



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL-MAİTLAND
FONKSİYONUNU İÇEREN DİFERENSİYEL
SUBORDİNASYON**

Merve KARAMAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR**

**2025
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL-MAİTLAND FONKSİYONUNU İÇEREN
DİFERENSİYEL SUBORDİNASYON**

Merve KARAMAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2025

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL-MAİTLAND FONKSİYONUNU İÇEREN
DİFERENSİYEL SUBORDİNASYON**

Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında, Merve KARAMAN tarafından hazırlanan bu çalışma 19/09/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. İbrahim KARAHAN	İmza	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İlker KAZAZ
Enstitü Müdürü

*Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19/ 09 /2025

İmzası

Merve KARAMAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL-MAITLAND FONKSİYONUNU İÇEREN DİFERENSİYEL SUBORDİNASYON

Merve KARAMAN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezde amacımız, normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonlarının yer aldığı bir operatör kullanarak bazı subordinasyon sonuçları sunmaktır. Bessel-Maitland fonksiyonları, klasik Bessel fonksiyonlarının genelleştirilmiş hali olarak, özel fonksiyonlar teorisi ve kesirli hesaplama gibi matematiksel analiz alanlarında geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Bu fonksiyonların normalize edilmiş biçimlerini içeren bir operatör aracılığıyla, analitik fonksiyonlar teorisinin çeşitli yönlerini incelemekteyiz. Sunduğumuz subordinasyon sonuçları, uygun kabul edilebilir fonksiyon sınıflarının detaylı bir şekilde araştırılmasıyla elde edilmiştir. Bu sınıflar, belirli yapısal ve geometrik koşulları sağlayan analitik fonksiyonlardan oluşmaktadır ve bu koşullar, incelenen subordinasyon ilişkilerinin geçerliliğini garanti etmektedir. Kabul edilebilirlik kavramı, elde edilen sonuçların genellenmesi ve fonksiyon sınıflarının birleşik bir şekilde ele alınabilmesi açısından merkezi bir rol oynamaktadır. Bu yaklaşımla, literatürdeki mevcut sonuçları genişletmenin yanı sıra, önerilen operatörün etkisi altında analitik fonksiyonların davranışına dair yeni bulgulara da katkı sağlanmaktadır. Teorik bulgular, elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini ve genelliğini gösteren özel durumlarla desteklenmiştir.

2025, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bessel fonksiyonu, Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu, Analitik ve ünivalent fonksiyonlar, Hadamard çarpımı, Diferansiyel subordinasyon

ABSTRACT

MS. Thesis

DIFFERENTIAL SUBORDINATION INVOLVING GENERALIZED BESSEL-MAITLAND FUNCTION

Merve KARAMAN

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, our primary objective is to establish several subordination results by employing a linear operator that incorporates the normalized form of the generalized Bessel-Maitland functions. The Bessel-Maitland functions, known for their generalization of classical Bessel functions, possess a wide range of applications in mathematical analysis, particularly in the theory of special functions and fractional calculus. By utilizing their normalized form within a suitable operator framework, we are able to explore new aspects of analytic function theory. The subordination results presented herein are derived through a detailed investigation of certain carefully defined classes of admissible functions. These classes consist of analytic functions that satisfy specific structural and geometric conditions, which ensure the validity of the subordination relationships under consideration. The notion of admissibility plays a central role in the development of our results, as it allows for a unified treatment of various function classes within the analytic setting. Through this approach, we not only extend existing results in the literature but also contribute new insights into the behavior of analytic functions under the influence of the proposed operator. The theoretical findings are further supported by illustrative special cases, which demonstrate the applicability and generality of the results obtained.

2025, 70 pages

Keywords: Bessel function, Generalized Bessel-Maitland function, Analytic and univalent functions, Hadamard product, Differential subordinasyon

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde ve tez çalışmalarımda bana yön gösteren, akademik yolda ilerlemem için yüreklendiren, desteğini ve emeklerini esirgememiş, ileriki eğitim hayatım boyunca da bilgilerinden istifade edebileceğim, güvendiğim, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum kıymetli hocam, tez danışmanım sayın Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR'a çok teşekkür ediyor saygılar sunuyorum.

Yüksek lisans eğitimim boyunca aldığım derslerde gösterdikleri sabır, anlayış ve verdikleri bilgilerle bu yolda bana destek olan hocalarım Doç. Dr. İbrahim KARAHAN ve Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER'e teşekkür ederim.

Yapıcı ve olumlu yaklaşımları ile tez jürimde destek veren Prof. Dr. İsa YILDIRIM hocama teşekkür ederim.

Hayatımı paylaştığım, sadece bu süreçte değil her alanda her zaman arkamda bir dağ olan varlığından güç bulduğum eşim Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'a desteğinden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve KARAMAN
Eylül 2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
3.1 Temel Tanım ve Teoremler	6
3.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	7
3.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	13
4. DİFERANSİYEL SUBORDİNASYON.....	21
4.1. Diferansiyel Subordinasyon.....	21
4.2. Diferansiyel Subordinasyon Teorisi	29
4.3. Uygunluk Fonksiyonu ve Temel Teoremler	32
5. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR	38
5.1. Bessel Fonksiyonları	42
5.2. Bessel -Maitland Fonksiyonları	49
6. $\mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z)$ OPERATÖRÜNÜ İÇEREN DİFERANSİYEL SUBORDİNASYON.....	53
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	67
KAYNAKLAR.....	68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk
$\bar{U}(z_0, r)$	$U(z_0, r)$ nin kapanışı
$\partial U(z_0, r)$	$U(z_0, r)$ nin sınırı
U	Birim Disk
$\Re$	Bir kompleks sayının reel kısmı
A	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
S	U birim diskinde ünivalent olan fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
C	Konveks fonksiyonların sınıfı
$f < g$	f fonksiyonu g ye subordinatedir
Ψ	Uygunluk fonksiyonu
$\Gamma(z)$	Gama Fonksiyonu
$B(x, y)$	Beta Fonksiyonu
$J_\nu(z)$	Bessel Fonksiyonu
$J_{\eta,a}^\gamma(z)$	Genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu
$\mathbb{J}_{\eta,a}^\gamma(z)$	Normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1: w_0 noktasına göre Yıldızlı Bölge	17
Şekil 2: Koebe Fonksiyonu	18
Şekil 3: Konveks Bölge	19
Şekil 4: $f \prec g$ Subordinasyonu.....	23
Şekil 5: $1 + z \prec \frac{1+z}{1-z}$	24
Şekil 6: $E(q)$ nin üç noktadan oluştuğu genel durum	32



1. GİRİŞ

Kompleks analiz, matematiksel analiz disiplininin bir alt dalı olarak, karmaşık değişkenli fonksiyonların yapılarını ve bu fonksiyonların tanımlı oldukları bölgelerde gösterdikleri davranışları inceleyen geniş kapsamlı bir alandır. Hem teorik hem de uygulamalı matematikte önemli bir yer tutan bu alan, özellikle fizik, mühendislik ve sayısal analiz gibi pek çok disiplinde uygulama alanı bulmaktadır. Kompleks analizde incelenen fonksiyonlar çoğunlukla analitik fonksiyonlardır; yani türevlenebilirlik koşulunu yalnızca bir noktada değil, tanımlı oldukları bölgede sürekli olarak sağlayan fonksiyonlardır.

Bu bağlamda, özellikle $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ birim disk üzerinde tanımlı olan analitik fonksiyonların kompleks fonksiyon teorisinin önemli bir araştırma konusunu oluşturmaktadır. Bu özellikler; fonksiyonun görüntü kümesinin yıldız biçimli (star-like), konveks (içbükey), yakınsak (close-to-convex) gibi geometrik yapılarla sahip olup olmadığını belirlemekle ilgilidir. Bu tür sorularla ilgilenen alt disiplin, geometrik fonksiyon teorisi olarak adlandırılmakta ve analitik fonksiyonların şekilsel ve topolojik özelliklerine odaklanmaktadır.

Geometrik fonksiyonların sınıflandırılmasında ve analizinde kullanılan temel yöntemlerden biri subordinasyon teorisidir. Bu teoriye göre, f ve g analitik fonksiyonları için, eğer bir $w \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu var ve bu fonksiyon için $w(0) = 0, |w(z)| < 1$ koşulları sağlanarak

$$f(z) = g(w(z)), z \in U$$

eşitliği geçerliyse, bu durumda f, g ye subordinate (bağımlı) olmuş olur ve bu durum $f(z) \prec g(z)$ şeklinde gösterilir. Bu ilişki, analitik fonksiyonların değer kümelerinin karşılaştırılması ve sınıflandırılmasında oldukça etkili bir yöntemdir. Özellikle, ünivalent (tek değerli) fonksiyonlara subordinasyon, analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini taşımalarına neden olur.

Ancak klasik subordinasyon teorisi yalnızca fonksiyonun kendisine odaklanır. Daha gelişmiş bir yaklaşım olan diferensiyel subordinasyon teorisi, fonksiyonların türevlerini de içeren diferensiyel eşitsizlikler yoluyla fonksiyonlar arasında daha kapsamlı ilişkiler kurmayı hedefler. Bu teori, 1970'li yıllarda S. S. Miller ve P. T. Mocanu tarafından geliştirilmiş ve sonraki yıllarda çok sayıda araştırmacı tarafından çeşitli fonksiyon sınıflarına başarıyla uygulanmıştır.

Diferensiyel subordinasyon yaklaşımında, bir analitik fonksiyonun $f(z)$, türevi $f'(z)$ ve ikinci türevi $f''(z)$ gibi türevsel ifadeleri dikkate alınarak, belirli bir referans fonksiyona subordinasyon durumu araştırılır. Örneğin, aşağıdaki gibi bir diferensiyel eşitsizlik:

$$\Psi(f(z), zf'(z), z^2 f''(z)) < q(z)$$

şeklinde ifade edilirse, burada Ψ uygun biçimde tanımlanmış analitik bir fonksiyon, $q(z)$ ise ünivalent bir referans fonksiyondur. Bu koşullar altında, belirli kriterler sağlandığında $f(z) < q(z)$ sonucu elde edilebilir.

Bu teori sadece akademik olarak ilginç bir yapı sunmakla kalmaz, aynı zamanda özel fonksiyonların (örneğin Bessel, Mittag-Leffler, Wright gibi fonksiyonların) geometrik ve analitik özelliklerinin keşfinde de son derece etkilidir. Özellikle normalize edilmiş fonksiyonlar üzerinde yapılan subordinasyon analizleri, bu fonksiyonların yıldızlı mı, konveks mi yoksa başka bir sınıfa mı ait olduğunun belirlenmesini sağlar. Ayrıca, diferensiyel subordinasyon teorisi yardımıyla elde edilen sonuçlar, birçok klasik teoremin genelleştirilmesine de olanak sunar.

Bu tezde, genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonuna ait normalize edilmiş bir tanım üzerinden yola çıkılarak, bu fonksiyonun belirli diferensiyel subordinasyon koşullarını sağladığı durumlar incelenecektir. Fonksiyonun farklı parametre değerleri için subordinasyon ilişkileri kurulacak, uygun koşullarda geometrik fonksiyon sınıfları ile olan ilişkisi değerlendirilecek ve bazı yeni teoremler ortaya konacaktır. Böylece, bu özel fonksiyonun daha önce çalışılmamış geometrik yönleri aydınlatılmış olacaktır.

