



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRÜ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN
CHEBYSHEV VE GRÜSS TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Çağrı AŞAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI-2024

Her hakkı saklıdır.

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Çağrı AŞAK

Genelleştirilmiş Bir Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen
Chebyshev ve Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikler

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI – 2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Genelleştirilmiş Bir Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Chebyshev ve Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikler

Bu tezde, literatürde bulunan bazı kesirli integral operatörlerini genelleştiren, genelleştirilmiş kesirli integral operatörü ele alınmıştır. Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, eşitsizlik, kesirli analiz, kesirli türev ve integral, kesirli integral operatörleri gibi konuların tarihsel gelişimi ve önemi vurgulanmıştır. İkinci bölümde, bu konularla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürde var olan bazı kesirli integral operatörleri ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörleriyle ilgili tanımlar sunulmuştur. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş kesirli integral operatörü ile elde edilen bazı yeni eşitsizlikler ortaya konulmuştur. Beşinci bölümde, sonuç ve öneriler paylaşılmıştır.

2024, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş kesirli integral operatör, integral eşitsizlikler, Grüss eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

Some New Chebyshev and Grüss-Type Fractional Inequalities Obtained By A Generalized Fractional Integral Operator

In this thesis, a generalized fractional integral operator, which generalizes some fractional integral operators existing in the literature, is addressed. The thesis consists of five main sections. In the first section, the historical development and importance of topics such as inequalities, fractional analysis, fractional derivatives and integrals, and fractional integral operators are emphasized. The second section provides fundamental definitions and theorems related to these topics. The third section presents definitions of some existing fractional integral operators and generalized fractional integral operators found in the literature. In the fourth section, some new inequalities obtained with the generalized fractional integral operator are presented. Finally, the fifth section includes conclusions and recommendations.

2024, 52 pages

Key Words: Generalized fractional integral operator, integral inequalities, Grüss inequality, Chebyshev inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince her konuda büyük bir özveri ve samimiyetle yardımcı olan, bu noktaya gelmemde büyük pay sahibi olan, sevgi, saygı ve minnetle hatırlayacağım çok değerli danışman hocam, Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Diğer yandan, öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı annem Nazire AŞAK, babam Ahmet AŞAK ve abim Çağdaş AŞAK'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca her türlü fedakarlığı ve desteği gösteren sevgili eşim Kader AŞAK'a yürekten teşekkür ederim.

Haziran 2024

Çağrı AŞAK

	T.C. AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ	
---	---	---

Genelleştirilmiş Bir Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Chebyshev ve Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikler

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Çağrı AŞAK tarafından hazırlanan bu çalışma, 11/06/2024 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan :	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	İmza :
Üye :	Prof. Dr. Havva Kavurmacı Önalın	İmza :
Üye :	Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ	İmza :
Üye :		İmza :
Üye :		İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



13/06/2024

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "Genelleştirilmiş Bir Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Chebyshev ve Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikler " adlı yüksek lisans tezinin bilimsel ve etik kurallara riayet edilerek tarafımdan hazırlandığını taahhüt eder, tezimin basılı ve elektronik nüshalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivlerinde saklanmasına ve tamamının erişime açılmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Çağrı AŞAK



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Çağrı AŞAK	
Numarası	226052250	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı		
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ	
Tez Başlığı	Genelleştirilmiş Bir Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Chebyshev ve Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikler	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%8	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%28	% 30
Materyal ve Yöntem	%12	% 30
Araştırma Bulguları	%19	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%0	% 20
TEZ (GENEL)	%25	% 25

13/06/2024

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Çağrı AŞAK

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

1) Benzerlik raporunun alınması sırasında “başlıklar, içindekiler, teşekkür, ön söz, dizin, alıntılar, kaynaklar, atıflar, ve 6 kelimedenden küçük eşlemeler” kapsamı dışı bırakılabilir. “İnternet, Yayınlar ve Öğrenci Ödevleri veri tabanlarından” hiç birisi kesinlikle tarama dışı bırakılmamalıdır.

2) Çalışmanın niteliğine göre ekteki formlardan yalnızca birisi doldurularak Öğrenci Danışmanı ve Öğrencinin kendisi tarafından imzalanacaktır.

3) Tez çalışmasında tabloda belirtilenden daha fazla sayıda bölüm/başlık olması halinde satırlar çoğaltılabilir.

4) Çalışmadaki benzerlik oranlarının tabloda belirtilen en yüksek değerleri aşması halinde bu çalışma Enstitü tarafından değerlendirmeye alınmaz ve savunma süreci başlatılmaz.

5) Bu beyannameye ek olarak Turnitin Benzerlik Raporu gönderilmelidir.

