4.15)$$

4.2.3.6. Nutku osilatörü potansiyelinde s=2 spinli parçacığın modifiye enerji özdeğer denklemi

$s = 2$ spinli parçacık için hareket denklemleri şunlardır:

$$\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[2E - \frac{M}{2} \pm 2|\omega| \right] |22 \frac{n_l + 4}{n_r}\rangle + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 4} \\ -\sqrt{n_l + 1} \end{pmatrix} |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1}\rangle = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[E - \frac{M}{2} \mp 4|\omega| \right] |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1} \rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 4} \\ +\sqrt{n_l + 1} \end{pmatrix} |22 \frac{n_l + 4}{n_r} \rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 3} \\ -\sqrt{n_l + 2} \end{pmatrix} |20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \rangle = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[-\frac{M}{2} \mp 6|\omega| \right] |20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 3} \\ +\sqrt{n_l + 2} \end{pmatrix} |21 \frac{n_l + 3}{n_r + 1} \rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 2} \\ -\sqrt{n_l + 3} \end{pmatrix} |2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \rangle = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[-E - \frac{M}{2} \mp 4|\omega| \right] |2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \rangle + \sqrt{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 2} \\ +\sqrt{n_l + 3} \end{pmatrix} |20 \frac{n_l + 2}{n_r + 2} \rangle + 2 \begin{pmatrix} +\sqrt{n_l + 1} \\ -\sqrt{n_l + 4} \end{pmatrix} |2 - 2 \frac{n_l}{n_r + 4} \rangle = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E|\omega|}} \left[-2E - \frac{M}{2} \pm 2|\omega| \right] |2 - 2 \frac{n_l}{n_r + 4} \rangle + 2 \begin{pmatrix} -\sqrt{n_l + 1} \\ +\sqrt{n_l + 4} \end{pmatrix} |2 - 1 \frac{n_l + 1}{n_r + 3} \rangle = 0.$$

Lineer denklem sisteminin katsayılar determinanı hesaplanarak dördüncü dereceden enerji özdeğer denklemi elde edilir:

$$E^4 + a_3 E^3 + a_2 E^2 + a_1 E + a_0 = 0. \quad (4.16)$$

Burada katsayılar şunlardır:

$$\begin{aligned} \omega > 0 : \quad a_0 &= \left(1 + \frac{12|\omega|}{M} \right) \left(\frac{M}{2} + 4|\omega| \right)^2 \left(\frac{M}{4} - |\omega| \right)^2, \\ a_1 &= 2|\omega|(n_l + 5/2) \left(5 + \frac{12|\omega|}{M} \right) \left(\frac{M}{2} + 4|\omega| \right) \left(\frac{M}{4} - |\omega| \right), \\ a_2 &= 16(n_l + 5/2)^2 |\omega|^2 - 11|\omega|^2 - 2M|\omega| - 5M^2 - 48|\omega|^3/M, \\ a_3 &= -8|\omega|(n_l + 5/2), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\omega < 0 : \quad a_0 &= \left(1 - \frac{12|\omega|}{M}\right) \left(\frac{M}{2} - 4|\omega|\right)^2 \left(\frac{M}{4} + |\omega|\right)^2, \\ a_1 &= 2|\omega|(n_r + 5/2) \left(5 - \frac{12|\omega|}{M}\right) \left(\frac{M}{2} - 4|\omega|\right) \left(\frac{M}{4} + |\omega|\right), \\ a_2 &= 16(n_r + 5/2)^2|\omega|^2 - 11|\omega|^2 + 2M|\omega| - 5M^2 + 48|\omega|^3/M, \\ a_3 &= -8|\omega|(n_r + 5/2).\end{aligned}$$

β minimum ölçeğinde E kesikli zaman Hamiltonyeninin enerji özdeğeridir ve gerçek enerji ε sürekli zaman Hamiltonyeninin özdeğeridir. Gerçek enerjiye basitçe

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta}\varepsilon) = \varepsilon + \beta\varepsilon^3 \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

ile geçilir. Buna göre altıncı dereceden modifiye enerji özdeğer denklemi şu şekildedir:

$$\varepsilon^4 + 4\beta\varepsilon^6 + a_3(\varepsilon^3 + 3\beta\varepsilon^5) + a_2(\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^4) + a_1(\varepsilon + \beta\varepsilon^3) + a_0 = 0. \quad (4.17)$$

4.3. Karadeliklerin 2+1 Boyuta İndirgenmiş Uzay-zaman Zeminleri Üzerinden Modifiye Hawking Sıcaklıklarının Hesaplanması

Bir gözlem çerçevesine göre statik ve simetrik bir karadeliğin metriği, Hawking sıcaklığının hesaplanması amacıyla karadeliğin ekvatorial düzlemine, 2+1 boyutlu uzay-zamana, indirgenebilir:

$$-ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{1}{G(r)}dr^2 + K(r)d\phi^2.$$

Buna göre metrik tensör ve tersi şunlardır:

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \text{diag} \left(-F, \frac{1}{G}, K \right), \quad g = -\frac{FK}{G}, \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag} \left(-\frac{1}{F}, G, \frac{1}{K} \right).\end{aligned}$$

Triadlar ve tersleri şunlardır:

$$\begin{aligned}e^a{}_\mu &= \text{diag} \left(\sqrt{F}, \frac{1}{\sqrt{G}}, \sqrt{K} \right), \\ e_a{}^\mu &= \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{F}}, \sqrt{G}, \frac{1}{\sqrt{K}} \right).\end{aligned}$$

Karadeliğin en dış yarıçapında, $r = R$ olay ufkunda, $F(R) = 0$ ve $G(R) = 0$ 'dır. Bu fonksiyonlar Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} F &= (r - R)f, & (f &= F'(R)) \\ G &= (r - R)g, & (g &= G'(R)), \end{aligned}$$

standart Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi}.$$

Burada $\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{(-g_{00,r} g_{,r}^{11})} \Big|_{r=R}$ olay ufkunun gravitasyon ivmesidir.

Kuantum mekaniksel açıdan incelenirse, olay ufkundan sonsuzdaki gözlemciye kaçan kuantum parçacığının olasılığı

$$P_+ = e^{-2\text{Im}(W_+)} \Big|_{r=R}$$

ve karadeliğin içine düşen parçacığın olasılığı

$$P_- = e^{-2\text{Im}(W_-)} \Big|_{r=R}$$

olmak üzere bölüşüm fonksiyonu ile

$$Z = \frac{P_+}{P_-} = e^{-\varepsilon_T/T_H}$$

Hawking sıcaklığı hesaplanabilmektedir:

$$T_H = \frac{\varepsilon_T}{2(\text{Im}W_+ - \text{Im}W_-)} \Big|_{r=R}.$$

Burada ε_T kuantum parçacığının olay ufkundaki toplam enerjisidir ve $W(R)$ kuantum parçacığının yarı-klasik yörüngesinin olay ufkundaki değeridir.

4.3.1. Kuantum gravite altında spinsiz kuantum parçacığının olay ufkundaki tünelleme ve modifiye Hawking sıcaklığı

Eğri uzay-zamanda elektromanyetik alanla etkileşen skaler kuantum parçacığının denklemi Klein-Gordon denklemidir:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu) - 2i\hbar q A^\mu \partial_\mu - q^2 A^\mu A_\mu - M^2 \right\} \Psi = 0.$$

Burada A_μ , 3-potansiyeldir ve kovaryant türevi sıfırdır: $\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) = 0$. Yarı-klasik yaklaşım, denklemin $\hbar \rightarrow 0$ limitinde incelenmesidir. Buna göre

$$\hbar^m \partial_\mu^{(n)} = \begin{cases} 0, & m > n \\ (\hbar \partial_\mu)^n, & m = n \end{cases}$$

ve $2 + 1$ boyutlu metrik ile $A_\mu = (-V(r), 0, A_\phi(r))$ potansiyeli için yarı-klasik KG denklemi şudur:

$$\left\{ \frac{1}{F} (i\hbar \partial_t - qV)^2 - G(-i\hbar \partial_r)^2 - \frac{1}{K} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi)^2 - M^2 \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklemi $\beta = \frac{\beta_0}{M_P^2 c^4}$ minimum ölçeğinde modifiye etmek için kesikli zaman jeneratörü $\partial_t \rightarrow \Delta_t$ veya $H = i\hbar \Delta_t$ kesikli zamanın Hamiltonyeni

$$H e^{-i\epsilon t/\hbar} = \frac{e^{\sqrt{2\beta\epsilon}} - e^{-\sqrt{2\beta\epsilon}}}{2\sqrt{2\beta\epsilon}} e^{-i\epsilon t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta\epsilon}) e^{-i\epsilon t/\hbar}$$

biçiminde hesaplanıp deformasyon parametresinin $\beta \ll 1$ yaklaşıklığında,

$$H = H_\beta + \beta H_\beta^3, \quad (\beta \rightarrow \beta/3),$$

kütle-kabuk bağıntısı $H_\beta^2 \approx E_{MS}^2 = p^2 + M^2 = -\hbar^2 \partial^i \partial_i + M^2$ üzerinden

$$H = H_\beta [1 + \beta (-\hbar^2 \partial^i \partial_i + M^2)]$$

kullanılarak yarı-klasik KG denklemi modifiye edilebilir:

$$\left\{ \frac{1}{F} (H_\beta [1 + \beta (-\hbar^2 \partial^i \partial_i + M^2)] - qV)^2 - G(-i\hbar \partial_r)^2 - \frac{1}{K} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi)^2 - M^2 \right\} \Psi = 0.$$

Burada $H_\beta = i\hbar \partial_t$ minimum ölçekteki sürekli zamanın jeneratörüdür ve özdeğeri parçacığın olay ufkundaki gerçek enerjisini verir: $H_\beta \Psi = \tilde{\epsilon} \Psi$. Olay ufkunun açısal hızı Ω_H olmak üzere olay ufku ile birlikte dönen gözlemciye göre $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\Omega_H$ olur. Sonra $\mathcal{I} = -\tilde{\epsilon}t + W(r) + j\phi$ KG parçacığının eylem fonksiyoneli olmak üzere $\Psi = e^{i\mathcal{I}(x^\mu)/\hbar} \psi$

dalga fonksiyonu ile denklem şu hale gelir:

$$\left\{ \frac{1}{F} \left(\tilde{\varepsilon} \left[1 + \beta \left(GW'^2 + \frac{j^2}{K} + M^2 \right) \right] - qV \right)^2 - GW'^2 - \frac{1}{K} (j - qA_\phi)^2 - M^2 \right\} \Psi = 0$$

Minimum ölçekte parçacığın radyal yörüngesi de deforme olur: $W = W_0 + \beta W_1$. Buna göre $\beta \ll 1$ yaklaşıklığını devam ettirerek $\beta = 0$ 'dan standart radyal yörünge

$$W_{0\pm} = \pm \int dr \frac{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(M^2 + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}}{\sqrt{FG}} \\ = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \Big|_{r_R}$$

biçiminde bulunur. $\varepsilon_T = \tilde{\varepsilon} - qV_H = \varepsilon - j\Omega_H - qV_H > 0$ koşulu sağlanmalıdır. Burada $V_H = V(R)$ olay ufkundaki elektriksel potansiyeldir. Olay ufkunda kuantum parçacığının toplam enerjisi pozitifdir. Standart radyal yörünge kullanılarak β 'nın katsayısından radyal yörüngeye düzeltme şudur:

$$W_{1\pm} = \pm \int dr \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon_T}{F \sqrt{FG}} \frac{\varepsilon_T^2 + \frac{F}{K} qA_\phi (2j - qA_\phi)}{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(M^2 + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}} \\ = \pm i\pi \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{fg}} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \Big|_{r=R}.$$

Dolayısıyla GUP altında KG parçacığının gerçek radyal yörüngesi $W_\pm = W_{\pm 0} + \beta W_{\pm 1}$ şudur:

$$W_\pm = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\} \Big|_{r=R}.$$

Böylece modifiye Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}.$$

Hawking sıcaklığının sadece karadeliğe ait kütle (M_B), yük (Q), dönme ($a = J/M$), adS basıncı ($P = -\Lambda/(8\pi)$) ve diğer karanlık maddeler gibi karakteristik özelliklerine bağlı olduğu standart durumun aksine, gerçek Hawking sıcaklığının parçacıkla karadeliğin elektiriksel etkileşme enerjisine, parçacığın kütlesine ve enerjisine de bağlı olduğu görülmektedir. Bu kuantum gravitenin önemli bir sonucudur. Ancak bu sonucun elde edilmesinde

kütle-kabuk bağıntısının rolü vardır. Eğer bu kabulden vazgeçilirse, $H_\beta^2 \Psi = \tilde{\varepsilon}^2 \Psi \neq E_{MS}^2 \Psi$, gerçek Hawking sıcaklığının sadece parçacığın enerjisine ve elektriksel etkileşme enerjisine bağlı olduğu görülür:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left(1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{\varepsilon_T}\right)^{-1} \approx T_H \left(1 - \beta \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{\varepsilon_T}\right).$$

Her şeye rağmen minimum ölçeğin türetilişinden gelen $\beta \geq 0$ zorunluluğu gerçek Hawking sıcaklığının standart durumdan daha küçük olması gerektiğini söyler.

4.3.2. Kuantum gravite altında yüksek spinli kuantum parçacıkların olay ufkundaki tünellemeleri

Elektromanyetik alanla etkileşen $s = 1/2$ spinli bir kuantum parçacığının eğri uzay-zamandaki denklemi Dirac denklemidir:

$$\{\gamma^\mu (\hbar \partial_\mu + \hbar \Gamma_\mu - iq A_\mu) - M\} \Psi = 0.$$

Yarı-klasik Dirac denklemi ise şudur:

$$\{\gamma^\mu (\hbar \partial_\mu - iq A_\mu) - M\} \Psi = 0,$$

ve 2 + 1 metriğe göre $\gamma^\mu = \text{diag} \left(i\sigma_3/\sqrt{F}\sigma_1\sqrt{G}, \sigma_2/\sqrt{K} \right)$ Dirac tabanları ile $A_\mu = (-V(r), 0, A_\phi(r))$ potansiyeli için şu şekildedir:

$$\left\{ \frac{\sigma_3}{\sqrt{F}} (i\hbar \partial_t - qV) + i\sigma_1\sqrt{G}(-i\hbar \partial_r) + i\frac{\sigma_2}{\sqrt{K}} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi) - M \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklem 2 + 1 uzay-zamana özel olarak spin açısıl momentum $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ kullanılarak yüksek spinli temel parçacıklar için genelleştirilebilir:

$$\left\{ \frac{S_z}{\sqrt{F}} (i\hbar \partial_t - qV) + iS_x\sqrt{G}(-i\hbar \partial_r) + i\frac{S_y}{\sqrt{K}} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi) - \frac{M}{2} \right\} \Psi = 0.$$

Bu denklemi β minimum ölçeğinde modifiye etmek için $H = i\hbar \Delta_t$ kesikli zamanın Hamiltoniyeni

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \sinh(\sqrt{2\beta} H_\beta)$$

deformasyon parametresinin $\beta \ll 1$ yaklaşıklığında

$$H = H_\beta + \beta H_\beta^3, \quad (\beta \rightarrow \beta/3)$$

s spinli parçacık için kütle-kütle-kabuk bağıntısı $H_\beta^2 \approx E_{MS}^2 = p^2 + M^2 = -\hbar^2 \partial^i \partial_i + M^2$ üzerinden

$$H = H_\beta [1 + \beta (-\hbar^2 \partial^i \partial_i + M^2)]$$

kullanılarak şu şekilde modifiye edilebilir:

$$\left\{ \frac{S_z}{\sqrt{F}} (H_\beta [1 + \beta (-\hbar^2 \partial^i \partial_i + s^2 M^2)] - qV) - \frac{M}{2} + iS_x \sqrt{G} (-i\hbar \partial_r) + i \frac{S_y}{\sqrt{K}} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi) \right\} \Psi = 0.$$

Burada $H_\beta \Psi = \tilde{\varepsilon} \Psi$ 'dir.