Tezin ikinci ve üçüncü bölümünde diferensiyel subordinasyon teorisinin tarihsel gelişimi ve konuya dair temel kavramlar, notasyonlar aktarılacaktır. Dördüncü bölümde, diferensiyel subordinasyon hakkında temel tanımlar, teoremler ve lemmalar verilecektir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu tanıtılacak, normalize edilmesiyle ilgili detaylı bilgiler verilecektir. Altıncı bölümde ise, diferensiyel subordinasyon teorisi çerçevesinde bu fonksiyona dair yeni teoremler sunulacak ve elde edilen sonuçlar çeşitli parametre değerleri için örneklerle desteklenecektir. Yedinci ve son bölümde ise genel değerlendirme yapılacak, sonuçlar özetlenecek ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar için önerilerde bulunulacaktır.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Özel fonksiyonların diferansiyel subordinasyonu, analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini inceleyen önemli bir teorik araçtır. Bu alanda yapılan çalışmalar, özel fonksiyonların davranışlarını anlamada ve yeni fonksiyon sınıfları tanımlamada önemli katkılar sağlamaktadır. Aşağıda, bu konuda yapılmış bazı önemli çalışmalar özetlenmiştir:

Kavitha ve arkadaşları (Kavitha et al. 2012), diferensiyel subordinasyon ve superordinasyon kavramlarından yararlanarak, uygunluk fonksiyon sınıflarını inceleyerek açık bir birim disk üzerindeki analitik fonksiyonlar için Cho–Kwon–Srivastava operatörü kullanarak birçok subordinasyon ve superordinasyon sonucu elde etmişlerdir. Ayrıca, sandviç tipi (sandwich-type) sonuçlar da elde edilmiştir.

Baricz ve arkadaşları (Baricz et al. 2015), birinci tür genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının normalize edilmiş biçimini içeren bir operatör kullanarak bazı subordinasyon ve superordinasyon sonuçları elde etmiştir. Bu sonuçlar, uygunluk fonksiyon sınıfları incelenerek elde edilmiştir. Ayrıca bazı sandviç tipinde sonuçlar da elde edilmiş ve temel sonuçlarımızın bilinen ya da yeni çeşitli özel durumları gösterilmiştir.

Baricz ve arkadaşları (Baricz et al. 2016), genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkili yeni bir operatörü birim disk içinde tanımlamışlardır. Uygunluk fonksiyon sınıflarını inceleyerek bu operatör için ikinci mertebeden diferansiyel subordinasyon sonuçları elde etmişlerdir. Ayrıca, normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ve hiperbolik fonksiyonlar için eşitsizlikler de elde edilmiştir.

Al-Dhuain ve Mondal (Al-Dhuain and Mondal 2018), Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının Janowski sınıfına dahil olma özelliklerini incelemişlerdir. Özellikle, Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının birim diski sağ yarı düzleme resmettiği koşullar bulmuşlardır. Ayrıca, Bessel-Struve çekirdek fonksiyonunu içeren üçüncü mertebeden diferansiyel subordinasyonu da ele almışlardır. Sonuçları, uygunluk fonksiyon sınıfları tanımlayarak elde etmişlerdir.

Gochhayata ve Prajapatia (Gochhayata and Prajapatia 2019), genelleştirilmiş Struve fonksiyonlarıyla ilişkili lineer operatör kullanılarak uygunluk fonksiyon sınıflarını incelemişler ve üçüncü mertebeden diferansiyel subordinasyon özelliklerini vermişlerdir. Sonuç olarak, genelleştirilmiş Struve fonksiyonlarını içeren tek değerli analitik fonksiyonlar sınıfı için çeşitli sandviç tipi (sandwich-type) sonuçlar elde etmişlerdir.

Raducanu (Raducanu 2019), genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkili yeni bir operatörü birim disk içinde tanımlamıştır. Uygunluk fonksiyon sınıflarını inceleyerek bu operatör için ikinci mertebeden diferansiyel subordinasyon sonuçları elde etmiştir. Ayrıca, normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ve hiperbolik fonksiyonlar için eşitsizlikler de elde etmiştir.

Lupaş ve Cataş (Lupaş and Cataş 2021), Bessel fonksiyonlarının Atangana–Baleanu kesirli integrali ile ilişkili analitik fonksiyonlar için bazı subordinasyon sonuçları elde etmişlerdir.

Mondal (Mondal 2022), Coulomb dalga fonksiyonlarını kullanarak bazı subordinasyon sonuçları elde etmiştir. Bu sonuçlar, uygunluk fonksiyon sınıfları incelenerek elde edilmiştir.

Amini ve arkadaşları (Amini et al. 2025), genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ve Komatu integral operatörü kullanılarak, konvolüsyon cinsinden yeni bir lineer operatör ve buna bağlı uygunluk fonksiyon sınıfları tanımlamışlardır. Daha sonra, ikinci mertebeden diferansiyel subordinasyon ve superordinasyon özelliklerini ve karakteristiklerini türetmişlerdir. Ayrıca, açık bir birim disk üzerinde tanımlı bir analitik fonksiyon sınıfı için sandviç tipi (sandwich-type) sonuçlar elde etmişlerdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 3.1.1 (r -komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r -komşuluğu) olarak adlandırılır (Ponnusamy and Silverman 2006).

$\bar{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı, $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir. Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \emptyset$, $S \cap S_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bu S kümesine bağlantısız küme denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.8 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t , a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır (Ponnusamy and Silverman 2006).

3.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda, analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılarak bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferensiyellenebilir (türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, r)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferensiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar” (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.1 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise sabittir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.2 (Cauchy-Türev Formülü): f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{3/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.3 (Ayrık Tekil Nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.3 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1 , merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z_0 noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (2.2)$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.4 (Kutup Noktası): $z_0, f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.5 (Meromorf Fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A bölgesinde meromorf fonksiyon denir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.4 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 3.2.1: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 3.2.1 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ ile sağlanır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 3.2.5 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 3.2.2: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ bu bölgede sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.2.6 (Ünivalent fonksiyon): f , $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalnıkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f , z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 3.2.6: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Tersini daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 3.2.1: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z: 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 3.2.6 dan analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 3.2.7 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir (Duren 1983).

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 3.2.7: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi ($\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) kendi üzerine konform olarak resmeder.

z –düzlemindeki $D \subset \mathbb{C}$ ($D \neq \mathbb{C}$) bölgesini, w –düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 3.2.8 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $D \subset \mathbb{C}$ ($D \neq \mathbb{C}$) basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve D yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

3.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunulmuştur. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in U) \quad (2.3)$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını A ile gösterilmiştir ve kısaca

$$A = \left\{ f: \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.1 (S Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f \in A$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve kısaca

$$S = \{f \in A: \forall z \in U \text{ için } f - \text{ünivalent}\}$$

şeklinde gösterilir (Duren 1983, Goodman 1983, Pommerenke 1975).

S sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verilmiştir.

(i) $w = f(z) = z(1 - z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\Re(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1 - z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1 - z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı S sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1 - z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1 + iz}$$

fonksiyonları S sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1 - z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1 + iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1 - i)z}{(1 - z)^2(1 + iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in U$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür.

Bununla beraber S sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 3.3.1: $f \in S$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \dots$ ise, $g \in S$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in S$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(vii) n . kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \dots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir (Duren 1983).

Tanım 3.3.2 (P sınıfı): U birim diskinde $p(0) = 1$, $\Re p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya P sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z)$, $z \in U$ fonksiyonu P sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, P sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için ünivalent değildir.

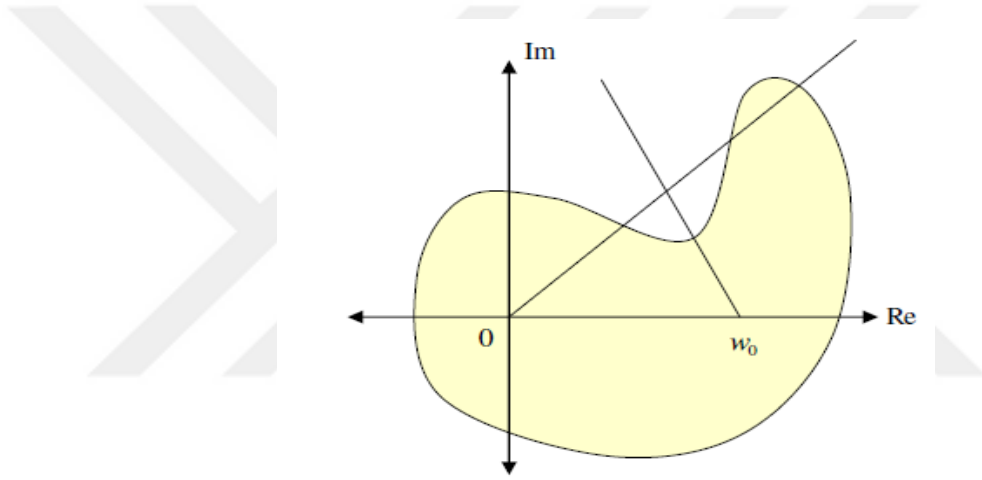
Tanım 3.3.3 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Duren 1983).

Bunların yanı sıra, P sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)}, \quad \omega(z) \in \Omega.$$

P ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, S sınıfının iki önemli alt sınıfı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.3.4 (S^* sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in A$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir (Duren 1983, Pommerenke 1975).



Şekil 1: w_0 noktasına göre Yıldızıl Bölge

Yıldızıl fonksiyonların analitik ifadesi aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.3.5: $f \in A$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$) ifadesi doğrudur (Duren 1983, Pommerenke 1975).

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$$S^* = \left\{ f \in A: \forall z \in U \text{ için } \Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

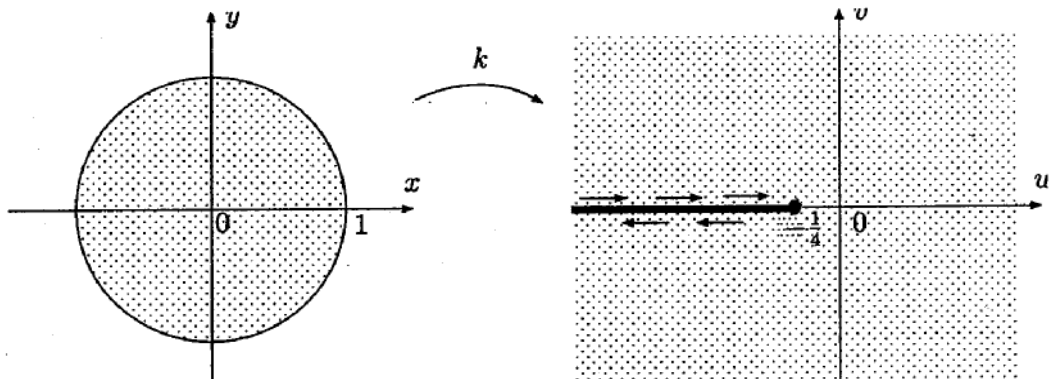
Örneğin, S sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyon $k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$ şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4} [g(z) - 1]$$

biçiminde yazılırsa U birim diskini $-\infty$ dan $\frac{-1}{4}$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğü görülebilir. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2: Koebe Fonksiyonu

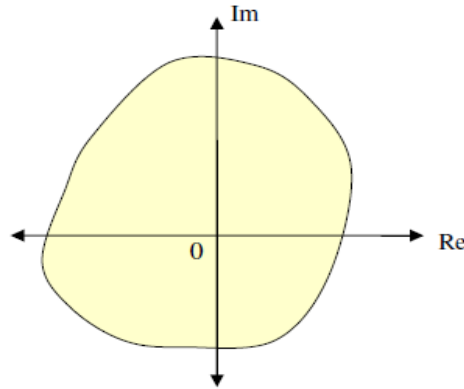
Yukarıdaki şekilden $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n \in S^*$ olduğu görülebilir.

Ayrıca Teorem 3.3.5 kullanılarak da $z = r e^{i\theta}$ ve $(0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) &= \Re \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \Re \left(\frac{1+r e^{i\theta}}{1-r e^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z) \in S^*$ olduğu görülür.

Tanım 3.3.6 (C sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim disk, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in A$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir (Duren 1983, Pommerenke 1975).



Şekil 3: Konveks Bölge

Konveks fonksiyonların analitik ifadesi aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.3.7: $f \in A$ olsun. O halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) değerlendirmesi doğrudur (Duren 1983, Pommerenke 1975).

Tanım 3.3.7 (Hadamard Çarpımı): $f \in \mathcal{A}$ ve $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A}$ olsun.

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı denir (Duren 1983).