6) Bu beyanname, tez jüri öneri formu ve savunma öncesi kontrol formu ile birlikte Ana Bilim Dalı Başkanlığına teslim edilecek ve akabinde EBYS üzerinden Müdürlüğümüze gönderilecektir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Önemli İntegral Eşitsizlikler	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
4.1. Chebyshev Tipli Bulgular	20
4.2. Grüss Tipli Bulgular	25
5. SONUÇ	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\Gamma(z)$	: Gama fonksiyonu
$\beta(x, y)$	: Beta fonksiyonu
$L^1[I]$	: I aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$I_{\psi+}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
$I_{\eta-}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_H J_{\psi+}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integrali
${}_H J_{\eta-}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integrali
${}^{\rho} I_{\psi+}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integrali
${}^{\rho} I_{\eta-}^{\alpha} \zeta(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integrali
$({}^{CF}_{\psi} I^{\alpha} \zeta)(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali
$({}^{CF}_{\eta} I^{\alpha} \zeta)(\varkappa)$	: ζ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali
${}^k_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha} w(x)$	: w fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Genelleştirilmiş kesirli integrali
${}^k_{b-} I_{h\sigma}^{\alpha} w(x)$	: w fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Genelleştirilmiş kesirli integrali

1. GİRİŞ

Matematik, insanların günlük yaşamlarında kullandıkları hesaplamaların, ölçümlerin ve analizlerin yanı sıra bilim, teknoloji ve diğer birçok alanda da büyük öneme sahiptir. Eşitsizlik teorisi, matematiksel işlemlerde eşitsizliklerin nasıl ifade edileceğini, çözüleceğini ve analiz edileceğini inceleyen bir matematik dalıdır. Bu teori, Newton ve Euler'den günümüze kadar ekonomi, mühendislik, işletme, sosyal bilimler ve özellikle matematiksel modelleme ve ortalamalar teorisi gibi alanlarda kullanılan son derece etkili ve güçlü bir bilim dalı haline gelmiştir.

Eşitsizlik teorisi, matematiğin temel unsurlarından biridir ve matematiksel düşüncüyü geliştirme ve uygulama açısından büyük öneme sahiptir. Matematiksel eşitsizliklerin temelleri, XVIII. ve XIX. yüzyıllarda birçok önemli matematikçi tarafından atılmıştır. Bu matematikçiler arasında P. L. Chebyshev (1821-1894), K. F. Gauss (1775-1885) ve A. L. Cauchy (1785-1857) bulunmaktadır. Ayrıca, A. L. Cauchy ve P. L. Chebyshev'den sonra da matematiksel eşitsizliklerin alanında önemli gelişmeler yaşanmıştır. Fakat eşitsizlik teorisinin modern anlamda matematiğin bir bilim dalı olarak kabul edilmesini sağlayan ilk çalışma 1934 yılında Hardy, Polya ve Littlewood tarafından literatüre kazandırılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy et al., 1952). Eşitsizlik teorisinin temel kaynakları arasında sayılan diğer kaynaklar arasında "Differential Inequalities" (Szarski, 1965), "Analytic Inequalities" (Mitrinovic and Vasic, 1970), "Inequalities Involving Functions and Their Derivatives" (Mitrinovic et al., 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinovic et al., 1993) bulunmaktadır. Bu eserlerin yanı sıra, Silvestru Sever Dragomir, Charles E.M. Pearce, Ravi Agarwal, Gradimir V. Milovanovic, Anthony Sofo, Constantin P. Niculescu, Josip E. Pečarić, George Anastassiou, Themistocles M. Rassias, gibi birçok araştırmacının çalışmaları da önemli katkılar sağlamıştır.

Kesirli analizin gelişiminde önemli bir kırılma noktası olarak kabul edilen 1695 yılındaki yazışmada, L'Hospital Leibniz'e bir diferansiyel denklemde türevin mertebesinin " $\frac{1}{2}$ " olması durumunda ne olabileceğini sormuştur. Leibniz ise bu soruya cevap olarak, gelecekte önemli sonuçlara yol açabilecek olan bu problemin kesirli analiz olarak kabul edilen alanın başlangıcı olabileceğini öngörmüştür (Spanier, 1974). Leibniz'in ardından, 1738'deki çalışmasında (Miller and Ross, 1993), Euler tamsayı olmayan mertebeden türev

üzerinde çalışmıştır. 1822’de, Fourier integral kullanarak türev tanımını yapmış ve bu tanım, keyfi mertebeden türevin ilk tanımı olarak literatüre kazandırılmıştır. Kesirli analiz alanındaki gelişim süreci 1826 yılında Abel tarafından ortaya atılan ve kesirli analiz için ilk uygulama problemi olarak kabul görülen Tautochrone problemiyle ilişkili bir integral eşitsizliğinin çözümünü içeren çalışma ile devam etmiştir (Machado et al., 2011). Kesirli analiz alanının tarihsel gelişimi, Liouville’un 1832’de üstel fonksiyonun türevi için bir formül geliştirmesi ve ayrıca günümüzde mertebesi tamsayı olmayan integraller için Liouville versiyonu olarak isimlendirilen integral formunu ortaya koymasıyla devam etmiştir.