$\mathcal{I} = -\tilde{\varepsilon}t + W(r) + j\phi$ spinli bir parçacığın eylem fonksiyoneli olmak üzere $\Psi = e^{i\mathcal{I}(x^\mu)/\hbar} |sm_s\rangle$ spinörü ve $S_\pm = S_x \pm iS_y$ dairesel spin operatörleri ile modifiye denklem şu hale gelir:

$$\left\{ \frac{S_z}{\sqrt{F}} \left(\tilde{\varepsilon} \left[1 + \beta \left(GW'^2 + \frac{j^2}{K} + M^2 \right) \right] - qV \right) - \frac{M}{2} + \frac{1}{2} S_+ \left[i\sqrt{G}W' + \frac{j - qA_\phi}{\sqrt{K}} \right] + \frac{1}{2} S_- \left[i\sqrt{G}W' - \frac{j - qA_\phi}{\sqrt{K}} \right] \right\} |sm_s\rangle = 0.$$

Spin operatörlerinin

$$S_z |sm_s\rangle = m_s |sm_s\rangle, \\ S_\pm |sm_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |sm_s \pm 1\rangle,$$

özdeğerleri kullanılarak herhangi bir s spin değeri ve $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ özdeğeri için spinli parçacığın yarı-klasik radyal yörüngesi hesaplanabilir. Burada radyal yörüngeyi $W = W_0 + \beta W_1$ biçiminde modifiye etmeden önce, lineer denklem sistemini oluşturup katsayılar determinantını hesaplamaya dikkat edilmelidir. Çünkü, bu işlemde sıra değişirse $\beta W_0' W_1'$ terimi kaybedilerek sadece $\beta W_1'$ terimi üzerinden hatalı işlem yapılır. Ayrıca kütle-kabuk bağıntıları yerleştirilirken M kütesinin ilgili spinli parçacığın kütlesi olduğu unutulmamalıdır. Spinsiz parçacık ile $s = 1/2$ parçacığının kütle-kabuk bağıntıları

aynı olmasına rağmen,

$$E_{MS}^2 = p^2 + M^2,$$

yüksek spinli parçacıkların şu şekilde olduğuna dikkat edilmelidir:

$$\text{spin-1: } E_{MS}^2 = p^2 + \frac{M^2}{4},$$

$$\text{spin-3/2: } E_{MS}^2 = p^2 + M^2, \quad E_{MS}^2 = p^2 + \frac{M^2}{9},$$

$$\text{spin-2: } E_{MS}^2 = p^2 + \frac{M^2}{4}, \quad E_{MS}^2 = p^2 + \frac{M^2}{16}.$$

Özellikle $s = 3/2$ ile $s = 2$ parçacıklarının standart radyal yörüngelerinde onların kütle-kabuk bağıntıları gibi dejenere olacaktır. Dolayısıyla, radyal yörüngenin GUP altında düzeltilmesi W_1 hesaplanırken hangi kütle-kabuk-bağıntısı kullanılıyorsa, ona ilişkin W_0 standart radyal yörünge çözümünün kullanılmasına dikkat edilmelidir.

4.3.2.1. $s=1/2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı

$s = 1/2$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 0,$$

Burada $E_{M-S}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2$ yarı-klasik kütle-kabuk enerjisinin karesidir. Kat-sayılar matrisi oluşturulup determinant hesaplandıktan sonra radyal yörünge modifiye edilmelidir: $W = W_0 + \beta W_1$. Buna göre $\beta \ll 1$ yaklaşıklığını devam ettirerek $\beta = 0$ 'dan standart radyal yörünge

$$W_{0\pm} = \pm \int dr \frac{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(M^2 + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}}{\sqrt{FG}}$$

$$= \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \Big|_{r_R}$$

biçiminde bulunur. Standart radyal yörünge kullanılarak β 'nin katsayısından radyal yörüngeye düzeltme şudur:

$$W_{1\pm} = \pm \int dr \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_T}{F\sqrt{FG}} \frac{\varepsilon_T^2 + \frac{F}{K}qA_\phi(2j - qA_\phi)}{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F(M^2 + \frac{1}{K}[j - qA_\phi]^2)}} \\ = \pm i\pi \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{fg}} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \Big|_{r=R}.$$

Dolayısıyla GUP altında $s = 1/2$ parçacığının gerçek radyal yörüngesi $W_{\pm} = W_{\pm 0} + \beta W_{\pm 1}$ şudur:

$$W_{\pm} = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\} \Big|_{r=R}.$$

Böylece modifiye Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}.$$

$s = 1/2$ parçacığının Hawking sıcaklığı spinsiz parçacığına ile aynıdır.

4.3.2.2. $s=1$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı

$s = 1$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\left[\frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta\tilde{\varepsilon}E_{M-s}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |11\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |10\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{M}{2} \right] |10\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |11\rangle \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |1-1\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta\tilde{\varepsilon}E_{M-s}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |1-1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |10\rangle = 0.$$

Burada $E_{M-s}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2/4$, M -kütleli spin-1 parçacığının yarı-klasik kütle-kabuk enerjisinin karesidir. Katsayılar matrisi oluşturulup determinant hesaplandıktan sonra radyal yörünge modifiye edilmelidir: $W = W_0 + \beta W_1$. Buna göre $\beta \ll 1$ yaklaşık-

lğını devam ettirerek $\beta = 0$ 'dan standart radyal yörünge

$$\begin{aligned} W_{0\pm} &= \pm \int dr \frac{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{4} + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}}{\sqrt{FG}} \\ &= \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Standart radyal yörünge kullanılarak β 'nın katsayısından radyal yörüngeye düzeltme şudur:

$$\begin{aligned} W_{1\pm} &= \pm \int dr \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_T}{F\sqrt{FG}} \frac{\varepsilon_T^2 + \frac{F}{K}qA_\phi(2j - qA_\phi)}{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{4} + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}} \\ &= \pm i\pi \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{fg}} \left[\frac{M^2}{8} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla GUP altında $s = 1$ parçacığının gerçek radyal yörüngesi $W_{\pm} = W_{\pm 0} + \beta W_{\pm 1}$ şudur:

$$W_{\pm} = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{8} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\} \Big|_{r=R}.$$

Böylece modifiye Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{8} + \frac{j^2}{2K} + qA_\phi \frac{2j - qA_\phi}{2K} - \frac{2qV'\varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}.$$

Burada kütle spin-1 parçacığının kütlesidir ve sıkı bağlı iki Dirac parçacığı olduğu düşünülürse $M = 2M_D$, Hawking sıcaklığı $s = 1/2$ ile aynı hale gelir.

4.3.2.3. $s=3/2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı

$s = 3/2$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\left[\frac{3\tilde{\varepsilon} - qV + \beta\tilde{\varepsilon}E_{M-s}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1\tilde{\varepsilon} - qV + \beta\tilde{\varepsilon}E_{M-s}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \\ + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{G}W + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[i\sqrt{G}W - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{3}{2} \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[i\sqrt{G}W + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0.$$

Burada $E_{M-S}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2/9$, M -kütleli $s = 3/2$ parçacığının yarı-klasik kütle-kabuk enerjisinin karesidir. Katsayılar matrisi oluşturulup determinant hesaplandıktan sonra radyal yörünge modifiye edilmelidir: $W = W_0 + \beta W_1$. Buna göre $\beta \ll 1$ yaklaşıklığını devam ettirerek $\beta = 0$ 'dan standart radyal yörünge

$$W_{0\pm} = \pm \int dr \frac{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{9} + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}}{\sqrt{FG}} = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \Big|_{r_R}$$

biçiminde bulunur. Standart radyal yörünge kullanılarak β 'nın katsayısından radyal yörüngeye düzeltme şudur:

$$W_{1\pm} = \pm \int dr \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon_T}{F \sqrt{FG}} \frac{\varepsilon_T^2 + \frac{F}{K} q A_\phi (2j - q A_\phi)}{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{9} + \frac{1}{K} [j - q A_\phi]^2 \right)}} = \pm i\pi \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{fg}} \left[\frac{M^2}{18} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \Big|_{r=R}.$$

Dolayısıyla GUP altında $s = 3/2$ parçacığının gerçek radyal yörüngesi $W_\pm = W_{\pm 0} + \beta W_{\pm 1}$ şudur:

$$W_\pm = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{18} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\} \Big|_{r=R}.$$

Böylece modifiye Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{18} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}$$

Burada kütle spin-3/2 parçacığının kütesidir ve sıkı bağlı üç Dirac parçacığı olduğu düşünülürse $M = 3M_D$, Hawking sıcaklığı $s = 1/2$ ile aynı hale gelir. Öte yandan spin-3/2

parçacığının diğer kütle-kabuk bağıntısı $E_{M-S}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2$ ile Hawking sıcaklığı hesaplanırsa spin-1/2 parçacığının Hawking sıcaklığı spin-3/2 parçacığının kütlesiyle elde edilir. Dolayısıyla spin-3/2 parçacığı üçlü $s = 1/2$ modlarını Hawking sıcaklığında barındırmaktadır.

4.3.2.4. $s=2$ parçacığının oluşturduğu modifiye Hawking sıcaklığı ve modifiye Hawking sıcaklığının keyfi bir spine genelleştirilmesi

$s = 2$ için hareket denklemleri şunlardır:

$$\left[2 \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |22\rangle + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |21\rangle = 0,$$

$$\left[\frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |21\rangle + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |22\rangle + \frac{\sqrt{6}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |20\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{M}{2} \right] |20\rangle + \frac{\sqrt{6}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |21\rangle + \frac{\sqrt{6}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |2-1\rangle = 0,$$

$$\left[-\frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |2-1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |21\rangle + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{GW} - \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |2-2\rangle = 0,$$

$$\left[-2 \frac{\tilde{\varepsilon} - qV + \beta \tilde{\varepsilon} E_{M-S}^2}{\sqrt{F}} - \frac{M}{2} \right] |2-2\rangle + \frac{\sqrt{4}}{2} \left[i\sqrt{GW} + \frac{1}{\sqrt{K}}(j - A_\phi) \right] |2-1\rangle = 0.$$

Burada $E_{M-S}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2/16$, M -kütleli $s = 2$ parçacığının yarı-klasik kütle-kabuk enerjisinin karesidir. Katsayılar matrisi oluşturulup determinant hesaplandıktan sonra radyal yörünge modifiye edilmelidir: $W = W_0 + \beta W_1$. Buna göre $\beta \ll 1$

yaklaşıklığını devam ettirerek $\beta = 0$ 'dan standart radyal yörünge

$$\begin{aligned} W_{0\pm} &= \pm \int dr \frac{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{16} + \frac{1}{K} [j - qA_\phi]^2 \right)}}{\sqrt{FG}} \\ &= \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Standart radyal yörünge kullanılarak β 'nın katsayısından radyal yörüngeye düzeltme şudur:

$$\begin{aligned} W_{1\pm} &= \pm \int dr \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon_T}{F \sqrt{FG}} \frac{\varepsilon_T^2 + \frac{F}{K} q A_\phi (2j - q A_\phi)}{\sqrt{\varepsilon_T^2 - F \left(\frac{M^2}{16} + \frac{1}{K} [j - q A_\phi]^2 \right)}} \\ &= \pm i\pi \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{fg}} \left[\frac{M^2}{32} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla GUP altında $s = 2$ parçacığının gerçek radyal yörüngesi $W_{\pm} = W_{\pm 0} + \beta W_{\pm 1}$ şudur:

$$W_{\pm} = \pm i\pi \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{fg}} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{32} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\} \Big|_{r=R}.$$

Böylece modifiye Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{32} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}.$$

Burada kütle spin-2 parçacığının kütlesidir ve sıkı bağlı dört Dirac parçacığı olduğu düşünülürse $M = 4M_D$, Hawking sıcaklığı $s = 1/2$ ile aynı hale gelir. Öte yandan spin-2 parçacığının diğer kütle-kabuk bağıntısı $E_{M-s}^2 = GW'^2 + j^2/K + M^2/4$ ile Hawking sıcaklığı hesaplanırsa spin-1 parçacığının Hawking sıcaklığı spin-2 parçacığının kütlesiyle elde edilir. Dolayısıyla spin-2 parçacığı dörtlü $s = 1/2$ ve ikili $s = 1$ modlarını Hawking sıcaklığında barındırmaktadır. Dolayısıyla spinli parçacıkların Hawking sıcaklıkları şu şekilde genelleştirilebilir:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 + \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2(2s)^2} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\}^{-1} \Big|_{r=R}. \quad (4.18)$$

Burada $s = 1/2, 1, \dots$ ve M ilgili parçacığın kütlesidir.

5. TARTIŞMA

5.1. Osilatörlerin Enerji Seviyeleri

Osilatörlerin standart enerji özdeğer denklemleri $s = 1/2$ ve $s = 1$ parçacıkları için kuadratik formda ve $s = 3/2$ ve $s = 2$ parçacıkları için kuartik formda bulunmuştur. Kuantum gravite çerçevesinde zitterbewegung parçacıkları için modifiye enerji özdeğer denklemleri $s = 1/2$ ve $s = 1$ için kuartik; $s = 3/2$ ve $s = 2$ için sekstiktir. Kuartik denklemlerin analitik çözümü vardır (Weisstein 2024). Ancak fiziksel tartışma yapmak için kullanışsızdır. Sekstik polinom denklemlerinin genel analitik bir çözümü yoktur. Bu nedenle kuartik ve sekstik özdeğer denklemleri sayısal olarak çözüldükten sonra elde edilen özdeğerler grafik üzerinden tartışılmıştır.

Landau osilatörü potansiyelindeki spinli parçacıkların enerji seviyeleri ile mekanik osilatör potansiyelindeki spinli parçacıkların enerji seviyeleri aynıdır. Nutku osilatörü potansiyelindeki spinli parçacıkların enerji seviyeleri Landau osilatörünün enerji seviyelerinden farklıdır.