4. DİFERENSİYEL SUBORDİNASYON

4.1. Diferensiyel Subordinasyon

Tanım 4.1.1: f ve g , U da iki analitik fonksiyon olsun. ω , U da $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun ve

$$f(z) = g(\omega(z)), \quad (z \in U)$$

ise f fonksiyonu U da g fonksiyonuna *subordinatedir* denir ve $f < g$ veya $f(z) < g(z)$ şeklinde gösterilir (Littlewood 1925).

Teorem 4.1.1: $f < g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ dir (Miller and Mocanu 1981).

İspat: $f < g$ olduğunu varsayalım. Subordinasyon tanımından $\omega(U) \subset U$ ve $\omega(0) = 0$ koşullarını sağlayan analitik bir $\omega: U \rightarrow U$ fonksiyonu bulunabilir. O halde $f(z) = g(\omega(z))$ ifadesinden

$$f(U) = g(\omega(U)) \subset g(U)$$

olur. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 4.1.2: g , U da ünivalent olsun. $f < g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = 0$ ve $f(U) \subset g(U)$ olmasıdır (Miller and Mocanu 1981).

İspat: ($\Rightarrow$) Teorem 4.1.1

($\Leftarrow$) g , U da ünivalent olduğundan $g^{-1}(\omega)$ ters fonksiyonu $g(U)$ da analitiktir. $f(U) \subset g(U)$ olduğundan $\omega(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonu U da analitiktir ve $|\omega(z)| < 1$ dir. Ayrıca $f(0) = g(0)$ olması $\omega(0) = 0$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.3: $f, g \in \mathcal{H}(U)$ ve g ünivalent bir fonksiyon olmak üzere $f \prec g$ ise $f(z) = g(\omega(z))$ ve $|\omega(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen ve U da analitik olan bir ω fonksiyonu vardır. Ayrıca $f(0) = g(0)$ ise $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| \leq |z|$ dir (Miller and Mocanu 1981).

İspat: g ünivalent ve $f \prec g$ olsun. O halde Teorem 4.1.1 den U birim diskinde $f(z)$ nin aldığı her değer $g(z)$ tarafından da alınır. $\omega_0 \in f(U)$ alalım. O halde U da öyle bir z_0, z_1 nokta çifti vardır ki

$$\omega_0 = f(z_0) = g(z_1) \quad (4.1)$$

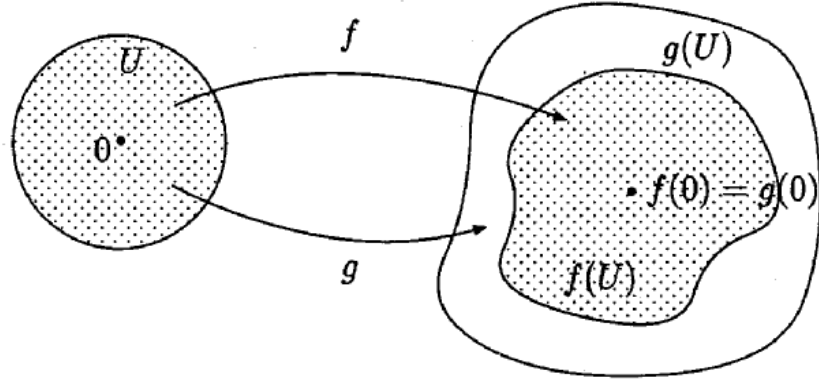
dir. g ünivalent olduğundan (4.1) koşulunu sağlayan z_1 tektir ve $z_1 = g^{-1}(f(z_0)) = \omega(z_0)$ olacak şekilde ω fonksiyonunu bulabiliriz. Böylece

$$f(z_0) = (g \circ g^{-1})(f(z_0)) = g(g^{-1}(f(z_0))) = g(\omega(z_0))$$

olur. ω nin tanımından dolayı $\omega \in \mathcal{H}(U)$ bulunur ve $|z_0| = 1$ için $|\omega(z_0)| \leq 1$ olur. Maksimum modül prensibinden dolayı $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ bulunur.

Şimdi de $f(0) = g(0)$ olsun. $f(0) = g(\omega(0)) = g(0)$ ve g ünivalent olduğundan $\omega(0) = 0$ dır. $\omega(0) = 0$ dan $\omega(z)/z$ fonksiyonu analitiktir. $|z| = 1$ için, $|\omega(z)| \leq 1 = |z|$ den $|\omega(z)/z| \leq 1$ olur. Maksimum Modül Teoremi gereğince $z \in U$ için $|\omega(z)/z| \leq 1$ olur ki buradan $|\omega(z)| < |z|$ bulunur.

f nin g ye subordinasyonundan anlaşılacak şey aşağıdaki şekille izah edilmiştir.



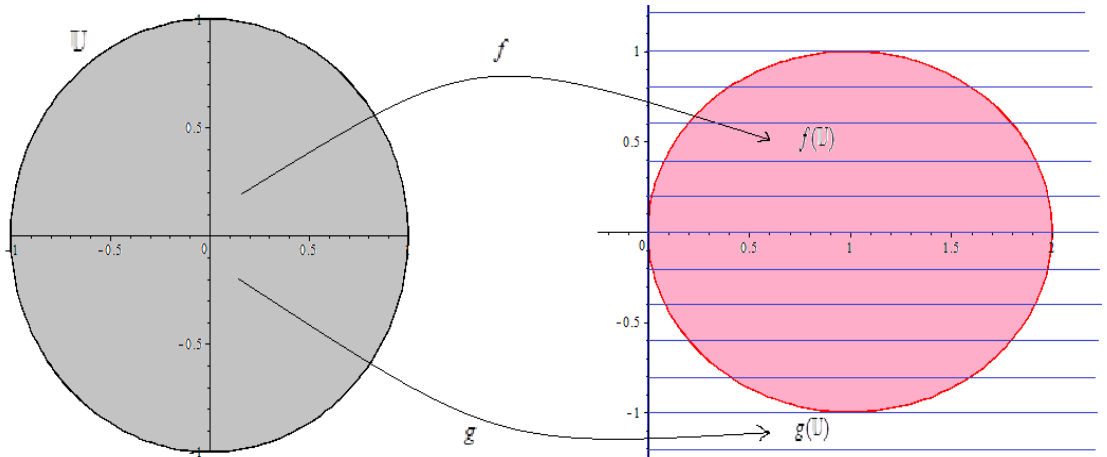
Şekil 4: $f < g$ Subordinasyonu

Örneğin; U da analitik olan $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. f nin U da g ye subordinate olması için $\forall z \in U$ için $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Böylece,

$$f(z) = g(\omega(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} \Rightarrow \omega(z) = \frac{z}{z + 2}$$

bulunur. $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| = \left| \frac{z}{z+2} \right| \leq \frac{1}{|z+2|} \leq 1$ olup $\omega \in \Omega$ dır. Dolayısıyla $f < g$ dir.

Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ dur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 5: $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$

Teorik olarak subordinasyonun buradaki anlamı, özelliklerini bilmediğimiz bir fonksiyonu özelliği bilinen bir fonksiyon yardımıyla incelemektir.

Tanım 4.1.2: Subordinasyon kavramı içerisinde fonksiyonun kendisi ve türevlerini içeren bir ifade varsa bu şekildeki ifadelere *diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 1985).

Diferensiyel subordinasyon kavramı

- Birinci mertebeden diferensiyel subordinasyon
- İkinci mertebeden diferensiyel subordinasyon
- $\vdots$
- n . mertebeden diferensiyel subordinasyon

şeklinde gruplanabilir.

Ayrıca $a \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\mathcal{H}[a, n] := \{f \in \mathcal{H} : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\}$$

sınıfı tanımlansın.

Tanım 4.1.3: $\Psi: \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $h, p, \Psi(p(z), zp'(z); z)$ fonksiyonları U da analitik ve h ünivalent olsun.

$$\Psi(p(z), zp'(z); z) < h(z) \quad (4.2)$$

ifadesine *birinci mertebeden diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 2000).

(4.2) ifadesini sağlayan p fonksiyonuna bu diferensiyel subordinasyonunun bir *çözümü* denir.

(4.2) ifadesini sağlayan her p için $p < q$ olacak şekilde ünivalent bir q fonksiyonu varsa q ye *diferensiyel subordinasyonun çözümlerinin dominantına* kısaca *dominant* denir.

(4.2) ifadesinin bütün q dominantları için $\tilde{q} < q$ koşulunu sağlayan $\tilde{q}$ dominantına (4.2) ifadesinin *en iyi dominantı* denir.

$p \in \mathcal{H}[a, n]$ ise sırasıyla; $p, (a, n)$ -çözüm, $q, (a, n)$ -dominant, $\tilde{q}$, en iyi (a, n) -dominant şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.1.4: A, B, p, h kompleks-değerli analitik fonksiyonlar için

$$A(z)zp'(z) + B(z)p(z) < h(z)$$

ifadesine *Birinci mertebeden lineer diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 4.1.5: $\Psi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $h, p, \Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ fonksiyonları U da analitik ve h ünivalent olsun.

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) < h(z) \quad (4.3)$$

ifadesine *İkinci mertebeden diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 2000).

(4.3) ifadesine sağlayan p fonksiyonuna bu diferensiyel subordinasyonun bir *çözümü* denir.

(4.3) ifadesini sağlayan her p için $p < q$ olacak şekilde ünivalent bir q fonksiyonu varsa q ya *diferensiyel subordinasyonun çözümlerinin dominantı* kısaca *dominant* denir.

(4.3) ifadesinin bütün q dominantları için $\tilde{q} < q$ koşulunu sağlayan $\tilde{q}$ dominantına (4.3) ifadesinin *en iyi dominantı* denir.

$p \in \mathcal{H} [a, n]$ ise sırasıyla; $p, (a, n)$ -çözüm, $q, (a, n)$ -dominant, $\tilde{q}$, en iyi (a, n) -dominant şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.1.6: A, B, C, D, p, h kompleks değerli analitik fonksiyonlar için

$$A(z)z^2p''(z) + B(z)zp'(z) + C(z)p(z) + D(z) < h(z)$$

ifadesine *İkinci mertebeden lineer diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 4.1.7: $\Psi: \mathbb{C}^{n+1} \times U \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$h, p, \Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), \dots, z^n p^{(n)}(z); z)$ fonksiyonları U da analitik ve h ünivalent olsun.

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), \dots, z^n p^{(n)}(z); z) < h(z) \quad (4.4)$$

ifadesine *n. mertebeden diferensiyel subordinasyon* denir (Miller and Mocanu 2000).

(4.4) ifadesini sağlayan p fonksiyonuna bu diferensiyel subordinasyonunun bir *çözümü* denir.

(4.4) ifadesini sağlayan her p için $p < q$ olacak şekilde ünivalent bir q fonksiyonuna varsa q ya *diferensiyel subordinasyonun çözümlerinin dominantı* kısaca *dominant* denir.

(4.4) ifadesinin bütün q dominantları için $\tilde{q} < q$ koşulunu sağlayan $\tilde{q}$ dominantına (4.4) ifadesinin *en iyi dominantı* denir.

$p \in \mathcal{H} [a, n]$ ise sırasıyla; $p, (a, n)$ -çözüm, $q, (a, n)$ -dominant, $\tilde{q}$, en iyi (a, n) -dominant şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.1.8: $z \in U$ ve $t \geq 0$ olmak üzere

- i. $L(z, t)$, U birim diskinde analitik ve ünivalent
- ii. $0 \leq t_1 \leq t_2$ için $L(z, t_1) \prec L(z, t_2)$

koşullarını sağlıyorsa $L(z, t)$ fonksiyonuna *subordinasyon (ya da Loewner) zinciri* denir (Miller and Mocanu 1985).