Kesirli analizin gelişimi 1900 yılından itibaren hız kazanmış ve uygulamalı bilimlerdeki problemleri formülize etmek amacıyla çeşitli tanımlar sunulmaya başlanmıştır. Haziran 1974’te, B. Ross tarafından New Haven Üniversitesi’nde organize edilen "First Conference on Fractional Calculus and its Applications" adlı konferansta, matematikçilerin katılımlarıyla önemli sonuçlar elde etmiş ve çeşitli uygulamalar ortaya çıkarılmıştır. Kesirli analiz alanı, son yıllarda birçok matematikçinin dikkatini çekmekle birlikte yeni kesirli türev ve integral operatörlerinin ortaya konması ve mevcut operatörlerin genellemelerinin elde edilmesi yoluyla ilerlemektedir.

Kesirli analizin, matematiksel analizden uygulamalı matematiğe, fizikten istatistiğe, sinyal işlemeden kontrol teorisine, kaos teorisinden modellemeye ve matematiksel biyolojiye kadar çeşitli disiplinlerde oldukça etkili uygulamaları bulunmaktadır. Riemann-Liouville, Hadamard ve Katugampola gibi çeşitli kesirli integral ve türev operatörlerinin tanımlanması, kesirli analizin güçlenmesine katkıda bulunmuştur. Farklı kesirli integral kavramları, kesirli analiz içinde öne çıkan bir rol oynamıştır. Bu kavramlar literatürde Riemann-Liouville integrallerine dair var olan bulgu ve sonuçların çeşitli genelleştirmelerini, yeni versiyonlarını ve genişlemelerini mümkün kılmıştır. Kesirli analizin gelişimine hız kazandırdığı alanlardan biri olan eşitsizlik teorisi, bulguları ve pratik uygulamalarıyla bilimsel literatüre önemli bir katkı sunmaktadır.

Son yıllarda, eşitsizlik teorisinde yeni sonuçlar elde etmek için sıkça kullanılan yöntemlerden biri, literatürde iyi bilinen Chebyshev, Grüss, Hölder, Minkowski, Hadamard, Cauchy-Schwarz, Stolz, Hilbert, Gronwall, Young, Opial, Jensen, Simpson, Ostrowski gibi temel eşitsizliklerin yanı sıra kesirli integral operatörlerinden yararlanmaktır. Bu yaklaşım, klasik integral eşitsizliklerinin yeni genelleştirmelerini, genişlemelerini ve farklı varyasyonlarını elde etmek için kullanılır. Bu nedenle, birçok klasik integral eşitsizliğinin kesirli integral operatörleri aracılığıyla yeni versiyonları, birçok araştırmacı tarafından

literatüre kazandırılmıştır.

Bu tezdeki amacımız genelleştirilmiş bir kesirli integral operatör yardımıyla Chebyshev ve Grüss tipli bazı yeni integral eşitsizlikleri literatüre katmaktır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması kapsamında gerekli olan tanım, teorem ve önemli bazı temel özelliklere yer verilecektir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Eğer $\varkappa, \gamma \in A$ olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = t\varkappa + (1-t)\gamma, \ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir.

Geometrik olarak B kümesi uç noktaları $\varkappa$ ve γ olan bir doğru parçasıdır. Öyleki, konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içinde bulunduran kümedir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.2 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varkappa, \gamma \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\delta(t\varkappa + (1-t)\gamma) \leq t\zeta(\varkappa) + (1-t)\zeta(\gamma)$$

şartı sağlanırsa δ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $\varkappa \neq \gamma$ ve $t \in (0, 1)$ için fonksiyon

$$\zeta(t\varkappa + (1-t)\gamma) < t\zeta(\varkappa) + (1-t)\zeta(\gamma)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Niculescu and Persson, 2006).

Tanım 2.3 (Senkronize Fonksiyon): ζ ve ϑ fonksiyonları $[\psi, \eta]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Her $\varkappa, \gamma \in [\psi, \eta]$ için

$$(\zeta(\varkappa) - \zeta(\gamma))(\vartheta(\varkappa) - \vartheta(\gamma)) \geq 0 \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara senkronize fonksiyonlar denir.

Tanım 2.4 (Gama Fonksiyonu): $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon ve $\varkappa > 0$ için

$$\Gamma(\varkappa) = \int_0^{\infty} t^{\varkappa-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

şeklinde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrale Gama fonksiyonu veya ikinci çeşit Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.2) ile ifade edilen fonksiyon için

i) $0 < \varkappa < \infty$ yakınsak

ii) $\varkappa \leq 0$ için ıraksaktır.

