

**T. C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHARMONİK RIEMANN
SUBMERSİYONLARI**

CELAL ERSOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİYAMAN, 2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHARMONİK RIEMANN SUBMERSİYONLARI

Celal ERSOY

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Yıl : 2022, Sayfa sayısı: 61 + VIII
Jüri : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Dr. Öğr. Üyesi Müslüm Aykut AKGÜN

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olarak düzenlenmiş ve Riemann submersiyonlar, harmonik dönüşümler, biharmonik dönüşümler ve bu dönüşümlerin genelleştirilmelerinin ortaya çıkışı ve gelişimi ile ilgili bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, çalışmanın amacına uygun olarak literatür özetine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, kısaca bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Riemann manifoldları, vektör demetleri ve distribüsyonlarla ilgili bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, Riemann submersiyonlar, temel tensör alanları, temel tensör alanlarının kovaryant türevleri ve eğrilikler ele alınmıştır.

Altıncı bölümde, harmonik dönüşümler, biharmonik dönüşümler, f -harmonik dönüşümler, f -biharmonik dönüşümler ve bi- f -harmonik dönüşümler tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir.

Tezin özgün sonuçlarını içeren yedinci bölümde, 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan bir Riemann submersiyonun, f -biharmonik dönüşüm ve bi- f -harmonik dönüşüm olması için gerek ve yeter şartlar araştırılarak orijinal geometrik karakterizasyonlara ulaşılmıştır.

Tezin son bölümü ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Riemann submersiyonu; Harmonik dönüşüm;
Biharmonik dönüşüm; f -Biharmonik dönüşüm; Bi- f -harmonik dönüşüm



ABSTRACT

MSc Thesis

GENERALIZED BIHARMONIC RIEMANNIAN SUBMERSIONS

Celal ERSOY

Adıyaman University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Year : 2022, Number of Pages: 61 + VIII

Jury : Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Asst. Prof. Dr. Müslüm Aykut AKGÜN

This study consists of eight chapters. In the first chapter, which is organized as an introduction chapter, information about the emergence and development of Riemann submersions, harmonic maps, biharmonic maps and the generalizations of these maps are presented. In the second chapter, a literature summary is given according to the purpose of the study. In the third chapter, the material and method in this thesis are briefly mentioned.

In the fourth chapter, some basic definitions about Riemannian manifolds, vector bundles and distributions are given.

In the fifth chapter, Riemann submersions, principal tensor fields, covariant derivatives of principal tensor fields and curvatures are discussed.

In the sixth chapter, harmonic maps, biharmonic maps, f -harmonic maps, f -biharmonic maps and bi- f -harmonic maps are defined and their basic properties are given.

In the seventh chapter, which contains the original results of the thesis, the necessary and sufficient conditions for a Riemann submersion defined from a 3-dimensional Riemann manifold to be f -biharmonic map and bi- f -harmonic map are investigated and the original geometric characterizations are obtained.

The last section is devoted to conclusions and recommendations.

Key Words: Riemannian submersion; Harmonic map; Biharmonic map; f -Biharmonic map; Bi- f -harmonic map

BEYAN

“Genelleştirilmiş Biharmonik Riemann Submersiyonları” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve ayrıca, alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.



Celal ERSOY

TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın gerçekleőtirilmesinde tez konumu belirleyerek beni bu konuda çalıőmaya teővik eden, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren, sabır ve ilgisini eksik etmeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Selcen YÖKSEL PERKTAş'a őükranlarımı sunuyorum.

Öğrenim hayatımın her aşamasında bana daima inanan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve aileme sonsuz teőekkürler.

Celal ERSOY

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	III
BEYAN.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER	VI
SİMGELER.....	VIII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	7
4. TEMEL KAVRAMLAR.....	8
4.1. Riemann Manifoldları	8
4.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar	12
5. RIEMANN SUBMERSİYONLARI	15
5.1. Temel Tensörler	17
5.2. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ Temel Tensörlerinin Geometrik Anlamı.....	21
5.3. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ Temel Tensörlerinin Kovaryant Türevleri	24
5.4. Eğrilikler Arasındaki Bağntılar	25
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER	28
6.1. Harmonik ve Biharmonik Dönüşümler	28
6.2. f -Harmonik, f -Biharmonik ve Bi- f -harmonik Dönüşümler	32
7. BULGULAR ve TARTIŞMA	37
7.1. f -Biharmonik Riemann Submersiyonları	46
7.2. Bi- f -harmonik Riemann Submersiyonları	53
8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR	58
KİŞİSEL BİLGİLER.....	61

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\tau_2(\psi)$	: Bitensiyon alanı
$E_2(\cdot, \psi)$	: Bienerji fonksiyoneli
$\tau_{f,2}(\psi)$	: Bi- f -tensiyon alanı
$E_{f,2}(\cdot, \psi)$	: Bi- f -enerji fonksiyoneli
d	: Diferensiyel operatörü
$\nabla d\psi$	: Dönüşümün ikinci temel formu
$e(\psi)$	: Dönüşümün enerji yoğunluğu
$E(\cdot, \psi)$	: Enerji fonksiyoneli
$\tau_{2,f}(\psi)$	: f -Bitensiyon alanı
$E_{2,f}(\cdot, \psi)$	: f -Bienerji fonksiyoneli
$E_f(\cdot, \psi)$	: f -Enerji fonksiyoneli
$\tau_f(\psi)$	: f -Tensiyon alanı
$grad f$	: Fonksiyonun gradiyenti
J^ψ	: Jacobi operatörü
Δ	: Laplasyan operatörü
(M, π, N, F)	: Lif demeti
∇	: Lineer konneksiyon
M	: Manifold
g	: Metrik tensör
$C^\infty(M)$	: M üzerinde diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi
$\chi(M)$	: M nin vektör alanlarının uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
$ \cdot $	: Norm
$\mathcal{T}, \mathcal{A}$	: O'Neill tensörleri
$K(P)$	: P düzleminin kesit eğriliği

$T_p M$	: p noktasındaki tanjant uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Ric	: Ricci tensörü
Q	: Ricci operatörü
R	: Riemann eğrilik tensörü
R_c	: Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
$scal$	: Skaler eğrilik
$\tau(\psi)$	: Tensiyon alanı
T	: Torsiyon tensörü
$\pi^{-1}(x)$	: Vektör demetinin lifi

1. GİRİŞ

İmmersiyonlar ve submersiyonlar diferensiyel geometride iki manifoldun geometrisini karşılaştırarak incelemede kullanılan en önemli araçlardır. Eğer incelenen manifoldlar ek olarak bazı özel diferensiyellenebilir yapılara (kontakt, Hermityen, kuaterniyonik vb.) sahip ise bu araçlar zengin geometrik özelliklerin ortaya çıkmasına imkan verirler. Aslında submersiyonlar, belli bir anlamda immersiyonların muadili gibi düşünülse de teorik olarak oldukça farklıdır.

Riemann submersiyonları, 1966 ve 1967 yıllarında sırasıyla B. O'Neill [1] ve A. Gray [2] tarafından birbirinden bağımsız olarak yapılan çalışmalarla tanımlanmıştır. Son yirmi yılda ortaya konan çalışmalarla Riemann submersiyonları ile ilgili ciddi bir literatür oluşturulmuştur.

Riemann submersiyonların fiziksel uygulamaları ve robot teorideki karşılığı, bu tip dönüşümleri daha ilgi çekici hale getirmiştir. Einstein'ın genel görecelik teorisi ve Maxwell'ın elektromanyetizma teorisinin birleştirilmesi ile ortaya çıkan Kaluza-Klein teorisi, uzay ve zamanın ortak 4-boyutuna ek olarak beşinci bir boyut kavramını esas alarak inşa edilmiş bir modeldir. Bu modelin uzay-zamanın $(5+m)$ -boyuta sahip olduğu durumlar için incelenmesi ile modelin çözümlerinin ekstra boyutlu uzaydan skaler alanların değer aldığı uzaya tanımlı Riemann submersiyonları olduğu ispatlanmıştır [3, 4]. Riemann submersiyonların robotik uygulamadaki yeri C. Altafini [5] tarafından bu dönüşümlerin gereğinden çok serbestlik derecesine sahip robot kolu tasarımlarında kullanılabileceği gerçeği ile ortaya konmuştur. C. Altafini, robotik teoride belli şartlar altında ters kinematik işleminin Riemann submersiyonlarının temelini oluşturan yatay lift kavramına karşılık geldiğini göstermiştir.

Harmonik dönüşümler [6], diferensiyel geometride jeodezikler, minimal yüzeyler ve harmonik fonksiyonlar gibi temel kavramların genelleştirilmesi ile ortaya konmuş ve geometrik varyasyonel problemlerin doğal çözümleri olarak göz önüne alınabilecek dönüşümler sınıfıdır. Harmonik dönüşümler; analitik dönüşümler, stokastik süreçler teorisi, teorik fizikteki lineer olmayan alan teorisi, malzeme bilimindeki sıvı kristaller teorisi gibi pek çok alanla yakından ilgilidir.

Harmonik dönüşümlerin doğal bir genellemesi olarak ortaya çıkan biharmonik dönüşümler [7], temel olarak iki farklı araştırma alanına ayrılarak incelenmektedir. Diferansiyel geometri açısından sınıflandırmalar yapmak ve örnekler inşa etmek önem arz etmektedir. Diğer taraftan, bu dönüşümlerin kısmi diferansiyel denklemler açısından analitik yönü ile de araştırılması önemlidir [8, 9].

Biharmonik immersiyonlar, yani biharmonik altmanifoldlar teorisi son yıllarda farklı tipteki diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde yoğun olarak çalışılmış ve bu alanda ciddi bir gelişme kaydedilmiştir.

Riemann manifoldları arasındaki harmonik dönüşümleri özel bir alt sınıfı olarak kabul eden f -harmonik dönüşümler 1970 yılında tanımlanmıştır [10]. Bu dönüşümler, fiziksel açıdan sürekli spin sistemlerin ve homojen olmayan Heisenberg spin sistemlerin çözümleridir ve gradiyent Ricci solitonlar ile yakından ilişkilidir [11].

Biharmonik dönüşümler ve f -harmonik dönüşümler arasında bağlantı kurmak için iki farklı yol kullanılmıştır. İlk karakterizasyon biharmonik dönüşümler teorisindeki genelleştirme metodu kullanılarak bienerji fonksiyonelinin bi- f -enerji fonksiyoneline genişletilmesi ve bi- f -enerji fonksiyonelinin kritik noktası olan dönüşümlerin bi- f -harmonik dönüşümler olarak adlandırılması ile verilmiştir [12]. İkinci karakterizasyonda ise harmonik dönüşümlerin biharmonik dönüşümlere genellemesinde izlenen yol takip edilerek, f -enerji fonksiyoneli kavramından f -bienerji fonksiyoneli tanımlanmış ve f -bienerji fonksiyonelinin kritik noktası olan dönüşümler f -biharmonik dönüşümler olarak adlandırılmıştır [13].

Riemann submersiyonların biharmonikliğinin incelenmesi ilk kez 2002 yılında C. Oniciuc [9] tarafından yapılan çalışma ile başlatılmıştır. Ancak bu konu ile ilgili mevcut çalışmaların fazla olduğu söylenemez.

Bu tezin amacı Riemann submersiyonları ve biharmonik dönüşümler teorisini inceleyerek Riemann submersiyonlarının f -biharmonik ve bi- f -harmonik (yani genelleştirilmiş biharmonik) dönüşüm olma şartlarının araştırılmasıdır.

Bu tezin birinci bölümünde, çalışmanın amacından ve problemin ortaya çıkışından söz edilmiştir. İkinci bölümde, önceki çalışmalardan bahsedilerek literatür özeti sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bu tezde ortaya konan problemin çözümü için gerekli materyal ve yöntemden kısaca bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, Riemann

manifoldları, vektör demetleri ve distribüsyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölüm, Riemann submersiyonlarına ayrılmıştır. Altıncı bölümde biharmonik dönüşümler ve genelleştirilmiş biharmonik dönüşümlerden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde ise, 3-boyutlu bir Riemann manifoldundan tanımlanan bir Riemann submersiyonun f -harmonik, f -biharmonik ve bi- f -harmonik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmış ve bazı özgün sonuçlar verilmiştir. Son bölüm ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Riemann submersiyonları, ilk kez 1966 yılında B. O'Neill [1] ve bir yıl sonra bu çalışmadan bağımsız olarak A. Gray [2] tarafından yapılan çalışmalarla tanımlanmıştır. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. σ dönüşümü maksimal ranka sahip ve σ nın türev dönüşümü $d\sigma$, $(\text{çek } d\sigma)^\perp$ üzerinde bir izometrik immersiyon ise σ ya bir Riemann submersiyonu denir.

B. O'Neill [1], Riemann submersiyonlarını tanımladığı çalışmasında bu tip dönüşümleri karakterize etmede kullanılan iki önemli tensör alanı tanımlamış ve bu tensör alanlarının altmanifoldlar teorisindeki ikinci temel forma ve şekil operatörüne karşılık geldiğini göstermiştir. Aynı çalışmada, iki manifold arasındaki submersiyonlardan faydalanılarak manifoldların eğrilikleri karşılaştırılmıştır. Bu temel makaleden hareketle son 60 yılda Riemann submersiyonları üzerine çok yoğun çalışmalar yapılmış ve ciddi bir literatür oluşturulmuştur.

Diferensiyellenebilir dönüşümün arasında tanımlandığı manifoldlar özel seçilerek Lorentz submersiyonlar [3], eğik submersiyonlar [2, 14, 15], hemen hemen hermityen submersiyonlar [16], hemen hemen kontakt submersiyonlar [3], parakontakt submersiyonlar [17], parakontakt-parakompleks submersiyonlar [18], H-semi-invaryant submersiyonlar [19], anti-invaryant submersiyonlar [20], gibi pek çok submersiyon tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir $\psi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümü $E(\psi) = \frac{1}{2} \int_M |d\psi|^2 v_g$ ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise bu dönüşüme bir harmonik dönüşüm denir. ψ dönüşümünün harmonikliği $\tau(\psi) = \text{iz } \nabla d\psi$ ile tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile ifade edilir [8]. Özel olarak bir Riemann immersiyonunun tensiyon alanı, karşılık gelen altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı olarak verilir. Dolayısı ile bir Riemann immersiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen altmanifoldun minimal olmasıdır [6].

Biharmonik dönüşümler harmonik dönüşümlerin doğal bir genellemesi olarak tanımlanmıştır [6]. $E_2(\psi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\psi)|^2 v_g$ ile gösterilen bienerji fonksiyonelinin

kritik noktası olan dönüşümler biharmonik dönüşümler olarak adlandırılır. Bienerjinin birinci varyasyon formülünden ψ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart elde edilir. Bu şart $\tau_2(\psi) = -\Delta^\psi(\tau(\psi)) - izR^N(d\psi(-), \tau(\psi))d\psi(-)$ ile tanımlanan bitensiyon alanının sıfır olmasıdır. Açıktır ki, harmonik dönüşümler biharmoniktir. Dolayısıyla biharmonik dönüşümlerin hangi şartlar altında harmonik olacağı ve harmonik olmayan biharmonik dönüşümlerin sınıflandırılması önemli problemlerdir [8, 21]. Yokluk teoremleri biharmonik altmanifoldlar ile ilgili yapılan çalışmaların Riemann eğriliği pozitif olan uzaylarda yoğunlaşmasına neden olmuştur [22, 23].