Ön Teorem 4.1.1: $t \geq 0$ için $a_1(t) \neq 0$ olmak üzere $L(z, t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots$ fonksiyonunun subordinasyon zinciri olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\Re \left[\frac{z(\partial L / \partial z)}{\partial L / \partial t} \right] > 0, \quad (z \in U)$$

olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 4.1.9: $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\mathcal{D}$ kümesi bağlantılı ve $\mathcal{D}$ deki her γ kapalı eğri herhangi bir $\tilde{\gamma}(t) = z_0 \in \mathcal{D}$ sabit eğrisine büzülebiliyorsa; yani γ , $\mathcal{D}$ içerisinde bir noktaya homotopik ise $\mathcal{D}$ bölgesine basit bağlantılı bölge denir (Marsden 1973).

Tanım 4.1.10: $z_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ için $f'(z_0) \neq 0$ koşulunu sağlayan analitik bir f fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasından geçen iki eğri arasındaki açı, yön ve büyüklük bakımından f fonksiyonu altında korunuyorsa f fonksiyonuna z_0 da *konformdur* denir (Duren 1983).

Teorem 4.1.4 (Lindelöf Prensibi): $U_r = \{z: z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < r < 1\}$ olmak üzere g ünivalent fonksiyon olsun. Eğer $f \prec g$ ise

$$f(U_r) \subset g(U_r) \quad (\forall r \in (0,1))$$

dir. Ayrıca $f(U_r) = g(U_r)$ ise $f(z) = g(cz)$, $|c| = 1$ dir (Miller and Mocanu 2000).

İspat: g ünivalent olmak üzere $f < g$ olsun. O halde subordinasyon tanımından $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde $|\omega(z)| < 1$ ve $\omega(0) = 0$ koşullarını sağlayan $\omega \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu vardır. Buradan $f(U_r) = g(\omega(U_r))$ yazılabilir. Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 den $|\omega(z)| < |z|$ eşitsizliği bulunur ki bu da $\omega(U_r) \subset U_r$ ifadesine denktir. Dolayısıyla $f(U_r) = g(\omega(U_r)) \subset g(U_r)$ ifadesine ulaşılır.

$f(U_r) = g(U_r)$ olduğunu kabul edelim. g ünivalent ve $g(U_r) = g(\omega(U_r))$ olduğundan $\omega(U_r) = U_r$ eşitliği bulunur. $|\omega(z)| \leq |z|$ olduğundan $|\omega(z)| = |z|$ ifadesi yazılır ki $|c| = 1$ olmak üzere $\omega(z) = cz$ şeklindedir. Buradan $f(z) = g(\omega(z)) = g(cz)$, $|c| = 1$ bulunur.

Teorem 4.1.5: g ünivalent olmak üzere $f < g$ ise $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ dir (Miller and Mocanu 2000).

İspat: $f < g$ olduğu için $f(z) = g(\omega(z))$ ifadesinin türevi alınırsa $f'(z) = g'(\omega(z)) \cdot \omega'(z)$ eşitliği elde edilir. $z = 0$ için bu eşitlik $f'(0) = g'(\omega(0)) \cdot \omega'(0) = g'(0) \cdot \omega'(0)$ şeklinde ifade edilir. Teorem 4.1.3 kullanılırsa

$$\left| \frac{\omega(z)}{z} \right| \leq 1 \Rightarrow |\omega'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|\omega(z) - \omega(0)|}{|z - 0|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|\omega(z)|}{|z|} \leq 1$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ istenen ifade bulunur.

Teorem 4.1.6 (Littlewood Subordinasyon Teoremi): $f < g$ ise

$$\mathcal{M}_p(r, f) \leq \mathcal{M}_p(r, g); \quad (0 \leq r \leq 1; p \geq 0) \quad (4.5)$$

dir (Miller and Mocanu 1981).

4.2. Diferansiyel Subordinasyon Teorisi

Reel-değerli fonksiyonlarda f ve f nin türevlerini içeren bir eşitsizlikten f nin sınırlarını bulmak her zaman önemli olmuştur. Örneğin;

$I = (-1,1)$ aralığında ikinci türevi sürekli olan bir f fonksiyonu için

$$D[f](t) \equiv t^2 f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t) + 6t = [t^2 f(t) + t^3]''$$

diferansiyel operatörü verildiğinde

$$0 < D[f](t) < 2 \Rightarrow -1 < f(t) < 2; \quad (t \in I) \quad (4.6)$$

olması gibi veya bir başka deyişle,

$$D[f](I) \subset (0,2) \Rightarrow f(I) \subset (-1,2)$$

şeklinde ifade edilir.

1978 yılındaki Miller and Mocanu ve 2000 yılındaki Miller and Mocanu çalışmalarında reel-değerli fonksiyonlar için diferansiyel eşitsizlikleri içeren bu fikir kompleks-değerli fonksiyonlara genişletilmiştir. Kompleks-değerli fonksiyonlarda sıralama olmadığı için (4.3) ifadesi $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ve $\Omega, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ olmak üzere

$$D[f](z) \equiv z^2 f''(z) + 4z f'(z) + 2f(z) + 6z \quad (4.7)$$

diferansiyel operatörü altında

$$D[f](U) \subset \Omega \Rightarrow f(U) \subset \Delta \quad (4.8)$$

kapsama bağıntısına dönüşmüştür. O halde artık istenen (4.8) koşulunu sağlayan “en küçük” $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ kümesini bulmakla özdeştir. Bu temel soruyla beraber iki tane daha esas problem aklımıza gelebilir. Şöyleki:

- i. Ω ve Δ verildiğinde (4.8) ifadesini sağlayan $D[f]$ diferensiyel operatörü var mı? Varsa nedir?
- ii. $D[f]$ ve Δ verildiğinde (4.8) ifadesini sağlayan “en büyük” $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kümesi var mı? Varsa nedir?

Bu üç problem diferensiyel subordinasyonun gelişmesinde kullanılmıştır.

$\Omega, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ herhangi iki küme ve $p : U \rightarrow \mathbb{C}$, $p(0) = a$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olmak üzere $\Psi : \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ operatörü tanımlansın. Buna göre (4.7) ifadesi altında (4.8) bağıntısı genel olarak

$$\{\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde kompleks düzlemde diferensiyel subordinasyonu karakterize eden üç tane önemli problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Eğer Ω ya da Δ basit bağlantılı bölge ise (4.9) kapsama bağıntısı subordinasyon kavramını kullanarak ifade edilebilir.

$\Delta \neq \mathbb{C}$, a noktasını içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. O halde, Riemann Dönüşüm Teoremi gereğince $q(0) = a$ koşulunu sağlayan $q : U \rightarrow \Delta$ konform dönüşümü bulunabilir. Bu durumda (4.9)

$$\{\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(z) < q(z)$$

ifadesine dönüşür.

Ayrıca $\Omega \neq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ise Riemann Dönüşüm Teoremi gereğince $h(0) = \Psi(a, 0, 0; 0)$ koşulunu sağlayan $h: U \rightarrow \Omega$ konform dönüşümü bulunabilir.

Buna ek olarak $\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$, U da analitik ise (4.6) bağıntısı

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) < h(z) \implies p(z) < q(z) \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilebilir.

1935 de Goluzin, $zp'(z) < h(z)$ basit birinci dereceden subordinasyonu göz önüne almıştır. Goluzin, h konveks iken

$$p(z) < q(z) = \int_0^z h(t)t^{-1}dt,$$

ve q nın en iyi dominant olduğunu göstermiştir. 1970 de Suffridge, eğer h yıldızlı ise Goluzin'in sonucunun doğru olduğunu ispatlamıştır.

1947 de Robinson, diferensiyel subordinasyonu

$$p(z) + zp'(z) < h(z)$$

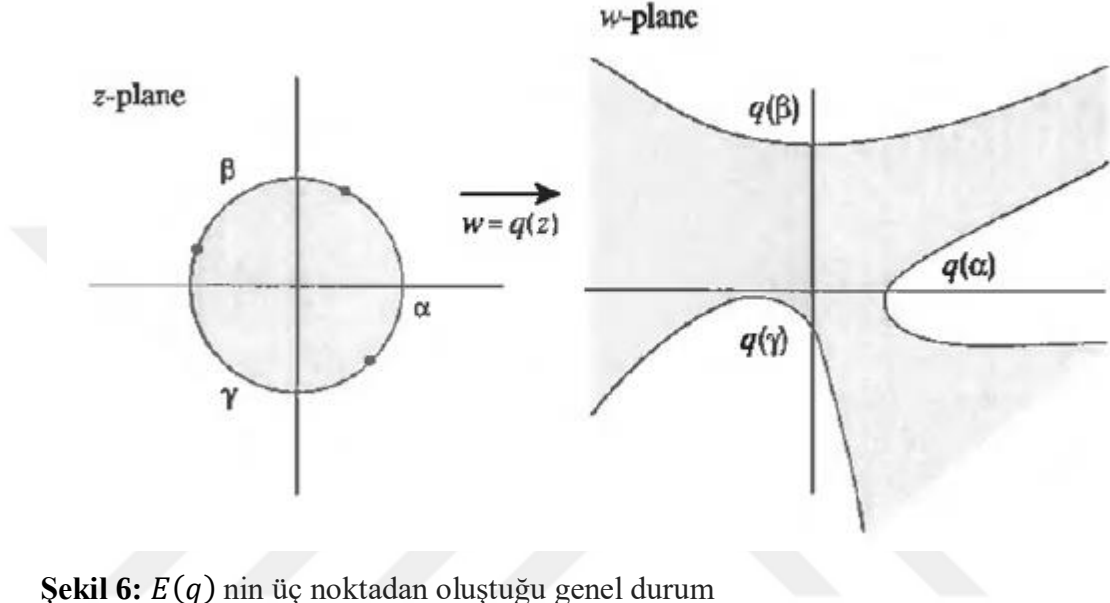
olarak ele almıştır.

Tanım 4.2.1: $q, \bar{U}$ de $q(0) = a$ koşulunu sağlayan bire bir fonksiyonu verilsin.

$$E(q) = \left\{ \zeta \in \partial U: \lim_{z \rightarrow \zeta} q(z) = \infty \right\}$$

olmak üzere $\bar{U}/E(q)$ üzerinde analitik olan ve $\zeta \in \bar{U}/E(q)$ için $q'(\zeta) \neq 0$ koşulunu gerçekleyen q fonksiyonlarının kümesini Q ile gösterelim (Miller and Mocanu 2000).

$q \in \mathcal{Q}$ ise $\Delta = q(U)$, sınırı basit kapalı regüler bir eğri ya da her iki yönde ∞ a yakınsayan ikiye ayrılmış basit regüler eğrilerin birleşiminden meydana gelen basit bağlantılı bir kümedir (Miller and Mocanu). $q_1(z) = z$ ve $q_2(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonları bu iki duruma birer örnektir. $E(q)$ nin üç noktadan oluştuğu genel durum için bkz. Şekil 6.



Şekil 6: $E(q)$ nin üç noktadan oluştuğu genel durum

4.3. Uygunluk Fonksiyonu ve Temel Teoremler

Bu bölümde, $\Omega, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ herhangi iki küme ve $p(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ olmak üzere $p: U \rightarrow \mathbb{C}$, $p(0) = a$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon ve $\Psi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\{\Psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) : z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta$$

olsun.

Tanım 4.3.1: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{Q}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olsun. $z \in U, \zeta \in \partial U / E(q)$ ve $m \geq n$ için

$$i. \quad r = q(\zeta)$$

- ii. $s = m\zeta q'(\zeta)$
- iii. $\Re \left\{ \frac{t}{s} + 1 \right\} \geq m \Re \left\{ 1 + \frac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} \right\}$

olmak üzere

$$\Psi(r, s, t; z) \notin \Omega \quad (4.11)$$

koşulunu sağlayan $\Psi : \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna *uygunluk fonksiyonu*, (i), (ii), (iii) koşulları altında (4.11) ifadesine *uygunluk koşulu* denir (Miller and Mocanu 2000).