5.1.1. Landau osilatörü potansiyelinde zitterbewegung parçacıklarının modifiye enerji seviyeleri

$s = 1/2$ parçacığı için kuadratik enerji özdeğeri (4.1) denkleminin çözümü ve non-relativistik limiti şudur:

$$E_{l,r} = \pm M \sqrt{1 + \frac{4|\omega|}{M}(n_{l,r} + 1)},$$

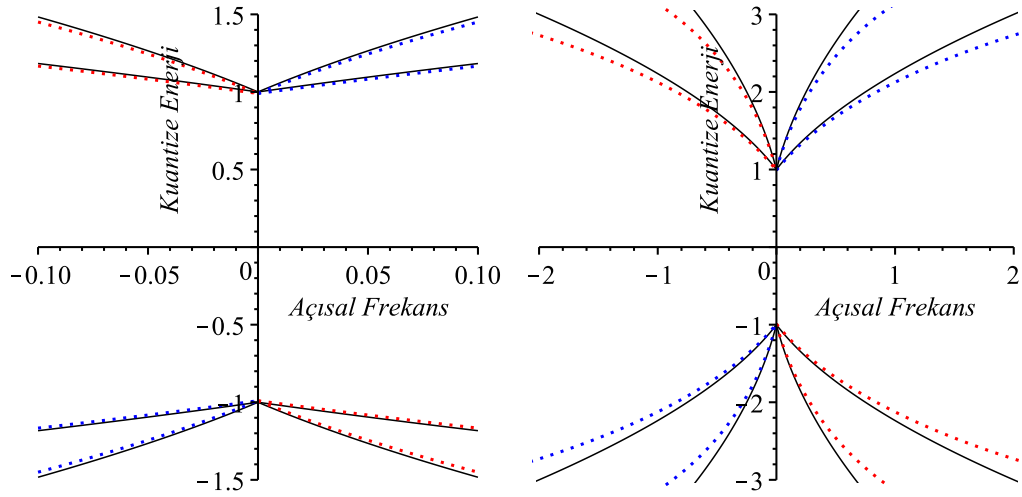
$$\approx M + 2|\omega|(n_{l,r} + 1).$$

Non-relativistik limitte negatif enerjili durumların spinörü sıfırlandığı için negatif enerjinin non-relativistik limiti hesaplanmamıştır. Kuartik modifiye enerji özdeğeri (4.2) denkleminin analitik tam çözümü uzun bir ifadedir. Bunun yerine non-relativistik limiti şu şekilde hesaplanabilir:

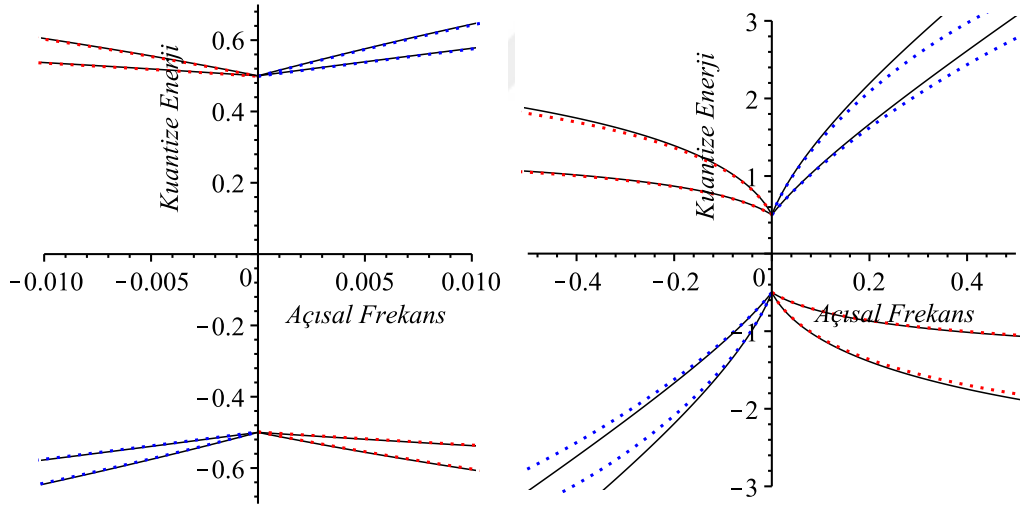
$$\varepsilon_{l,r} \approx [M + 2|\omega|(n_{l,r} + 1)] [1 - \beta (M^2 + 4M|\omega|(n_{l,r} + 1) - 2|\omega|^2(n_{l,r} + 1)^2)].$$

Şekil (5.1) ile zayıf alan yaklaşıklığındaki doğrusallık ile şiddetli alan yaklaşıklığındaki karekök ile orantılı enerjideki artışlar gösterilmiştir. Kuantum gravite altında enerji seviyeleri standart seviyelerden daha küçüktür.

$s = 1$ parçacığı için kuadratik enerji özdeğeri (4.3) denkleminin çözümü ve non-



Şekil 5.1. $s = 1/2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durum ile ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Gerçek enerji seviyesi, standart enerjiden daha düşüktür. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz.



Şekil 5.2. $s = 1$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durum ile ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz.

relativistik limiti şudur:

$$\begin{aligned} \frac{E_l}{M} &= \frac{2|\omega|}{M} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4|\omega|^2}{M^2} + \frac{4|\omega|}{M}(n_l + 3/2)}, \\ \frac{E_r}{M} &= -\frac{2|\omega|}{M} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4|\omega|^2}{M^2} + \frac{4|\omega|}{M}(n_r + 3/2)}, \\ E_{l,r} &\approx \frac{M}{2} + 4|\omega|(n_{l,r} + 2). \end{aligned}$$

Burada M , spin-1 parçacığının kütlesidir. Non-relativistik limitte sağ dairesel ile sol dairesel enerji seviyeleri aynıdır. Bu durum Şekil (5.2) ile gösterilmiştir. Kuartik modifiye enerji özdeğeri (4.4) denkleminin analitik tam çözümü vardır, ancak fiziksel tartışma yapmak için kullanışsızdır. Yine de non-relativistik limiti şu şekilde hesaplanabilir:

$$\varepsilon_{l,r} \approx \frac{M}{2} + 4|\omega|(n_{l,r} + 2) - \beta \left[\frac{M^3}{8} + 3M^2|\omega|(n_{l,r} + 2) + 12M|\omega|^2(n_{l,r} + 2)(n_{l,r} + 3) \right].$$

Burada $|\omega|/M \ll 1$ yaklaşıklığı kullanıldığı için $\beta\omega^3$ ihmal edilmiştir. Şekil (5.2) incelendiğinde şiddetli alanda, $s = 1/2$ parçacığının aksine, enerji seviyeleri enerji eksenine göre simetrik değildir. Gerçek enerji seviyesi, standart enerjiden daha küçüktür.

$s = 3/2$ parçacığının standart enerji özdeğeri (4.5) denklemi standart durumda bile kuartiktir. Kuartik denklemlerin uzun ifadeler içermesi fiziksel tartışmaları zorlaştırır. Öte yandan modifiye enerji özdeğeri (4.6) denklemi sekstiktir. Bu nedenle enerji seviyeleri sayısal olarak çözülerek bulunduktan sonra grafikleri çizilebilir. Şekil (5.3) ile $s = 3/2$ parçacığının enerji seviyeleri incelenmiştir. $s = 1/2$ ve $s = 1$ parçacıklarının aksine, $s = 3/2$ parçacığının sol dairesel pozitif enerjili durumları belirli frekans aralığında tek duruma çöker ve frekans arttıkça tekrar ayrışır. Bu frekans bölgesinde elde edilen negatif imajiner enerji ile pozitif enerjili durumların minimum yaşam süresi belirlenebilir. Sol dairesel negatif enerjili durumlar ile sağ dairesel pozitif enerjili durumların çökmesi ve ayrışması yoktur. Ancak sağ dairesel negatif enerjili durumlarda çökme ayrışma sol dairesel pozitif enerjili durumlar ile benzer şekilde gerçekleşir. Gerçek enerji seviyeleri, standart enerjiden daha küçüktür.

Sol dairesel pozitif enerjili durumların $\omega = [0.025, 3.5]$ ve sağ dairesel negatif enerjili durumların $\omega = [-3.5, -0.025]$ frekans aralıklarındaki ekstremum imajiner enerjileri durumların boyutsuz yaşam süreleri hakkında bilgi verir:

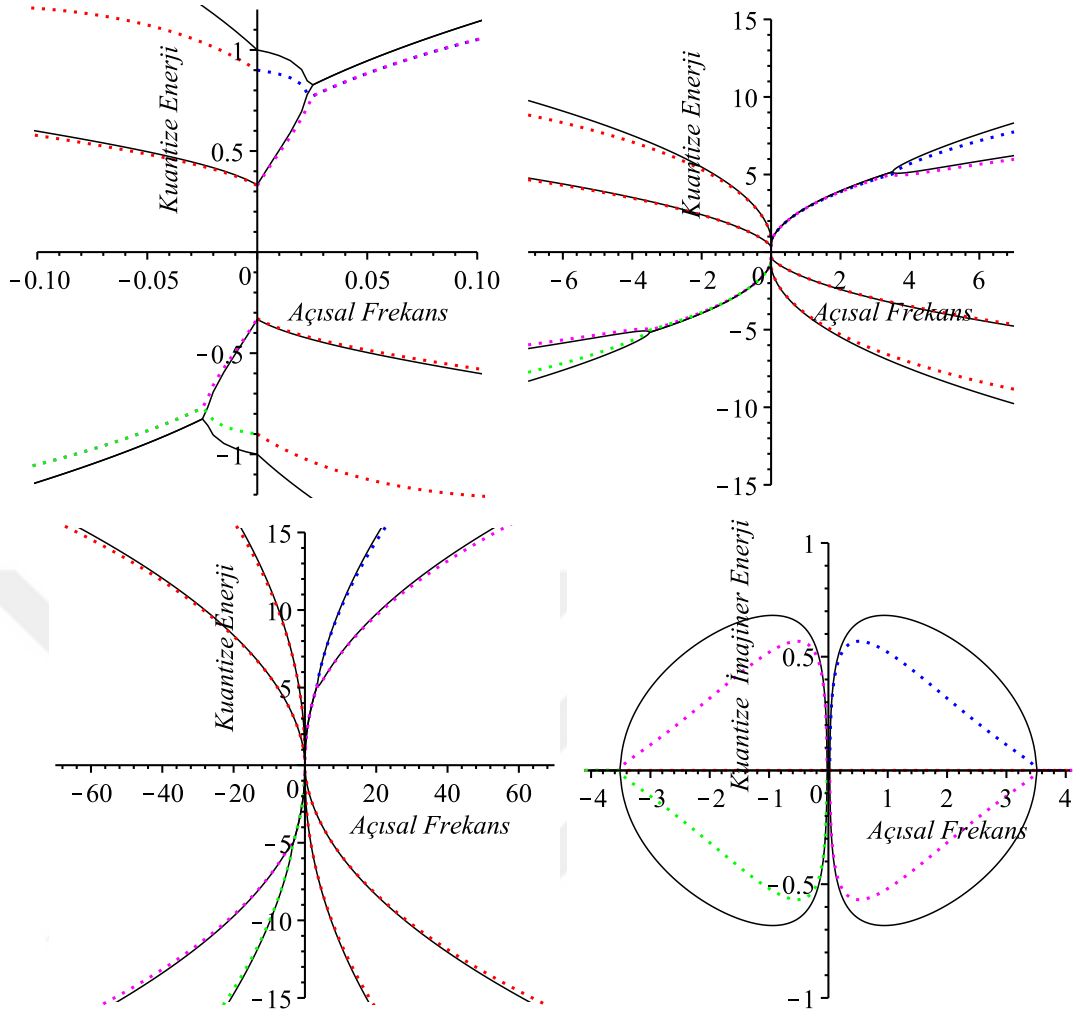
$$\text{Standart: } \omega = 0.94, \quad \Gamma_l = -0.682i, \quad \tau_{1/2} = 1.467 \quad ,$$

$$\text{GUP: } \omega = 0.52, \quad \Gamma_l = -0.568i, \quad \tau_{1/2} = 1.761 \quad .$$

Sağ dairesel için aynı değerler geçerlidir. $\frac{\hbar}{Mc^2}$ zaman boyutunda olduğu için saniye cinsinden yaşam süreleri şu şekildedir:

$$\text{Standart: } \tau_{1/2} = 1.467 \frac{\hbar}{Mc^2},$$

$$\text{GUP: } \tau_{1/2} = 1.761 \frac{\hbar}{Mc^2}.$$



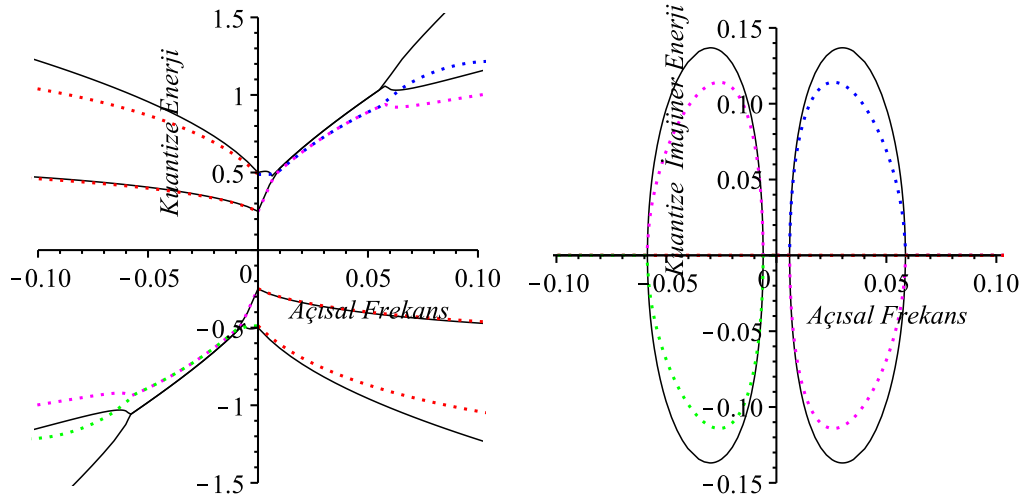
Şekil 5.3. $s = 3/2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. Kuantum gravitenin etkisini göstermek için non-relativistik limitte $\beta = 0.1$ ve diğerlerinde $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz.

Örneğin $1 \text{ GeV}/c^2$ kütleli bir $s = 3/2$ parçacığının yaşam süreleri

$$\text{Standart: } \tau_{1/2} = 7.84 \times 10^{-25} \text{ s},$$

$$\text{GUP: } \tau_{1/2} = 9.41 \times 10^{-25} \text{ s}.$$

Dolayısıyla kuantum gravite ile elde edilen gerçek yaşam süresi daha kısadır. Öte yandan böyle bir fiziksel olayın gerçekleşmesi için gerekli manyetik alan şiddeti hesaplanabilir. $Mc^2/\hbar$ frekans boyutunda olduğu için Larmor frekansından manyetik alana geçilebilir: $B = 2\omega M^2 c^2 / (q\hbar)$. Örneğin $1 \text{ GeV}/c^2$ kütleli bir parçacığın durumlarının çökmesini



Şekil 5.4. $s = 2$ parçacığının Landau osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin boyutsuz Larmor açısal frekansına karşı değişimleri. Kuantum gravitenin etkisini göstermek için non-relativistik limitte $\beta = 0.1$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir. Pozitif enerjili durumlar negatif enerjili durumlar ile karışmaz.

sağlayacak manyetik alan şiddeti şudur:

$$\begin{aligned} \text{Standart: } B &= 4.82 \times 10^{16} \text{ Tesla,} \\ \text{GUP: } B &= 2.67 \times 10^{16} \text{ Tesla.} \end{aligned}$$

Bu sonuç, laboratuvar ölçeğine göre aşırı şiddetli bir manyetik alandır. Evrenin erken dönemlerindeki şiddetli manyetik alanlar Grasso ve Rubinstein (2001) tarafından incelenmiştir. Her şeye rağmen durumlarda böyle bir çökmenin gerçekleşmesi için gerekli gerçek manyetik alan şiddeti standart durumdan küçüktür.