C. Oniciuc [9], Riemann submersiyonlarının bitensiyon alanını bularak Riemann immersiyonları için verilen bazı yokluk teoremleri benzeri sonuçlar elde etmiştir. Daha geniş bir sınıf olan konformal submersiyonlar için biharmonik denklem [24] de çalışılmış ve bu denklemlerin bir uygulaması olarak biharmonik Riemann submersiyonların bir ailesi [25] de kurulmuştur. Z. P. Wang ve Y. L. Ou [26] tarafından 3-boyutlu uzaylardan tanımlanan, 1-boyutlu liflere sahip Riemann submersiyonları çalışılmış ve bu tipteki submersiyonların biharmonik olması için gerek ve yeter şartın harmoniklik olduğu ispatlanmıştır. [27] de biharmonik Riemann submersiyonlarla ilgili pek çok örneğe yer verilmiştir. M. A. Akyol ve Y. L. Ou [28], 2019 yılında Riemann submersiyonları için biharmoniklik şartlarını araştırmış ve [26] da verilen sonuçların genel halini elde etmişlerdir.

f -Harmonik dönüşümler, $E_f(\psi) = \frac{1}{2} \int_M f |d\psi|^2 v_g$ ile verilen f -enerji integralinin kritik noktası olan diferensiyellenebilir $\psi: M \rightarrow N$ $d\psi + d\psi(grad f)$ ile tanımlanan f -tensiyon alanının sıfır olmasıdır [29]. W. J. Lu, 2015 yılında f -biharmonik dönüşümleri tanımlamış ve Euler-Lagrange denkleminden hareketle f -bitensiyon alanı denklemini hesaplamıştır [13].

Farklı bir bakış açısıyla, f -tensiyon alanının normunun integrali kullanılarak diferensiyellenebilir bir dönüşümün bi- f -enerji integrali adı verilen yeni bir fonksiyonel tanımlanmış ve bu fonksiyonelin kritik noktaları olan dönüşümler bi- f -harmonik dönüşümler olarak adlandırılmıştır [12].

f -biharmonik dönüşümler ve bi- f -harmonik dönüşümler biharmonik dönüşümlerin farklı genelleştirmeleridir. Son yıllarda bu dönüşüm tipleri, özel olarak

Riemann immersiyonları için incelenerek f -biharmonik ve bi- f -harmonik altmanifoldlarla ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır [30-35].

Yukarıda bahsedilen çalışmalar göz önüne alındığında Riemann submersiyonların f -biharmonik ve bi- f -harmonik (veya kısaca genelleştirilmiş biharmonik) dönüşüm olma şartlarının araştırılmasının açık problemler olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu tezde 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan f -biharmonik submersiyonlar ve bi- f -harmonik submersiyonlar (veya kısaca genelleştirilmiş biharmonik submersiyonlar) incelenerek özgün sonuçlar verilmiştir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Riemann submersiyonları, biharmonik dönüşümler ve genelleştirilmiş biharmonik dönüşümler ile ilgili gerekli tüm kaynak taramaları yapılarak basılı ve online olarak elde edilen kitaplar ve makaleler, mevcut bilimsel yöntemlerle incelenmiş ve ihtiyaç duyulan bölümler detaylı olarak araştırılmıştır. Tez konusu çerçevesinde elde edilen veriler titizlikle bir araya getirilmiş ve hedeflenen özgün karakterizasyonlara ulaşılmıştır.



4. TEMEL KAVRAMLAR

4.1. Riemann Manifolları

Tanım 4.1.1. $\mathbb{R}^n$ de reel değeri bir f fonksiyonu için $V \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tV)-f(p)}{t}$ limit değeri f nin $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında V yönündeki türevi denir ve bu türev

$$V_p[f] = df(V_p) = \frac{d}{dt}(f(p + tV))|_{t=0}$$

ile tanımlanır [36].

Tanım 4.1.2. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun.

$$V_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow V_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \left|_p \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$$

dönüşümü için $a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere

- 1) $V_p(af + bg) = aV_p[f] + bV_p[g],$
- 2) $V_p(fg) = V_p[f]g(p) + f(p)V_p[g]$

özellikleri sağlanıyorsa V_p fonksiyonuna M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı

$$T_p M = \left\{ V_p \mid V_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterilir ve bu uzaya M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı denir [36].

Tanım 4.1.3. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasına bir $X_p \in T_p M$ tanjant vektörü karşılık getiren X dönüşümüne M üzerinde bir vektör alanı denir. M nin vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir [36].

Tanım 4.1.4. M manifoldu üzerinde iki vektör alanı U ve V olsun. $f, g \in C^\infty(M)$ fonksiyonunu ele alalım.

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$$

ile tanımlı $[,]$ fonksiyonuna U ve V nin Lie operatörü denir ve bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar:

$f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $U, V, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$1) [U, V] = -[V, U],$$

$$2) [aU + bV, Z] = a[U, Z] + b[V, Z],$$

$$3) [[U, V], Z] + [[V, Z], U] + [[Z, U], V] = 0,$$

dır [36].

Tanım 4.1.5. M ve N manifoldları arasında bir $\psi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\psi: \chi(M) \rightarrow \chi(N)$$

şeklinde gösterilir. Bu dönüşüm her $p \in M$ noktasında

$$(d\psi)_p: T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$$

ile gösterilen ve ψ nin p noktasındaki türev dönüşümü olarak adlandırılan lineer dönüşümü verir [37].

Önerme 4.1.6. M ve N manifoldları arasında bir $\psi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümünün türev dönüşümü $d\psi$ olsun. $U, V \in \chi(M)$, $\check{U}, \check{V} \in \chi(N)$ ve $d\psi(U) = \check{U}$, $d\psi(V) = \check{V}$ olmak üzere

$$d\psi([U, V]) = [\check{U}, \check{V}] \circ \psi$$

dir [37].

Tanım 4.1.7. $\psi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $d\psi(T_p M)$, $p \in M$, uzayının boyutu r ise ψ dönüşümünün rankı r dir denir [38].

Eğer her $p \in M$ için $\text{rank } d\psi = \text{boy } M$ ise $(d\psi)_p$ birebirdir [38].

Tanım 4.1.8. $\psi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için $d\psi_p(U_p) = \tilde{U}_{\psi(p)}$ ise U ile $\tilde{U}$ vektör alanları ψ -bağılıdır denir [38].

Tanım 4.1.9. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M nin vektör alanları uzayı üzerinde pozitif tanımlı, simetrik ve bilineer

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

dönüşümüne bir Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de bir Riemann manifoldu denir [39].

Tanım 4.1.10. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (U, V) &\rightarrow \nabla_U V \end{aligned}$$

fonksiyonu için

- 1) $\nabla_{U+V}Z = \nabla_U Z + \nabla_V Z$, $U, V, Z \in \chi(M)$,
- 2) $\nabla_U(V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$,
- 3) $\nabla_{fU}V = f\nabla_U V$,
- 4) $\nabla_U(fV) = U[f]V + f\nabla_U V$, $\forall f \in C^\infty(M)$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir afin (lineer) konneksiyon denir [37].

Tanım 4.1.11. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ T(U, V) &= \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü denir. Eğer $T = 0$ ise ∇ ya simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir [39].

Tanım 4.1.12. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda $U, V, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\
(U, V, Z) &\rightarrow R(U, V, Z) = R(U, V)Z \\
R(U, V)Z &= \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U, V]} Z
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [39].

Tanım 4.1.13. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun. Eğer ∇ sıfır torsiyonlu ve $\nabla g = 0$ ise ∇ ya M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu (Riemann konneksiyonu) denir. M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu $U, V, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_U Y, Z) &= U(g(V, Z)) + V(g(Z, U)) - Z(g(U, V)) \\
&\quad - g(U, [V, Z]) + g(V, [Z, U]) + g(Z, [U, V])
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı Kozsul eşitliği ile belirlenir [39].

Tanım 4.1.14. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
R_C: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\
(U, V, Z, W) &\rightarrow R_C(U, V, Z, W) = g(R(U, V)Z, W)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan kovaryant 4-tensöre M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir [39].

Önerme 4.1.15. (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda $U, V, Z, W \in \chi(M)$ için

- 1) $R(U, V)Z + R(Z, U)V + R(V, Z)U = 0$,
- 2) $R_C(U, V, Z, W) = -R_C(V, U, Z, W)$,
- 3) $R_C(U, V, Z, W) = -R_C(U, V, W, Z)$,
- 4) $R_C(U, V, Z, W) = R_C(Z, W, U, V)$

dir [39].

Tanım 4.1.16. (M, g) Riemann manifoldunun bir noktasındaki tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P nin bir bazı $\{U, V\}$ olmak üzere

$$K(P) = K(U, V) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{|U|^2|V|^2 - g(U, V)^2} = \frac{K(U, V, U, V)}{|U|^2|V|^2 - g(U, V)^2}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P düzlemine göre kesit eğriliği denir [39].

Tanım 4.1.17. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\{e_i\}_{i=1}^n$, M üzerinde lokal ortonormal çatı olmak üzere $U, V \in \chi(M)$ için

$$Ric: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$Ric(U, V) = \sum_{i=1}^m g(R(U, e_i)e_i, V)$$

şeklinde tanımlanan $(2,0)$ -tipli Ric tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci tensörü denir. Ricci tensörü simetriktir. Ricci operatörü Q ise

$$g(QU, V) = Ric(U, V)$$

ile tanımlanır [39].

Tanım 4.1.18. m -boyutlu (M, g) Riemann manifoldunun $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ tanjant uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M nin skaler eğriliği denir ve

$$scal = \sum_{k=1}^m Ric(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m g(R(e_l, e_k)e_k, e_l)$$

ile tanımlanır [39].

4.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar

Tanım 4.2.1. Diferensiyellenebilir M, N, F , manifoldları ve $\pi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümü için N nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere

$$(\pi \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak şekilde

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \subset N \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset M$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π, F ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir ve $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π nin bir lokal ayrışması denir [4].

Tanım 4.2.2. $\pi: M \rightarrow N$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip ise $\delta = (M, \pi, N, F)$ kümesine bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir [4].

Bir lif demetinde M ye total uzay; N ye baz (taban) uzay; F ye lif modeli ve π dönüşümüne projeksiyon (fibrasyon) olarak adlandırılır [4].

Tanım 4.2.3. $\pi: M \rightarrow N$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in N$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in M : \pi(p) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir lif denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi M total uzayını verir [4].

Tanım 4.2.4. $\delta = (M, \pi, N, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına δ lif demetinin bir lokal koordinat temsilcisi denir [4].

Tanım 4.2.5. $\delta = (M, \pi, N, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa δ ya bir vektör demeti denir [4]:

1) $\forall x \in N$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

2) $\forall x \in N$ için $\varphi_{\alpha, x}: F \rightarrow F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde δ nın bir $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal temsilcisi vardır.

Tanım 4.2.6. $\pi: M \rightarrow N$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda $\pi \circ S = I$, (I, M nin birim dönüşümü) olacak şekilde $N \rightarrow M$ diferensiyellenebilir S dönüşümüne lif demetinin bir kesiti denir ve lif demetlerinin kesitlerinin kümesi $\Gamma(M)$ ile gösterilir [4].

Tanım 4.2.7. (M, π, N, F) bir vektör demeti olsun. $\forall p \in N$ için $T_p N$ tanjant uzayına bir X_p tanjant vektörü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti denir. M nin $\Gamma(M)$ kesitlerinin kümesi bir vektör uzayı yapısına sahiptir [4].

Teorem 4.2.8. m, n doğal sayılar ($m > n$) ve $\pi: U \subset R^m \rightarrow R^n$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $x \in \pi(U)$, π nin bir regüler değeri ise o zaman x in $\pi^{-1}(x)$ ters görüntüsü, R^m nin bir $(m - n)$ -boyutlu altmanifoldudur [4].

Tanım 4.2.9. M , m -boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$D: M \rightarrow \cup T_x M$$

$$x \rightarrow D_x \subset T_x M$$

ile tanımlanan D dönüşümüne bir distribüsyon denir [4].

Tanım 4.2.10. $\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold; $V, \bar{M}$ manifoldu üzerinde q -boyutlu bir diferensiyellenebilir distribüsyon ve $M, \bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M nin her x noktasında, M nin tanjant uzayı ile D_x aynı ise yani

$$\pi: M \rightarrow \bar{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in M$ için

$$d\pi(T_x M) = D_x$$

ise M ye D nin integral manifoldu denir [4]. Eğer D nin M yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa M ye D nin bir maksimal integral manifoldu denir [4].

Tanım 4.2.11. $\bar{M}$ bir manifold ve $M, \bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in M$ için D nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D ye integrallenebilir denir [4].

Tanım 4.2.13. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\nabla, (M, g)$ üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer her $X, Y \in \chi^D(M)$ için $\nabla_X Y \in \chi^D(M)$ ise D distribüsyonuna paraleldir denir [4].

Önerme 4.2.14. (M, g) , D ve $\acute{D}$ ortogonal distribüsyonuna sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda D nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\acute{D}$ nin paralel olmasıdır [4].

5. RIEMANN SUBMERSİYONLARI

Bu bölümde manifoldlar arasındaki submersiyon dönüşümleri, ilişkili distribüsyonlar ve Riemann submersiyonları ile ilgili temel bilgiler verilerek B. O'Neill [1] tarafından tanımlanan temel tensör alanları, özellikleri ve geometrik anlamları sunulacaktır.

Tanım 5.1. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ sırasıyla m ve n -boyutlu manifoldlar olsun. Bu durumda $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ örten diferensiyellenebilir dönüşümü için

$$\text{rank } d\sigma_p = \text{boy } N$$

oluyorsa σ ya $p \in M$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall p \in M$ için σ bir submersiyon ise σ ya M üzerinde bir submersiyon adı verilir [3].

Örnek 5.2. m ve n pozitif doğal sayılar $n < m$ olsun. $\sigma: R^m \rightarrow R^n$ projeksiyon dönüşümü

$$\sigma(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

şeklinde tanımlanırsa $p \in R^m$ noktasında

$$d\sigma_x(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_n)$$

olacağından $d\sigma_p$ diferensiyel dönüşümü örten olur. Dolayısıyla, σ bir submersiyondur [4].

Herhangi bir $x \in N$ noktasındaki $F_x = \sigma^{-1}(x)$ lifi (M, g) manifoldunun $r = (m - n)$ -boyutlu bir altmanifoldudur. $\sigma^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri denir [38].

Tanım 5.3. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ sırasıyla m ve n -boyutlu manifoldlar olsun. $\sigma: M \rightarrow N$ submersiyonunu göz önüne alalım. $p \in M$ noktasında

$$V_p = \ker d\sigma_p$$

şeklinde tanımlanan V integrallenebilir distribüsyonuna dikey distribüsyon ve V_p uzayına ise p noktasındaki dikey uzay denir. V dikey distribüsyonunun kesitleri dikey vektör alanları olarak adlandırılır. Dikey vektör alanlarının uzayı $\chi^v(M)$, $\chi(M)$ de bir Lie alt cebiri yapısına sahiptir. Dikey distribüsyona ortogonal tamamlayan olan ve

$$H_p = (V_p)^\perp$$

ile tanımlanan H distribüsyonuna submersiyonun yatay distribüsyonu denir. H_p uzayı ise p noktasındaki yatay uzay olarak adlandırılır. H yatay distribüsyonunun kesitlerine yatay vektör alanları denir ve yatay vektör alanlarının uzayı $\chi^h(M)$, $\chi(M)$ nin bir alt uzayıdır. Böylece $p \in M$ noktasında

$$T_p(M) = V_p \oplus H_p$$

şeklindeki ortogonal ayrışım yazılabilir. Herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için, E nin dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE gösterilir [3].

Teorem 5.4. $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir submersiyon ve V de M nin dikey distribüsyonu olsun. Bu durumda $p \in M$ için $\sigma(x) = p$ olmak üzere $\sigma^{-1}(x)$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile her V_p dikey uzayı çakışıktır [3].

Tanım 5.5. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ sırasıyla m ve n -boyutlu manifoldlar ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\text{rank } d\sigma_p < \min\{m, n\}$$

şartını sağlayan $p \in M$ noktasına σ nın bir kritik noktası denir [39].