Buna göre

$$\Psi_n[\Omega, q] = \{\Psi : \Psi \text{ uygunluk koşulunu sağlar}\}$$

kümesine de *uygunluk fonksiyonlarının sınıfı* denir. Ayrıca $\Psi[\Omega, q] := \Psi_1[\Omega, q]$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak $\Omega \neq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge ise Riemann Dönüşüm Teoremi gereğince $\Omega = h(U)$ olacak şekilde $h : U \rightarrow \Omega$ konform dönüşümü bulunabilir ve bu şekilde ifade edilen uygunluk fonksiyonlarının sınıfı $\Psi_n[h, q] := \Psi_n[\Omega, q]$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\Psi : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ ise (4.11) uygunluk koşulu

$$\Psi(q(\zeta), m\zeta q'(\zeta); z) \notin \Omega; (z \in U, \zeta \in \partial U/E(q), m \geq n)$$

koşuluna indirgenir.

Son olarak $\Psi : \mathbb{C} \times U \rightarrow \mathbb{C}$ ise (4.11) uygunluk koşulu

$$\Psi(q(\zeta); z) \notin \Omega; (z \in U, \zeta \in \partial U/E(q))$$

koşuluna indirgenir.

Not: $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ için $\Psi_n[\tilde{\Omega}, q] \subset \Psi[\Omega, q]$ dir.

Not: $n \in \mathbb{N}^+$ için $\Psi_n[\Omega, q] \subset \Psi_{n+1}[\Omega, q]$ dir.

Aşağıdaki teorem birinci ve ikinci mertebeden diferensiyel subordinasyon teorisinde temel bir sonuçtur.

Teorem 4.3.1: $q(0) = a$ olmak üzere $\Psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ uygunluk fonksiyonu verilsin. Eğer $p \in \mathcal{H}[a, n]$ analitik fonksiyonu her $z \in U$ için

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega \quad (4.12)$$

içerme bağıntısını sağlıyor ise $p \prec q$ dir (Miller and Mocanu 2000).

Bu teoremden, sadece Ψ uygunluk fonksiyonu seçilerek (4.12) koşulunu sağlayan diferensiyel subordinasyonun dominantlarını elde edebildiği sonucuna varılabilir.

$\Psi_n[\Omega, q]$ sınıfı üzerindeki koşullar oldukça geneldir ve (4.12) koşulunu sağlayan analitik bir p fonksiyonu olmayabilir. Örneğin,

$$q(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad \Omega = q(U) \text{ ve } \Psi(r, s, t; z) = -r^2s$$

verildiğinde $\Psi \in \Psi[q(U), q]$ olduğu açıktır. Buna göre (4.12) koşulu

$$\Re(-(p(z))^2 zp'(z)) > 0$$

ifadesine dönüşür. Fakat $z = 0$ noktası bu eşitsizliği sağlamadığından böyle bir p analitik fonksiyonu bulunmaz.

Bundan sonra p nin varlığıyla ilgilenmeyip (4.12) koşulunu sağlayan analitik bir p fonksiyonunun varlığı kabul edilecektir.

Ayrıca $\omega: U \rightarrow U$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere (4.12) ifadesi

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); \omega(z)) \in \Omega$$

koşulu ile yer değiştirebilir.

$q(U)$ bölgesinin bir disk şeklinde özel biçimde alınmasıyla oluşan uygunluk koşulu aşağıdaki gibi verilir.

Orijin merkezli M-yarıçaplı disk üzerindeki durum:

$\Delta = \{w: |w| < M, w \in \mathbb{C}\}$ diski verilsin. $M > 0$ ve $|a| < M$ olmak üzere

$$q(z) = M \frac{Mz + a}{M + \bar{a}z}$$

fonksiyonu $\Delta = q(U) = U_M, q(0) = a, E(q) = \emptyset$ ve $q \in Q$ ifadelerini sağlar.

Tanımlanan bu q fonksiyonu altında uygunluk fonksiyonlarının sınıfı $\Psi_n[\Omega, M, a] := \Psi_n[\Omega, q]$ şeklinde gösterilir. $\Omega = \Delta$ özel durumunda ise bu sınıf $\Psi_n[M, a]$ ile ifade edilir.

Buna göre $|\zeta| = 1$ olmak üzere $z \in U, \theta \in \mathbb{R}$ ve $m \geq n$ için $q(\zeta) = Me^{i\theta}$ olduğundan uygunluk koşulu

- i. $r = Me^{i\theta}$
- ii. $s = mM \frac{|M - \bar{a}e^{i\theta}|^2}{M^2 - |a|^2} e^{i\theta}$

$$iii. \quad \Re \left\{ \frac{t}{s} + 1 \right\} \geq m \frac{|Me^{i\theta} - a|^2}{|Me^{i\theta}|^2 - |a|^2} = m \frac{|M - \bar{a}e^{i\theta}|^2}{M^2 - |a|^2}$$

olmak üzere

$$\Psi(r, s, t; z) \notin \Omega \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer $a = 0$ alınırsa uygunluk koşulu

$$K \geq nM \text{ ve } \Re[Le^{-i\theta}] \geq (n-1)K \text{ olmak üzere}$$

$$\Psi(Me^{i\theta}, Ke^{i\theta}, L; z) \notin \Omega \quad (4.14)$$

koşullarına dönüşür. ($z \in U, \theta \in \mathbb{R}$)

Teorem 4.3.2: $p \in \mathcal{H}[a, n]$ fonksiyonu için

i. $\Psi \in \Psi_n[\Omega, M, a]$ olmak üzere

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega \Rightarrow |p(z)| < M$$

ii. $\Psi \in \Psi_n[M, a]$ olmak üzere

$$|\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)| < M \Rightarrow |p(z)| < M$$

dir (Miller and Mocanu 2000).

İspat:

i. Teorem 4.3.1 de $q(z) = M(Mz + a)/(M + \bar{a}z)$ alınırsa istenen ifade bulunur.

- ii.* Teorem 4.3.1 de $\Omega = \Delta = \{w : |w| < M, w \in \mathbb{C}\}$ ve $q(z) = M(Mz + a)/(M + \bar{a}z)$ alınırsa istenen ifade bulunur.

Teorem 4.3.3: $p \in \mathcal{H}[a, n]$ fonksiyonu için

- i.* $\Psi \in \Psi_n\{\Omega, a\}$ olmak üzere

$$\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega \implies \Re p(z) > 0$$
- ii.* $\Psi \in \Psi_n\{a\}$ olmak üzere

$$\Re[\Psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)] > 0 \implies \Re p(z) > 0$$

dir (Miller and Mocanu 2000).

İspat:

- i.* Teorem 4.3.1 de $q(z) = (a + \bar{a}z)/(1 - z)$ alınırsa istenen ifade bulunur.
- ii.* Teorem 4.3.1 de $\Omega = \Delta = \{w : \Re w > 0, w \in \mathbb{C}\}$ ve $q(z) = (a + \bar{a}z)/(1 - z)$ alınırsa istenen ifade bulunur.

5. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Tanım 5.1 (Gama Fonksiyonu): $\Re z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (5.1)$$

fonksiyonuna gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinmektedir.

Tanım 5.1 analitik devam vasıtasıyla $\Re z < 0$ için aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

(5.1) ile elde edilen fonksiyon

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (5.2)$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{ve} \quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa $P(z)$ fonksiyonu $\Re z > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$ fonksiyonu $\Re z > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesi kuvvet serisine açılırsa,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k \quad (5.3)$$

elde eldir. Burada

$$\int_0^1 |t^{z-1}| dt \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da bu integralin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (5.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur. Bu durumda (5.4) serisinin $z = 0, -1, -2, \dots$ noktasında basit kutba sahip ve $\Re z > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (5.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \dots$ noktalarında basit kutba sahip olan meramorf bir fonksiyon olur.

$\Gamma(z)$ nin kompleks düzlemdeki tanımları değişik versiyonlarla ifade edilebilir. Bunlar,

- $\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$
- $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$
- $\frac{1}{\Gamma(z)} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} z e^{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)\right] z - z \ln(n)} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[z e^{-z \ln(n)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n^z n!}$$

$$\bullet \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

şeklindedir. Ayrıca bu son eşitlik Gauss formülü olarak alınır. $z \neq 0, -1, -2, \dots$ değerleri için Gauss formülünden

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z+n+1} \left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \right) = z\Gamma(z)$$

elde edilir.

Gama fonksiyonu ile ilgili

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- $\Gamma(n+1/2) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$

özellikler yazılabilir. Özel olarak

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

dir. Elbette gama fonksiyonunun özellikleri bunlarla sınırlı değildir.

Tanım 5.2 (Beta Fonksiyonu): x ve y pozitif reel kısma sahip kompleks değişkenler olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)dt, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu gama fonksiyonuna bağlı olarak gösterilebilir (Şahin 2011).

Gama fonksiyonunun tanımından

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv$$

yazılır. Bu denklemde $u = a^2$, $v = b^2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty e^{-a^2}a^{2x-1}da \int_0^\infty e^{-b^2}b^{2y-1}db \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(a^2+b^2)}|a|^{2x-1}|b|^{2y-1}dad b \end{aligned}$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlar dönüşümü $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ yapılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2}|r \cos \theta|^{2x-1}|r \sin \theta|^{2y-1} r dr d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-2}rdr \int_0^{2\pi} |(\cos \theta)^{2x-1}(\sin \theta)^{2y-1}|d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}d(r^2) 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1}(\sin \theta)^{2y-1}d\theta \\ &= \Gamma(x+y)2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1}(\sin \theta)^{2y-1}d\theta \\ &= \Gamma(x+y)B(x, y) \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

şeklini alır. Beta fonksiyonu simetriktir, yani $B(x, y) = B(y, x)$ dir.

Tanım 5.3 (Pochhammer (Apell) Sembolü): Γ , gama fonksiyonunu göstermek üzere $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, \dots$ olması durumunda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0; a \in \mathbb{C} - \{0\} \\ a(a+1) \dots (a+n-1), & n = a \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise

$$(a)_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$$

formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ eşitsizliği her zaman sağlanır. Özel olarak $n = 0$ alınırsa $(a)_0 = 1$ olur.

5.1. Bessel Fonksiyonları

Bessel fonksiyonu ismini Alman gökbilimci ve matematikçi olan F.W. Bessel (22 Temmuz 1784-17 Mart 1846) den almıştır. Bessel fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlardan elde edilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ilk kez 1732 yılında D. Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Bernoulli sıfır mertebeden Bessel fonksiyonunu, salınım problemlerinin çözümünde kullanmıştır. L. Euler, 1764 yılında mertebesi tamsayı olan Bessel fonksiyonunu, gerilmiş zar titreşimlerinin analizinde kullanmıştır. L. Rayleigh, 1878 yılında Bessel fonksiyonlarını incelemiş ve bu fonksiyonların Laplace fonksiyonlarının özel hali olduğunu göstermiştir. Bessel, Kepler'in "aynı yerçekimi

altındaki üç parçacığın hareketini hesaplama” problemi üzerindeki çalışmasının sonucunda Bessel fonksiyonunu elde etmiştir. 1824 yılında Bessel, “gezegenlerde karşılıklı çekim kuvvetleri sebebiyle oluşan düzensizlik” problemi üzerinde yaptığı çalışmalarda da Bessel fonksiyonunu kullanmıştır. Bu fonksiyonların fizikte dalga yayılımı ve statik potansiyelleri gibi birçok uygulaması vardır. Bessel diferensiyel denkleminin çeşitli türleri vardır.

Tanım 5.1.1 (Bessel Diferensiyel Denklemi): v , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w_v''(z) + z w_v'(z) + (z^2 - v^2) w_v(z) = 0 \quad (5.5)$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen diferensiyel denklemine Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu denklemin bir özel çözümü olan

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (5.6)$$

fonksiyonuna v . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu denir (Watson 1944).

Tanım 5.1.2 (Modifiye Bessel Diferensiyel Denklemi): v , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w_v''(z) + z w_v'(z) - (z^2 + v^2) w_v(z) = 0 \quad (5.7)$$

biçimindeki ikinci çeşit homojen diferensiyel denklemine Modifiye Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu diferensiyel denklemin bir özel çözümü olan

$$I_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(v+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (5.8)$$

fonksiyonuna v . mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu adı verilir (Watson 1944).