$\Rightarrow$ Gama fonksiyonuna ait bazı özellikler

i) $\varkappa > 0$ için $\Gamma(\varkappa + 1) = \varkappa \Gamma(\varkappa)$

ii) $\Gamma(\varkappa) = (\varkappa - 1)!$

iii) $\Gamma(1) = 0! = 1$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.5 (Beta Fonksiyonu): $\varkappa, \gamma \in \mathbb{R}^+$ için

$$\beta(\varkappa, \gamma) = \int_0^1 t^{\varkappa-1} (1-t)^{\gamma-1} dt \quad (2.3)$$

integrali ile tanımlanan $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.3) ile ifade edilen fonksiyonu için

i) $\varkappa > 0$ ve $\gamma > 0$ için yakınsaktır.

ii) $\varkappa \leq 0$ ve $\gamma \leq 0$ için ıraksaktır.

$\Rightarrow$ Beta fonksiyonuna ait bazı özellikler

i) $\beta(\varkappa, \gamma) = \beta(\gamma, \varkappa)$

ii) $\varkappa, \gamma > 0$ için $\beta(\varkappa + 1, \gamma) = \frac{\varkappa}{\varkappa + \gamma} \beta(\varkappa, \gamma)$

iii) $\beta(\varkappa, \gamma)$ fonksiyonu için

$$\beta(\varkappa, \gamma) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\varkappa-1}}{(1+t)^{\varkappa+\gamma}} dt$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Gama ve Beta fonksiyonu arasında

$$\beta(\varkappa, \gamma) = \frac{\Gamma(\varkappa)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\varkappa + \gamma)}, \quad \varkappa, \gamma \in \mathbb{R}^+$$

ilişkisi vardır.

2.2. Önemli İntegral Eşitsizlikler

Teorem 2.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık, $\psi, \eta \in I$, ve $\psi < \eta$ olmak üzere $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\zeta\left(\frac{\psi + \eta}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \leq \frac{\zeta(\psi) + \zeta(\eta)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pearce et al., 1998).

İspat (1.Yöntem) Hermite- Hadamard eşitsizliğinin literatürde varolan iki ispatı aşağıda verilecektir. ζ fonksiyonu $[\psi, \eta]$ aralığında konveks yani (ψ, η) aralığında sürekli ve $[\psi, \eta]$ aralığında sınırlı olduğundan integrallenebilirdir. Konveksliğin geometrik yorumundan eşitsizliğin sağ tarafının ispatı açıktır. $\varkappa = t\psi + (1 - t)\eta$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa &= \int_0^1 \zeta(t\psi + (1 - t)\eta) dt \\ &\leq \zeta(\psi) \int_0^1 t dt + \delta(\eta) \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \frac{\zeta(\psi) + \zeta(\eta)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa = \frac{1}{\eta - \psi} \left(\int_{\psi}^{\frac{\psi + \eta}{2}} \zeta(\varkappa) d\varkappa + \int_{\frac{\psi + \eta}{2}}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right)$$

olarak yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağında $\varkappa = \psi + \frac{t(\eta - \psi)}{2}$ için

$$\int_{\psi}^{\frac{\psi + \eta}{2}} \zeta(\varkappa) d\varkappa = \frac{\eta - \psi}{2} \int_0^1 \zeta\left(\psi + \frac{t(\eta - \psi)}{2}\right) dt$$

ve $\varkappa = \eta - \frac{t(\eta - \psi)}{2}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\zeta\left(\psi + \frac{t(\eta - \psi)}{2}\right) + \zeta\left(\eta - \frac{t(\eta - \psi)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \zeta\left(\frac{\psi + \eta}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her iki eşitsizlikte ispatlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı bir ispatı ise aşağıdaki gibi verilebilir:

İspat (2.Yöntem) ζ fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\zeta(\varkappa) \leq \zeta(\psi) + \frac{\zeta(\eta) - \zeta(\psi)}{\eta - \psi}(\varkappa - \psi)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf $[\psi, \eta]$ aralığı üzerinde $\varkappa$ değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa &\leq \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\psi) d\varkappa + \frac{\zeta(\eta) - \zeta(\psi)}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} (\varkappa - \psi) d\varkappa \\ &= \frac{\zeta(\psi) + \zeta(\eta)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $\varkappa = \frac{\psi + \eta - t(\eta - \psi)}{2}$ ve $\varkappa = \frac{\psi + \eta + t(\eta - \psi)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa &= \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\frac{\psi + \eta}{2}} \zeta(\varkappa) d\varkappa + \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\frac{\psi + \eta}{2}}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\zeta \left(\frac{\psi + \eta - t(\eta - \psi)}{2} \right) + \zeta \left(\frac{\psi + \eta + t(\eta - \psi)}{2} \right) \right] dt \\ &\geq \zeta \left(\frac{\psi + \eta}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ζ ve ϑ , $[\psi, \eta]$ kapalı aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $|\zeta|^p$ ve $|\vartheta|^q$, $[\psi, \eta]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa)| d\varkappa \leq \left(\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\psi}^{\eta} |\vartheta(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