Tanım 5.6. $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir submersiyon olsun. $X \in \chi(M)$ vektör alanı $\chi(N)$ deki bir vektör alanı ile σ -bağlantılı ise X e M üzerinde izdüşürülebilir vektör alanı denir. M üzerindeki izdüşürülebilir vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M)$ ile gösterilir [3].

Tanım 5.7. $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir submersiyon olsun. Eğer X yatay ve N üzerindeki X' vektör alanına σ -bağlı ise M üzerindeki X vektör alanına basic (temel) vektör alanı denir. Basic (temel) vektör alanlarının uzayı

$$\chi^b(M) = \chi^c(M) \cap \chi^h(M)$$

ile gösterilir. $X' \in \chi(N)$ vektör alanı ile σ -bağlı olan $X \in \chi(M)$ temel vektör alanı X' vektör alanının yatay lifti olarak adlandırılır [3].

Tanım 5.8. (M, g) ve $(N, \check{g})$ Riemann manifoldları arasındaki bir dönüşüm σ ve $\beta: [t_1, t_2] \rightarrow N$, N üzerinde bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere $\sigma \circ \gamma = \beta$ eşitliğini sağlayan $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$ eğrisine β nın bir lifti denir [3].

Tanım 5.9. (M, g) ve $(N, \check{g})$ sırasıyla m ve n -boyutlu Riemann manifoldları olsun. Bu durumda $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ diferensiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa σ ya bir Riemann submersiyonu denir [3]:

- 1) σ dönüşümü maksimal ranka sahiptir.
- 2) Her $p \in M$ noktasında $d\sigma_p$ dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

Yani $X, Y \in H_p$, $p \in M$ için

$$g_p(X, Y) = \check{g}_{\sigma(p)}(d\sigma_p(X), d\sigma_p(Y))$$

dir. Burada verilen ilk şart dönüşümün öncelikle bir submersiyon olduğunu belirtir. İkinci şartta ise bir $p \in M$ noktasında σ nın türev dönüşümünün H_p yatay uzayı ile $T_{\sigma(p)}N$ tanjant uzayı arasında bir lineer izometri olduğu görülmektedir [3].

5.1. Temel Tensörler

Bu alt bölümde O'Neill [1] tarafından, tanımlanan temel tensörler ve onların temel özellikleri sunulacaktır.

Tanım 5.1.1. (M, g) ve $(N, \check{g})$ Riemann manifoldları olsun. Bu durumda $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere (1,2)-tipli $\mathcal{T}$ temel tensör alanı $E, F \in \chi(M)$ için

$$\mathcal{T}(E, F) = \mathcal{T}_E F = h\nabla_{v_E} vF + v\nabla_{v_E} hF, \quad (5.1)$$

ile tanımlanır. Burada, v ve h sembolleri sırasıyla V ve H üzerindeki dik projeksiyonları ve ∇ ise (M, g) nin Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir[1].

$\mathcal{T}$ temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:

- 1) $E \in \chi(M)$ için $\mathcal{T}_E$ lineer operatördür.
- 2) $E \in \chi(M)$ için $\mathcal{T}_E$ yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.
- 3) $\mathcal{T}$ dikey tensör alanıdır. Yani, $E \in \chi(M)$ için, $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_{vE}$ dir.
- 4) $\mathcal{T}$ dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V, W \in \chi^v(M)$ için $\mathcal{T}_V W = \mathcal{T}_W V$ dir.

Tanım 5.1.2. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları olsun. Bu durumda $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere (1,2)-tipli $\mathcal{A}$ temel tensör alanı $E, F \in \chi(M)$ için

$$\mathcal{A}(E, F) = \mathcal{A}_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF, \quad (5.2)$$

ile tanımlanır [1].

$\mathcal{A}$ temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:

- 1) $E \in \chi(M)$ için $\mathcal{A}_E$ lineer operatördür.
- 2) $E \in \chi(M)$ için $\mathcal{A}_E$ yatay ve dikey alt uzaylarının rollerini değiştirir.
- 3) $\mathcal{A}$ yatay tensör alanıdır. Yani, $E \in \chi(M)$ için, $\mathcal{A}_E = \mathcal{A}_{hE}$ dir.
- 4) $\mathcal{A}$ yatay tensör alanı simetriktir. Yani $X, Y \in \chi^h(M)$ için $\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}_Y X$

dir.

Lemma 5.1.3. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_E$ ve $\mathcal{A}_E$ anti-simetrik operatörlerdir. Yani $E, F \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$g(\mathcal{T}_E F, G) = -g(\mathcal{T}_E G, F) \quad (5.3)$$

$$g(\mathcal{A}_E F, G) = -g(\mathcal{A}_E G, F) \quad (5.4)$$

dir [3].

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $E_p = u$ ve $F_p = w$ olmak üzere $(\mathcal{T}_E F)(p)$ nin değeri E ve F vektör alanlarının seçiminden bağımsızdır [3].

Tanım 5.1.4. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $E, F \in \chi(M)$, $E_p = u$ ve $F_p = w$ olmak üzere $T_p M$ üzerindeki $\mathcal{T}_u$ ve $\mathcal{A}_u$ lineer operatörleri

$$\mathcal{T}_u w = (\mathcal{T}_E F)(p), \quad \mathcal{A}_u w = (\mathcal{A}_E F)(p) \quad (5.5)$$

ile tanımlanır [3].

Önerme 5.1.5. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $p \in M$, $u \in T_p M$ için $\mathcal{T}_u$ ve $\mathcal{A}_u$ lineer operatörleri $(T_p M, g_p)$ uzayı üzerinde anti-simetrik operatörlerdir ve $p \in M$ noktasında yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirirler [3].

Önerme 5.1.6. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:

- 1) $\mathcal{T}_U W = \mathcal{T}_W U$, $U, W \in \chi^v(M)$,
- 2) $\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}_Y X$, $X, Y \in \chi^h(M)$,
- 3) $\mathcal{A}_X Y = \frac{1}{2} v[X, Y]$, $X, Y \in \chi^h(M)$.

İspat. 1) $U, W \in \chi^v(M)$ için

$$\mathcal{T}_U W = h \nabla_{vU} vW + v \nabla_{vU} hW$$

ve

$$\mathcal{T}_W U = h \nabla_{vW} vU + v \nabla_{vW} hU$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U W - \mathcal{T}_W U &= h(\nabla_{vU} vW - \nabla_{vW} vU) + v(\nabla_{vU} hW - \nabla_{vW} hU) \\ &= h[U, W] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\mathcal{T}_U W = \mathcal{T}_W U$ elde edilir.

2) Herhangi bir $X \in \chi^h(M)$ temel vektör alanını alalım. $W \in \chi^v(M)$ için,

$$\begin{aligned} W(g(X, X)) &= g(\nabla_W X, X) + g(X, \nabla_W X) \\ &= 2g(\nabla_W X, X) = 2g(\nabla_X W, X) \\ &= -2g(\nabla_X X, W) = -2g(\mathcal{A}_X X, W) \end{aligned}$$

dir. $g(X, X)$ her lif üzerinde sabit ve $\mathcal{A}_X X$ vektör alanı dikey olduğundan $\mathcal{A}_X X = 0$ bulunur. $\mathcal{A}$ lineer olduğundan

$$0 = \mathcal{A}_{X+Y} X + Y = \mathcal{A}_X X + \mathcal{A}_X Y + \mathcal{A}_Y X + \mathcal{A}_Y Y$$

$$0 = \mathcal{A}_X Y + \mathcal{A}_Y X$$

elde edilir. Buradan (2) ispatlanmış olur.

3) $X, Y \in \chi^h(M)$ olmak üzere

$$v[X, Y] = v(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \mathcal{A}_X Y - \mathcal{A}_Y X = 2\mathcal{A}_X Y$$

elde edilir.

Lemma 5.1.7. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$1) \nabla_V W = \mathcal{T}_V W + \tilde{\nabla}_V W,$$

$$2) \nabla_V X = h\nabla_V X + \mathcal{T}_V X,$$

$$3) \nabla_X V = \mathcal{A}_X V + v\nabla_X V,$$

$$4) \nabla_X Y = h\nabla_X Y + \mathcal{A}_X Y,$$

dir. Ayrıca, X temel vektör alanı ise; $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = \mathcal{A}_X V$$

dur. Burada $\tilde{\nabla}_V W = v\nabla_V W$ dir [4].

İspat. (5.1) denklemi kullanılarak $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$\mathcal{T}_V W = h\nabla_{vV} vW + v\nabla_{vV} hW = h\nabla_V W$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\nabla_V W = h\nabla_V W + v\nabla_V W$$

olduğundan son iki eşitlikten (1) eşitliğine ulaşılır.

$X \in \chi^h(M)$ ve $V \in \chi^v(M)$ için (5.1) den

$$\mathcal{T}_V X = h\nabla_{vV} vX + v\nabla_{vV} hX = v\nabla_V X$$

yazılır. Burada $\nabla_V X = v\nabla_V X + h\nabla_V X$ olduğundan (2) elde edilir.

(5.2) eşitliğinden

$$\mathcal{A}_X V = v\nabla_{hX} hV + h\nabla_{hX} vV = h\nabla_X V$$

olur. Diğer taraftan, $\nabla_X V = h\nabla_X V + v\nabla_X V = \mathcal{A}_X V + v\nabla_X V$ olduğundan (3) eşitliği açıkça görülür.

Son olarak, benzer şekilde $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$\mathcal{A}_X Y = v\nabla_{hX} hY + h\nabla_{hX} vY = v\nabla_X Y$$

ve $\nabla_X Y = h\nabla_X Y + v\nabla_X Y = h\nabla_X Y + \mathcal{A}_X Y$ olduğundan ispat tamamlanır.

5.2. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ Temel Tensörlerinin Geometrik Anlamı

Temel tensör alanları Riemann submersiyonlarının geometrik özelliklerinin incelenmesinde özel bir öneme sahiptir. $\mathcal{T}_V W$ temel tensörünün liflerin ikinci temel formuna karşılık geldiği ve $\mathcal{A}_X Y$ nin ise dikey distribüsyonunun integrallenebilirliğini karakterize ettiği bilinmektedir [3].

Teorem 5.2.1. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. (M, g) nin dikey distribüsyonu V olmak üzere V nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A} = 0$ olmasıdır [3].

İspat. $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$\mathcal{A}_X Y = v\nabla_{hX} hY + h\nabla_{hX} vY = v\nabla_X Y$$

yazılır. Buradan

$$\mathcal{A}_X Y - \mathcal{A}_Y X = v[X, Y]$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$2\mathcal{A}_X Y = v[X, Y]$$

elde edilir. O halde $\mathcal{A}_X Y = 0$ olması V nin integrallenebilir olduğunu gösterir. Tersine V integrallenebilir ise son eşitlikten $X, Y \in \chi^h(M)$ için $\mathcal{A}_X Y = 0$ olur. Buradan $U \in \chi^v(M)$ için $g(\mathcal{A}_X Y, U) = -g(\mathcal{A}_X U, Y) = 0$ olacağından $\mathcal{A}_X U = 0$ bulunur. Ek olarak $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}_{hU}$ eşitliğinde $\mathcal{A}_U = 0$ elde edilir. Böylece $\mathcal{A} = 0$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Tanım 5.2.2. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. (M, g) nin dikey distribüsyonu V ve yatay distribüsyonu H üzerine olan projeksiyonlar v ve h olmak üzere

$$\widehat{\nabla}_E F = v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF), \quad E, F \in \chi(M) \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanan konneksiyona Schouten Konneksiyonu adı verilir [3].

Lemma 5.2.3. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda, her $E, F \in \chi(M)$ için

$$\nabla_E F = \widehat{\nabla}_E F + T_E F + A_E F \quad (5.6)$$

dır [3].

İspat. (5.6) ile verilen Schouten konneksiyonu tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_E F &= v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF) \\ &= v(\nabla_{vE+hE} vF) + h(\nabla_{vE+hE} hF) \\ &= v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + h\nabla_{vE} hF + h\nabla_{hE} hF \\ &= v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + h\nabla_{vE} hF \\ &\quad + h\nabla_{hE} hF + \nabla_E F - \nabla_E F \end{aligned} \quad (5.7)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \nabla_E F &= h\nabla_E F + v\nabla_E F \\ &= h\left(\nabla_{(vE+hE)}(vF + hF)\right) + v\left(\nabla_{(vE+hE)}(vF + hF)\right) \\ &= h\nabla_{vE} vF + h\nabla_{vE} hF + h\nabla_{hE} vF + h\nabla_{hE} hF \\ &\quad + v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + v\nabla_{vE} hF + v\nabla_{hE} hF \end{aligned} \quad (5.8)$$

dir. (5.9), (5.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_E F &= v\nabla_{vE} vF + v\nabla_{hE} vF + h\nabla_{vE} hF + h\nabla_{hE} hF + \nabla_E F \\
&\quad - h\nabla_{vE} vF - h\nabla_{vE} hF - h\nabla_{hE} vF - h\nabla_{hE} hF \\
&\quad - v\nabla_{vE} vF - v\nabla_{hE} vF - v\nabla_{vE} hF - v\nabla_{hE} hF \\
&= \nabla_E F - (h\nabla_{vE} vF - v\nabla_{vE} hF) - (v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.1) ve (5.2) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 5.2.4. (M, g) , $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda her $x \in N$ için, herhangi bir $\sigma^{-1}(x)$ lifi üzerinde $\widehat{\nabla}$ Schouten konneksiyonu, g metrik tensöründen indirgenmiş metrik tarafından belirlenen Levi-Civita konneksiyonu ile çakışır [3].

İspat. Herhangi bir $U, V \in \chi^v(M)$ için

$$\widehat{\nabla}_U W = v(\nabla_U vW) + h(\nabla_U hW) = v(\nabla_U vW) \quad (5.9)$$

dir. Ayrıca (5.1) ve (5.2) den

$$T_U V = h\nabla_{vU} vW + v\nabla_{vU} hW = h\nabla_{vU} vW \quad (5.10)$$

ve

$$A_U W = v\nabla_{hU} hW + h\nabla_{hU} vW = 0 \quad (5.11)$$

elde edilir. Böylece (5.10)-(5.12) kullanılırsa

$$\nabla_U W = \widehat{\nabla}_U W + T_U W, \quad U, W \in \chi^v(M) \quad (5.12)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

$\mathcal{T}$ dikey tensör alanının $\chi^v(M) \times \chi^v(M)$ ye kısıtlanması herhangi bir lifin ikinci temel formuna karşılık gelir. (5.13) denklemi Gauss formülü ve $\mathcal{T}$ ise ikinci temel form olarak adlandırılır [3].

Böylece altmanifoldların geometrisi göz önüne alınarak aşağıdaki karakterizasyon verilebilir:

Tanım 5.2.5. $(M, g), (N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları olsun. $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ Riemann submersiyonu için eğer $\mathcal{T}$ tensör alanı sıfır ise σ nın herhangi bir lifine M nin total geodezik altmanifoldu denir [3].

5.3. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ Temel Tensörlerinin Kovaryant Türevleri

Bu alt bölümde, temel tensörlerin kovaryant türevlerinden bahsedilecektir.

Tanım 5.3.1. (M, g) bir Riemann manifoldu üzerindeki (1,2)-tipli $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{T}$ tensör alanlarının kovaryant türevleri her $E, F \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$(\nabla_E \mathcal{A})_F H = (\nabla_E \mathcal{A})(F, H) = \nabla_E(\mathcal{A}_F H) - \mathcal{A}_{\nabla_E F}(H) - \mathcal{A}_F(\nabla_E H)$$

ve

$$(\nabla_E \mathcal{T})_F H = (\nabla_E \mathcal{T})(F, H) = \nabla_E(\mathcal{T}_F H) - \mathcal{T}_{\nabla_E F}(H) - \mathcal{T}_F(\nabla_E H)$$

ile tanımlanır. Bu durumda $\nabla \mathcal{A}$ ve $\nabla \mathcal{T}$ (1,1)-tipli tensör alanlarıdır [1].