$s = 2$ parçacığının enerji özdeğer (4.7) denklemi kuartiktir ve modifiye enerji özdeğer (4.8) sekstiktir. Enerji özdeğerleri sayısal olarak elde edildikten sonra grafikleri çizilirse Şekil (5.4) elde edilir. $s = 1/2$ ve $s = 1$ parçacıklarının aksine, $s = 2$ parçacığının davranışı $s = 3/2$ parçacığına benzer şekilde sol dairesel pozitif enerjili durumları belirli frekans aralığında tek duruma çöker ve frekans arttıkça tekrar ayrışır. Bu frekans bölgesinde elde edilen negatif imajiner enerji ile pozitif enerjili durumların minimum yaşam süresi belirlenebilir. Sol dairesel negatif enerjili durumlar ile sağ dairesel pozitif enerjili durumların çökmesi ve ayrışması yoktur. Ancak sağ dairesel negatif enerjili durumlarda çökme ayrışma sol dairesel pozitif enerjili durumlar ile benzer şekilde gerçekleşir. Gerçek enerji seviyeleri, standart enerjiden daha küçüktür. Buna göre $s = 2$ parçacığının davranışı

$s = 3/2$ parçacığınıninkine benzemektedir.

$$\text{Standart: } \omega = 0.03, \quad \Gamma_l = -0.137i, \quad \tau_{1/2} = 7.31 \quad ,$$

$$\text{GUP: } \omega = 0.026, \quad \Gamma_l = -0.114i, \quad \tau_{1/2} = 8.76 \quad .$$

Sağ dairesel için aynı değerler geçerlidir. $\hbar/Mc^2$ zaman boyutunda olduğu için saniye cinsinden yaşam süreleri şu şekildedir:

$$\text{Standart: } \tau_{1/2} = 7.31 \frac{\hbar}{Mc^2},$$

$$\text{GUP: } \tau_{1/2} = 8.76 \frac{\hbar}{Mc^2}.$$

Örneğin gravitonun enerji durumlarındaki çökme ile evrenin var olduğunu düşünebiliriz. Evrenin yaşı $\tau_{1/2} = 13.787$ Gyr alınırsa evrenle birlikte yaratılan gravitonun kütlesi hesaplanabilir:

$$\text{Standart: } M = 7.31 \frac{\hbar}{\tau_{1/2} c^2} = 1.11 \times 10^{-32} \text{eV}/c^2,$$

$$\text{GUP: } M = 8.76 \frac{\hbar}{\tau_{1/2} c^2} = 1.33 \times 10^{-32} \text{eV}/c^2.$$

Evrendeki kalıntı manyetik alan şiddeti ise

$$\text{Standart: } B = 5.67 \times 10^{-67} \text{Tesla},$$

$$\text{GUP: } B = 8.14 \times 10^{-67} \text{Tesla}.$$

mertebesinde olduğu düşünülebilir.

5.1.2. Nutku osilatör potansiyelinde zitterbewegung parçacıklarının modifiye enerji seviyeleri

$s = 1/2$ spinli parçacığın (4.10) özdeğer denkleminin çözümü olarak enerji özdeğerleri şunlardır:

$$E_l = 2|\omega|(n_l + 1) \pm \sqrt{(M + |\omega|/2)^2 + 4|\omega|^2(n_l + 1)^2},$$

$$E_r = 2|\omega|(n_r + 1) \pm \sqrt{(M - |\omega|/2)^2 + 4|\omega|^2(n_r + 1)^2}.$$

Non-relativistik limitleri şunlardır:

$$\begin{aligned} E_l &\approx M + 2|\omega|(n_l + 5/4), \\ E_r &\approx M + 2|\omega|(n_r + 3/4). \end{aligned}$$

Modifiye enerji özdeğer (4.11) denklemi kuadrattır. Analitik çözümleri uzun ifadeler içerdiği için fiziksel tartışma yapılması zordur. Bu nedenle sayısal çözümler yapılarak grafikler üzerinden fiziksel tartışma yapılabilir. Yine de non-relativistik limitleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &\approx M + 2|\omega|(n_l + 5/4) - \beta M (M^2 + 6M|\omega|(n_l + 5/4)), \\ \varepsilon_r &\approx M + 2|\omega|(n_r + 3/4) - \beta M (M^2 + 6M|\omega|(n_r + 3/4)). \end{aligned}$$

Şekil (5.5) incelendiğinde pozitif enerjili durumlar kuantum sayısı ve açısal frekans ile orantılı artmaktadır. Ancak sağ dairesel negatif enerjili durumların enerjisi azalarak sıfırlanmaktadır ve sonra negatif olarak artmaktadır. Sol dairesel negatif enerjili durumların enerjisi azalmaktadır ancak sıfırlanmadan tekrar artmaktadır. Kuantum gravite altında enerjiler standart enerjilerden daha küçüktür. Negatif enerjili durumlar anti-parçacık durumları ve $|\omega| = |\mu|/3 = |\sqrt{-3\Lambda}|$ eşitliği ile $|\Lambda|$ karanlık enerji olarak ele alınırsa, parçacık ve anti-parçacık enerji seviyelerindeki bu farklılık evrendeki baryon anizotropisini açıklayabilir. Özellikle sağ dairesel Nutku osilatörü bir model olarak düşünülürse, sağ dairesel anti-parçacığın enerjisinin sıfırlandığı bir karanlık enerji değeri vardır: $\omega \approx -0.2$. Ancak bu değerde sağ dairesel parçacığın enerjisi sıfır değildir. Dolayısıyla Λ karanlık enerjinin varlığında evrende sağ dairesel parçacıklar pozitif enerjili olarak var olabilirken anti-parçacıklar sıfır enerjili olarak kalabilirler.

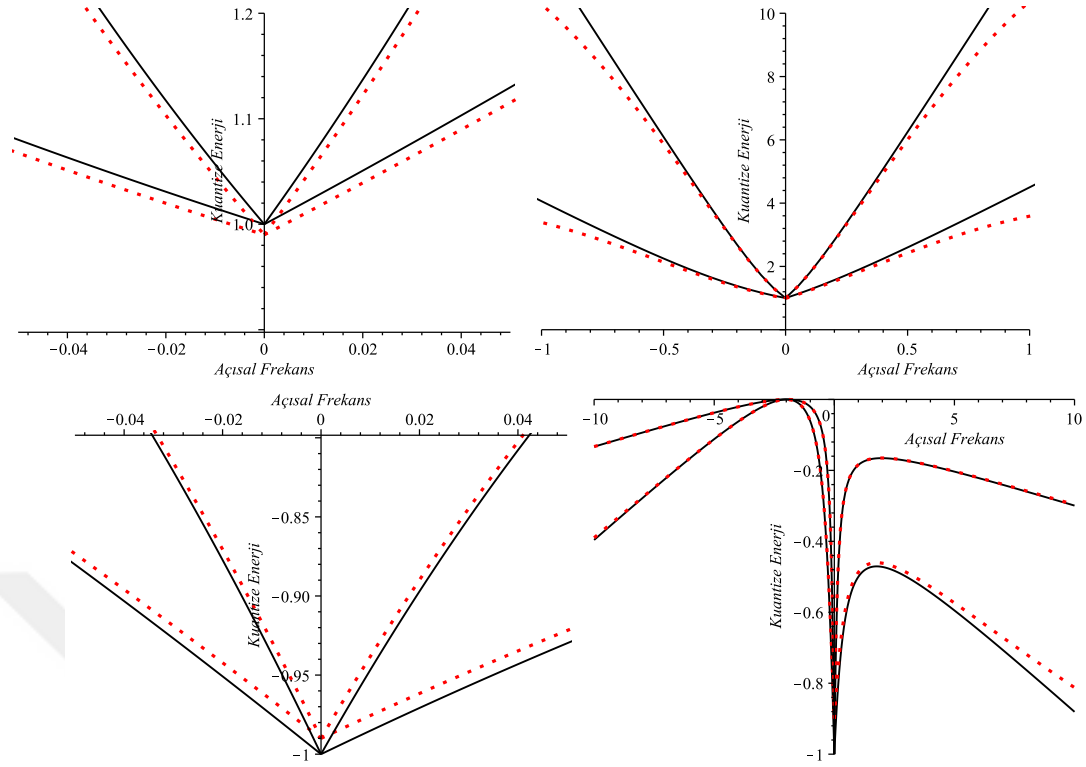
$s = 1$ spinli parçacığın (4.12) denkleminin çözümü olarak enerji özdeğerleri şunlardır:

$$\begin{aligned} E_l &= 2|\omega|(n_l + 3/2) \pm \sqrt{(M^2/4 + M|\omega| + 4|\omega|^2(n_l + 3/2))^2}, \\ E_r &= 2|\omega|(n_r + 3/2) \pm \sqrt{(M^2/4 - M|\omega| + 4|\omega|^2(n_r + 3/2))^2}. \end{aligned}$$

Non-relativistik limitleri şunlardır:

$$\begin{aligned} E_l &\approx \frac{M}{2} + 2|\omega|(n_l + 2), \\ E_r &\approx \frac{M}{2} + 2|\omega|(n_r + 1). \end{aligned}$$

Modifiye enerji özdeğer (4.13) denklemi kuartıktır. Analitik çözümleri uzun ifadeler içerdiği için fiziksel tartışma yapılması zordur. Bu nedenle sayısal çözümler yapılarak grafikler



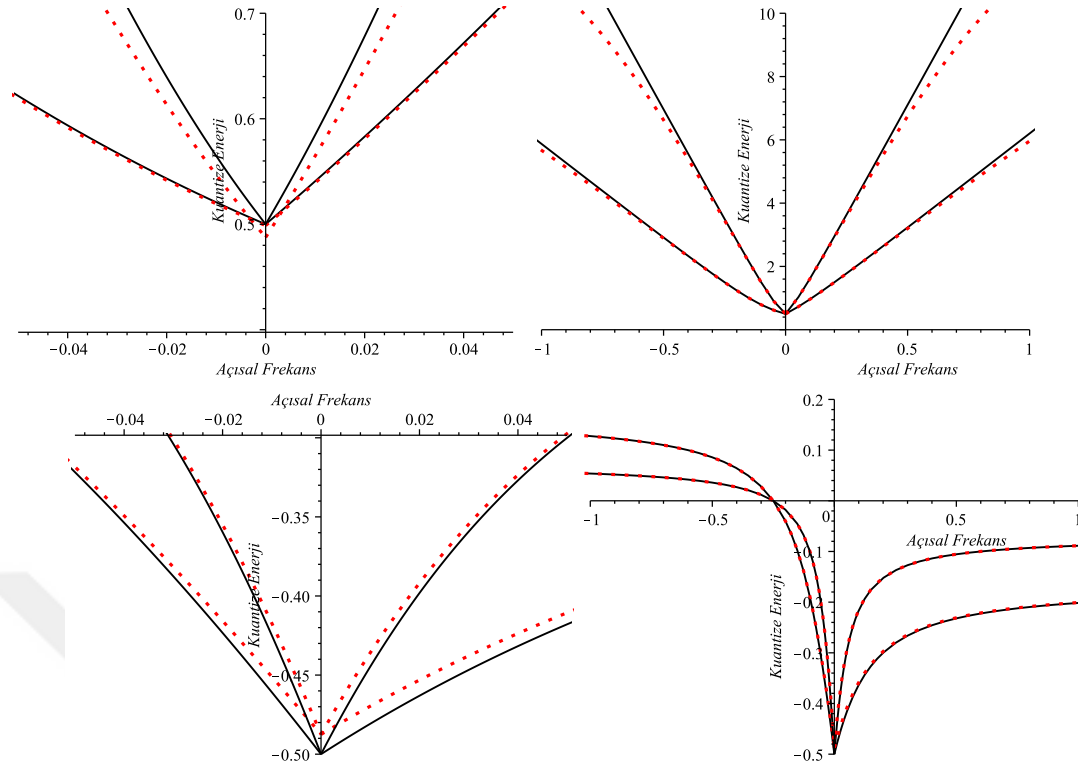
Şekil 5.5. $s = 1/2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban ve ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin $|\omega|/M$ 'ye göre değişimleri. Sabitler $M = 1, \beta = 0.1$. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir.

üzerinden fiziksel tartışma yapılabilir. Yine de non-relativistik limitleri şu şekildedir:

$$\varepsilon_l \approx M + 2|\omega|(n_l + 2) - \frac{\beta M}{2} \left(\frac{M^2}{4} + 3M|\omega|(n_l + 2) \right),$$

$$\varepsilon_r \approx M + 2|\omega|(n_r + 1) - \frac{\beta M}{2} \left(\frac{M^2}{4} + 3M|\omega|(n_r + 1) \right).$$

Şekil (5.6) incelendiğinde pozitif enerjili durumlar kuantum sayısı ve açısal frekans ile orantılı artmaktadır. Ancak sağ dairesel negatif enerjili durumların enerjisi azalarak sıfırlanmaktadır ve sonra $s = 1/2$ parçacığının aksine pozitif olarak artmaktadır. Sol dairesel negatif enerjili durumların enerjisi ise $s = 1/2$ parçacığına benzer şekilde azalmaktadır ve sıfırlanmadan tekrar artmaktadır. Kuantum gravite altında enerjiler standart enerjilerden daha küçüktür. Negatif enerjili durumlar anti-parçacık durumları ve $|\omega| = |\mu|/3 = |\sqrt{-3\Lambda}|$ eşitliği ile $|\Lambda|$ karanlık enerji olarak ele alınırsa, parçacık ve anti-parçacık enerji seviyelerindeki bu farklılık evrendeki baryon anizotropisini açıklayabilir. Özellikle sağ dairesel Nutku osilatörü bir model olarak düşünülürse, sağ dairesel anti-parçacığın enerjisinin sıfırlandığı bir karanlık enerji değeri vardır: $\omega \approx -0.25$. Ancak bu değerde sağ dairesel parçacığın enerjisi sıfır değildir. Dolayısıyla Λ karanlık enerjinin varlığı