İspat $\varkappa \rightarrow \varkappa^p$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konvektir. Çünkü $p \geq 1$, yani Jensen eşitsizliğine göre

$$\int \mu dv \leq \left(\int \mu^p dv \right)^{\frac{1}{p}}$$

Burada v , herhangi bir olasılık dağılımı ve herhangi bir v -ölçülebilir bir fonksiyondur. u herhangi bir ölçü olsun ve

$$dv = \frac{\vartheta^q}{\int \vartheta^q du} du$$

Dolayısıyla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kullanarak $p(1 - q) + q = 0$ elde edilir ve $\mu = \zeta \vartheta^{1-q}$ kabul edilir

$$\begin{aligned} \int \zeta \vartheta du &= \left(\int \vartheta^q du \right) \int \mu dv \\ &= \left(\int \vartheta^q du \right) \int \zeta \vartheta^{1-q} \frac{\vartheta^q}{\int \vartheta^q du} du \\ &\leq \left(\int \vartheta^q du \right) \left(\int \zeta^p \vartheta^{p(1-q)} \frac{\vartheta^q}{\int \vartheta^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int \vartheta^q du \right) \left(\int \frac{\zeta^p}{\int \vartheta^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int \zeta \vartheta du \leq \left(\int \zeta^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \vartheta^q du \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir. Bu durum ζ ve ϑ 'nin gerçek olduğunu ve negatif olmadığını varsayımıyla yazılabilir ve karmaşık fonksiyonların genişletilmesi elde edilebilir. Ayrıca $\|\zeta\|_p, \|\vartheta\|_q$ ne sıfır ne de sonsuzdur ve $p, q > 1$ için geçerlidir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3 (Power Mean Eşitsizliği): ζ ve ϑ , $[\psi, \eta]$ kapalı aralığında tanımlı integral-lenebilen iki fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $|\zeta|$ ve $|\vartheta|^q$, $[\psi, \eta]$ kapalı aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa)| d\varkappa \leq \left(\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)| d\varkappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)| |\vartheta(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.4 (Ostrowski Eşitsizliği): $\zeta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \eta \in I$ ve $\psi < \eta$ olsun. Eğer her $\varkappa \in [\psi, \eta]$ için $|\delta'(\varkappa)| < M$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt \right| \leq M(\eta - \psi) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} \right)^2}{(\eta - \psi)^2} \right]$$

Burada, $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi katsayıdır ve daha küçük bir katsayı yerine yazılamaz (Ostrowski, 1937).

Bu eşitsizlik literatürde $\varkappa \in [\psi, \eta]$ noktasında $\zeta(\varkappa)$ değerinin $\frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt$ integral ortalamasına yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak adlandırılır (Baloch and İşcan, 2015). Ostrowski integral eşitsizliği başka formda da aşağıdaki gibi verilebilir (İşcan, 2016).

$$\left| \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt \right| \leq \frac{M}{\eta-\psi} \left[\frac{(\varkappa-\psi)^2 + (\eta-\varkappa)^2}{2} \right]$$

İspat Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $\zeta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\psi, \eta) \subset I$ 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan $\varkappa \in (\psi, \eta)$ için

$$C(\varkappa, t) = \begin{cases} t - \psi, & t \in [\psi, \varkappa) \\ t - \eta, & t \in [\varkappa, \eta] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \zeta(\varkappa) &= \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt + \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} C(\varkappa, t) \zeta'(t) dt \\ \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt &= \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} C(\varkappa, t) \zeta'(t) dt \\ &= \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\varkappa} (t - \psi) \zeta'(t) dt + \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\varkappa}^{\eta} (t - \eta) \zeta'(t) dt \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\varkappa} (t - \psi) \zeta'(t) dt + \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\varkappa}^{\eta} (t - \eta) \zeta'(t) dt \right| \\ \left| \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt \right| &\leq \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\varkappa} |t - \psi| |\zeta'(t)| dt + \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\varkappa}^{\eta} |t - \eta| |\zeta'(t)| dt \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $|\zeta'(\varkappa)| < M$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \zeta(\varkappa) - \frac{1}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) dt \right| &\leq \frac{M}{\eta-\psi} \int_{\psi}^{\varkappa} |t - \psi| dt + \frac{M}{\eta-\psi} \int_{\varkappa}^{\eta} |t - \eta| dt \\ &= \frac{M}{\eta-\psi} \left[\int_{\psi}^{\varkappa} (t - \psi) dt + \int_{\varkappa}^{\eta} (\eta - t) dt \right] \\ &= \frac{M}{\eta-\psi} \left[\left(\frac{\varkappa^2}{2} - \varkappa\psi - \frac{\psi^2}{2} + \psi^2 \right) + \left(\eta^2 - \frac{\eta^2}{2} - \eta\varkappa + \frac{\varkappa^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{M}{\eta-\psi} \left[\frac{(\varkappa-\psi)^2 + (\eta-\varkappa)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\varkappa - \psi)^2 + (\eta - \varkappa)^2 &= \left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} + \frac{\psi + \eta}{2} - \psi \right)^2 + \left(\eta - \frac{\psi + \eta}{2} + \frac{\psi + \eta}{2} - \varkappa \right)^2 \\
&= \left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} \right)^2 + 2 \left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} \right) \left(\frac{\eta - \psi}{2} \right) + \left(\frac{\eta - \psi}{2} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\eta - \psi}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\psi + \eta}{2} - \varkappa \right) \left(\frac{\eta - \psi}{2} \right) + \left(\frac{\psi + \eta}{2} - \varkappa \right)^2 \\
&= 2 \left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\eta - \psi}{2} \right)^2 \\
&= 2(\eta - \psi) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\varkappa - \frac{\psi + \eta}{2} \right)^2}{(\eta - \psi)^2} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5 (Simpson Eşitsizliği): $I = [\psi, \eta]$ ve $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$, (ψ, η) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\zeta^{(4)}\| = \sup_{\varkappa \in (\psi, \eta)} |\zeta^{(4)}| < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\zeta(\psi) + \zeta(\eta)}{2} + 2\zeta\left(\frac{\psi + \eta}{2}\right) \right] - \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \frac{1}{2880} \|\zeta^{(4)}\|_{\infty} (\eta - \psi)^4$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik Simpson eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir et al., 1999).