Lemma 5.3.2. $(M, g), (N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_V \mathcal{A})_W &= -\mathcal{A}_{\mathcal{T}_V W}, & (\nabla_X \mathcal{T})_Y &= -\mathcal{T}_{\mathcal{A}_X Y}, \\ (\nabla_X \mathcal{A})_W &= -\mathcal{A}_{\mathcal{A}_X W}, & (\nabla_V \mathcal{T})_Y &= -\mathcal{T}_{\mathcal{T}_V Y} \end{aligned}$$

dir [1].

Anti-simetrik ve lineer $\mathcal{T}_E$ ve $\mathcal{A}_E$ tensör alanlarının kovaryant türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

Lemma 5.3.3. $(M, g), (N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. $E \in \chi(M)$, $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $U, V, W \in \chi^v(M)$ için

- 1) $g((\nabla_U \mathcal{A})_X V, W) = g(\mathcal{T}_U V, \mathcal{A}_X W) - g(\mathcal{T}_U V, \mathcal{A}_X V),$
- 2) $\nabla \mathcal{T}$ simetriktir. Yani $g((\nabla_E \mathcal{T})_V W, X) = g((\nabla_E \mathcal{T})_W V, X),$
- 3) $\nabla \mathcal{A}$ simetriktir. Yani $g((\nabla_E \mathcal{A})_X Y, V) = -g((\nabla_E \mathcal{A})_Y X, V),$

dir [1].

Lemma 5.3.4. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. $X, Y, Z \in \chi^h(M)$ ve $W \in \chi^v(M)$ için δ_{XYZ} ; X, Y ve Z yatay vektör alanları üzerindeki toplamı göstermek üzere

$$\delta_{XYZ}g((\nabla_Z \mathcal{A})_X Y, V) = \delta_{XYZ}g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{T}_V Z)$$

dır [1].

Önerme 5.3.5. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda

- 1) $\mathcal{A}$ yatay tensör alanı paralel ise, $\mathcal{A} = 0$ dır.
- 2) $\mathcal{T}$ dikey tensör alanı paralel ise, $\mathcal{T} = 0$ dır [1].

Temel tensör alanlarının paralelliği Riemann submersiyonun liflerinin tamamen geodezikliği ve yatay distribüsyonun integrallenebilirliğinin bir ölçüsüdür. Riemann submersiyonun lifleri aslında submersiyonun tanımlandığı manifoldun bir altmanifoldu olarak göz önüne alınabileceğinden altmanifold teorisindeki kavramlar lifler için de geçerli olur. Lifleri tamamen umbilik olan yani $U, V \in \chi^v(M)$ için

$$\mathcal{T}_U V = g(U, V)H$$

şartını sağlayan submersiyon tamamen umbilik liflere sahip Riemann submersiyonu olarak adlandırılır. Burada H , liflerin ortalama eğrilik vektör alanıdır ve $\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$, dikey uzayın bir lokal ortonormal çatısı olmak üzere herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{r} \text{iz}(\mathcal{T}) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \mathcal{T}_{U_j} U_j$$

ile tanımlanır [1].

5.4. Eğrilikler Arasındaki Bağlantılar

Bu alt bölümde, submersiyonların arasında tanımlandığı manifoldların eğrilikleri arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

Tanım 5.4.1. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. (M, g) manifoldunun yatay distribüsyonu $H^\perp$ olmak üzere $\chi^h(M)$ üzerinde (1-3)-tipli eğrilik tensör alanı R^* ile gösterilir ve $X, Y, Z \in \chi^h(M), p \in M$ için

$$\check{R}_{\sigma(p)}(d\sigma_p(X_p), d\sigma_p(Y_p), d\sigma_p(Z_p))$$

tensörünün yatay lifti $R^*(X, Y, Z)$ olarak tanımlanır. Bu durumda $(N, \check{g})$ manifoldunun $\check{R}$ Riemann eğriliği için

$$d\sigma(R^*(X, Y, Z)) = \check{R}(d\sigma(X), d\sigma(Y), d\sigma(Z))$$

yazılabilir. Ayrıca, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M)$ için

$$R^*(X, Y, Z, H) = g(R^*(X, Y, Z), H) = \check{R}(d\sigma(X), d\sigma(Y), d\sigma(Z), d\sigma(H)) \circ \sigma$$

dır [3].

$x \in N$ için, herhangi bir $(\sigma^{-1}(x), \dot{g}_x)$ lifinin Riemann eğriliğini de $\dot{R}$ ile gösterelim. Benzer gösterim kovaryant türevlerde de kullanılacaktır.

Teorem 5.4.2. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. R ve $\dot{R}$ sırasıyla (M, g) ve $(\sigma^{-1}(x), \dot{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $U, V, W, F \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$g(R(U, V)W, F) = g(\dot{R}(U, V)W, F) - g(\mathcal{T}_U F, \mathcal{T}_V W) + g(\mathcal{T}_U W, \mathcal{T}_V F), \quad (5.13)$$

$$g(R(U, V)W, X) = g((\nabla_U \mathcal{T})_V W, X) - g((\nabla_V \mathcal{T})_U W, X) \quad (5.14)$$

dır. (5.4.1) ve (5.4.2) denklemleri submersiyonlar için Gauss ve Codazzi denklemleri olarak gözönüne alınabilir [3].

Teorem 5.4.3. $(M, g), (N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. R ve $\check{R}$ sırasıyla (M, g) ve $(N, \check{g})$ manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için,

$$g(R(X, Y)Z, H) = g(R^*(X, Y)Z, H) + 2g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_Z H)$$

$$\begin{aligned}
& -g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{A}_X H) + g(\mathcal{A}_X Z + \mathcal{A}_Y H) \\
g(R(X, Y)Z, V) &= -g((\nabla_Z \mathcal{A})_X Y, V) - g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{T}_V Z) \\
& + g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{T}_V X) - g(\mathcal{A}_X Z, \mathcal{T}_V Y) \\
g(R(X, Y)V, W) &= g((\nabla_V \mathcal{A})_X Y, W) - g((\nabla_W \mathcal{A})_X Y, V) \\
& + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) - g(\mathcal{A}_X W, \mathcal{A}_Y V) \\
& - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) + g(\mathcal{T}_W X, \mathcal{T}_V Y) \\
g(R(X, V)Y, W) &= -g((\nabla_X \mathcal{T})_V W, Y) + g((\nabla_V \mathcal{A})_X Y, W) \\
& - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W)
\end{aligned}$$

dir [3].

Teorem 5.4.4. (M, g) , $(N, \check{g})$ Riemann manifoldları ve $\sigma: (M, g) \rightarrow (N, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. K , $\check{K}$ ve $\dot{K}$ sırasıyla (M, g) , $(N, \check{g})$ ve lifin kesit eğrilikleri olmak üzere $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $U, V \in \chi^v(M)$ ortonormal vektörleri için

- 1) $K(U, V) = \dot{K}(U, V) + |\mathcal{T}_U V|^2 - g(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V)$,
- 2) $K(X, Y) = \check{K}(\check{X}, \check{Y}) \circ \sigma - 3|\mathcal{A}_X Y|^2$,
- 3) $K(X, V) = g((\nabla_X \mathcal{T})_V V, X) - |\mathcal{T}_V X|^2 + |\mathcal{A}_X V|^2$

dir [3].

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bu kısımda Riemann manifoldları arasındaki harmonik, f -harmonik, biharmonik, f -biharmonik ve bi- f -harmonik dönüşümler için temel tanımlar verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

6.1. Harmonik ve Biharmonik Dönüşümler

Tanım 6.1.1. W , M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\psi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $W \rightarrow N$ vektör demetinin pull-back demeti olan $\psi^{-1}W \rightarrow M$ demetinin $x \in M$ için lifleri

$$(\psi^{-1}W)_x = W_{\psi(x)}$$

şeklindeir. $W \rightarrow N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^W ile gösterilirse $\psi^{-1}W \rightarrow M$ pull-back demeti üzerinde $\psi^*\mu = \mu \circ \psi$ olmak üzere

$$\nabla^\psi: \Gamma(TM) \times \Gamma(\psi^{-1}W) \rightarrow \Gamma(\psi^{-1}W)$$

$$(X, \psi^*\mu) \rightarrow \nabla_X^\psi(\psi^*\mu) = \nabla_{d\psi(X)}^W \mu$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyon vardır. Bu konneksiyona pull-back konneksiyon denir [40].

Tanım 6.1.2. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve $\psi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda ψ dönüşümünün ikinci temel formu $\nabla d\psi$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla d\psi: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(\psi^{-1}TN)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla d\psi(X, Y)$$

$$\nabla d\psi(X, Y) = (\nabla_X d\psi)(Y) = \nabla_X^\psi d\psi(Y) - d\psi(\nabla_X^M Y)$$

ile tanımlanır [40].

Önerme 6.1.3. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşümünün ikinci temel formu simetriktir [40].

Örnek 6.1.4. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir izometrik immersiyon olsun. $\psi^{-1}TN$ pull-back

demeti $\psi^{-1}TN = \tau M \otimes \mathcal{V}M$, $X = X^T + X^\perp$, olmak üzere $d\psi$ türev dönüşümünün TM ile TM nin $d\psi$ altında $\psi^{-1}TN$ pull-back demetindeki görüntüsü olan τM yi özdeşleştirdiği düşünülürse, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X^\psi(d\psi(Y)) = \nabla_X^N Y$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d\psi(\nabla_X^M Y)$, $\nabla_X^N Y$ nin tanjant bileşeni ve $\nabla d\psi(X, Y)$ ise $\nabla_X^N Y$ nin normal bileşenidir. Böylece $\nabla d\psi(X, Y)$, N deki $\psi(M)$ immersed altmanifoldunun $B(X, Y)$ ile gösterilen ikinci temel formuna karşılık gelir [40].

Tanım 6.1.5. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\psi) \in \Gamma(\psi^{-1}TN)$ ile gösterilir ve

$$\tau(\psi) = iz \nabla d\psi = \sum_{i=1}^m \nabla d\psi(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_i, \dots, e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal bazdır [40].

Tanım 6.1.6. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün enerji yoğunluğu $e(\psi)$ ile gösterilen ve $x \in M$ için

$$e(\psi): M \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \rightarrow e(\psi)_x = \frac{1}{2} |d\psi_x|^2$$

şeklinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}, T_x M$ nin bir ortonormal bazı ve $|d\psi_x|^2$,

$$|d\psi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\psi_x(e_i), d\psi_x(e_i))$$

ile ifade edilen Hilbert-Schmidt normudur [40].

Tanım 6.1.7. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve D , M de bir kompakt bölge olsun. ψ nin enerji yoğunluğunun integrali, enerji integrali olarak adlandırılır, $E(\psi; D)$ ile gösterilir ve

$$E(\psi; D) = \int_D e(\psi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\psi|^2 v_g$$

ile verilir. M manifoldunun kompakt olması durumunda $E(\psi; M)$ yerine $E(\psi)$ gösterimi kullanılır [40].

Tanım 6.1.8. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E(\cdot; D): C^\infty(M, N) \rightarrow R$$

enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise ψ ye harmoniktir denir [40].

Tanım 6.1.9. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün bir C^∞ varyasyonu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow N \\ (x, t) &\rightarrow \psi_t(x) \end{aligned}$$

ile tanımlanır öyle ki $\psi_0 = \psi$ dir [40].

Tanım 6.1.10. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $\forall x \in M$ için $t \rightarrow \psi_t(x)$ dönüşümü $\psi(x) \in N$ noktasından geçen ve hız vektörü

$$v(x) = \frac{\partial \psi_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} \in T_{\psi(x)}N$$

olan bir eğri tanımlar. Bu hız vektörüne ψ_t nin varyasyon vektör alanı denir [40].

Tanım 6.1.11. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve D, M nin kompakt bir altkümesi olsun. Bu durumda $\forall t$ için $M \setminus \dot{D}$ üzerinde $\psi_t = \psi$ şartını sağlıyorsa $\{\psi_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir [40].

Tanım 6.1.8 i bir başka şekilde aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

Tanım 6.1.12. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümü M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün $\{\psi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt}E(\psi_t; D) \big|_{t=0} = 0$$

şartını sağlıyorsa ψ ye bir harmonik dönüşüm denir [40].

Tanım 6.2.13. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $x \in M$ için $\psi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik $v, w \in \Gamma(\psi^{-1}TN)$ için

$$\langle v, w \rangle_x = h_{\psi(x)}(v(x), w(x))$$

olarak tanımlanır [12].

Önerme 6.1.14. (Enerjinin Birinci Varyasyonu) $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\psi_t\}$, ψ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pull-back metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\psi_t; D) \big|_{t=0} = - \int_D \langle v, \tau(\psi) \rangle v_g$$

dir [40].

Bu durumda $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\psi) = 0$ olmasıdır [40].

Tanım 6.1.15. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau(\psi) = 0$ denkleminde ψ nin harmonik denklemi denir [40].

Önerme 6.1.16. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir izometrik immersiyonu için $\tau(\psi) = izB = (boyM)\mu^M$ dir. Yani bir izometrik immersiyonun harmonik olması ile izometrik immersiyonun belirttiği alt manifoldun minimal olması birbirine denktir [40].

Tanım 6.1.17. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\psi)$ olmak üzere $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için ψ nin bienerji integrali

$$E_2(\psi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\psi)|^2 v_g$$

ile tanımlanır [41].

Önerme 6.1.18. (Bienerjinin Birinci Varyasyonu) $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\psi_t\}$, ψ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\Delta^\psi = -iz(\nabla^\psi \nabla^\psi - \nabla_\nabla^\psi)$, $\psi^{-1}TN$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyan olmak üzere

$$\frac{d}{dt} E_2(\psi_t; D) \Big|_{t=0} = \int_D \langle \tau_2(\psi), v \rangle v_g$$

dir. Burada $x \in D$ için $v(x)$, $\{\psi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı; R^N, N nin eğrilik tensörü ve

$$\tau_2(\psi) = -\psi(\tau(\psi)) - izR^N(d\psi(-), \tau(\psi))d\psi(-)$$

dir [41].

Tanım 6.1.19. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün bitensiyon alanı $\tau_2(\psi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_2(\psi) = -\Delta^\psi(\tau(\psi)) - izR^N(d\psi(-), \tau(\psi))d\psi(-)$$

şeklinde tanımlanır [41].

Tanım 6.1.20. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün biharmonik denklemi

$$\tau_2(\psi) = -\Delta^\psi(\tau(\psi)) - izR^N(d\psi(-), \tau(\psi))d\psi(-) = 0$$

ile verilir ve $\tau_2(\psi) = 0$ denklemini sağlayan ψ dönüşümü de biharmonik dönüşüm olarak adlandırılır [41].

Böylece her harmonik dönüşümün biharmonik olacağı açıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

6.2. f -Harmonik, f -Biharmonik ve Bi- f -Harmonik Dönüşümler

Tanım 6.2.1. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve D, M de bir kompakt bölge olsun. ψ nin f -enerji integrali, $E_f(\psi; D)$ ile gösterilir ve

$$E_f(\psi; D) = \frac{1}{2} \int_D f |d\psi|^2 v_g$$

ile tanımlanır. Burada f , (M, g) üzerinde tanımlı pozitif reel değerli bir fonksiyondur [29].

Tanım 6.2.2. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E_f(\cdot; D): C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan f -enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise yani M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün $\{\psi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt} E_f(\psi_t; D) \Big|_{t=0} = 0$$

ise ψ ye bir f -harmonik dönüşüm denir. Euler-Lagrange denklemi

$$\tau_f(\psi) = f\tau(\psi) + d\psi(\text{grad } f)$$

ile tanımlanan f -tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir [29].

Bu durumda $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ nin f -harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau_f(\psi) = 0$ olmasıdır. Açıktır ki f sabit bir fonksiyon ise f -harmonik dönüşümler harmonik dönüşümlere indirgenir [29].