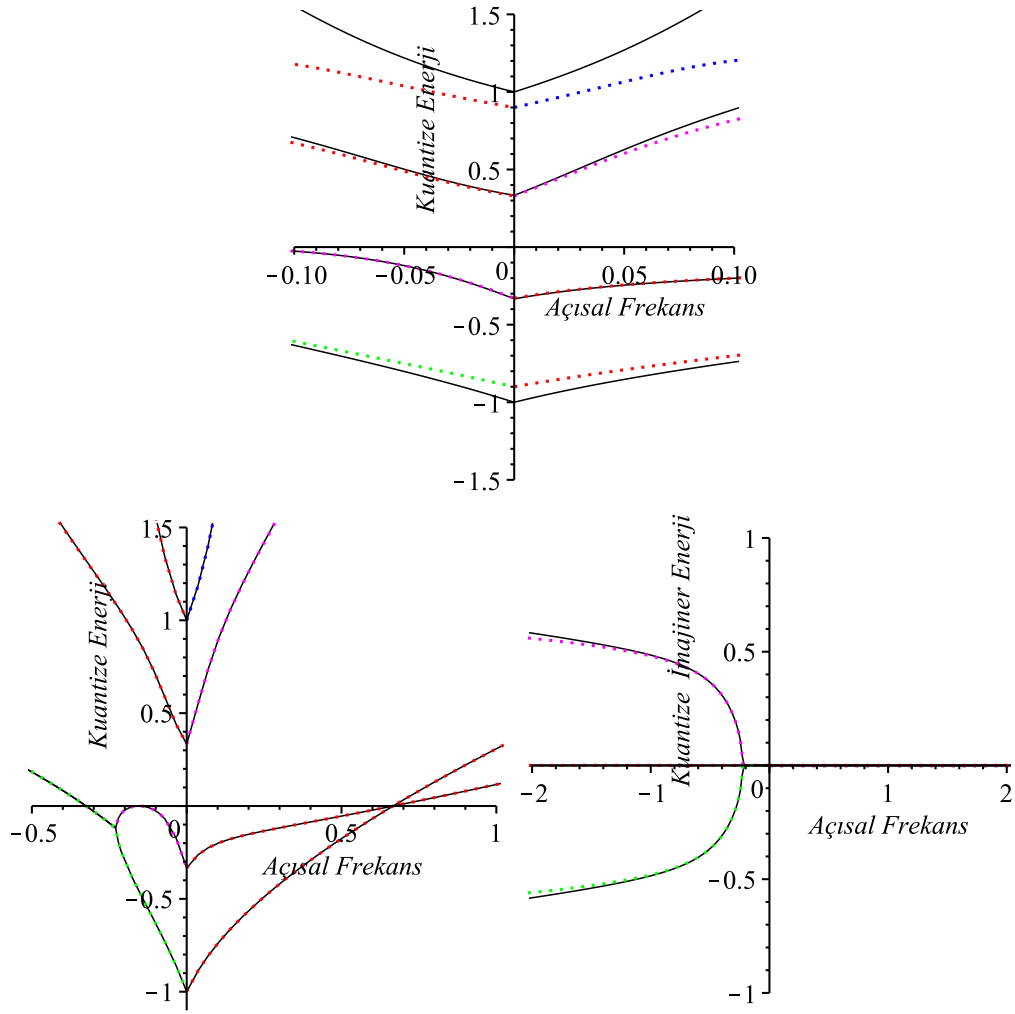


Şekil 5.6. $s = 1$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban ve ikinci uyarılmış durumların enerji seviyelerinin $|\omega|/M$ 'ye göre değişimleri. Sabitler $M = 1, \beta = 0.1$. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir.

ğında evrende sağ dairesel parçacıklar pozitif enerjili olarak var olabilirken anti-parçacıklar sıfır enerjili olarak kalabilirler.

$s = 3/2$ parçacığının enerji özdeğer (4.14) denklemi standart durumda bile kuartiktir. Kuartik denklemlerin uzun ifadeler içermesi fiziksel tartışmaları zorlaştırır. Modifiye enerji özdeğer (4.15) denklemi ise altıncı dereceden bir polinom denklemdir. Bunun yerine enerji seviyeleri sayısal olarak çözülerek bulunduktan sonra grafikleri çizilebilir. Şekil (5.7) ile $s = 3/2$ parçacığının enerji seviyeleri incelenmiştir. $s = 1/2, 1$ parçacıklarının aksine bu kez hem sol hem de sağ dairesel anti-parçacık enerjilerinin sıfırlandığı karanlık enerji değerleri vardır: $\omega \approx 0.7$ ve $\omega \approx -0.3$. Dolayısıyla Λ karanlık enerjinin varlığındaki bir evrende hem sağ hem de sol dairesel $s = 3/2$ parçacıkları pozitif enerjili olarak ve anti-parçacıkları sıfır enerjili olarak var olabilirler. Bununla birlikte sabit manyetik alandaki $s = 3/2$ parçacığı gibi burada da imajiner enerji özdeğerleri vardır. Ancak manyetik alandakinin aksine sadece sağ dairesel $s = 3/2$ parçacığının durumlarında çökme vardır.

$s = 2$ parçacığının enerji özdeğer (4.16) denklemi standart durumda kuartiktir ve modifiye enerji özdeğer (4.17) denklemi ise altıncı dereceden bir polinom denklemdir. Fiziksel tartışmaları kolaylaştırabilmek için enerji seviyeleri sayısal olarak çözülerek



Şekil 5.7. $s = 3/2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) taban durumunun enerji seviyelerinin ω/M 'ye karşı değişimleri. $\beta = 0.01$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesi sol dairesel osilatörün ve $\omega < 0$ sağ dairesel osilatörün enerji seviyeleridir.

bulunduktan sonra grafikleri çizilebilir. Öncelikle $n_{lr} = 0$ taban durumunda (4.16) denkleminin sayısal çözümleri incelenebilir. Şekil (5.8a)'e göre $\omega \approx -0.3$ değerinde sağ dairesel $|22\rangle$ ile $|21\rangle$ durumları birleşerek dejenere hale gelmektedirler. $\omega \approx -0.15$ değerinde $|2-2\rangle$ ile $|2-1\rangle$ durumlarının enerjisi sıfırlanmaktadır ve $\omega \lesssim -0.15$ bölgesinde $|2-1\rangle$ durumu pozitif enerjili hale gelirken $|2-2\rangle$ durumu negatif enerjili kalmaktadır. $\omega \approx 0.25$ değerinde sol dairesel $|2-2\rangle$ ile $|2-1\rangle$ durumlarının enerjisi sıfırlanmaktadır ve sonra pozitif enerjili hale gelmektedirler. $\omega \approx 0.3$ değerinde $|2-1\rangle$ ile $|21\rangle$ birleşip dejenere hale gelmekte ve $\omega \approx 0.9$ değerinde tekrar ayrılmaktadırlar. Bu değerde $|2-1\rangle$ ile $|2-2\rangle$ durumları birleşerek dejenere hale geldikten sonra $\omega \approx 1.25$ değerinde tekrar enerjilerini sıfırlayıp $\omega \gtrsim 1.25$ bölgesinde negatif enerjili hale gelmektedirler. Şekil (5.8b)'ye göre $\omega \approx -0.3$ değerinden itibaren sağ dairesel $|22\rangle$ durumu pozitif imajiner enerji özdeğer-

ler vermeye başlarken $|21\rangle$ durumu negatif imajiner özdeğerlere sahip olmaya başlar ve $\omega \lesssim -0.3$ bölgesinde bu değerler büyüklük olarak lineer artış göstermektedir. Sağ dairesel $|22\rangle$ ve $|21\rangle$ durumlarının nasıl bir sönüme uğradığı $Q = \frac{\text{Re}(E)}{2\text{Im}(E)}$ olarak tanımlanan kalite faktörü üzerinden tartışılabilir. Şekil (5.9b)'deki $Q(\omega)$ grafiğinin $\omega < 0$ bölgesinde sağ dairesel $|22\rangle$ ve $|21\rangle$ durumları $\omega \gtrsim -2.5$ bölgesinde $Q \gg 1/2$ ile yavaş sönüme ve $\omega \lesssim -2.5$ bölgesinde $Q \ll 1/2$ ile hızlı sönüme uğramaktadır. Sağ dairesel $|2-1\rangle$ ve $|2-2\rangle$ durumlarında herhangi bir sönme yoktur. Yine Şekil (5.9b)'deki $Q(\omega)$ grafiğinin $\omega > 0$ bölgesinde sol dairesel $|21\rangle$ ve $|2-1\rangle$ durumları $\omega \lesssim 1.2$ bölgesinde kalite faktörünün $1/2$ civarında olması nedeniyle tamamen sönmeden önce birkaç salınım yapabilecek süresinin olduğu söylenebilir. Nitekim $\omega \gtrsim 1.2$ bölgesine geçerken $|21\rangle$ durumu sönmekten kurtulurken $|2-1\rangle$ ile $|2-2\rangle$ durumları sönmeye başlamıştır ve $\omega \approx 12$ değerine kadar bu durumlar birleştikten sonra $\omega \gtrsim 12$ bölgesinde $Q \gg 1/2$ kalite çarpanıyla yavaş sönüme uğrarlar. $\omega \approx 18$ değerine ulaştığında ise sol dairesel $|2-1\rangle$ ile $|2-2\rangle$ durumlarının imajiner enerjileri tamamen sıfırlanır ve ω arttıkça dejenere negatif gerçel enerjiye sahip olarak kalırlar. Benzer bir tartışma Şekil (5.10) ile (5.11) üzerinden birinci uyarılmış durum için yapılabilir. Sonuç olarak hiçbir şekilde sönüme uğramayan sol dairesel $|22\rangle$ durumudur.

$s = 2$ parçacığının kütlesi karanlık enerjiden hesaplanabilir (Inan vd. 2024). Evrenle birlikte uzay-zamanının sol dairesel graviton ile oluştuğu varsayılırsa, kuantum gravite çerçevesinde kritik sönümde kalite çarpanını $1/2$ yapan $\omega \approx 7.5$ değeri Şekil (5.12)'de gösterilmiştir. Buna göre

$$\frac{\omega}{M_G} \rightarrow \frac{\hbar c \omega}{M_G c^2} = 7.5$$

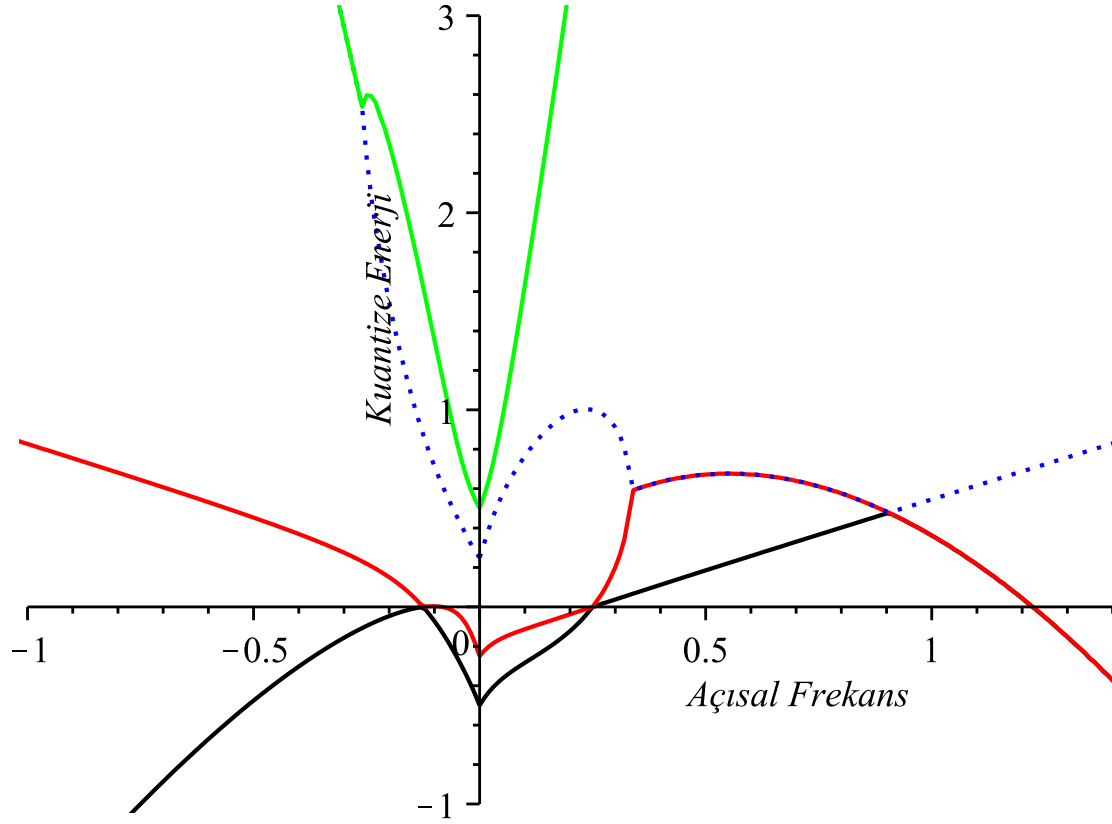
ile tekrar boyut kazandırılıp $|\omega| = \sqrt{-3\Lambda}$ tanımlaması hatırlanırsa, en basit karanlık enerji olan kozmolojik sabitin $\Lambda = 1.11 \times 10^{-52} \text{m}^{-2}$ değeri kullanılırsa $s = 2$ parçacığının modifiye kütlesi

$$M_G = \frac{\hbar c \sqrt{-3\Lambda}}{12c^2} = 8.56 \times 10^{-70} \text{kg} = 4.8 \times 10^{-34} \text{eV}/c^2 \ll 7.7 \times 10^{-23} \text{eV}/c^2$$

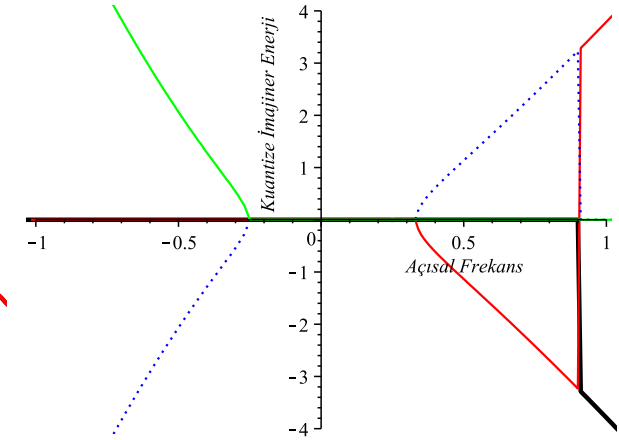
bulunur. Gravitonun modifiye kütlesi standart tahminden daha büyüktür: $M_G > M$ Öte yandan kritik sönümde modifiye imajiner enerji $\Gamma \approx -29iM_G c^2 = \hbar/\tau_{1/2}$ kullanılarak modifiye yarı-ömür hesaplanabilir:

$$\tau_{G1/2} = \frac{\hbar}{29M_G c^2} = 4.73 \times 10^{16} \text{s} = 1.5 \text{Gyr}.$$

Modifiye yarı-ömür mevcut büyük patlama zamanından, 13.6Gyr , küçük olmakla birlikte modifiye değer standart tahminden daha büyüktür: $\tau_{G1/2} > \tau_{1/2}$.