İspat $I = [\psi, \eta]$ ve $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ψ, η) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\zeta^{(4)}\| = \sup_{\varkappa \in (\psi, \eta)} |\zeta^{(4)}| < \infty$ olmak üzere $C(\varkappa)$ fonksiyonunu

$$C(\varkappa) = \begin{cases} \frac{1}{24}(\varkappa - \psi)^3 \left(\varkappa - \frac{\psi + 2\eta}{3} \right), & \varkappa \in \left[\psi, \frac{\psi + \eta}{2} \right) \\ \frac{1}{24}(\varkappa - \eta)^3 \left(\varkappa - \frac{2\psi + \eta}{3} \right), & \varkappa \in \left[\frac{\psi + \eta}{2}, \eta \right] \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda verilen eşitlikten

$$\begin{aligned}
\int_{\psi}^{\eta} C(\varkappa) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa &= \int_{\psi}^{\frac{\psi + \eta}{2}} \frac{1}{24}(\varkappa - \psi)^3 \left(\varkappa - \frac{\psi + 2\eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa \\
&\quad + \int_{\frac{\psi + \eta}{2}}^{\eta} \frac{1}{24}(\varkappa - \eta)^3 \left(\varkappa - \frac{2\psi + \eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa
\end{aligned}$$

yazılır. Yukardaki integraller için mutlak değeri özelliği dikkate alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\psi}^{\eta} C(\varkappa) \delta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa \right| \\
& \leq \int_{\psi}^{\frac{\psi+\eta}{2}} \frac{1}{24} |\varkappa - \psi|^3 \left| \varkappa - \frac{\psi+2\eta}{3} \right| |\zeta^{(4)}(\varkappa)| d\varkappa + \int_{\frac{\psi+\eta}{2}}^{\eta} \frac{1}{24} |\varkappa - \eta|^3 \left| \varkappa - \frac{2\psi+\eta}{3} \right| |\zeta^{(4)}(\varkappa)| d\varkappa \\
& \leq \frac{\|\zeta^{(4)}\|_{\infty}}{24} \left[\int_{\psi}^{\frac{\psi+\eta}{2}} (\varkappa - \psi)^3 \left(-\varkappa + \frac{\psi+2\eta}{3} \right) d\varkappa + \int_{\frac{\psi+\eta}{2}}^{\eta} (\eta - \varkappa)^3 \left(\varkappa - \frac{2\psi+\eta}{3} \right) d\varkappa \right] \\
& \leq \frac{\|\zeta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta - \psi)^5
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\psi}^{\frac{\psi+\eta}{2}} \frac{1}{24} (\varkappa - \psi)^3 \left(\varkappa - \frac{\psi+2\eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa + \int_{\frac{\psi+\eta}{2}}^{\eta} \frac{1}{24} (\varkappa - \eta)^3 \left(\varkappa - \frac{2\psi+\eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa \right| \\
& \leq \frac{\|\zeta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\psi - \eta)^5
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sol kısmında kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\psi}^{\frac{\psi+\eta}{2}} \frac{1}{24} (\varkappa - \psi)^3 \left(\varkappa - \frac{\psi+2\eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa + \int_{\frac{\psi+\eta}{2}}^{\eta} \frac{1}{24} (\varkappa - \eta)^3 \left(\varkappa - \frac{2\psi+\eta}{3} \right) \zeta^{(4)}(\varkappa) d\varkappa \right| \\
& = \left| -\frac{2}{3} (\eta - \psi) \zeta \left(\frac{\psi+\eta}{2} \right) - \frac{1}{6} (\eta - \psi) [\zeta(\psi) + \zeta(\eta)] + \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right| \\
& \leq \frac{\|\zeta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta - \psi)^5
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Son durumda