Tanım 6.2.3. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir f -harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau_f(\psi) = 0$ denkleminde f -harmonik denklem veya f -tensiyon alanı denklemi denir [29].

Tanım 6.2.4. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için f -bienerji integrali

$$E_{2,f}(\psi) = \frac{1}{2} \int_D f |\tau(\psi)|^2 v_g$$

ile tanımlanır [13].

Önerme 6.2.5. (f -Bienerjinin Birinci Varyasyonu) $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir

diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\psi_t\}$, ψ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\Delta^\psi = -iz(\nabla^\psi \nabla^\psi - \nabla_\nabla^\psi)$, $\psi^{-1}TN$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyan olmak üzere

$$\frac{d}{dt} E_{2,f}(\psi_t; D) \big|_{t=0} = - \int_D \langle \tau_{2,f}(\psi), v \rangle v_g$$

dir. Burada

$$\tau_{2,f}(\psi) = -iz_g(\nabla^\psi \nabla^\psi - \nabla_{\nabla^\psi}^\psi) f \tau(\psi) - f iz_g R^N(\tau(\psi), d\psi(-)) d\psi(-)$$

dir [13].

Tanım 6.2.6. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün f -bitensiyon alanı $\tau_{2,f}(\psi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_{2,f}(\psi) = -iz_g(\nabla^\psi \nabla^\psi - \nabla_{\nabla^\psi}^\psi) f \tau(\psi) - f iz_g R^N(\tau(\psi), d\psi(-)) d\psi(-)$$

şeklinde tanımlanır [13].

Tanım 6.2.7. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümünün f -bitensiyon alanı $\tau_{2,f}(\psi)$ olmak üzere

$$\tau_{2,f}(\psi) = -iz_g(\nabla^\psi \nabla^\psi - \nabla_{\nabla^\psi}^\psi) f \tau(\psi) - f iz_g R^N(\tau(\psi), d\psi(-)) d\psi(-) = 0$$

eşitliğine ψ dönüşümünün f -biharmonik denklemi ve $\tau_{2,f}(\psi) = 0$ denklemini sağlayan ψ dönüşümüne de f -biharmonik dönüşüm denir [13].

Önerme 6.2.8. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ diferensiyellenebilir dönüşümü için

$$\tau_{2,f}(\psi) = f \tau_2(\psi) - \Delta(f) \tau(\psi) - 2 \nabla_{grad_g f}^\psi \tau(\psi)$$

dir [13].

Yukarıdaki önermeden görülür ki f -biharmonik dönüşümler, harmonik dönüşümlerin ve biharmonik dönüşümlerin bir genellemesi olarak düşünülebilir. Harmonik dönüşümler daima f -biharmoniktir. Ayrıca sabit f fonksiyonu ile birlikte bir

f -biharmonik dönüşüm aslında bir biharmonik dönüşümdür [13].

Tanım 6.2.9. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve D, M de bir kompakt bölge olsun. ψ nin bi- f -enerji integrali, $E_{f,2}(\psi; D)$ ile gösterilir ve

$$E_{f,2}(\psi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_f(\psi)|^2 v_g$$

ile tanımlanır. Burada $f, (M, g)$ üzerinde tanımlı pozitif reel değerli bir fonksiyondur [12].

Tanım 6.2.10. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. Eğer $\psi \in C^\infty(M, N)$ dönüşümü kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E_{f,2}(\cdot; D): C^\infty(M, N) \rightarrow R$$

ile tanımlanan bi- f -enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise yani M nin bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün $C^\infty \{\psi_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt} E_{f,2}(\psi_t; D) \big|_{t=0} = 0$$

şartını sağlıyorsa ψ ye bir bi- f -harmonik dönüşüm denir [12].

Önerme 6.2.11. (Bi- f -enerjinin Birinci Varyasyonu) $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\{\psi_t\}$, ψ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} E_{f,2}(\psi_t; D) \big|_{t=0} = - \int_D \langle \tau_{f,2}(\psi), v \rangle v_g$$

dir. Burada

$$J^\psi X = -iz(\nabla^\psi \nabla^\psi X - \nabla_{\nabla^\psi X}^\psi - R^N(d\psi(X), \tau(\psi))d\psi(X))$$

ve

$$\tau_{f,2}(\psi) = fJ^\psi(\tau_f(\psi)) - \nabla_{grad_g f}^\psi \tau_f(\psi)$$

dir [12].

Tanım 6.2.12. $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşümünün bi- f -tensiyon alanı $\tau_{f,2}(\psi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_{f,2}(\psi) = fJ^\psi(\tau_f(\psi)) - \nabla_{grad_g f}^\psi \tau_f(\psi)$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 6.2.13 $\psi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$$\tau_{f,2}(\psi) = fJ^\psi(\tau_f(\psi)) - \nabla_{grad_g f}^\psi \tau_f(\psi) = 0$$

eşitliğine ψ dönüşümünün bi- f -biharmonik denklemi ve $\tau_{f,2}(\psi) = 0$ denklemini sağlayan ψ dönüşümüne de bi- f -biharmonik dönüşüm denir [12].

Bi- f -biharmonik dönüşümler, f -harmonik dönüşümlerin bir genellemesi olarak göz önüne alınabilir. f -harmonik dönüşümler daima bi- f -biharmoniktir. Dolayısı ile f -harmonik olmayan bi- f -biharmonik dönüşümlerin araştırılması önem arz etmektedir.

7. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Z.P. Wang ve Y.L. Ou [26] tarafından yapılan 3-boyutlu bir Riemann manifoldundan tanımlanan Riemann submersiyonlarının biharmonikliğinin incelendiği çalışmadaki hesaplamalardan hareketle, aynı tipteki Riemann submersiyonları için f -harmonik, f -biharmonik ve bi- f -harmonik olma şartlarını araştırıp özgün sonuçlar sunacağız.

$\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, M nin bir ortonormal çatısı olsun. Eğer bu çatıdaki yatay distribüsyona teğet olan vektör alanları temel vektör alanları oluyor ise S ye Riemann submersiyonu σ ya uyarlanmış bir çatı denir. Böyle bir çatı daima vardır [40].

$S = \{e_1, e_2, e_3\}$, e_3 dikey vektör alanı olmak üzere $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ Riemann submersiyonuna uyarlanmış bir ortonormal çatı olsun. Bu durumda $[e_1, e_3]$ ve $[e_2, e_3]$ dikey vektör alanlarıdır. Ayrıca; $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, N nin bir ortonormal çatısı olmak üzere $[e_1, e_2]$ vektör alanı $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ ile σ -bağlantılıdır, yani

$$d\sigma[e_1, e_2] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$$

dir. Bu durumda $A_1, A_2 \in C^\infty(N)$ olmak üzere

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = A_1 E_1 + A_2 E_2$$

yazılabilir. $a_i = A_i$ o σ gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= k_1 e_3, \\ [e_2, e_3] &= k_2 e_3, \\ [e_1, e_2] &= a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2p e_3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

olur. Burada $k_1, k_2 \in C^\infty(M)$ dir. $\{a_1, a_2, k_1, k_2, p\}$ kümesine σ Riemann submersiyonuna uyarlanmış çatının integrallenebilirlik verisi denir [26].

(M^3, g) nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda (7.1) ve Kozsul eşitliği kullanılarak aşağıdaki hesaplamalar elde edilir [26]:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_1, e_2) &= e_1 g(e_1, e_2) + e_1 g(e_1, e_2) - e_2 g(e_1, e_1) \\
&\quad + g(e_2, [e_1, e_1]) + g(e_1, [e_2, e_1]) - g(e_1, [e_1, e_2]) \\
&= -e_2 g(e_1, e_1) + g(e_1, -a_1 e_1 - a_2 e_2 + 2pe_3) \\
&\quad - g(e_1, a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2pe_3) \\
&= -2a_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_1, e_3) &= e_1 g(e_1, e_3) + e_1 g(e_1, e_3) - e_3 g(e_1, e_1) \\
&\quad + g(e_3, [e_1, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_1]) - g(e_1, [e_1, e_3]) \\
&= 2g(e_1, [e_3, e_1]) \\
&= 2g(e_1, -k_1 e_3) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_2, e_1) &= e_1 g(e_2, e_1) + e_2 g(e_1, e_1) - e_1 g(e_1, e_2) \\
&\quad + g(e_1, [e_1, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_2, e_1]) \\
&= 2g(e_1, a_1 e_1 + a_2 - 2pe_3) \\
&= 2a_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_2, e_2) &= e_1 g(e_2, e_2) + e_2 g(e_1, e_2) - e_2 g(e_1, e_2) \\
&\quad + g(e_2, [e_1, e_2]) + g(e_2, [e_2, e_1]) - g(e_1, [e_2, e_2]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_2, e_3) &= e_1 g(e_2, e_3) + e_2 g(e_1, e_3) - e_3 g(e_1, e_2) \\
&\quad + g(e_3, [e_1, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_2]) - g(e_1, [e_2, e_3]) \\
&= g(e_3, a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2pe_3) \\
&= -2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) &= e_1 g(e_3, e_1) + e_3 g(e_1, e_3) - e_1 g(e_1, e_3) \\
&\quad + g(e_1, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_3, e_1]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_3, e_2) &= e_1 g(e_3, e_2) + e_3 g(e_1, e_2) - e_2 g(e_1, e_3) \\
&\quad + g(e_2, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_2, e_1]) - g(e_1, [e_3, e_2]) \\
&= g(e_3, -a_1 e_1 - a_2 e_2 + 2pe_3) \\
&= 2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_3, e_3) &= e_1 g(e_3, e_3) + e_3 g(e_3, e_1) - e_3 g(e_1, e_3) \\
&\quad + g(e_3, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_1]) - g(e_1, [e_3, e_3]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_1, e_1) &= e_2 g(e_1, e_1) + e_1 g(e_1, e_2) - e_1 g(e_2, e_1) \\
&\quad + g(e_1, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_1, e_2]) - g(e_2, [e_1, e_1]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) &= e_2 g(e_1, e_2) + e_1 g(e_2, e_2) - e_2 g(e_2, e_1) \\
&\quad + g(e_2, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_2, e_2]) - g(e_2, [e_1, e_2]) \\
&= -2(e_2 a_1 e_1 + e_2 e_2 - 2p e_3) \\
&= -2a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_1, e_3) &= e_2 g(e_1, e_3) + e_1 g(e_3, e_2) - e_3 g(e_2, e_1) \\
&\quad + g(e_3, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_2]) - g(e_2, [e_1, e_3]) \\
&= g(e_3, -a_1 e_1 - a_2 e_2 + 2p e_3) \\
&= 2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_2, e_1) &= e_2 g(e_2, e_1) + e_2 g(e_1, e_2) - e_1 g(e_2, e_2) \\
&\quad + g(e_1, [e_2, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_2]) - g(e_2, [e_2, e_1]) \\
&= 2g(e_2, a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2p e_3) \\
&= 2a_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_2, e_3) &= e_2 g(e_2, e_3) + e_2 g(e_3, e_2) - e_3 g(e_2, e_2) \\
&\quad + g(e_3, [e_2, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_2]) - g(e_2, [e_2, e_3]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_3, e_1) &= e_2 g(e_3, e_1) + e_3 g(e_1, e_2) - e_1 g(e_2, e_3) \\
&\quad + g(e_1, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_1]) \\
&= 2g(e_3, a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2p e_3) \\
&= -2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_3, e_2) &= e_2 g(e_3, e_2) + e_3 g(e_2, e_2) - e_2 g(e_2, e_3) \\
&\quad + g(e_2, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_2, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_2]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_2} e_3, e_3) &= e_2 g(e_3, e_3) + e_3 g(e_3, e_2) - e_3 g(e_2, e_3) \\
&\quad + g(e_3, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_3]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_1, e_1) &= e_3 g(e_1, e_1) + e_1 g(e_1, e_3) - e_1 g(e_3, e_1) \\
&\quad + g(e_1, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_1, e_3]) - g(e_3, [e_1, e_1]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_1, e_2) &= e_3 g(e_1, e_2) + e_1 g(e_2, e_3) - e_2 g(e_3, e_1) \\
&\quad + g(e_2, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_2, e_3]) - g(e_3, [e_1, e_2]) \\
&= -g(e_3, a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2p e_3) \\
&= 2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_1, e_3) &= e_3 g(e_1, e_3) + e_1 g(e_3, e_3) - e_3 g(e_3, e_1) \\
&\quad + g(e_3, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_3]) - g(e_3, [e_1, e_3]) \\
&= 2g(e_3, -k_1 e_3) \\
&= -2k_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_2, e_1) &= e_3 g(e_2, e_1) + e_2 g(e_1, e_3) - e_1 g(e_3, e_2) \\
&\quad + g(e_1, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_3]) - g(e_3, [e_2, e_3]) \\
&= -g(e_3, -a_1 e_1 - a_2 e_2 + 2p e_3) \\
&= -2p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_2, e_3) &= e_3 g(e_2, e_3) + e_2 g(e_3, e_3) - e_3 g(e_3, e_2) \\
&\quad + g(e_3, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_3]) - g(e_3, [e_2, e_3]) \\
&= 2g(e_3, -k_2 e_3) \\
&= -2k_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_3, e_1) &= e_3 g(e_3, e_1) + e_3 g(e_3, e_1) - e_1 g(e_3, e_3) \\
&\quad + g(e_1, [e_3, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_3]) - g(e_3, [e_3, e_1]) \\
&= 2g(e_3, k_1 e_3) \\
&= 2k_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_3, e_2) &= e_3 g(e_3, e_2) + e_3 g(e_3, e_2) - e_2 g(e_3, e_3) \\
&\quad + g(e_2, [e_3, e_3]) + g(e_3, [e_2, e_3]) - g(e_3, [e_3, e_2]) \\
&= 2g(e_3, k_2 e_3) \\
&= 2k_1.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= -a_1 e_2, & \nabla_{e_2} e_1 &= -a_2 e_2 + p e_3, & \nabla_{e_3} e_1 &= p e_2 - k_1 e_3, \\
\nabla_{e_1} e_2 &= a_1 e_1 - p e_3, & \nabla_{e_2} e_2 &= a_2 e_1, & \nabla_{e_3} e_2 &= -p e_1 - k_2 e_3, \\
\nabla_{e_1} e_3 &= p e_2, & \nabla_{e_2} e_3 &= -p e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= k_1 e_1 + k_2 e_2
\end{aligned}$$

elde edilir [26].