Tanım 5.1.3 (Küresel Bessel Diferensiyel Denklemi): v , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w_v''(z) + 2z w_v'(z) + (z^2 - v(v+1))w_v(z) = 0 \quad (5.9)$$

biçimindeki ikinci çeşit homojen diferensiyel denklemin Küresel Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$j_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (5.10)$$

fonksiyonuna v . mertebeden birinci çeşit Küresel Bessel fonksiyonu denir (Abramowitz and Stegun 1965).

Tanım 5.1.4 (Modifiye Küresel Bessel Diferensiyel Denklemi): v , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w_v''(z) + 2z w_v'(z) - (z^2 + v(v+1))w_v(z) = 0 \quad (5.11)$$

diferensiyel denklemin Modifiye edilmiş Küresel Bessel diferensiyel denklemi adı verilmektedir. Bu diferensiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$i_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(v+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (5.12)$$

fonksiyonuna v . mertebeden birinci çeşit Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu denmektedir (Abramowitz and Stegun 1965).

$$b, c \in \mathbb{C} \text{ Ve } d = d_1 p^2 + d_2 p + d_3 \text{ } (d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}) \text{ olmak üzere}$$

$$z^2 w_v''(z) + b z w_v'(z) + (c z^2 + d) w_v(z) = 0 \quad (5.13)$$

denklemini göz önüne alalım. Frobenius metodunu kullanarak (5.13) denkleminin $\forall n \geq 0$ ve $a_n \in \mathbb{C}$ için

$$w_v(z) = z^v \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)$$

şeklindeki çözümleri araştırılabilir.

$\forall n \geq 2$ için yukarıdaki sonsuz kuvvet serisinin a_n ve a_{n-2} katsayıları arasındaki ilişkinin

$$\begin{aligned} a_n n(n + 2v + b - 1) + a_n [(d_1 + 1)v^2 + (b + d_2 - 1)v + d_3] \\ = -c a_{n-2} z^2 w_v''(z) + b z w_v'(z) + (c z^2 + d) w_v(z) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $d_1 = -1, d_2 = 1 - b, d_3 = 0$ değerleri (5.14) denkleminde yerine koyulursa $\forall n \geq 2$ için (5.14) denklemi,

$$a_n n(n + 2v + b - 1) = -c a_{n-2} \quad (5.15)$$

şeklini alır. O halde (5.13) denklemi

$$z^2 w_v''(z) + b z w_v'(z) + (c z^2 - v^2 + (1 - b)v) w_v(z) = 0 \quad (5.16)$$

denklemin dönüşür. Bu denklem Bessel, Modifiye Bessel, Küresel Bessel ve Modifiye Küresel Bessel diferensiyel denklemlerinin genelleştirilmiş halidir. (5.15) denklemindeki ilişkiyi kullanılarak (5.16) denkleminin özel bir çözümünü ifade edilebilir.

$\forall z \in \mathbb{C}$ ve $a_0(p) \neq 0$ için;

$$\begin{aligned} w_{v,b,c}(z) &= a_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n}{\prod_{m=1}^n \left(m + v + \frac{b-1}{2}\right)} z^{2n+v} \\ &= a_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n+v} \end{aligned}$$

olur. Eğer

$$a_0(v) = 2^v \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)^{-1}$$

eşitliğini alırsak (5.16) denkleminin özel çözümü olarak $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$w_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (5.17)$$

serisi elde edilir.

Burada $w_{v,b,c}(z)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞ olduğundan $w_{v,b,c}(z)$ serisi $\forall b, c, v, z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.

Tanım 5.1.5 (Genelleştirilmiş Bessel Diferensiyel Denklemi): b, c ve v reel ya da kompleks bir sayı olsun. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w_v''(z) + b z w_v'(z) + (c z^2 - v^2 + (1-b)v) w_v(z) = 0$$

lineer diferensiyel denkleminin genelleştirilmiş Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu denklemin özel bir çözümü olan ve (5.17) ile verilen

$$w_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}$$

şeklindedir. Bu $w_v(z)$ fonksiyona v . mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu denir (Baricz 1994). Burada b ve c çeşitli değerler vererek yukarıda tanımlanan dört tip v . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonlarının türlerini elde edebiliriz.

Örneğin, $w_v(z)$ serisinde $b = c = 1$ yazılırsa (5.5) denklemi elde edilir. Ayrıca bu değerler için $w_v(z)$ fonksiyonunda v . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu olan J_v ye dönüşür.

$w_v(z)$ serisinde $b = -c = 1$ yazılırsa (5.7) denklemi elde edilir ve $w_v(z)$, v . mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu olan $I_{v,b,c}$ ye dönüşür.

Benzer şekilde $w_v(z)$ serisinde $b - 1 = c = 1$ yazılırsa (5.9) denklemi elde edilir ve $w_v(z)$, $2j_v/\sqrt{\pi}$ fonksiyonuna indirgenir.

Aynı şekilde $w_v(z)$ serisinde $b - 1 = -c = 1$ yazılırsa (5.11) denklemi elde edilir ve $w_v(z)$, $2i_v/\sqrt{\pi}$ fonksiyonuna indirgenir.

Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunun tanımına bakıldığında bu fonksiyonun normalize olmadığı açıktır. Şimdi normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunu elde edelim. Bunun için

$$a_0(v) = 2^v \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)^{-1}$$

olmak üzere

$$u_{v,b,c}(z) = \frac{1}{a_0(v)} z^{1-\frac{v}{2}} w_{v,b,c}(\sqrt{z})$$

elde edilir. Elde edilen $u_{v,b,c}(z)$ fonksiyonuna normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu denir. Daha açık bir ifadeyle bu fonksiyon

$$b_n = \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)}$$

için

$$u_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1}$$

şeklindedir. Pochhammer sembolünün tanımı olan

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

ifadesi göz önüne alınacak olursa

$$u_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c/4)^n z^{n+1}}{(\kappa)_n n!} \quad (5.18)$$

elde edilir. Burada v, b, c birer kompleks sayı olup

$$\kappa = v + \frac{b+1}{2} \neq 0, -1, -2 \dots \quad (5.19)$$

şeklindedir (Baricz 2008a).

Bessel ve modifiye edilmiş Bessel fonksiyonlarında ν nin özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilebilir:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z ,$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z ,$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) ,$$

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z ,$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z ,$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right) ,$$

şeklindedir.

5.2. Bessel -Maitland Fonksiyonları

Bessel-Maitland fonksiyonu, klasik Bessel fonksiyonlarının bir genellemesidir ve özel fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyon, diferansiyel denklemler, integral dönüşümleri, özel fonksiyonlar ve matematiksel fizik gibi çeşitli alanlarda kullanılır (Watson 1962).

Bessel-Maitland fonksiyonu aşağıdaki seri gösterimi ile tanımlanır.

$$J_{\eta}^{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \quad (\Re(\gamma) \geq 0, \Re(\eta) \geq -1 \text{ ve } z \in U) \quad (5.20)$$

Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Soni and Bansal 2023).

$$J_{\eta,a}^{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n z^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \quad (a \in \mathbb{C} - \{0\}, \gamma > 0, \eta > -1 \text{ ve } z \in U). \quad (5.21)$$

(5.21) ifadesinde $a = -1$ alınırsa

$$J_{\eta,-1}^{\gamma}(z) = W_{\gamma,\eta+1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \quad (5.22)$$

elde edilir. Burada $W_{\gamma,\eta+1}(z)$ Wright fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$J_{\eta,1}^{\gamma}(z) = J_{\eta}^{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \quad (5.23)$$

dir.

(5.21) ile tanımlanan genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu A sınıfına ait değildir. Yani $J_{\eta,a}^{\gamma}(z) \notin A$ dır. Bu fonksiyonun normalleştirilmiş iki türünü aşağıdaki biçimde verebiliriz:

$$\mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z) = z \Gamma(\eta + 1) J_{\eta,a}^{\gamma}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n \Gamma(\eta + 1) z^{n+1}}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \quad (5.24)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z) &= \frac{\Gamma(\gamma + \eta + 1)}{(-a)} \left(\mathcal{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z) - \frac{1}{\Gamma(\eta + 1)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n \Gamma(\gamma + \eta + 1) z^{n+1}}{(n+1)! \Gamma(\gamma n + \gamma + \eta + 1)}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$(\gamma > 0, \gamma + \eta > -1, a \in \mathbb{C} - \{0\}, z \in U)$$

(5.21) ifadesinde $a = 1$ ve $\gamma = 1$ alınırsa

$$\mathbb{J}_{\eta,1}^1(z) = \mathbb{J}_{\eta}(z) = \Gamma(\eta + 1) z^{1-\eta/2} J_{\eta}(2\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\eta + 1) z^{n+1}}{n! \Gamma(n + \eta + 1)} \tag{5.26}$$

elde edilir. Burada

$$J_{\eta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\eta + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{\eta-2} \mathbb{J}_{\eta,1}^1 \left(\frac{z^2}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\eta}}{n! \Gamma(n + \eta + 1)}$$

η -mertebeden Bessel fonksiyonudur ve son zamanlarda normalleştirilmiş $\mathbb{J}_{\eta}(z)$ fonksiyonunun çeşitli geometrik özellikleri Prajabat ve Szasz tarafından incelenmiştir (Prajabat 2011, Szasz 2014).

Diğer normalleştirilmiş türünü aşağıdaki biçimde verebiliriz:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_{\eta,a}^{\gamma}(z) &= \frac{\mathcal{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z)}{z} = \frac{1}{z} \left[z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n \Gamma(\eta + 1) z^{n+1}}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)} \right] \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n \Gamma(\eta + 1) z^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)}
 \end{aligned}$$

ve

$$z(\mathbb{V}_{\eta,a}^{\gamma}(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n \Gamma(\eta+1) n z^n}{n! \Gamma(\gamma n + \eta + 1)}.$$

Normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonlar için rekürans bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\gamma z(\mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z))' = (\eta + 1) \mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z) + (\gamma - \eta - 1) \mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z), \quad (5.27)$$

$$z(\mathcal{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z))' = \mathbb{J}_{\gamma+\eta,a}^{\gamma}(z) \quad (5.28)$$

ve

$$(\mathbb{V}_{\eta,a}^{\gamma}(z))' = \frac{(-a)^n \Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\gamma + \eta + 1)} \mathbb{V}_{\gamma+\eta,a}^{\gamma}(z). \quad (5.29)$$

6. $\mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z)$ OPERATÖRÜNÜ İÇEREN DİFERANSİYEL SUBORDİNASYON

İlk olarak, (5.24) ile tanımlanan $\mathbb{J}_{\eta,a}^{\gamma}(z)$ operatörünü içeren ikinci mertebeden diferensiyel subordinasyon teoremini ispatlamak için gereken uygunluk fonksiyonların bir sınıfını tanımlanacaktır.

Tanım 6.1: $\Omega, \mathbb{C}$ de bir küme ve $q(z) \in \mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{H}_0$ olsun. Uygunluk fonksiyonların sınıfı $\Phi_H[\Omega, q]$, $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan ve

$$\phi(u, v, w; z) \notin \Omega$$

uygunluk koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşur.

Burada $z \in U$, $\gamma > 0, \eta \in \partial U \setminus E(q)$, $\gamma + \eta > -1$ ve $k \geq 1$ için,

$$u = q(\zeta), \quad v = \frac{\gamma k \zeta q'(\zeta) - (\eta + 2)q(\zeta)}{\gamma - \eta - 2}$$

ve

$$\Re \left\{ \frac{(\gamma - \eta - 3)w - (\eta + 2)(\eta + 3)u}{\gamma[(\gamma - \eta - 2)v + (\eta + 2)u]} - \frac{2(\gamma - \eta) - 5}{\gamma} \right\} \geq k \Re \left\{ \frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1 \right\}$$

biçimindedir.

Teorem 6.1: $\phi \in \Phi_H[\Omega, q]$ olsun. Eğer $f \in A$

$$\{\phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z); z): z \in U\} \subset \Omega \quad (6.1)$$

içerme bağlantısını sağlarsa, o halde

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

dir.