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{2}{3} (\eta - \psi) \zeta \left(\frac{\psi+\eta}{2} \right) - \frac{1}{6} (\eta - \psi) [\zeta(\psi) + \zeta(\eta)] + \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right| \\
& \leq \frac{\|\zeta^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta - \psi)^5
\end{aligned}$$

olup eşitsizliğin her iki tarafı $(\eta - \psi)$ ile bölünürse

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\zeta(\psi) + \zeta(\eta)}{2} + 2\zeta \left(\frac{\psi+\eta}{2} \right) \right] - \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \frac{1}{2880} \|\zeta^{(4)}\|_{\infty} (\eta - \psi)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.6 (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği): ζ ve ϑ , $[\psi, \eta]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon ve $p > 1$ için,

$$\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)|^p d\varkappa < \infty$$

ve

$$\int_{\psi}^{\eta} |\vartheta(\varkappa)|^p d\varkappa < \infty$$

olsun. Bu durumda,

$$\left(\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa) + \vartheta(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\psi}^{\eta} |\vartheta(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}}$$

Eşitsizliği için gerek ve yeter şart $\zeta(\varkappa) = 0$ olmasıdır (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Teorem 2.7 (Young Eşitsizliği): $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her p, q ve her $\psi, \eta > 0$ sayısı için

$$\psi\eta \leq \frac{\psi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Young, 1912).

Teorem 2.8 (Chebyshev Eşitsizliği): ζ ve ϑ fonksiyonları integrallenebilir ve senkronize fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa)\vartheta(\varkappa)d\varkappa \geq \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa)d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} \vartheta(\varkappa)d\varkappa \quad (2.4)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer ζ ve ϑ farklı monotonluğa sahip ise eşitsizlik yön değiştirir. ζ ve ϑ fonksiyonları sabit ise eşitlik sağlanır (Chebyshev, 1882).

İspat ζ ve ϑ , senkronize fonksiyonlardan olduğundan

$$(\zeta(\varkappa) - \zeta(\gamma))(\vartheta(\varkappa) - \vartheta(\gamma)) \geq 0$$

yazılabilir. İki tarafın çift katlı integrali alınırsa

$$\int_{\psi}^{\eta} \int_{\psi}^{\eta} (\zeta(\varkappa) - \zeta(\gamma))(\vartheta(\varkappa) - \vartheta(\gamma)) d\varkappa d\gamma \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{\psi}^{\eta} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa)\vartheta(\varkappa)d\varkappa d\gamma + \int_{\psi}^{\eta} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\gamma)\vartheta(\gamma)d\varkappa d\gamma \\ & \geq \int_{\psi}^{\eta} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa)\vartheta(\gamma)d\varkappa d\gamma + \int_{\psi}^{\eta} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\gamma)\vartheta(\varkappa)d\varkappa d\gamma \end{aligned}$$

ve devamında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa + \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\gamma) \vartheta(\gamma) d\gamma \\ & \geq \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) \left(\int_{\psi}^{\eta} \vartheta(\gamma) d\gamma \right) d\varkappa + \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\gamma) \left(\int_{\psi}^{\eta} \vartheta(\varkappa) d\varkappa \right) d\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{2}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa \geq 2 \left(\frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right) \left(\frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \vartheta(\varkappa) d\varkappa \right)$$

bulunur. Son ifadeden istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.9 (Grüss Eşitsizliği): $\zeta, \vartheta : [\psi, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Her $\varkappa \in [\psi, \eta]$, $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq \zeta(\varkappa) \leq \Phi_2 \text{ ve } \Psi_1 \leq \vartheta(\varkappa) \leq \Psi_2 \quad (2.5)$$

şartları altında

$$\left| \frac{1}{\eta - \psi} \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa - \frac{1}{(\eta - \psi)^2} \left(\int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right) \left(\int_{\psi}^{\eta} \vartheta(\varkappa) d\varkappa \right) \right| \leq \frac{1}{4} (\Phi_2 - \Phi_1) (\Psi_2 - \Psi_1). \quad (2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir (Grüss, 1935).

f ve g fonksiyonlarının (2.5) koşulunu sağladığı durumda aşağıdaki eşitsizliği kanıtlamıştır:

$$|S(\zeta, \vartheta, u)| \leq \frac{1}{4} (\Phi_2 - \Phi_1) (\Psi_2 - \Psi_1) \left(\int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) d\varkappa \right)^2 \quad (2.7)$$