σ Riemann submersiyonunun tensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma) &= iz \nabla d\sigma \\
&= \sum_{i=1}^3 \nabla d\sigma(e_i, e_i) \\
&= (\nabla d\sigma)(e_1, e_1) + (\nabla d\sigma)(e_2, e_2) + (\nabla d\sigma)(e_3, e_3)
\end{aligned}$$

tür. X, Y yatay ve V, W dikey vektör alanları için

$$(\nabla d\sigma)(X, Y) = 0, \quad (\nabla d\sigma)(V, W) = -d\sigma(\nabla_V^M W)$$

ve

$$(\nabla d\sigma)(X, V) = -d\sigma(\nabla_X^M V)$$

olduğundan

$$\tau(\sigma) = -d\sigma(\nabla_{e_3}^M e_3) = -d\sigma(k_1 e_1 + k_2 e_2) = -k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2 \quad (7.2)$$

bulunur. Burada pull-back konneksiyonun bileşenleri

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_1 &= \nabla_{e_1}^\sigma d\sigma(e_1) = (\nabla d\sigma)(e_1, e_1) + d\sigma(\nabla_{e_1}^M e_1) \\
&= d\sigma(-a_1 e_2) = -a_1 \varepsilon_2, \\
\nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2 &= \nabla_{e_1}^\sigma d\sigma(e_2) = (\nabla d\sigma)(e_1, e_2) + d\sigma(\nabla_{e_1}^M e_2) \\
&= d\sigma(a_1 e_1 - p e_3) = a_1 \varepsilon_1, \\
\nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_3 &= 0, \\
\nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 &= \nabla_{e_2}^\sigma d\sigma(e_1) = (\nabla d\sigma)(e_2, e_1) + d\sigma(\nabla_{e_2}^M e_1) \\
&= d\sigma(-a_2 e_2 + p e_3) = -a_2 \varepsilon_2, \\
\nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_2 &= \nabla_{e_2}^\sigma d\sigma(e_2) = (\nabla d\sigma)(e_2, e_2) + d\sigma(\nabla_{e_2}^M e_2) \\
&= d\sigma(a_2 e_1) = a_2 \varepsilon_1, \\
\nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_3 &= 0, \\
\nabla_{e_3}^\sigma \varepsilon_1 &= \nabla_{e_3}^\sigma d\sigma(e_1) = (\nabla d\sigma)(e_3, e_1) + d\sigma(\nabla_{e_3}^M e_1) \\
&= -d\sigma(\nabla_{e_1}^M e_3) + d\sigma(\nabla_{e_3}^M e_1) \\
&= -p \varepsilon_2 + p \varepsilon_2 = 0, \\
\nabla_{e_3}^\sigma \varepsilon_2 &= \nabla_{e_3}^\sigma d\sigma(e_2) = (\nabla d\sigma)(e_3, e_2) + d\sigma(\nabla_{e_3}^M e_2) \\
&= -d\sigma(\nabla_{e_2}^M e_3) + d\sigma(\nabla_{e_3}^M e_2) \\
&= p \varepsilon_1 - p \varepsilon_1 = 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \nabla_{e_i}^{\sigma} \tau(\sigma) &= \sum_{i=1}^3 \nabla_{e_i}^{\sigma} (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&= -e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_1 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&\quad -e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_1 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&\quad -e_3(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_3}^{\sigma} \varepsilon_1 - e_3(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_3}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&= -e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1(-a_1 \varepsilon_2) - e_1(k_2) \varepsilon_2 \\
&\quad -k_2(a_1 \varepsilon_1) - e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1(-a_2 \varepsilon_2) \\
&\quad -e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2(a_2 \varepsilon_1 - e_3(k_1) \varepsilon_1 - e_3(k_2) \varepsilon_2) \\
&= -e_1(k_1) \varepsilon_1 + k_1 a_1 \varepsilon_2 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 a_1 \varepsilon_1 - e_2(k_1) \varepsilon_1 \\
&\quad + k_1 a_2 \varepsilon_2 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 a_2 \varepsilon_1 - e_3(k_1) \varepsilon_1 - e_2(k_2) \varepsilon_2 \quad (7.3)
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \nabla_{e_i}^{\sigma} \nabla_{e_i}^{\sigma} \tau(\sigma) &= -e_1 e_1(k_1) \varepsilon_1 - e_1(k_1) \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_1 + e_1(k_1 a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1 \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&\quad -e_1 e_1(k_2) \varepsilon_2 - e_1(k_2) \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_2 - e_1(k_2 a_1) \varepsilon_1 - k_2 a_1 \nabla_{e_1}^{\sigma} \varepsilon_1 \\
&\quad -e_2 e_2(k_1) \varepsilon_1 - e_2(k_1) \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_1 + e_2(k_1 a_2) \varepsilon_2 + k_1 a_2 \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&\quad -e_2 e_2(k_2) \varepsilon_2 - e_2(k_2) \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_2 - e_2(k_2 a_2) \varepsilon_1 - k_2 a_2 \nabla_{e_2}^{\sigma} \varepsilon_1 \\
&\quad -e_3 e_3(k_1) \varepsilon_1 - e_3(k_1) \nabla_{e_3}^{\sigma} \varepsilon_1 - e_3 e_3(k_2) \varepsilon_2 - e_3(k_2) \nabla_{e_3}^{\sigma} \varepsilon_2 \\
&= -e_1 e_1(k_1) \varepsilon_1 - e_1(k_1)(-a_1 \varepsilon_2) + e_1(k_1 a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1(a_1 \varepsilon_1) \\
&\quad -e_1 e_1(k_2) \varepsilon_2 - e_1(k_2)(a_1 \varepsilon_1) - e_1(k_2 a_1) \varepsilon_1 \\
&\quad + k_2 a_1(-a_1 \varepsilon_2) - e_2 e_2(k_1) \varepsilon_1 - e_2(k_1)(-a_2 \varepsilon_2) + e_2(k_1 a_2) \varepsilon_2 \\
&\quad + k_1 a_2(a_2 \varepsilon_1) - e_2 e_2(k_2) \varepsilon_2 - e_2(k_2)(a_2 \varepsilon_1) \\
&\quad -e_2(k_2 a_2) \varepsilon_1 + k_2 a_2(-a_2 \varepsilon_2) - e_3 e_3(k_1) \varepsilon_1 - e_3 e_3(k_2) \varepsilon_2 \\
&= \left(\begin{array}{c} -e_1 e_1(k_1) + k_1 a_1^2 - e_2(k_2) a_1 - e_1(k_2 a_1) \\ -e_2 e_2(k_1) + k_1 a_2^2 - e_2(k_2) a_2 - e_2(k_2 a_2) - e_3 e_3(k_1) \end{array} \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} e_1(k_1) a_1 + e_1(k_1 a_1) - e_1 e_1(k_2) + k_2 a_1^2 \\ e_2(k_1) a_2 + e_2(k_1 a_2) - e_2 e_2(k_2) + k_2 a_2^2 - e_3 e_3(k_2) \end{array} \right) \varepsilon_2 \quad (7.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^3 \nabla_{\nabla_{e_i}^M}^{\sigma} \tau(\sigma) = \nabla_{\nabla_{e_1}^M}^{\sigma} \tau(\sigma) + \nabla_{\nabla_{e_2}^M}^{\sigma} \tau(\sigma) + \nabla_{\nabla_{e_3}^M}^{\sigma} \tau(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{-a_1 e_2}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) + \nabla_{a_2 e_1}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&\quad + \nabla_{(k_1 e_1 + k_2 e_2)}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&= -a_1 (-e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_2) \\
&\quad + a_2 (-e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_1 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2) \\
&\quad + k_1 (-e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_1 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2) \\
&\quad + k_2 (-e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_2) \\
&= -a_1 (-e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 (-a_2 \varepsilon_2) - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 (a_2 \varepsilon_2)) \\
&\quad + a_2 (-e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 (-a_1 \varepsilon_2) - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 (a_1 \varepsilon_1)) \\
&\quad + k_1 (-e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 (-a_1 \varepsilon_2) - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 (a_1 \varepsilon_1)) \\
&\quad + k_2 (-e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 (-a_2 \varepsilon_2) - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 (a_2 \varepsilon_1)) \\
&= \left(a_1 e_2(k_1) + k_2 a_1 a_2 - a_2 e_1(k_1) - k_2 a_1 a_2 \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(-k_1 e_1(k_1) - k_1 k_2 a_1 - k_2 e_2(k_1) - k_2^2 a_2 \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(-k_1 a_1 a_2 + a_1 e_2(k_2) + k_1 a_1 a_2 - a_2 e_1(k_2) + k_1^2 a_1 \right) \varepsilon_2 \\
&\quad + \left(-k_1 e_1(k_2) + k_1 k_2 a_2 - k_2 e_2(k_2) \right) \varepsilon_2 \quad (7.5)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), \tau(\sigma)) d\sigma(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 \left\{ \nabla_{d\sigma(e_i)}^N \nabla_{\tau(\sigma)}^N d\sigma(e_i) - \nabla_{\tau(\sigma)}^N \nabla_{d\sigma(e_i)}^N d\sigma(e_i) - \nabla_{[d\sigma(e_i), \tau(\sigma)]}^N d\sigma(e_i) \right\}
\end{aligned}$$

ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\nabla_{d\sigma(e_1)}^N \nabla_{\tau(\sigma)}^N d\sigma(e_1) &= \nabla_{d\sigma(e_1)}^N (\nabla_{-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2}^N d\sigma(e_1)) \\
&= \nabla_{d\sigma(e_1)}^N (-k_1 \nabla_{\varepsilon_1}^N d\sigma(e_1) - k_2 \nabla_{\varepsilon_2}^N d\sigma(e_1)) \\
&= \nabla_{e_1}^\sigma (-k_1 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_1 - k_2 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1) \\
&= \nabla_{e_1}^\sigma (-k_1 (-a_1 \varepsilon_2) - k_2 (-a_2 \varepsilon_2)) \\
&= \nabla_{e_1}^\sigma (k_1 a_1 \varepsilon_2 + k_2 a_2 \varepsilon_2) \\
&= e_1(k_1 a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2 + e_1(k_2 a_2) \varepsilon_2 + k_2 a_2 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2 \\
&= e_1(k_1 a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1 (a_1 \varepsilon_1) + e_1(k_2 a_2) \varepsilon_2 + k_2 a_2 (a_1 \varepsilon_1) \\
&= e_1(k_1 a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1 a_2 \varepsilon_1 + e_1(k_2 a_2) \varepsilon_2 + k_2 a_1 a_2 \varepsilon_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tau(\sigma)}^N \nabla_{d\sigma(e_1)}^N d\sigma(e_1) &= \nabla_{-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2}^N \nabla_{\varepsilon_1}^N \varepsilon_1 \\
&= -k_1 (\nabla_{\varepsilon_1}^\sigma \nabla_{\varepsilon_1}^\sigma \varepsilon_1) - k_2 (\nabla_{\varepsilon_2}^\sigma \nabla_{\varepsilon_1}^\sigma \varepsilon_1) \\
&= -k_1 (\nabla_{\varepsilon_1}^\sigma (-a_1 \varepsilon_2)) - k_2 (\nabla_{\varepsilon_2}^\sigma (-a_1 \varepsilon_2)) \\
&= -k_1 (-e_1(a_1) \varepsilon_2 - a_1(a_1 \varepsilon_1)) \\
&\quad -k_2 (-e_2(a_1) \varepsilon_2 - a_1(a_2 \varepsilon_1)) \\
&= k_1 e_1(a_1) \varepsilon_2 + k_1 a_1^2 \varepsilon_1 + k_2 e_2(a_1) \varepsilon_2 + k_2 a_1 a_2 \varepsilon_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{[d\sigma(e_1), \tau(\sigma)]}^N d\sigma(e_1) &= \nabla_{[d\sigma(e_1), -k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2]}^N d\sigma(e_1) \\
&= \nabla_{-k_1 [d\sigma(e_1), \varepsilon_1]}^N d\sigma(e_1) + \nabla_{-k_2 [d\sigma(e_1), \varepsilon_2]}^N d\sigma(e_1) \\
&= -k_1 \nabla_{[e_1, e_1]}^\sigma \varepsilon_1 - k_2 \nabla_{[e_1, e_2]}^\sigma \varepsilon_1 \\
&= -k_2 \nabla_{a_1 e_1 + a_2 e_2 - 2p e_3}^\sigma \varepsilon_1 \\
&= -k_2 (a_1 (-a_1 \varepsilon_2) + a_2 (-a_2 \varepsilon_2)) \\
&= k_2 a_1^2 \varepsilon_2 + k_2 a_2^2 \varepsilon_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{d\sigma(e_2)}^N \nabla_{\tau(\sigma)}^N d\sigma(e_2) &= \nabla_{d\sigma(e_2)}^N (\nabla_{-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2}^N d\sigma(e_2)) \\
&= \nabla_{d\sigma(e_2)}^N (-k_1 \nabla_{\varepsilon_1}^N d\sigma(e_2) - k_2 \nabla_{\varepsilon_2}^N d\sigma(e_2)) \\
&= \nabla_{e_2}^\sigma (-k_1 \nabla_{\varepsilon_1}^\sigma \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{\varepsilon_2}^\sigma \varepsilon_2) \\
&= \nabla_{e_2}^\sigma (-k_1 (a_1 \varepsilon_1) - k_2 (a_2 \varepsilon_1)) \\
&= \nabla_{e_2}^\sigma (-k_1 a_1 \varepsilon_1 - k_2 a_2 \varepsilon_1) \\
&= -e_2(k_1 a_1) \varepsilon_1 - k_1 a_1 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 \\
&\quad -e_2(k_2 a_2) \varepsilon_1 - k_2 a_2 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 \\
&= -e_2(k_1 a_1) \varepsilon_1 - k_1 a_1 (-a_2 \varepsilon_2) \\
&\quad -e_2(k_2 a_2) \varepsilon_1 - k_2 a_2 (-a_2 \varepsilon_2) \\
&= -e_2(k_1 a_1) \varepsilon_1 + k_1 a_1 a_2 \varepsilon_2 \\
&\quad -e_2(k_2 a_2) \varepsilon_1 + k_2 a_2^2 \varepsilon_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tau(\sigma)}^N \nabla_{d\sigma(e_2)}^N d\sigma(e_2) &= \nabla_{-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2}^N \nabla_{\varepsilon_2}^N \varepsilon_2 \\
&= -k_1 (\nabla_{\varepsilon_1}^\sigma \nabla_{\varepsilon_2}^\sigma \varepsilon_2) - k_2 (\nabla_{\varepsilon_2}^\sigma \nabla_{\varepsilon_2}^\sigma \varepsilon_2) \\
&= -k_1 (\nabla_{\varepsilon_1}^\sigma (a_2 \varepsilon_1)) - k_2 (\nabla_{\varepsilon_2}^\sigma (a_2 \varepsilon_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -k_1(e_1(a_2)\varepsilon_1 + a_2(-a_1\varepsilon_2)) \\
&\quad -k_2(e_2(a_2)\varepsilon_1 + a_2(-a_2\varepsilon_2)) \\
&= -k_1e_1(a_2)\varepsilon_1 + k_1a_1a_2\varepsilon_2 \\
&\quad -k_2e_2(a_2)\varepsilon_1 + k_2a_2^2\varepsilon_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{[d\sigma(e_2), \tau(\sigma)]}^N d\sigma(e_2) &= \nabla_{[d\sigma(e_2), -k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2]}^N d\sigma(e_2) \\
&= \nabla_{-k_1[d\sigma(e_2), \varepsilon_1]}^N d\sigma(e_2) + \nabla_{-k_2[d\sigma(e_2), \varepsilon_2]}^N d\sigma(e_2) \\
&= -k_1\nabla_{[e_2, \varepsilon_1]}^\sigma \varepsilon_2 - k_2\nabla_{[e_2, \varepsilon_2]}^\sigma \varepsilon_2 \\
&= -k_1\nabla_{(-a_1e_1 - a_2e_2 + 2pe_3)}^\sigma \varepsilon_2 \\
&= k_1a_1(a_1\varepsilon_1) + k_1a_2(a_2\varepsilon_1) \\
&= k_1a_1^2\varepsilon_1 + k_1a_2^2\varepsilon_1
\end{aligned}$$

olduğundan son eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), \tau(\sigma)d\sigma(e_i)) \\
&= e_1(k_1a_1)\varepsilon_2 + k_1a_1a_2\varepsilon_1 + e_1(k_2a_2)\varepsilon_2 + k_2a_1a_2\varepsilon_1 \\
&\quad -k_1e_1(a_1)\varepsilon_2 - k_1a_1^2\varepsilon_1 - k_2e_2(a_1)\varepsilon_2 \\
&\quad -k_2a_1a_2\varepsilon_1 - k_2a_1^2\varepsilon_2 - k_2a_2^2\varepsilon_2 \\
&\quad -e_2(k_1a_1)\varepsilon_1 + k_1a_1a_2\varepsilon_2 - e_2(k_2a_2)\varepsilon_1 \\
&\quad +k_2k_2^2\varepsilon_2 + k_1e_1(a_2)\varepsilon_1 - k_1a_2\varepsilon_2 \\
&\quad +k_2e_2(a_2)\varepsilon_1 - k_2a_2^2\varepsilon_2 - k_1a_1^2\varepsilon_1 - k_1a_2^2\varepsilon_1 \\
&= -k_1(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2)\varepsilon_1 \\
&\quad -k_2(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2)\varepsilon_2
\end{aligned} \tag{7.6}$$

bulunur. O halde σ Riemann submersiyonunun bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}
\tau_2(\sigma) &= \sum_{i=1}^3 \{\nabla_{e_i}^\sigma \nabla_{e_i}^\sigma \tau(\sigma) - \nabla_{\nabla_{e_i} M_{e_i}}^\sigma \tau(\sigma) - R^N(d\sigma(e_i), \tau(\sigma))d\sigma(e_i)\} \\
&= \left(\begin{aligned} &-\Delta^M k_1 - a_1e_1(k_2) - e_1(k_2a_1) - a_2e_2(k_2) - e_2(k_2a_2) \\ &+ k_1k_2a_1 + k_2^2a_2 + k_1(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(\begin{aligned} &-\Delta^M k_2 - a_1e_1(k_1) + e_1(k_1a_1) + a_2e_2(k_1) + e_2(k_2a_2) \\ &- k_1k_2a_2 - k_1^2a_1 + k_2(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right) \varepsilon_2
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada K^N , $(N^2, \check{g})$ nin $K^N = R_{1212}^N \circ \sigma = -(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2)$ ile verilen Gauss eğriliğidir [26].