İspat: U birim diskinde p analitik fonksiyonu

$$p(z) = \mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z) \quad (6.2)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, (6.2) eşitliğinin z ye göre türevi alınır ve (5.27) deki rekürans bağıntısında η yerine $\eta + 1$ yazılarak (6.2) de dikkate alınır

$$\mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z) = \frac{\gamma z p'(z) - (\eta + 2)p(z)}{\gamma - \eta - 2} \quad (6.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (6.3) eşitliğinin z ye göre türevi alınır ve (5.27) deki rekürans bağıntısında η yerine $\eta + 2$ yazılarak (6.3) de dikkate alınır

$$\mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z) = \frac{\gamma^2 z^2 p''(z) + p'(z)\gamma z(\gamma - 2\eta - 5) + (\eta + 3)(\eta + 2)p(z)}{\gamma - \eta - 3} \quad (6.4)$$

elde edilir.

Şimdi, $p(z) = r$, $z p'(z) = s$, $z^2 p''(z) = t$ ve $u = \mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)$, $v = \mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z)$ ve $w = \mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z)$ olmak üzere $\mathbb{C}^3$ ten $\mathbb{C}$ ye

$$u = r, \quad v = \frac{\gamma s - (\eta + 2)r}{\gamma - \eta - 2} \quad \text{ve} \quad w = \frac{\gamma^2 t + \gamma s(\gamma - 2\eta - 5) + (\eta + 3)(\eta + 2)r}{\gamma - \eta - 3} \quad (6.5)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\psi(r, s, t; z) &= \phi(u, v, w; z) \\ &= \phi\left(r, \frac{\gamma s - (\eta + 2)r}{\gamma - \eta - 2}, \frac{\gamma^2 t + \gamma s(\gamma - 2\eta - 5) + (\eta + 3)(\eta + 2)r}{\gamma - \eta - 3}; z\right)\end{aligned}\quad (6.6)$$

olsun. (6.2)-(6.4) eşitliklerini kullanarak (6.6) eşitliğinden,

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) = \phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z); z) \quad (6.7)$$

yazılır.

Böylece (6.1) ifadesi

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) \in \Omega$$

formunu alır.

Eğer $\phi \in \Phi_H[\Omega, q]$ için uygunluk şartının Tanım 4.3.1 de verilen uygunluk şartına eşit olduğu gösterilebilirse teoremin ispatı tamamlanmış olur.

(6.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{t}{s} + 1 = \frac{w(\gamma - \eta - 3) - (\eta + 3)(\eta + 2)u}{\gamma v(\gamma - \eta - 2) + (\eta + 2)u} - \frac{2(\gamma - \eta) - 5}{\gamma}$$

elde edilir ve böylece $\psi \in \Psi[\Omega, q]$ olur. Teorem 4.3.1 dikkate alınırsa her $z \in U$ için

$$p(z) < q(z) \text{ ya da } \mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < q(z)$$

elde edilir. Böylece Teorem 6.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Eğer $\Omega \neq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ise o halde $\Omega = h(U)$ olacak şekilde bir h konformal dönüşümü vardır. Bu durumda $\Phi_H[h(U), q]$ sınıfı $\Phi_H[h, q]$ şeklinde yazılır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 6.1 in doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 6.1: $\phi \in \Phi_H[\Omega, q]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z); z) < h(z) \quad (6.8)$$

şartını sağlıyorsa o halde

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

dir.

Bir sonraki sonucumuz, q fonksiyonunun ∂U üzerindeki davranışının bilinmediği duruma yönelik olarak Teorem 6.1'in bir genellemesidir.

Sonuç 6.2: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ve $q, q(0) = 0$ şartını sağlayan U da ünivalent bir fonksiyon olsun. Ayrıca bazı $\rho \in (0,1)$ için $\phi \in \Phi_H[\Omega, q_\rho]$ olsun. Burada $q_\rho(z) = q(\rho z)$ dir. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z); z) \in \Omega$$

içerme bağıntısını sağlıyorsa bu durumda

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

olur.

İspat: Teorem 6.1 den

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < q_\rho(z) \quad (z \in U)$$

ifadesi yazılır. Ayrıca Sonuç 6.2 de belirtilen sonuç

$$q_\rho(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

subordinasyon ilişkisinden çıkarılır.

Teorem 6.2: h ve q , $q(0) = 0$ şartını sağlayan U birim diskinde ünivalent fonksiyonlar olsun. $q_\rho(z) = q(\rho z)$ ve $h_\rho(z) = h(\rho z)$ olarak alalım. Ayrıca $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu,

1. Bazı $\rho \in (0,1)$ için $\phi \in \Phi_H[\Omega, q_\rho]$,
2. Tüm $\rho \in (\rho_0, 1)$ ler için $\phi \in \Phi_H[h_\rho, q_\rho]$ olacak şekilde $\rho_0 \in (0,1)$ vardır.

şartlarından birini sağlasın.

Eğer $f \in A$ fonksiyonu (6.8) subordinasyon şartını sağlarsa bu durumda

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

olur.

İspat: Teoremin ispatı (Miller and Mocanu 2000, Theorem 2.3d) çalışmasındaki ispata benzerdir. Dolayısıyla yazılmamıştır.

Bir sonraki teorem, (6.8) diferensiyel subordinasyonu için en iyi dominant sonucu verir.

Teorem 6.3: h, U da bir ünivalent bir fonksiyon ve $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ olsun.

$$\phi \left(q(z), \frac{\gamma z q'(z) - (\eta + 2)q(z)}{\gamma - \eta - 2}, \frac{\gamma^2 z^2 q''(z) + \gamma(\gamma - 2\eta - 5)z q'(z) + (\eta + 3)(\eta + 2)q(z)}{\gamma - \eta - 3}; z \right) = h(z) \quad (6.9)$$

diferansiyel denkleminin $q(0) = 0$ için bir q çözümü sahip olsun ve

1. $q \in \mathcal{Q}_0$ ve $\phi \in \Phi_H[h, q]$ dir.
2. q, U da univalenttir ve bazı $\rho \in (0,1)$ için $\phi \in \Phi_H[h, q_\rho]$ dir.
3. q, U da univalenttir ve tüm $\rho \in (\rho_0, 1)$ ler için $\phi \in \Phi_H[h_\rho, q_\rho]$ olacak şekilde $\rho_0 \in (0,1)$ vardır.

şartlarından birisini sağlasın.

Eğer $f \in A$ fonksiyonu (6.8) subordinasyon şartını sağlarsa, bu durumda

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z) < q(z) \quad (z \in U)$$

dir ve q en iyi dominanttır.

İspat: Sonuç 6.1 ve Teorem 6.2 den q nun bir dominant olduğu elde edilir. q , (6.9) subordinasyonunu sağladığından (6.8) subordinasyonunun da bir çözümüdür ve böylece, (6.8) için tanımlanan diğer tüm dominantlar q yu kapsar. Dolayısıyla q en iyi dominanttır.

Bu aşamada Teorem 6.1, $q(z) = Mz$ ($M > 0$) özel durumuna uygulanacaktır. Tanım 6.1 dikkate alındığında $\Phi_H[\Omega, q]$ uygunluk fonksiyonların sınıfı, $\Phi_H[\Omega, M]$ şeklinde gösterilmek üzere aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 6.2: $\Omega, \mathbb{C}$ de bir küme ve $M > 0$ olsun. $\Phi_H[\Omega, M]$ uygunluk fonksiyonların sınıfı,

$$\phi \left(Me^{i\theta}, \frac{\gamma k - \eta - 2}{\gamma - \eta - 2} Me^{i\theta}, \frac{\gamma^2 L + [k\gamma(\gamma - 2\eta - 5) + (\eta + 3)(\eta + 2)]Me^{i\theta}}{\gamma - \eta - 3}; z \right) \notin \Omega, \quad (6.10)$$

şartını sağlayan $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşur.

Burada $z \in U$, $\gamma > 0$ ve tüm $\theta \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ için $\Re(Le^{-i\theta}) \geq k(k-1)M$ dir.

Sonuç 6.3: $\phi \in \Phi_H[\Omega, M]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z); z) \in \Omega$$

içerme bağıntısını sağlıyorsa, o halde

$$\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z) < Mz \quad (z \in U)$$

dir.

$\Omega = \{w: |w| < M\} = q(U)$ özel durumunda $\Phi_H[\Omega, M]$ sınıfı basitçe $\Phi_H[M]$ şeklinde gösterilir ve Sonuç 6.3 aşağıdaki gibi tekrardan yazılabilir.

Sonuç 6.4: $\phi \in \Phi_H[M]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu $z \in U$ için

$$|\phi(\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z), \mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z); z)| < M$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda

$$|\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)| < M$$

olur.

Sonuç 6.4 te

$$\phi(u, v, w; z) = v = \frac{\gamma k - \eta - 2}{\gamma - \eta - 2} M e^{i\theta}$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.5: Eğer $M > 0$, $\gamma > 0$ ve $f \in A$ fonksiyonu

$$|\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)| < M$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda

$$|\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)| < M$$

olur.

Sonuç 6.6: $\gamma > 0$ ve $M > 0$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$|(\gamma - \eta - 2)\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z) + (\eta + 2)\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)| < \frac{M}{|\gamma|}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda

$$|\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)| < M$$

olur.

İspat: $\phi(u, v, w; z) = \frac{\gamma-\eta-2}{\gamma}u + \frac{\eta+2}{\gamma}v$ ve $\Omega = h(U)$ olsun. Burada $h(z) = \frac{Mz}{\gamma}$ ($M > 0$) dir. Sonuç 6.3 ü kullanmak için, $\phi \in \Phi_H[\Omega, M]$ olduğunu, yani (2.9) uygunluk şartının sağlandığının gösterilmesi gerekir. Yani

$$\left| \phi \left(Me^{i\theta}, \frac{\gamma k - \eta - 2}{\gamma - \eta - 2} Me^{i\theta}, \frac{\gamma^2 L + [k\gamma(\gamma - 2\eta - 5) + (\eta + 3)(\eta + 2)]Me^{i\theta}}{\gamma - \eta - 3}; z \right) \right| \\ = \left| \frac{kMe^{i\theta}}{\gamma} \right| \geq \frac{M}{|\gamma|}$$

yazılır. Burada $z \in U$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ ve $k \geq 1$ dir. Böylece istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 6.3, sonucun kesin olduğunu göstermektedir. $zq'(z) = Mz$ diferansiyel denklemi $q(z) = Mz$ şeklinde bir ünivalent çözüme sahiptir. Teorem 6.3 ten, $q(z) = Mz$ nin en iyi dominant olduğu sonucu çıkar.

Tanım 6.3: Ω , $\mathbb{C}$ de bir küme ve $q \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{H}_1$ olsun. $\Phi_{H,2}[\Omega, q]$ uygunluk fonksiyonların sınıfı,

$$\phi(u, v, w; z) \notin \Omega$$

şartını sağlayan $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşur. Burada

$$u = q(\zeta), \quad v = \frac{\gamma k \zeta q'(\zeta) + (\gamma - \eta - 2)q(\zeta)}{\gamma - \eta - 2} \quad (\gamma > 0, \gamma + \eta > -1)$$

ve

$$\Re \left(\frac{(\gamma - \eta - 3)(w - u) - (3\gamma - 2\eta - 5)(v - u)}{\gamma(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)(v - u)} + 1 \right) \geq k \Re \left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1 \right)$$

$$(z \in U; \gamma > 0; \eta \in \partial U \setminus E(q); k \geq 1)$$

dir.

Teorem 6.4: $\phi \in \Phi_{H,2}[\Omega, q]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\left\{ \phi \left(\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z)}{z}; z \right) : z \in U \right\} \subset \Omega \quad (6.11)$$

içerme bağıntısını sağlıyorsa, bu durumda

$$\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z} < q(z) \quad (z \in U)$$

olur.