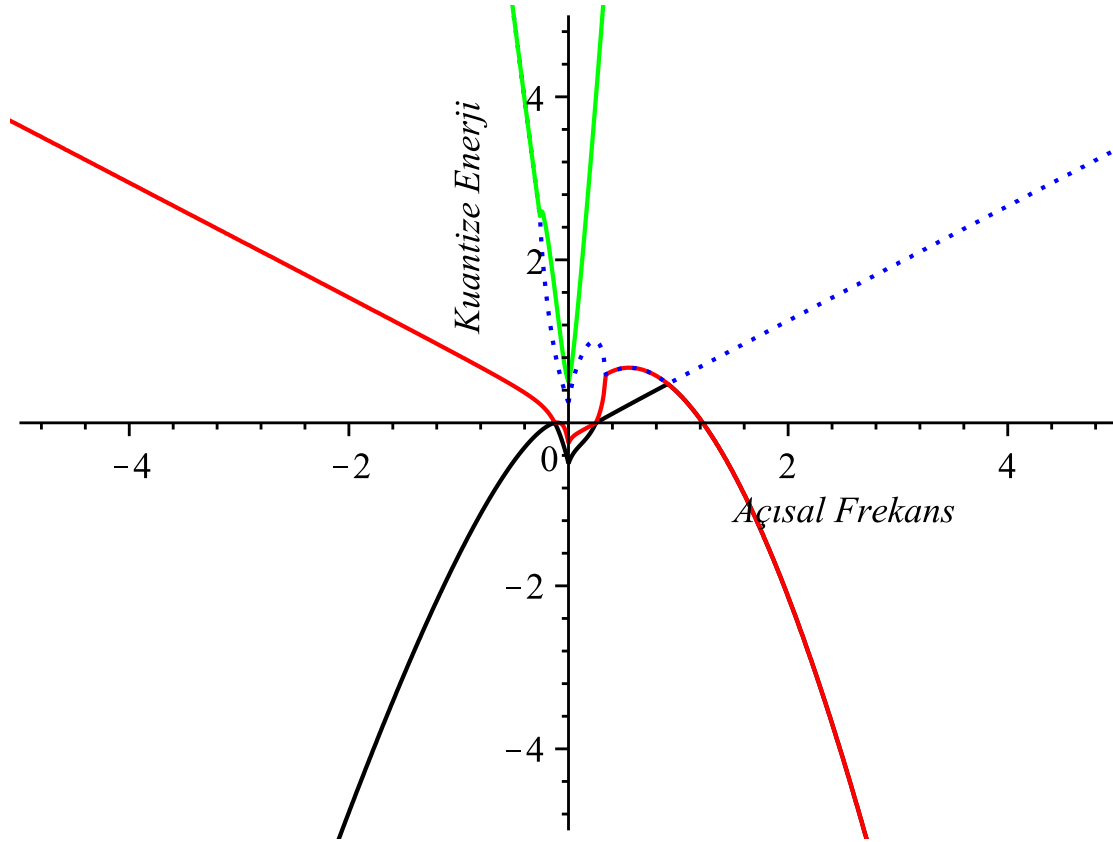


(a) Kuantize gerçel enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

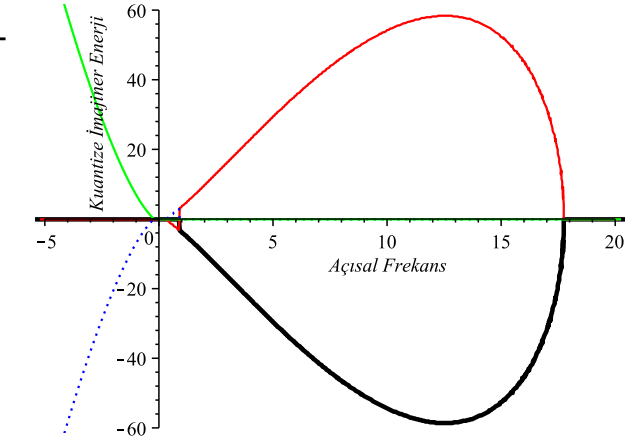
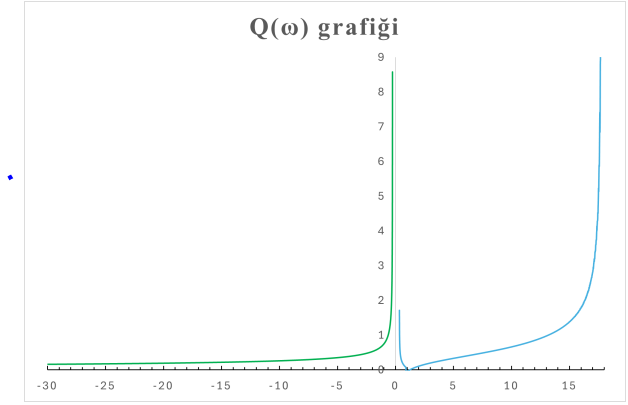


(b) Kuantize imajiner enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

Şekil 5.8. (4.16) denkleminin taban durumda ($n_{l,r} = 0$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. $\omega > 0$ bölgesindeki eğriler sol dairesel ve $\omega < 0$ bölgesindeki eğriler sağ dairesel spin-2 zitterbewegung parçacıklarının dörder enerji özdeğerleridir. $+1/2$ değerinden başlayan yeşil düz çizgi $|22\rangle$ spin durumunun (sadece sağ dairesel için yarı-normal) enerjisi, $+1/4$ değerinden başlayan mavi noktalı çizgi $|21\rangle$ spin durumunun (sağ ve sol dairesel için yarı-normal) enerjisi, $-1/4$ değerinden başlayan kırmızı düz çizgi $|2-1\rangle$ spin durumunun (sadece sol dairesel için yarı-normal) enerjisi ve $-1/2$ değerinden başlayan siyah düz çizgi $|2-2\rangle$ spin durumunun (sadece sol dairesel için yarı-normal) enerjisidir.

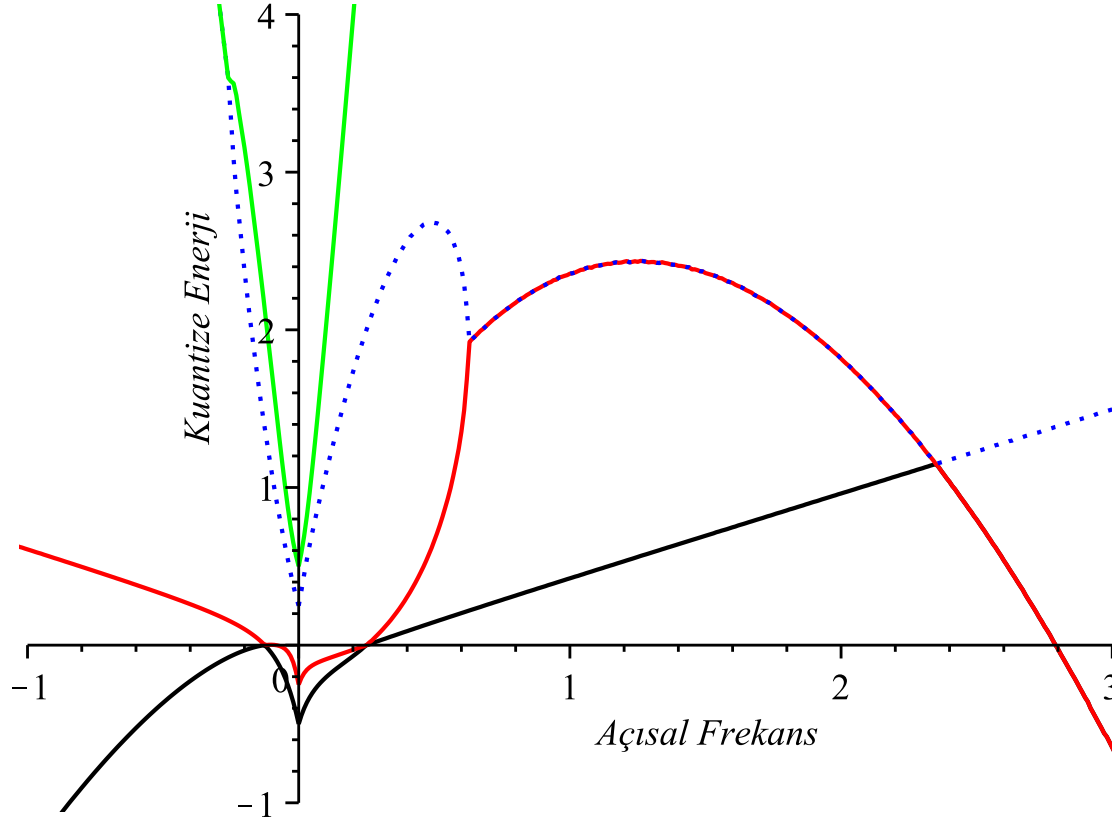


(a) Kuantize gerçel enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

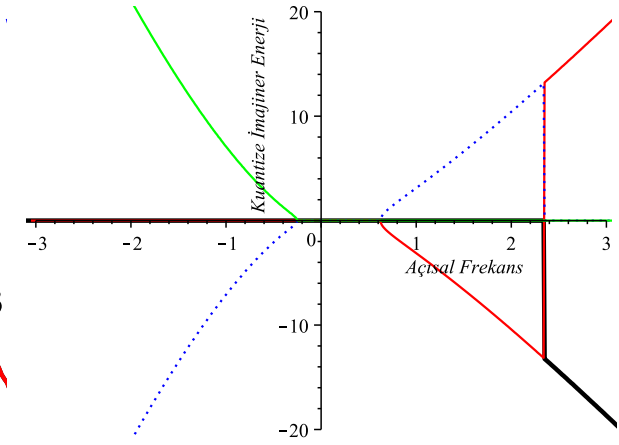


(b) Kalite çarpanı ile kuantize imajiner enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimleri

Şekil 5.9. (4.16) denkleminin taban durumda ($n_{l,r} = 0$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Şekil (5.8)'in bağlığında tanımlanan enerji özdeğerlerinin $|\omega| > 1$ değerlerine göre değişimleri.

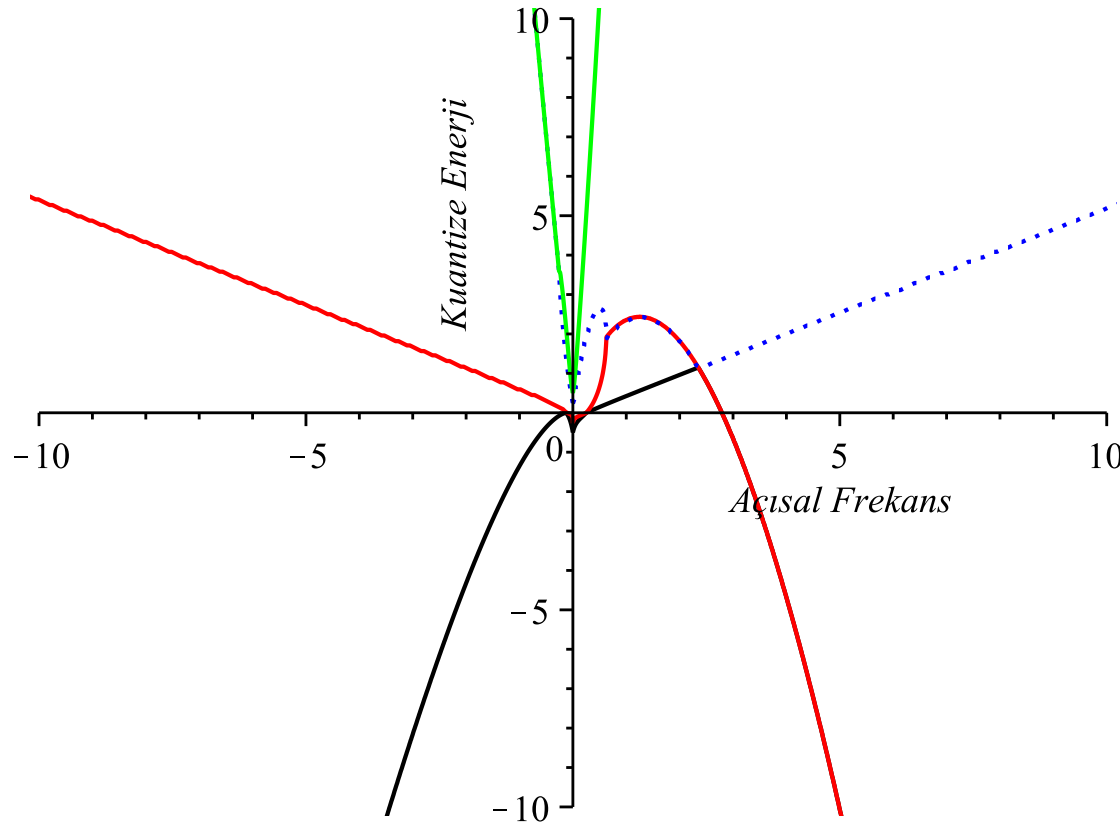


(a) Kuantize gerçel enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

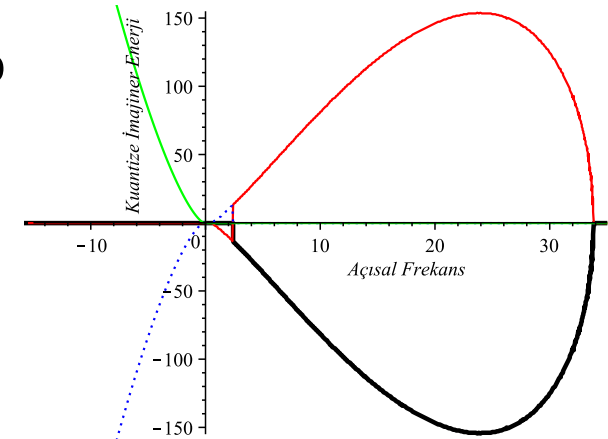


(b) Kuantize imajiner enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

Şekil 5.10. (4.16) denkleminin birinci uyarılmış durumda ($n_{l,r} = 1$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Eğriler, Şekil (5.8) başlığında tanımlanmıştır.

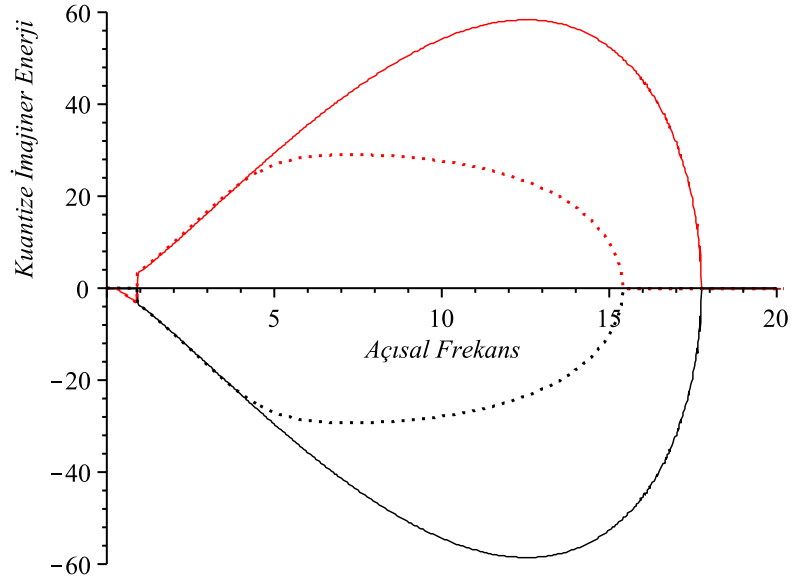


(a) Kuantize gerçel enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi



(b) Kuantize imajiner enerjinin boyutsuz ($|\omega|/M$) açısal frekans ile değişimi

Şekil 5.11. (4.16) denkleminin birinci uyarılmış durumda ($n_{l,r} = 1$) sayısal çözümleri. $M = 1$ alınmıştır. Şekil (5.9)'in bağlığında tanımlanan enerji özdeğerlerinin $|\omega| > 1$ değerlerine göre değişimleri.