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Teorem 7.1. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda σ nın f -harmonik olması içi gerek ve yeter şart

$$k_1 = e_1(\ln f), \quad k_2 = e_2(\ln f) \quad (7.7)$$

olmasıdır.

İspat. (7.2) kullanılırsa σ nın f -tensiyon alanı

$$\tau_f(\sigma) = f(-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) + e_1(f) \varepsilon_1 + e_2(f) \varepsilon_2 \quad (7.8)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

7.1. 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan f -biharmonik Riemann submersiyonları

Teorem 7.1.1. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda σ nın f -biharmonik olması içi gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 0 = f & \left(\begin{array}{c} -\Delta^M k_1 - a_1 e_1(k_2) - e_1(k_2 a_1) - a_2 e_2(k_2) \\ -e_2(k_2 a_2) + k_1 k_2 a_1 + k_2^2 a_2 + k_1(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{array} \right) \\ & - k_1 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1) e_1(f) + (a_1 - k_2) e_2(f) \right) \\ & + 2 \left(\begin{array}{c} -e_1(f) e_1(k_1) - e_1(f) k_2 a_1 \\ -e_2(f) e_2(k_1) - e_2(f) k_2 a_2 - e_3(f) e_3(k_1) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (7.9)$$

ve

$$0 = f \left(\begin{array}{c} -\Delta^M k_2 - a_1 e_1(k_1) + e_1(k_1 a_1) + a_2 e_2(k_1) \\ +e_2(k_1 a_2) - k_1 k_2 a_2 - k_1^2 a_1 + k_2(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -k_2 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + (a_1 - k_2)e_2(f) \right) \\
& + 2 \left(\begin{array}{c} e_1(f)k_1a_1 - e_1(f)e_1(k_2) \\ + e_2(f)k_1a_2 - e_2(f)e_2(k_2) - e_3(f)e_3(k_2) \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

olmasıdır.

İspat. $f \in C^\infty(M)$ için

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^3 \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}^M e_i)(f)\} \\
&= e_1(e_1(f)) - (\nabla_{e_1}^M e_1)(f) + e_2(e_2(f)) - (\nabla_{e_2}^M e_2)(f) \\
&\quad + e_3(e_3(f)) - (\nabla_{e_3}^M e_3)(f) \\
&= e_1(e_1(f)) - (-a_1 e_2)(f) + e_2(e_2(f)) - (a_2 e_1)(f) \\
&\quad + e_3(e_3(f)) - (k_1 e_1 + k_2 e_2)(f) \\
&= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) + e_3(e_3(f)) \\
&\quad + a_1 e_2(f) - a_2 e_1(f) - k_1 e_1(f) - k_2 e_2(f) \\
&= \sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + (a_1 - k_2)e_2(f)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{grad f}^\sigma \tau(\sigma) &= \nabla_{\sum_{i=1}^3 e_i(f)e_i}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&= e_1(f) \nabla_{e_1}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) + e_2(f) \nabla_{e_2}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&\quad + e_3(f) \nabla_{e_3}^\sigma (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
&= e_1(f) (-e_1(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_1 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_1}^\sigma \varepsilon_2) \\
&\quad + e_2(f) (-e_2(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_1 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_2}^\sigma \varepsilon_2) \\
&\quad + e_3(f) (-e_3(k_1) \varepsilon_1 - k_1 \nabla_{e_3}^\sigma \varepsilon_1 - e_3(k_2) \varepsilon_2 - k_2 \nabla_{e_3}^\sigma \varepsilon_2) \\
&= e_1(f) (-e_1(k_1) \varepsilon_1 + k_1 a_2 \varepsilon_2 - e_1(k_2) \varepsilon_2 - k_2 a_1 \varepsilon_1) \\
&\quad + e_2(f) (-e_2(k_1) \varepsilon_1 + k_1 a_2 \varepsilon_2 - e_2(k_2) \varepsilon_2 - k_2 a_2 \varepsilon_1) \\
&\quad + e_3(f) (-e_3(k_1) \varepsilon_1 - e_3(k_2) \varepsilon_2) \\
&= \left(\begin{array}{c} -e_1(f)e_1(k_1) - e_1(f)k_2a_1 - e_2(f)e_2(k_1) \\ -e_2(f)k_2a_2 - e_3(f)e_3(k_1) \end{array} \right) \varepsilon_1 \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} e_1(f)k_1a_1 - e_1(f)e_1(k_2) + e_2(f)k_1a_2 \\ -e_2(f)e_2(k_2) - e_3(f)e_3(k_2) \end{array} \right) \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{7.12}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda σ nın f -bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}
 \tau_{2,f}(\sigma) &= \tau_2(\sigma) + (\Delta f)\tau(\sigma) + 2\nabla_{grad f}^\sigma \tau(\sigma) \\
 &= f \left\{ \begin{aligned} &(-\Delta^M k_1 - a_1 e_1(k_2) - e_1(k_2 a_1) - a_2 e_2(k_2) - e_2(k_2 a_2)) \\ &\quad + k_1 k_2 a_1 + k_2^2 a_2 + k_1(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right\} \varepsilon_1 \\
 &\quad + \left\{ \begin{aligned} &(-\Delta^M k_2 - a_1 e_1(k_1) + e_1(k_1 a_1) + a_2 e_2(k_1) + e_2(k_1 a_2)) \\ &\quad - k_1 k_2 a_2 - k_1^2 a_1 + k_2(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right\} \varepsilon_2 \Big\} \\
 &\quad + \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + (a_1 - k_2)e_2(f) \right) (-k_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2) \\
 &\quad + 2 \left(\begin{aligned} &-e_1(f)e_1(k_1) - e_1(f)k_2 a_1 - e_2(f)e_2(k_1) \\ &-e_2(f)k_2 a_2 - e_3(f)e_3(k_1) \end{aligned} \right) \varepsilon_1 \\
 &\quad + 2 \left(\begin{aligned} &e_1(f)k_1 a_1 - e_1(f)e_1(k_2) + e_2(f)k_1 a_2 \\ &-e_2(f)e_2(k_2) - e_3(f)e_3(k_2) \end{aligned} \right) \varepsilon_2 \\
 &= \left(\begin{aligned} &f \left(\begin{aligned} &(-\Delta^M k_1 - a_1 e_1(k_2) - e_1(k_2 a_1) - a_2 e_2(k_2) - e_2(k_2 a_2)) \\ &\quad + k_1 k_2 a_1 + k_2^2 a_2 + k_1(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right) \\ &-k_1 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + (a_1 - k_2)e_2(f) \right) \\ &+ 2 \left(\begin{aligned} &-e_1(f)e_1(k_1) - e_1(f)k_2 a_1 - e_2(f)e_2(k_1) \\ &-e_2(f)k_2 a_2 - e_3(f)e_3(k_1) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \varepsilon_1 \\
 &\quad + \left(\begin{aligned} &f \left(\begin{aligned} &(-\Delta^M k_2 - a_1 e_1(k_1) + e_1(k_1 a_1) + a_2 e_2(k_1) + e_2(k_1 a_2)) \\ &\quad - k_1 k_2 a_2 - k_1^2 a_1 + k_2(-K^N + a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right) \\ &-k_2 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + (a_1 - k_2)e_2(f) \right) \\ &+ 2 \left(\begin{aligned} &e_1(f)k_1 a_1 - e_1(f)e_1(k_2) + e_2(f)k_1 a_2 \\ &-e_2(f)e_2(k_2) - e_3(f)e_3(k_2) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \varepsilon_2
 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

$k_2 = 0$ ise aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 7.1.2. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2 = 0, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda σ nın f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
0 &= f(-\Delta^M k_1 + k_1(-K^N + a_1^2 + a_2^2)) \\
&\quad - k_1 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) + a_1 e_2(f) \right) - 2 \sum_{i=1}^3 e_i(f)e_i(k_1), \\
0 &= f((e_1(a_1) + e_2(a_2) - k_1 a_1) + 2a_2 e_2(k_1)) + 2k_1 \sum_{i=1}^2 e_i(f)a_i
\end{aligned}$$

olmasıdır.

Sonuç 7.1.3. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2 = 0, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Eğer k_1 sabit ise σ nın f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
0 &= f(-K^N + a_1^2 + a_2^2) - \sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) + (a_2 + k_1)e_1(f) + a_1 e_2(f), \\
0 &= f(e_1(a_1) + e_2(a_2) - k_1 a_1) + 2 \sum_{i=1}^2 e_i(f)a_i
\end{aligned}$$

olmasıdır.

Z. P. Wang ve Y. L. Ou [26] tarafından sabit kesit eğrilikli 3-boyutlu uzay formlardan tanımlanan Riemann submersiyonları için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Lemma 7.1.4. $M^3(c)$ sabit c kesit eğrilikli 3-boyutlu bir uzay form ve $\sigma : M^3(c) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $M^3(c)$ üzerinde $\{a_1, a_2, k_1, k_2, p\}$ integrallenebilirlik verisi lifler boyunca sabit olacak şekilde σ ya uyarlanmış bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal çatısı vardır [26].

Lemma 7.1.5. $\sigma : M^3(c) \rightarrow (N^2, \check{g})$ bir Riemann submersiyonu; $\{e_1, e_2, e_3\}$, $M^3(c)$ nin σ ya uyarlanmış bir ortonormal çatısı ve $\{a_1, a_2, k_1, k_2, p\}$ integrallenebilirlik verisi olsun. Bu durumda $M^3(c)$ üzerinde integrallenebilirlik verisi

$$\left\{ a'_1, a'_2, k'_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, k'_2 = 0, \rho' = \rho \right\}$$

olacak şekilde bir $\{e'_1, e'_2, e'_3 = e_3\}$ uyarlanmış çatısı vardır [26].

Lemma 7.1.5 göz önüne alındığında $M^3(c)$ uzay formunun integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2 = 0, p\}$ olacak şekilde σ ya uyarlanmış bir ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatısının var olduğu açıktır. Bu çatıya göre $R_{ijkl}^M = -g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ olmak üzere R_{ijkl}^M bileşenleri aşağıdaki gibidir [26]:

$$\begin{aligned}
 R_{1312}^M &= -(e_1(p) - 2k_1p) = 0 \\
 R_{1313}^M &= -(-e_1(k_1) - p^2 + k_1^2 - k_2a_1) = 0 \\
 R_{1323}^M &= -(-e_1(k_2) + e_3(p) + k_1a_1 + k_1k_2) = 0 \\
 R_{1212}^M &= -(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2 + 3p^2) = c, \\
 R_{1223}^M &= -(e_2(p) - 2k_1k_2) = 0, \\
 R_{2313}^M &= -(-e_2(k_1) - e_3(p) - k_2a_2 + k_1k_2) = 0, \\
 R_{2323}^M &= -(-p^2 - e_2(k_2) + k_1a_2 + k_2^2) = c.
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Lemma 7.1.4 ve integrallenebilirlik verisinin lifler boyunca sabit olduğu gerçeğinden hareketle R_{ijkl}^M bileşenleri

$$\begin{aligned}
 e_1(p) - 2k_1p &= 0 \\
 -(-e_1(k_1) - p^2 + k_1^2) &= c, \\
 k_1a_1 &= 0, \\
 -(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2 + 3p^2) &= c, \\
 e_2(p) &= 0, \\
 e_2(k_1) &= 0, \\
 -(-p^2 + k_1a_2) &= 0,
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

ile verilen eşitliklere indirgenir. Bu durumda (7.14) ün üçüncü eşitliğinden $k_1 = 0$ veya $a_1 = 0$ olduğu görülür [26].

1. Durum: $k_1 = 0$ ve $\sigma: M^3(c) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu olsun. $\tau(\sigma) = -k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2$ tensiyon alanı göz önüne alınırsa σ nın bir harmonik dönüşüm olduğu ve dolayısıyla bir f -biharmonik dönüşüm olacağı açıktır.

2. Durum: $k_1 \neq 0, a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ olsun. Bu durumda (7.1.6) nın dördüncü ve yedinci eşitliklerinden $p = c = 0$ bulunur. σ nın f -biharmonik denkleminde $a_1 = a_2 = k_2 = p = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= f(-\Delta^M k_1) - k_1(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - k_1 e_1(f)) - 2 \sum_{i=1}^2 e_i(f) e_i(k_1) \\ &= f(-\Delta^M k_1) - k_1(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - k_1 e_1(f)) - 2(e_1(f) k_1^2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \Delta^M k_1 &= \sum_{i=1}^3 \{e_i(e_i(k_1)) - \nabla_{e_i}^M e_i(k_1)\} = e_1(e_1(k_1)) - k_1 e_1(k_1) \\ &= e_1(k_1^2) - k_1 k_1^2 = 2k_1 e_1(k_1) - k_1^3 = k_1^3 \end{aligned}$$

ve

$$\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) = \Delta f + \sum_{i=1}^3 (\nabla_{e_i} e_i)(f) = \Delta f + k_1 e_1(f)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$f(-k_1^3) - k_1 \Delta f - 2e_1(f) k_1^2 = 0$$

yani

$$f k_1^2 + \Delta f - 2k_1 e_1(f) = 0$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 7.1.6. $\sigma: M^3(c) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu; $\{e_1, e_2, e_3\}$, M de σ ya uyarlanmış ortonormal bir çatı ve $\{a_1 = 0, a_2 = 0, k_1 \neq 0, k_2 = 0, p = 0\}$ integrallenebilirlik verisi olsun. Bu durumda σ nın f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\Delta f}{f} = k_1(2e_1(\ln f) - k_1)$$

olmasıdır.

3. Durum: $k_1 \neq 0, a_1 = 0$ ve $a_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda σ nın f -biharmonik denklemi

$$\begin{aligned} 0 &= f(-\Delta^M k_1 + k_1(-K^N + a_2^2)) - k_1 \left(\sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) - (a_2 + k_1)e_1(f) \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^2 e_i(f)e_i(k_1) \\ 0 &= f(k_1 e_2(a_2) + 2a_2 e_2(k_1)) + 2k_1 e_2(f)a_2 \end{aligned}$$

şekline indirgenir. Burada

$$\begin{aligned} K^N &= -[e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2] = e_1(a_2) - a_2^2, \\ e_2(k_1) &= 0, e_1(a_2) = c + a_2^2 + 3p^2, \\ \sum_{i=1}^3 e_i(e_i(f)) &= \Delta f + \sum_{i=1}^3 (\nabla_{e_i}^M e_i(f)) = \Delta f + a_2 e_1(f) + k_1 e_1(f) + k_2 e_2(f), \\ \Delta^M k_1 &= \sum_{i=1}^3 \{e_i(e_i(k_1)) - (\nabla_{e_i}^M e_i)(k_1)\} \\ &= e_1(e_1(k_1)) - a_2 e_1(k_1) - k_1 e_1(k_1) - k_2 e_2(k_1) \\ &= e_1(k_1^2 - p^2 + c) - a_2 e_1(k_1) - k_1 e_1(k_1) \\ &= 2k_1 e_1(k_1) - 2p e_1(p) - a_2 e_1(k_1) - k_1 e_1(k_1) \\ &= k_1 e_1(k_1) - 2p e_1(p) - a_2 e_1(k_1) \\ &= k_1(k_1^2 - p^2 + c) - 2p(2k_1 p) - a_2(k_1^2 - p^2 + c) \\ &= -5k_1 p^2 + k_1^3 + k_1 c - a_2(k_1^2 - p^2 + c) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa σ nın f -biharmonik denklemi

$$\begin{cases} 0 = f(3p^2 - k_1^2 - 3c) - k_1(\Delta f + k_2 e_2(f)) - 2e_1(f)(k_1^2 - p^2 + c) \\ 0 = f e_2(a_2) + 2e_2(f)a_2 \end{cases}$$

denklem sistemine indirgenir.