İspat: U birim diskindeki p analitik fonksiyonu

$$p(z) = \frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z} \quad (6.12)$$

ile tanımlansın. Bu durumda, (6.12) eşitliğinin z ye göre türevi alınır ve (5.27) deki rekürans bağıntısında η yerine $\eta + 1$ yazılarak (6.12) de dikkate alınırsa

$$\frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)}{z} = \frac{\gamma z p'(z) - (\gamma - \eta - 2)p(z)}{\gamma - \eta - 2} \quad (6.13)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (6.13) eşitliğinin z ye göre türevi alınır ve (5.27) deki rekürans bağıntısında η yerine $\eta + 2$ yazılarak (6.13) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z)}{z} \\ &= \frac{\gamma^2 z^2 p''(z) + \gamma(3\gamma - 2\eta - 5)zp'(z) + (\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)p(z)}{(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

olduğu görülür.

Şimdi $\mathbb{C}^3$ ten $\mathbb{C}$ ye

$$\begin{aligned} u = r, \quad v &= \frac{\gamma s + (\gamma - \eta - 2)r}{\gamma - \eta - 2} \text{ ve } w \\ &= \frac{\gamma^2 t + \gamma(3\gamma - 2\eta - 5)s + (\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)r}{(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

dönüşümleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \psi(r, s, t; z) &= \phi(u, v, w; z) \\ &= \phi\left(r, \frac{\gamma s + (\gamma - \eta - 2)r}{\gamma - \eta - 2}, \frac{\gamma^2 t + \gamma(3\gamma - 2\eta - 5)s + (\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)r}{(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)}; z\right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

olsun.

Bu ispatta Teorem 4.3.1 den yararlanılacaktır. (6.12), (6.13) ve (6.14) denklemlerini kullanarak (6.16) dan

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) = \phi\left(\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z)}{z}; z\right) \quad (6.17)$$

elde edilir. Böylece (6.11) eşitliği

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) \in \Omega$$

şeklini alır.

$\phi \in \Phi_{H,2}[\Omega, q]$ için uygunluk koşulunun Tanım 4.3.1 de verilen uygunluk koşuluna eşdeğer olduğu gösterilebilirse ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\frac{t}{s} + 1 = \frac{(\gamma - \eta - 3)(w - u) - (3\gamma - 2\eta - 5)(v - u)}{\gamma(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)(v - u)} + 1$$

dir ve böylece $\psi \in \Psi[\Omega, q]$ olur. Teorem 4.3.1 den, $p(z) < q(z)$ ya da

$$\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z} < q(z)$$

yazılır.

Eğer $\Omega \neq \mathbb{C}$, basit bağlantılı bir bölge ise bu durumda Ω üzerinde U nun bazı konformal h dönüşümü için $\Omega = h(U)$ olur. Bu durumda $\Phi_{H,2}[h(U), q]$ sınıfı $\Phi_{H,2}[h, q]$ olarak yazılır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 6.4 ün doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 6.7: $\phi \in \Phi_{H,2}[h, q]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\phi\left(\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z)}{z}; z\right) < h(z) \quad (6.18)$$

subordinasyon şartını sağlıyorsa, bu durumda

$$\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z} < q(z) \quad (z \in U)$$

olur.

Özellikle $q(z) = 1 + Mz$ ($M > 0$) olduğu durumda, uygunluk fonksiyonlar sınıfı $\Phi_{H,2}[\Omega, q]$, $\Phi_{H,2}[\Omega, M]$ ile gösterilir.

Tanım 6.4: Ω , $\mathbb{C}$ de bir küme ve $M > 0$ olsun. $\Phi_{H,2}[\Omega, M]$ uygunluk fonksiyonların sınıfı,

$$\begin{aligned} & \phi \left(1 + Me^{i\theta}, 1 + \frac{(k+1)\gamma - \eta - 2}{\gamma - \eta - 2} Me^{i\theta}, 1 \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2 L + [\gamma k(3\gamma - 2\eta - 5) + (\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)] Me^{i\theta}}{(\gamma - \eta - 2)(\gamma - \eta - 3)}; z \right) \notin \Omega \end{aligned} \quad (6.19)$$

şartını sağlayan $\phi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşur.

Burada $z \in U$, $\gamma > 0$ ve tüm $\theta \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ için $\Re(Le^{-i\theta}) \geq k(k-1)M$ dir.

Sonuç 6.8: $\phi \in \Phi_{H,2}[\Omega, M]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu

$$\phi \left(\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^\gamma(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^\gamma(z)}{z}; z \right) \in \Omega$$

içerme bağıntısını sağlıyorsa, bu durumda

$$\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^\gamma(z)}{z} - 1 < Mz \quad (z \in U)$$

olur.

Özel durumda, $\Omega = \{w: |w-1| < M\} = q(U)$ olduğu zaman, $\Phi_{H,2}[\Omega, M]$ sınıfı basitçe $\Phi_{H,2}[M]$ ile gösterilir ve Sonuç 6.8 aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

Sonuç 6.9: $\phi \in \Phi_{H,2}[M]$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu tüm $z \in U$ için

$$\left| \phi \left(\frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z)}{z}, \frac{\mathbb{J}_{\eta+3,a}^{\gamma}(z)}{z}; z \right) - 1 \right| < M$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda

$$\left| \frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)}{z} - 1 \right| < M$$

olur.

Eğer Sonuç 6.8 de

$$\phi(u, v, w; z) = v - u$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 6.10: $\gamma > 0$ ve $M > 0$ olsun. Eğer $f \in A$ fonksiyonu tüm $z \in U$ için

$$\left| \frac{\mathbb{J}_{\eta+2,a}^{\gamma}(z)}{z} - \frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)}{z} \right| < \left| \frac{\gamma}{\gamma - \eta - 2} \right| M$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda

$$\left| \frac{\mathbb{J}_{\eta+1,a}^{\gamma}(z)}{z} - 1 \right| < M$$

olur.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun diferensiyel subordinasyon özellikleri incelenmiştir. Bessel-Maitland tipi fonksiyonlar, klasik özel fonksiyonların genelleştirilmiş versiyonları olarak literatürde önemli bir yer tutmakta ve analitik fonksiyon teorisi bağlamında çeşitli uygulamalara sahiptir. Normalize edilmiş biçimiyle ele alınan bu fonksiyon, U birim disk içinde tanımlı olup, belirli parametreler altında alt sınıflara ait olma açısından değerlendirilmiştir.

Çalışmada öncelikle, ilgili fonksiyonun tanımı yapılmış ve bu fonksiyonun bağlı olduğu diferensiyel operatörlerin davranışları analiz edilmiştir. Daha sonra, belirli bir $q(z)$ referans fonksiyona göre diferensiyel subordinasyon teorisi çerçevesinde uygunluk fonksiyonlar sınıfı tanımlanarak, bu sınıfa ait olma koşulları ortaya konulmuştur. Teorik sonuçlar Teorem 4.3.1 ve onun çeşitli sonuçları aracılığıyla sunulmuş, özellikle $q(z) = Mz$ gibi özel durumlar ele alınarak daha sade formlarda ifadeler elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun belirli diferensiyel subordinasyon koşullarını sağladığını ve bu nedenle analitik fonksiyonlar sınıfı içinde önemli bir yere sahip olduğunu göstermektedir. Bu da söz konusu fonksiyonun geometrik fonksiyon teorisinde, özellikle de konformal dönüşümler ve fonksiyon sınıf karakterizasyonları alanlarında çeşitli uygulamalara açık olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak, bu çalışma normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun diferensiyel subordinasyon davranışına dair literatüre yeni katkılar sunmakta ve bu fonksiyonun daha geniş bir teorik çerçevede değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır. Gelecekte yapılacak çalışmalarda, bu fonksiyonun diğer genelleştirilmiş özel fonksiyonlarla olan ilişkisi ya da hiperkompleks ortamlarda tanımlı versiyonları üzerinden subordinasyon teorisinin genişletilmesi önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. ve Stegun, I. A. 1965. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, Dover publications, New York.
- Al-Dhuain, M., ve Mondal, S. R. 2018. On some differential subordination involving the Bessel-Struve kernel function, Commun. Korean Math. Soc. 33(2), 445-458.
- Amini, E., Al-Omari, S. ve Khandaqji, M. 2025. Second-Order differential subordination with the Mittag-Leffler operator, European Journal Of Pure And Applied Mathematics, 18(2), 1-22.
- Baricz, Á. 1994. Generalized Bessel functions of the first kind, 203, Romania.
- Baricz, Á. 2008. Geometric properties of generalized Bessel functions, Publ. Math. Debrecen 73, 155-178.
- Baricz, Á., Deniz, E., ve Çağlar, M. 2015. Differential subordinations involving generalized Bessel functions, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38, 1255-1280.
- Baricz Á., Kant, S. ve Prajapat, J. 2016. Differential subordination and superordination results associated with the Wright function, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 42(6), 1459-1477.
- Duren, P. L. 1983. Univalent functions, Springer Verlag. New York Inc.
- Gochhayata, P. ve Prajapatia, A. 2019. Applications of third order differential subordination and superordination involving generalized Struve function, Filomat 33(10), 3047–3059.
- Goluzin, G. M. 1935. On the majorization principle in function theory (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 42, 647-650.
- Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions I. Mariner Publishing Company., 245, Tampa, Florida, Birkhäuser. Boston.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. ve Polya, G. 1952. Inequalities, Sec. Edit., Cambridge University Press.
- Jack I. S. 1971. Functions starlike and convex of order α , J. London Math. Soc., 3, 469-474.
- Kavitha, S., Sivasubramanian, S. ve Jayasankar, R. 2012. Differential subordination and superordination results for Cho–Kwon–Srivastava operator, Computers & Mathematics with Applications, 64(6), 1789-1803.
- Lakshmikantham, V. ve Leela, S. 1969. Differential and Integral Inequalities, Academic Press, New York.

- Littlewood J. E. 1925. On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc., 23, 481-519.
- Lupaş, A. ve Cataş, A. 2021. An application of the principle of differential subordination to analytic functions involving Atangana–Baleanu Fractional Integral of Bessel Functions, Symmetry, 13, 971.
- Marsden J. E. 1973. Basic Complex Analysis, W.H. Freeman and Company, San Fransisco.
- Miller, S. S., Mocanu, P. T. ve Reade, M. O. 1974. Bazilevic functions and generalized convexity, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 19, 213-224.
- Miller, S. S. ve Mocanu, P. T. 1978. Second order differential inequalities in the complex plane, J. Math. Anal. Appl., 65, 289-305.
- Miller, S. S. ve Mocanu, P. T. 1981. Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. J. 28, 157-171.
- Miller, S. S. ve Mocanu, P. T. 1985. On some classes of first order differential subordinations, Michigan Math. J., 32, 185-195.
- Miller, S. S. ve Mocanu, P. T. 2000. Differential Subordinations, Theory and Applications, Marcel Dekker, New York.
- Mondal, S. R. 2022. Subordination involving Regular Coulomb Wave functions. Symmetry, 14, 1007.
- Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht Company, s-376, Göttingen, Berlin.
- Ponnusamy, S. ve Silverman, H. 2006. Complex variables with applications. Birkhäuser, Boston.
- Prajabat, J. K. 2011. Certain geometric properties of normalized Bessel functions, Appl. Math. Lett., 24, 2133-2139.
- Protter, M. H. ve Weinberger, H. F. 1967. Maximum Principles in Differential Equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Răducanu, D. 2019. Differential subordination associated with generalized Mittag-Leffler function, RACSAM 113, 435–452.
- Robinson, R. M. 1947. Univalent majorants, Trans Amer. Math. Soc. 61, 1-35.
- Soni, A. ve Bansal, D. 2023. Certain geometric properties of generalized Bessel-Maitland function. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 68(4), 789-798.
- Suffridge, T. J. 1970. Some remarks on convex maps of the unit disc, Duke Math. J. 37, 775-777.

- Szasz, R. 2014. About the starlikeness of Bessel functions, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 25, no. 9, 750-755.
- Şahin, R. 2011. Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi.
- Watson, G. N. 1962. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press.
- Wilf, H. S. 1961. Subordinating factor sequences for maps of the unit circle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12, 689-693.