Şekil 5.12. Sol dairesel $s = 2$ parçacığının Nutku osilatör potansiyelindeki standart (düz çizgi) ve modifiye (noktalı çizgi) (4.17) taban durumunun denkleminin çözümü olarak imajiner enerji seviyelerinin ω/M 'ye karşı değişimleri. $\beta = 0.0001$ alınmıştır.

5.2. Kerr-Newman Karadelığının Zitterbewegung Parçacıklarının Oluşturduğu Modifiye Hawking Sıcaklığı

Kerr-Newman (KN) karadelığının Boyer-Lindquist türü koordinatlardaki metriği şudur (Caldarelli vd. 2000; Li ve Chen 2015):

$$-ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [adt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2.$$

Burada

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2M_B r + z^2,$$

M_B karadelığın kütlesi, $a = J/M_B$ karadelığın açısal momentumunun kütlesine oranı olarak tanımlanan dönme parametresi, $z^2 = q_e^2 + q_m^2$ olmak üzere q_e elektriksel yük ve q_m manyetik yük parametreleridir. $\Delta(R) = 0$ ile tanımlanan R olay ufkundaki simetri jeneratörleri $\partial_t + \Omega_H \partial_\varphi$ Killing vektörleridir. Burada Ω_H olay ufkunun açısal hızıdır. Olay ufkuyla birlikte dönen sonsuzdaki bir gözlemciye göre metriği yazmak için $d\varphi = d\phi + \omega dt$ koordinat sürüklemesi yapılabilir. Bu durumda metrikte $dt d\phi$ 'nin katsayısı

sıfırlanır. Böylece karadeliğin açısal hızı ve bunu kullanarak olay ufğunun açısal hızı

$$\omega = \frac{a}{\Sigma^2} (r^2 + a^2 - \Delta), \quad \Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta,$$

$$\omega(R) = \Omega_H = \frac{a}{R^2 + a^2},$$

biçiminde hesaplanırken metrik ise kanonik bir biçime sahip olur:

$$-ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad d\phi = d\varphi - \omega dt.$$

Burada N geçiş (lapse) fonksiyonudur:

$$N^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2}.$$

Karadeliğin vektör potansiyeli şu şekildedir (Caldarelli vd. 2000):

$$A = \frac{1}{\rho^2} \{ -(q_e r + q_m a \cos \theta) dt + (a r q_e \sin^2 \theta + q_m (r^2 + a^2) \cos \theta) d\varphi \}.$$

Vektör potansiyel de $d\varphi = d\phi + \omega dt$ ile karadelikle birlikte dönen sonsuzdaki gözlemciye göre ayarlanırsa, $A = A_\mu dx^\mu = -V dt + A_\phi d\phi$ şu hali alır:

$$V = \frac{1}{\Sigma^2} [q_e r (r^2 + a^2) + q_m a \cos \theta \Delta],$$

$$A_\phi = \frac{1}{\rho^2} [q_e r a \sin^2 \theta + q_m (r^2 + a^2) \cos \theta],$$

ve olay ufğunun vektör potansiyeli sonsuzdaki gözlemci tarafından şu formdadır:

$$V(R) = \frac{q_e R}{R^2 + a^2},$$

$$A_\phi(R) = \frac{q_e R a \sin^2 \theta + q_m (R^2 + a^2) \cos \theta}{R^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

Birlikte dönen sonsuzdaki gözlemcinin karadeliğin ekvator düzlemini gözlemlediği durumda $\theta = \pi/2$ alınabilir. Buna göre metrik şu hali alır:

$$-ds^2 = -F dt^2 + \frac{1}{G} dr^2 + K d\phi^2.$$

Burada

$$\begin{aligned} F &= N^2 = \frac{r^2 \Delta}{\Sigma^2}, & \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta, \\ G &= \frac{\Delta}{r^2}, \\ K &= \frac{\Sigma^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Vektör potansiyelin bileşenleri ile açısal hız ise şunlardır:

$$\begin{aligned} V &= \frac{q_e r (r^2 + a^2)}{\Sigma^2}, & V(R) &= \frac{q_e R (R^2 + a^2)}{\Sigma^2}, \\ A_\phi &= \frac{q_e a}{r}, & A_\phi(R) &= \frac{q_e a}{R}, \\ \omega &= \frac{a}{\Sigma^2} (r^2 + a^2 - \Delta), & \Omega_H &= \frac{a}{R^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Buna göre $F(R) = 0$ ile Kerr-Newman karadeliğinin kütlesi

$$M_B = \frac{1}{2R} (R^2 + a^2 + z^2)$$

ve standart Hawking sıcaklığı şudur:

$$T_H = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} = \frac{R^2 - a^2 - z^2}{4\pi R (R^2 + a^2)}.$$

Burada

$$f = F'(R) = R \frac{R^2 - a^2 - z^2}{(R^2 + a^2)^2}, \quad g = G'(R) = \frac{R^2 - a^2 - z^2}{R^3}.$$

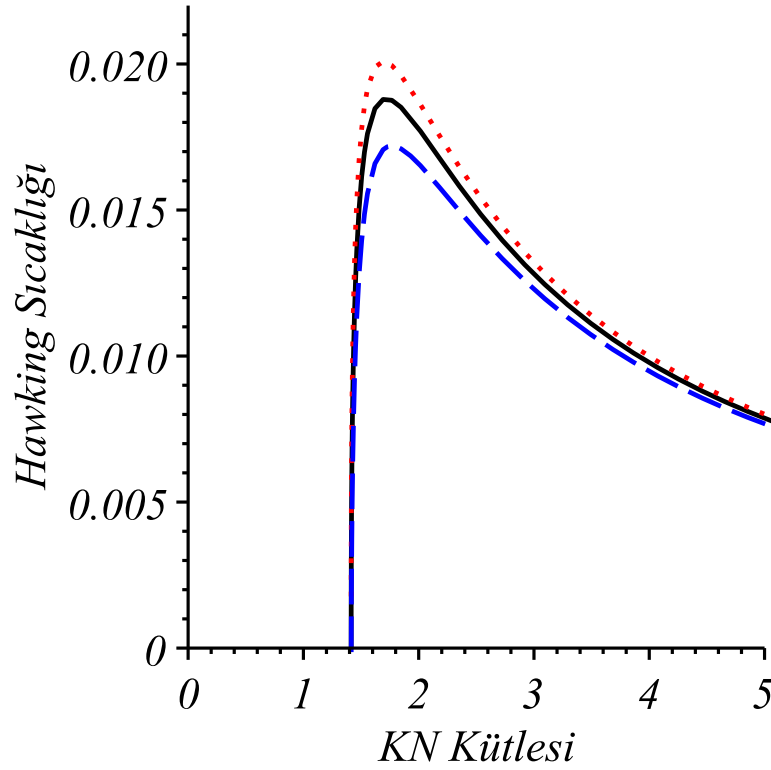
Zitterbewegung parçacıklarının karadeliğin olay ufunda oluşturduğu genelleştirilmiş Hawking sıcaklığı (4.18) denkleminde şu şekilde bulunmuştur:

$$T_G = \frac{\sqrt{fg}}{4\pi} \left\{ 1 - \beta \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} \left[\frac{M^2}{2(2s)^2} + \frac{j^2}{2K} + q A_\phi \frac{2j - q A_\phi}{2K} - \frac{2q V' \varepsilon_T}{f} \right] \right\}.$$

Burada $s = 1/2, 1, \dots$ ve M ilgili parçacığın kütlesidir. $\varepsilon_T = \varepsilon - qV_H - \Omega_H$ olay ufkunun toplam enerjisidir.

Modifiye Hawking sıcaklığının olay ufka göre limit durumları şunlardır:

$$\begin{aligned} T_G(R \rightarrow \infty) &= \frac{1}{4\pi R} \left(1 - \beta \frac{M^2}{2(2s)^2} \right), \\ T_G(R \rightarrow 0) &= -\beta \frac{qq_e z^2}{2\pi a^3} (Ea - 1) R^{-2} - \frac{a^2 + z^2}{4\pi a^2} \left[1 - \beta \left(\frac{M^2}{2(2s)^2} - \frac{q^2 q_e^2}{2a^2} \right) \right] R^{-1}. \end{aligned}$$



Şekil 5.13. KN karadeliğinin standart (sürekli çizgi), elektriksel olarak çekici etkileşmeyle modifiye ($q = -1$ noktalı çizgi) ve elektriksel olarak itici etkileşmeyle modifiye ($q = 1$ kesikli çizgi) Hawking sıcaklıklarının karadeliğin kütlesine göre değişimi. Sabitler $a = 1, q_e = 1, q_m = 0, \beta = 0.1, M = 1, \varepsilon = 1, j = 1, s = 2$.

Buna göre sıcaklık $R \rightarrow \infty$ limitinde sıfıra ve $R \rightarrow 0$ limitinde $-\infty$ 'a gitmektedir. Ancak sıcaklık pozitif tanımlı olmalıdır. Olay ufku $R_0 = \sqrt{a^2 + z^2}$ değerinde standart sıcaklık ve buna bağlı olarak modifiye sıcaklık sıfırdır. Dolayısıyla olay ufku $R < R_0$ değerleri fiziksel değildir. R_0 değerinde karadeliğin kütlesi ise $M_{B0} = R_0$ değerine eşittir. O halde karadeliğin kütlesi $M_{B0} = R_0$ değerine ulaştığında parçacık tünellemesi sonlanarak Hawking radyasyonu durur. Buna göre M_{B0} değeri, karadeliğin kalıntı kütlesidir ve kuantum gravite düzeltmesinden bağımsızdır. Öte yandan standart Hawking sıcaklığı, olay ufku R için dört farklı değerinde,

$$R_d = \pm \sqrt{2a^2 + 3z^2/2 \pm \sqrt{(5a^2 + 9z^2/2)(a^2 + z^2/2)}},$$

kararsız bir denge noktasına sahiptir: $T''(R) < 0$. $R_d > R_0$ yapan tek çözüm

$$R_d = \sqrt{2a^2 + 3z^2/2 + \sqrt{(5a^2 + 9z^2/2)(a^2 + z^2/2)}},$$

fizikseldir. R_d noktasında parçacık tünellemesi maksimum değere ulaşmıştır. Buna göre

$T_H(R_d)$ standart Hawking sıcaklığının maksimum değeridir ve buna bağlı olarak maksimum Hawking sıcaklığındaki karadeliğin kütlesi $M_B(R_d)$ 'dir. Ancak R_d kararsız bir denge noktası olduğu için parçacık tünellemesi azalarak karadeliğin kütlesi azalmaya devam eder ve $M_{B0} = R_0$ değerinde durur. Bu analize göre evrende M_{B0} kütleli KN-tipi karadelikler Hawking ışıması yapmadan kararlı olarak var olabilirler. Öte yandan kuantum gravite altında R_{Gd} kararsız denge noktasını analitik olarak hesaplamak, matematiksel ifadelerin uzunluğu nedeniyle fiziksel tartışmadan uzaklaşmaya neden olur. Bu sebeple analizlere sayısal çözümler üzerinden devam edilebilir. Şekil (5.13) ile gösterilen grafik $a = 1, q_e = 1, q_m = 0, \beta = 0.1, M = 1, \varepsilon = 1, j = 1, s = 2$ sabitleri ile elde edilmiştir ve analizi şu şekildedir:

- Kalıntı karadeliğin ($T_H = 0$) olay ufku $R_0 = 1.41$, kütlesi $M_{B0} = 1.41$, açısal hızı $\Omega_{H0} = 0.33$, elektriksel potansiyel $V_{H0} = 0.47$ ve zitterbewegung parçacığının toplam enerjisi $\varepsilon_T = 0.20$. Kararsız olay ufkunun standart değeri $R_d = 2.70$ ve buna bağlı olarak standart sıcaklık $T_{Hd} = 0.019$, kütle $M_{Bd} = 1.72$, açısal hız $\Omega_{Hd} = 0.12$, elektriksel potansiyel $V_{Hd} = 0.33$ ve zitterbewegung parçacığının toplam enerjisi $\varepsilon_T = 0.55$,
- Kuantum gravite çerçevesinde kalıntı karadeliğin fiziksel nicelikleri değişmez. Kuantum gravite çerçevesinde çekici elektriksel etkileşme için ($q = -1$) kararsız olay ufkunun değeri $R_{Gd} = 2.62$ ve buna bağlı olarak sıcaklık $T_{Gd} = 0.020$, kütle $M_{Bd} = 1.69$, açısal hız $\Omega_{Hd} = 0.13$, elektriksel potansiyel $V_{Hd} = 0.33$ ve zitterbewegung parçacığının toplam enerjisi $\varepsilon_T = 0.54$.
- Kuantum gravite çerçevesinde itici elektriksel etkileşme için ($q = 1$) kararsız olay ufkunun değeri $R_{Gd} = 2.82$ ve buna bağlı olarak sıcaklık $T_{Gd} = 0.017$, kütle $M_{Bd} = 1.77$, açısal hız $\Omega_{Hd} = 0.11$, elektriksel potansiyel $V_{Hd} = 0.32$ ve zitterbewegung parçacığının toplam enerjisi $\varepsilon_T = 0.57$.

6. SONUÇLAR

Kuantum graviteye bir model olan kesikli zaman varsayımıyla türetilen modifiye dispersiyon bağıntısının (MDR) kuantum elektrodinamiğinin temel denklemlerine ve bu modifiye denklemlerin bazı fiziksel olaylardaki etkileri araştırılmıştır.

Çeşitli osilatörler ile etkileşen spinsiz veya zitterbewegung temel parçacıkların kütle-kabuk bağıntısız MDR altında nasıl kuantize olduğu incelenmiştir. Deformasyonun türetilişi gereği elde edilen modifiye enerjilerin hepsi standart duruma kıyasla daha küçük bulunmuştur. Bu durum kütle-kabuk bağıntısı ile yapılan deformasyonlardan elde edilen sonuçlarla uyumludur.

Bazı karadeliklerin olay ufkundan spinsiz veya yüksek spinli parçacıkların tünellemesi sonucu oluşan Hawking radyasyonlarına tersten uygulanan GUP'un etkisi incelenmiştir. Bu yöntemle de literatürle uyumlu olarak modifiye Hawking sıcaklığının itici elektriksel etkileşmeler ve nötr elektriksel etkileşmeler altında standart duruma kıyasla daha küçük olduğu gösterilmiştir.

Hem osilatörler hem de karadelikler incelenirse tersten uygulanan GUP uzaysal türevleri içermediği için matematiksel kolaylık sunmaktadır. Bununla birlikte 2+1 uzaya özel olarak dairesel spin operatörlerinin kullanılmasıyla oluşturulan yüksek spinli parçacık denklemi gelecekte yapılacak araştırmalara kolaylık sağlayacaktır.