Böylece şu sonuca ulaşılır:

Sonuç 7.1.7. $\sigma: M^3(c) \rightarrow (N^2, \mathcal{G})$ bir Riemann submersiyonu; $\{e_1, e_2, e_3\}$, M de σ ya uyarlanmış ortonormal bir çatı ve $\{a_1 = 0, a_2 \neq 0, k_1 \neq 0, k_2 = 0, p\}$ integrallenebilirlik verisi olsun. Bu durumda σ nın f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f(3p^2 - k_1^2 - 3c) - k_1 \left(\Delta f - \frac{1}{2} k_2 f e_2(\ln a_2) \right) - 2e_1(f)(k_1^2 - p^2 + c) = 0$$

olmasıdır.

7.2. 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan bi- f -harmonik Riemann Submersiyonları

Bu alt bölümde $\sigma: (M^3, g) \rightarrow (N^2, \mathcal{G})$ Riemann submersiyonunun bi- f -harmonik olma şartlarını inceleyeceğiz:

σ nın f -tensiyon alanı tanımını kullanılırsa bi- f -tensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_{f,2}(\sigma) &= fJ^\sigma(\tau_f(\sigma)) - \nabla_{grad_g f}^\sigma \tau_f(\sigma) \\ &= -f \left(iz(\nabla^\sigma \nabla^\sigma \tau_f(\sigma) - \nabla_{\nabla_M}^\sigma \tau_f(\sigma) - R^N(d\sigma, \tau_f(\sigma))d\sigma) \right) - \nabla_{grad_g f}^\sigma \tau_f(\sigma) \\ &= -f \left(iz \left((\nabla^\sigma \nabla^\sigma - \nabla_{\nabla_M}^\sigma)(f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f)) \right) \right) \\ &\quad + f \left(iz R^N(d\sigma, f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f))d\sigma \right) \\ &\quad - \nabla_{grad_g f}^\sigma (f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f)) \\ &= -f \sum_{i=1}^3 \{ (\nabla_{e_i}^\sigma \nabla_{e_i}^\sigma - \nabla_{\nabla_{e_i}^M}^\sigma)(f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f)) \} \\ &\quad + f \sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f))d\sigma(e_i) \\ &\quad - \nabla_{grad_g f}^\sigma (f\tau(\sigma) + d\sigma(grad f)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\sigma) = & -f(\Delta f)\tau(\sigma) - f^2 \sum_{i=1}^3 (\nabla_{e_i}^\sigma \nabla_{e_i}^\sigma \tau(\sigma) - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\sigma \tau(\sigma)) \\
& -f \sum_{i=1}^3 (\nabla_{e_i}^\sigma \nabla_{e_i}^\sigma d\sigma(\text{grad}f) - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\sigma d\sigma(\text{grad}f)) \\
& + f^2 \sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), \tau(\sigma))d\sigma(e_i) \\
& + f \sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), d\sigma(\text{grad}f))d\sigma(e_i) \\
& -(\text{grad}_g f)(f)\tau(\sigma) - f\nabla_{\text{grad}_g f}^\sigma \tau(\sigma) - \nabla_{\text{grad}_g f}^\sigma d\sigma(\text{grad}f)
\end{aligned}$$

elde edilir. (7.4)-(7.6) ve (7.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\sigma) = & f(\Delta f)(-k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2) \\
& -f^2 \begin{pmatrix} -e_1e_1(k_1) + k_1a_1^2 - e_2(k_2)a_1 - e_1(k_2)a_1 \\ -e_2e_2(k_1) + k_1a_2^2 - e_2(k_2)a_2 - e_2(k_2)a_2 - e_3e_3(k_1) \end{pmatrix} \varepsilon_1 \\
& -f^2 \begin{pmatrix} e_1(k_1)a_1 + e_1(k_1)a_1 - e_1e_1(k_2) + k_2a_1^2 \\ e_2(k_1)a_2 + e_2(k_1)a_2 - e_2e_2(k_2) + k_2a_2^2 - e_3e_3(k_2) \end{pmatrix} \varepsilon_2 \\
& -f \sum_{i=1}^3 (\nabla_{e_i}^\sigma \nabla_{e_i}^\sigma d\sigma(\text{grad}_g f) - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\sigma d\sigma(\text{grad}_g f)) \\
& + f^2(-k_1(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2))\varepsilon_1 \\
& + f^2(-k_2(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2))\varepsilon_2 \\
& + f \sum_{i=1}^3 R^N(d\sigma(e_i), d\sigma(\text{grad}_g f))d\sigma(e_i) \\
& -(\text{grad}_g f)(f)\tau(\sigma) - f\nabla_{\text{grad}_g f}^\sigma \tau(\sigma) - \nabla_{\text{grad}_g f}^\sigma d\sigma(\text{grad}_g f)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$(\text{grad}_g f)(f) = |\text{grad}_g f|^2$$

$$\nabla_{\text{grad}_g f}^\sigma \tau(\sigma) = \begin{pmatrix} -e_1(f)e_1(k_1) - e_1(f)k_2a_1 - e_2(f)e_2(k_1) \\ -e_2(f)k_2a_2 - e_3(f)e_3(k_1) \end{pmatrix} \varepsilon_1$$

$$+ \begin{pmatrix} e_1(f)k_1a_1 - e_1(f)e_1(k_2) + e_2(f)k_1a_2 \\ -e_2(f)e_2(k_2) - e_3(f)e_3(k_2) \end{pmatrix} \varepsilon_2$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{grad_g f}^\sigma d\sigma(grad_g f) &= \nabla_{grad_g f}^\sigma (e_1(f)\varepsilon_1 + e_2(f)\varepsilon_2) \\ &= e_1(f)\nabla_{e_1}^\sigma (e_1(f)\varepsilon_1 + e_2(f)\varepsilon_2) + e_2(f)\nabla_{e_2}^\sigma (e_1(f)\varepsilon_1 + e_2(f)\varepsilon_2) \\ &\quad + e_3(f)\nabla_{e_3}^\sigma (e_1(f)\varepsilon_1 + e_2(f)\varepsilon_2) \\ &= e_1(f)e_1(e_1(f))\varepsilon_1 - (e_1(f))^2a_1\varepsilon_2 + e_1(f)e_1(e_2(f))\varepsilon_2 + e_1(f)e_2(f)a_1\varepsilon_1 \\ &\quad + e_2(f)e_2(e_1(f))\varepsilon_1 - e_1(f)e_2(f)a_2\varepsilon_2 + e_2(f)e_2(e_2(f))\varepsilon_2 + (e_2(f))^2a_2\varepsilon_1 \\ &\quad + e_3(f)e_3(e_1(f))\varepsilon_1 + e_3(f)e_3(e_2(f))\varepsilon_2 \end{aligned}$$

dir.

$grad_g f$, M de bir dikey vektör alanı ise aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 7.2.1. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1, k_2 = 0, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda $grad_g f, M$ de bir dikey vektör alanı olmak üzere σ nın bi- f -harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 0 &= -f(\Delta f)k_1 - f^2(-e_1(e_1(k_1)) + k_1a_1^2 - e_2(e_2(k_1)) + k_1a_2^2 - e_3(e_3(k_1))) \\ &\quad + f^2(-k_1(e_2(a_1) - e_1(a_2) + a_1^2 + a_2^2)) + k_1|grad_g f|^2 + f e_3(f)e_3(k_1) \end{aligned}$$

ve

$$0 = -f^2(e_1(k_1)a_1 + e_1(k_1a_1) + e_2(k_1)a_2 + e_2(k_1a_2))$$

olmasıdır.

Sonuç 7.2.2. $\sigma : (M^3, g) \rightarrow (N^2, \tilde{g})$ bir Riemann submersiyonu ve $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ de M nin integrallenebilirlik verisi $\{a_1, a_2, k_1 = \text{sabit} \neq 0, k_2 = 0, p\}$ olan bir ortonormal çatısı olsun. Bu durumda $grad_g f, M$ de bir dikey vektör alanı olmak üzere σ nın bi- f -harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$|grad_g \ln f|^2 = \frac{\Delta f}{f} + K^N + 3(a_1^2 + a_2^2)$$

ve

$$0 = e_1(a_1) + e_2(a_2)$$

olmasıdır.



8.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan Riemann submersiyonların biharmonikliği kavramından hareketle aynı tipteki submersiyonların f -harmonik, f -biharmonik ve bi- f -harmonik olma şartları ayrı ayrı incelenerek özgün sonuçlara ulaşılmıştır. Böylece 3-boyutlu Riemann manifoldundan tanımlanan genelleştirilmiş biharmonik Riemann submersiyonları tanıtılmış ve geometrik özellikleri ortaya konmuştur.

Keyfi boyutlu Riemann manifoldlarından tanımlanan Riemann submersiyonlarının f -harmonikliği, f -biharmonikliği ve bi- f -harmonikliğinin incelenmesi açık bir problemdir. Bu tez, söz konusu açık problemin çözümünde kullanılacak önemli bir kaynak niteliğindedir.

KAYNAKLAR

- [1] B. O'Neill, "The Fundamental Equations of a Submersions", *Michigan Mathematical Journal*, vol. 13, pp. 459-469, 1966.
- [2] A. Gray, "Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions", *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 16, pp. 715-737, 1967.
- [3] M. Falcitelli, S. Ianus, and A.M. Pastore, *Riemannian Submersions and Related Topics*, Singapore: World Scientific Publishing, 2004.
- [4] B. Şahin, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, İstanbul: Nobel Akademik Yayın, 2012.
- [5] C. Altafini, "Redundant Robotic Chains on Riemannian Submersions", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 20, pp. 335-340, 2004.
- [6] J. Eells and J.H. Sampson, "Harmonic mappings of Riemannian manifolds", *American Journal of Mathematics*, vol. 86, pp. 109-160, 1964.
- [7] J. Eells and L. Lemaire, "Selected Topics in Harmonic Maps", *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 50, 1983.
- [8] G.Y. Jiang, "2-harmonic maps and their first and second variational formulas", *Chinese Annals of Mathematics Series A*, vol.7, pp. 130-144, 1986.
- [9] C. Oniciuc, "Biharmonic maps between Riemannian manifolds", *Analele Stiintifice ale University Al. I. Cuza Iasi Mathematics (N.S.)*, vol. 48, pp. 613-622, 2002.
- [10] A. Lichnerowicz, "Applications harmoniques et varietes Kahleriennes", in *Symposia Mathematica*, vol. III, London: Academic Press, pp. 341-402, 1970.
- [11] Y.X. Li and Y.D. Wang, "Bubbling location for f -harmonic maps and inhomogeneous Landau-Lifshitz equations", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 81, pp. 433-448, 2006.
- [12] S. Ouakkas, R. Nasri and M. Djaa, "On the f -harmonic and f -biharmonic maps", *The JP Journal of Geometry and Topology*, vol. 10, no. 1, pp. 11-27, 2010.
- [13] W. J. Lu, "On f -bi-harmonic maps and bi- f -harmonic maps between Riemannian manifolds", *Science China Mathematics*, vol. 58, no. 7, pp. 1483-1498, 2015.
- [14] K. S. Park, "H-slant submersions", *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 49, pp. 329-338, 2012.

- [15] B. Şahin, “Slant submersions from almost Hermitian manifolds”, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, vol. 54, no. 102, pp. 93-105, 2011.
- [16] B. Watson, “Almost Hermitian Submersions”, *Journal of Differential Geometry*, vol. 11, pp.147-165, 1976.
- [17] Y. Gündüzalp and B. Şahin, “Paracontact semi-Riemannian submersions”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 37, no.1, pp. 863-873, 2013.
- [18] Y. Gündüzalp and B. Şahin, “Para-contact para-complex semi-Riemannian submersions”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol.37, no.1, 139-152, 2014.
- [19] K.S. Park, “H-semi-invariant submersions”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 16, no.5, pp. 1847-1863, 2012.
- [20] B. Şahin, “Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds”, *Central European Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 3, pp. 437-447, 2010.
- [21] Jiang, G. Y., “2-harmonic maps and their first and second variational formulas”, *Chinese Annals of Mathematics Series A*, vol.7, pp. 389-402, 1986.
- [22] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, “Biharmonic submanifolds in spheres”, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 130, pp. 109-123, 2002.
- [23] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, “Biharmonic submanifolds of S^3 ”, *International Journal of Mathematics*, vol. 12, pp. 867-876, 2001.
- [24] P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas, “Conformal and semi-conformal biharmonic maps”, *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 34, no. 4, pp. 403-414, 2008.
- [25] E. Loubeau and Y.L.Ou, “Biharmonic maps and morphisms from conformal mappings”, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 62, no. 1, pp. 55-73, 2010.
- [26] Z.P. Wang and Y.L. Ou, “Biharmonic Riemannian submersions from 3-manifolds”, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 269, no. 3, pp. 917-925, 2011.
- [27] E. Ghandour and Y.L. Ou, “Generalized harmonic morphisms and horizontally weakly conformal biharmonic maps”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 464, no. 1, pp. 924-938, 2018.

- [28] M.A. Akyol and Y.L. Ou, “Biharmonic Riemannian submersions”, *Annali di Matematica Pure ed Applicate*, vol. 198, pp. 559-570, 2019.
- [29] N. Course, “ f -Harmonic maps”, Ph.D. Thesis, University of Warwick, 2004.
- [30] Y.L. Ou, “On f -biharmonic maps and f -biharmonic submanifolds”, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 271, pp. 461-477, 2014.
- [31] C.L. Zhao and W.L. Lu, “Bi- f -harmonic map equations on singly warped product manifolds”, *Applied Mathematics- A Journal of Chinese Universities*, vol. 30, no. 1, pp. 111-126, 2015.
- [32] S.Y. Perktaş, A.M. Blaga, F.E. Erdoğan and B.E. Acet, “Bi- f -harmonic Curves and Hypersurfaces”, *Filomat*, vol. 33, no. 16, pp. 5167-5180, 2019.
- [33] Z. Kaddour, “Some Results of f -Harmonic and Bi- f -Harmonic Maps with Potential”, *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 14, no. 1, pp. 157-166, 2021.
- [34] Y. Luo and Y.L. Ou, “Some Remarks on Bi- f -Harmonic Maps and f - Biharmonic Maps”, *Results in Mathematics*, vol. 74, Article Number: 97, 2019.
- [35] F. Karaca, “Biharmonik ve f -biharmonik Altmanifoldlar”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, 2016.
- [36] H.H. Hacısalihoğlu, *Diferansiyel Geometri*, Malatya: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, no.2,1982.
- [37] M.P. Do Corno, *Riemannian Geometry*, Boston: Birkhauser,1992.
- [38] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Company, 1984.
- [39] S. Gundmundson, *An Introduction to Riemannian Geometry*, Lecture Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, 2006.
- [40] P. Baird and J.C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, Oxford: Clarendon Press, 2003.
- [41] S. Montaldo and C. Oniciuc, “A short survey on Biharmonic maps Between Riemannian manifolds”, *Revista De La Union Matematica Argentina*, vol. 47, no. 2, pp. 1-22, 2006.