7. KAYNAKLAR

- Ahmed, F. 2019a. The dirac equation in $(1+2)$ -dimensional gürses space-time backgrounds. *The European Physical Journal Plus*, 134 (10): 518.
- Ahmed, F. 2019b. The klein–gordon oscillator in $(1+2)$ -dimensions gürses space–time backgrounds. *Annals of Physics*, 404: 1–9.
- Amati, D., Ciafaloni, M., and Veneziano, G. 1987. Superstring collisions at planckian energies. *Physics Letters B*, 197 (1-2): 81–88.
- Amati, D., Ciafaloni, M., and Veneziano, G. 1989. Can spacetime be probed below the string size? *Physics Letters B*, 216 (1-2): 41–47.
- Amelino-Camelia, G. 2001. Testable scenario for relativity with minimum length. *Physics Letters B*, 510 (1-4): 255–263.
- Amelino-Camelia, G. 2002. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *International Journal of Modern Physics D*, 11 (01): 35–59.
- Amelino-Camelia, G., Mandanici, G., Procaccini, A., and Kowalski-Glikman, J. 2005. Phenomenology of doubly special relativity. *International Journal of Modern Physics A*, 20 (26): 6007–6037.
- Banados, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. 1992. Black hole in three-dimensional space-time. *Physical review letters*, 69 (13): 1849.
- Barut, A. 1990. Excited states of zitterbewegung. *Physics Letters B*, 237 (3-4): 436–439.
- Barut, A. and Zanghi, N. 1984. Classical model of the dirac electron. *Physical Review Letters*, 52 (23): 2009.
- Bruce, S. and Minning, P. 1993. The klein-gordon oscillator. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 106: 711–713.
- Caldarelli, M. M., Cognola, G., and Klemm, D. 2000. Thermodynamics of kerr-newman-ads black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, 17 (2): 399.
- Carlip, S. and Carlip, S. J. 2003. Quantum gravity in $2+1$ dimensions, volume 50. Cambridge University Press.
- Chen, D., Jiang, Q., Wang, P., and Yang, H. 2013. Remnants, fermions’ tunnelling and effects of quantum gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2013 (11): 1–14.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloe, F. 1986. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1: 898.

- Das, S. and Vagenas, E. C. 2008. Universality of quantum gravity corrections. *Physical review letters*, 101 (22): 221301.
- De Paoli, M., Castro, L., Menezes, D., and Barros, C. 2013. Rarita–schwinger particles under the influence of strong magnetic fields. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 40 (5): 055007.
- Dernek, M. 2009. Yüksek spinli parçacıklar için yeni görelî bir denklem önerilmesi. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, Türkiye.
- Dernek, M., Tekincay, C., Gecim, G., Kucukakca, Y., and Sucu, Y. 2023. Hawking radiation of euler–heisenberg-ads black hole under the gup effect. *The European Physical Journal Plus*, 138 (4): 369.
- Deser, S., Jackiw, R., and Templeton, S. 1982. Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48 (15): 975.
- Deser, S., Jackiw, R., and Templeton, S. 2000. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics*, 281 (1-2): 409–449.
- Dirac, P. A. M. 1928. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117 (778): 610–624.
- Duffin, R. 1938. On the characteristic matrices of covariant systems. *Physical Review*, 54 (12): 1114.
- Einstein, A. 1905. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 4.
- Einstein, A. 1916. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen Der Phys*, 49 (7): 769–822.
- Einstein, A. 1928. Riemann-geometrie mit aufrechterhaltung des begriffes des fernparallelismus. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften-physikalisch-mathematische Klasse*, pages 224–227.
- Fadel, M. and Maggiore, M. 2022. Revisiting the algebraic structure of the generalized uncertainty principle. *Physical Review D*, 105 (10): 106017.
- Fierz, M. and Pauli, W. E. 1939. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173 (953): 211–232.
- Fock, V. 1926. Über die invariante form der wellen-und der bewegungsgleichungen für einen geladenen massenpunkt. *Zeitschrift für Physik*, 39: 226–232.
- Fock, V. 1929. Geometrisierung der diracschen theorie des elektrons. *Zeitschrift für*

- Physik*, 57: 261–277.
- Garay, L. J. 1995. Quantum gravity and minimum length. *International Journal of Modern Physics A*, 10 (02): 145–165.
- Garfinkle, D., Horowitz, G. T., and Strominger, A. 1991. Charged black holes in string theory. *Physical Review D*, 43 (10): 3140.
- Gecim, G. and Sucu, Y. 2017. The gup effect on hawking radiation of the 2+ 1 dimensional black hole. *Physics Letters B*, 773: 391–394.
- Gecim, G. and Sucu, Y. 2018. Quantum gravity effect on the hawking radiation of charged rotating btz black hole. *General Relativity and Gravitation*, 50: 1–15.
- Gordon, W. 1926. Der comptoneffekt nach der schrödingerschen theorie. *Zeitschrift für Physik*, 40 (1): 117–133.
- Grasso, D. and Rubinstein, H. R. 2001. Magnetic fields in the early universe. *Physics Reports*, 348 (3): 163–266.
- Griffiths, D. J. and Schroeter, D. F. 2018. Introduction to quantum mechanics. Cambridge university press.
- Gross, D. J. and Mende, P. F. 1988. String theory beyond the planck scale. *Nuclear Physics B*, 303 (3): 407–454.
- Gürses, M. 1994. Perfect fluid sources in 2+ 1 dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 11 (10): 2585.
- Hawking, S. W. 1975. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43 (3): 199–220.
- Horne, J. H. and Horowitz, G. T. 1992. Rotating dilaton black holes. *Physical Review D*, 46 (4): 1340.
- Hortacsu, M. 1974. Demonstration of noncausality for the rarita-schwinger equation. *Physical Review D*, 9 (4): 928.
- Hossenfelder, S. 2013. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 16 (1): 2.
- Hossenfelder, S., Bleicher, M., Hofmann, S., Ruppert, J., Scherer, S., and Stöcker, H. 2003. Signatures in the planck regime. *Physics Letters B*, 575 (1-2): 85–99.
- Inan, N., Ali, A. F., Jusufi, K., and Yasser, A. 2024. Graviton mass due to dark energy as a superconducting medium: theoretical and phenomenological aspects. *arXiv preprint arXiv:2404.03872*.
- Itzykson, C. and Zuber, J.-B. 2006. Quantum field theory. Courier Corporation.

- Jacobson, T., Liberati, S., and Mattingly, D. 2002. Tev astrophysics constraints on planck scale lorentz violation. *Physical Review D*, 66 (8): 081302.
- Jellal, A., Alhaidari, A. D., and Bahlouli, H. 2009. Confined dirac fermions in a constant magnetic field. *Physical Review A*, 80 (1): 012109.
- Kemmer, N. 1939. The particle aspect of meson theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173 (952): 91–116.
- Kempf, A., Mangano, G., and Mann, R. B. 1995. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*, 52 (2): 1108.
- Kiefer, C. 2007. Why quantum gravity? In *Approaches to Fundamental Physics: An Assessment of Current Theoretical Ideas*, pages 123–130. Springer.
- Kiselev, V. 2003. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 20 (6): 1187.
- Klein, O. 1927. Elektrodynamik und wellenmechanik vom standpunkt des korrespondenzprinzips. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 41 (6): 407–442.
- Konishi, K., Paffuti, G., and Provero, P. 1990. Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory. *Physics Letters B*, 234 (3): 276–284.
- Kraniotis, G. 2016. The klein–gordon–fock equation in the curved spacetime of the kerr–newman (anti) de sitter black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 33 (22): 225011.
- Li, G. and Andrei, E. Y. 2007. Observation of landau levels of dirac fermions in graphite. *Nature physics*, 3 (9): 623–627.
- Li, X.-Q. and Chen, G.-R. 2015. Massive vector particles tunneling from kerr and kerr–newman black holes. *Physics letters B*, 751: 34–38.
- Ling, Y., Hu, B., and Li, X. 2006. Modified dispersion relations and black hole physics. *Physical Review D*, 73 (8): 087702.
- Lukierski, J. 2017. Kappa-deformations: historical developments and recent results. *Journal of Physics: Conference Series*, 804 (1): 012028.
- Lukierski, J., Nowicki, A., and Ruegg, H. 1992. New quantum poincaré algebra and κ -deformed field theory. *Physics Letters B*, 293 (3-4): 344–352.
- Lukierski, J., Ruegg, H., Nowicki, A., and Tolstoy, V. N. 1991. q-deformation of poincaré algebra. *Physics Letters B*, 264 (3-4): 331–338.
- Lunin, O. and Mathur, S. D. 2002. Ads/cft duality and the black hole information paradox. *Nuclear Physics B*, 623 (1-2): 342–394.

- Madhavacheril, M. S., Sehgal, N., and Slatyer, T. R. 2014. Current dark matter annihilation constraints from cmb and low-redshift data. *Physical Review D*, 89 (10): 103508.
- Maggiore, M. 1993. The algebraic structure of the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, 319 (1-3): 83–86.
- Magueijo, J. and Smolin, L. 2002. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review Letters*, 88 (19): 190403.
- Magueijo, J. and Smolin, L. 2003. Generalized lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, 67 (4): 044017.
- Martinez, C. and Zanelli, J. 1996. Conformally dressed black hole in 2+ 1 dimensions. *Physical Review D*, 54 (6): 3830.
- Moshinsky, M. and Szczepaniak, A. 1989. The dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22 (17): L817.
- Nedjadi, Y. and Barrett, R. 1994. The duffin-kemmer-petiau oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27 (12): 4301.
- Nedjadi, Y. and Barrett, R. 1998. A generalized duffin-kemmer-petiau oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31 (31): 6717.
- Nutku, Y. 1993. Exact solutions of topologically massive gravity with a cosmological constant. *Classical and Quantum Gravity*, 10 (12): 2657.
- Övgün, A. and Jusufi, K. 2016. Massive vector particles tunneling from noncommutative charged black holes and their gup-corrected thermodynamics. *The European Physical Journal Plus*, 131 (5): 177.
- Padmanabhan, N. and Finkbeiner, D. P. 2005. Detecting dark matter annihilation with cmb polarization: Signatures and experimental prospects. *Physical Review D*, 72 (2): 023508.
- Peeters, F. and Devreese, J. 1985. Energy levels of two-and three-dimensional polarons in a magnetic field. *Physical Review B*, 31 (6): 3689.
- Penrose, R., Genzel, R., and Ghez, A. 2020. The nobel prize in physics 2020.
- Peskin, M. E. 2018. An introduction to quantum field theory. CRC press.
- Petiau, G. 1936. Acad. r. belg., a. *Sci. Mém. Collect*, 16 (2).
- Rarita, W. and Schwinger, J. 1941. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 60 (1): 61.
- Ricci, M. and Levi-Civita, T. 1900. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54 (1): 125–201.

- Rodriguez, A. W., Capasso, F., and Johnson, S. G. 2011. The casimir effect in microstructured geometries. *Nature photonics*, 5 (4): 211–221.
- Rovelli, C. 2004. Quantum gravity. Cambridge university press.
- Ruffini, R. and Wheeler, J. A. 1971. Introducing the black hole. *Physics today*, 24 (1): 30–41.
- Scardigli, F. 1999. Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment. *Physics Letters B*, 452 (1-2): 39–44.
- Seetharaman, M., Prabhakaran, J., and Mathews, P. 1975. Rarita-schwinger particles in homogeneous magnetic fields, and inconsistencies of spin-3/2 theories. *Physical Review D*, 12 (2): 458.
- Snygg, J. 1997. Clifford Algebra: A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, USA.
- Spallucci, E., Smailagic, A., and Nicolini, P. 2009. Non-commutative geometry inspired higher-dimensional charged black holes. *Physics Letters B*, 670 (4-5): 449–454.
- Sucu, Y. and Ünal, N. 2007. Exact solution of dirac equation in 2+ 1 dimensional gravity. *Journal of mathematical physics*, 48 (5).
- Szabo, R. J. 2003. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378 (4): 207–299.
- Tawfik, A. N. and Diab, A. M. 2015. A review of the generalized uncertainty principle. *Reports on Progress in Physics*, 78 (12): 126001.
- Tekincay, C., Dernek, M., and Sucu, Y. 2021a. Exotic criticality of the btz black hole. *The European Physical Journal Plus*, 136: 1–13.
- Tekincay, C., Gecim, G., and Sucu, Y. 2021b. Zitterbewegung particles tunneling from reissner-nordström ads black hole surrounded by quintessence. *Europhysics Letters*, 135 (3): 31003.
- Tetrode, H. 1928. Allgemein-relativistische quantentheorie des elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 50: 336–346.
- Todorinov, V., Bosso, P., and Das, S. 2019. Relativistic generalized uncertainty principle. *Annals of Physics*, 405: 92–100.
- Tyagi, V., Rai, S. K., and Mandal, B. P. 2020. Gup corrections to the dirac oscillator in the external magnetic field. *Europhysics Letters*, 128 (3): 30004.
- Unruh, W. G. 1995. Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. *Physical Review D*, 51 (6): 2827.

- Veneziano, G. 1986. A stringy nature needs just two constants. *Europhysics Letters*, 2 (3): 199.
- Visser, M. 2015. Thermalit  of the hawking flux. *Journal of High Energy Physics*, 2015 (7): 1–15.
- Weisstein, E. W. Eriřim tarihi: 18/04/2024. Quartic equation. *From MathWorld–A Wolfram Web Resource*.
- Wu, S.-R., Long, Z.-w., Long, C.-y., Wang, B.-q., and Liu, Y. 2017. Effects of generalized uncertainty principle on the two-dimensional dkp oscillator. *The European Physical Journal Plus*, 132: 1–13.
- Yajima, H. and Tamaki, T. 2001. Black hole solutions in euler-heisenberg theory. *Physical Review D*, 63 (6): 064007.
- Yepez, J. 2011. Einstein’s vierbein field theory of curved space. *arXiv preprint arXiv:1106.2037*.
- Zee, A. 2010. Quantum field theory in a nutshell, volume 7. Princeton university press.

ÖZGEÇMİŞ

CAVİT TEKİNÇAY

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2017-2024	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2014-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2007-2012	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2023-	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya
Araştırma Görevlisi 2017-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- Dernek, M., Tekincay, C., Gecim, G., Kucukakca, Y., and Sucu, Y. (2023). Hawking radiation of Euler–Heisenberg-adS black hole under the GUP effect. The European Physical Journal Plus, 138(4), 369.
- Tekincay, C., Gecim, G., and Sucu, Y. (2021). Zitterbewegung particles tunneling from

Reissner-Nordström AdS black hole surrounded by quintessence. Europhysics Letters, 135(3), 31003.

3- Tekincay, C., Dernek, M., and Sucu, Y. (2021). Exotic criticality of the BTZ black hole. The European Physical Journal Plus, 136, 1-13.

4- Sucu, Y., and Tekincay, C. (2019). Photon in the Earth-ionosphere cavity: Schumann resonances. Astrophysics and Space Science, 364, 1-7.

Ulusal hakemli dergilerde yayımlanan makalele

1- Tekincay, C., and Sucu, Y. (2018). Photon in a cylindrical resonant cavity. Turkish Journal of Physics, 42(2), 175-182.

Hakemli uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Tekinçay C., Sucu Y., "Vector boson in a cosmologically optical medium", Türk Fizik Derneği 34. Uluslararası Fizik Kongresi, MUĞLA, TÜRKİYE, 5-9 Eylül 2018, pp.218-218

Hakemli ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Tekinçay C., Sucu Y., "Silindirik simetrik uzay-zamanda kütleli spin-1 denkleminin çözümleri", ADİM Fizik Günleri VI, BALIKESİR, TÜRKİYE, 19-21 Temmuz 2017, ss.122-122