(Dragomir, 1998). Burada $S(\zeta, \vartheta, u)$ ve $T(\zeta, \vartheta, u, v)$ ifadeleri, $u, v : [\psi, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli iki fonksiyon olduğunda Chebyshev fonksiyonelleri olarak adlandırılmış ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} S(\zeta, \vartheta, u) &= \frac{1}{2} T(\zeta, \vartheta, u, u) \\ &= \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa - \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \zeta(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa \end{aligned} \quad (2.8)$$

ve

$$\begin{aligned} T(\zeta, \vartheta, u, v) &= \int_{\psi}^{\eta} v(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa + \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} v(\varkappa) \zeta(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa \\ &\quad - \int_{\psi}^{\eta} v(\varkappa) \zeta(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa - \int_{\psi}^{\eta} u(\varkappa) \zeta(\varkappa) d\varkappa \int_{\psi}^{\eta} v(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dragomir $\zeta', \vartheta' \in L_\infty(\psi, \eta)$ için aşağıdaki eşitsizliği tanımlamıştır :

$$|S(\zeta, \vartheta, u)| \leq \|\zeta'\|_\infty \|\vartheta'\|_\infty \left(\int_\psi^\eta u(\varkappa) d\varkappa \int_\psi^\eta \varkappa^2 u(\varkappa) d\varkappa - \left(\int_\psi^\eta \varkappa u(\varkappa) d\varkappa \right)^2 \right) \quad (2.10)$$

Ayrıca ζ fonksiyonun $[\psi, \eta]$ üzerinde tanımlı $M - \vartheta - Lipschitzian$ ise,

$$\frac{|\zeta(\varkappa) - \zeta(\gamma)|}{|\vartheta(\varkappa) - \vartheta(\gamma)|} \leq M, \quad M > 0, \quad \varkappa, \gamma \in [\psi, \eta], \quad \varkappa \neq \gamma \quad (2.11)$$

eşitsizliği geçerli ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|S(\zeta, \vartheta, u)| \leq M \left(\int_\psi^\eta u(\varkappa) d\varkappa \int_\psi^\eta \vartheta^2(\varkappa) u(\varkappa) d\varkappa - \left(\int_\psi^\eta u(\varkappa) \vartheta(\varkappa) d\varkappa \right)^2 \right). \quad (2.12)$$

$[\psi, \eta]$ aralığında sırasıyla L_1 ve L_2 -Lipschitzian olan ζ ve ϑ fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizliği tanımlamıştır:

$$|S(\zeta, \vartheta, u)| \leq L_1 L_2 \left(\int_\psi^\eta u(\varkappa) d\varkappa \int_\psi^\eta \varkappa^2 u(\varkappa) d\varkappa - \left(\int_\psi^\eta \varkappa u(\varkappa) d\varkappa \right)^2 \right). \quad (2.13)$$

(Dragomir, 1998).

Teorem 2.10 (Cauchy-Schwarz İntegral Eşitsizliği): ζ ve ϑ , $[\psi, \eta]$ aralığı üzerinde sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\int_\psi^\eta \zeta(t) \vartheta(t) dt \right)^2 \leq \int_\psi^\eta \zeta^2(t) dt \int_\psi^\eta \vartheta^2(t) dt$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik literatürde Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği olarak bilinir (Samko et al., 1993).

İspat Her $\varkappa$ gerçel sayısı için $0 \leq (\varkappa \zeta(t) + \vartheta(t))^2$ 'dir. Her iki tarafın $[\psi, \eta]$ kapalı aralığı üzerinden integralini alıp

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\psi^\eta (\varkappa \zeta(t) + \vartheta(t))^2 dt \\ &= \varkappa^2 \int_\psi^\eta \zeta^2(t) dt + 2\varkappa \int_\psi^\eta \zeta(t) \vartheta(t) dt + \int_\psi^\eta \vartheta^2(t) dt \\ &= A\varkappa^2 + B\varkappa + C \end{aligned}$$

olsun. Burada

$$\begin{aligned} A &= \int_{\psi}^{\eta} \zeta^2(t) dt \\ B &= 2 \int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) \vartheta(t) dt \\ C &= \int_{\psi}^{\eta} \vartheta^2(t) dt \end{aligned}$$

eşit olsun. Her $\varkappa$ gerçel sayısı için $0 \leq A\varkappa^2 + B\varkappa + C \iff \Delta = B^2 - 4AC \leq 0$ 'dır. Burada A, B, C yerine tekrar integral eşitliklerini yazarsak

$$\left(\int_{\psi}^{\eta} \zeta(t) \vartheta(t) dt \right)^2 \leq \int_{\psi}^{\eta} \zeta^2(t) dt \int_{\psi}^{\eta} \vartheta^2(t) dt$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği $\mathbb{R}^n$ 'nin bir alt bölgesinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar için yazıldığı durumlarda çok katlı integrallerde de geçerli olduğu görülebilir. Bunun ispatıda yukarıda gösterildiği yöntem ile yapılabilir.

Teorem 2.11 (Üçgen Eşitsizliği): ψ ve η reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} |\psi + \eta| &\leq |\psi| + |\eta|, \\ ||\psi| - |\eta|| &\leq |\psi - \eta|, \\ ||\psi| - |\eta|| &\leq |\psi + \eta|, \end{aligned}$$

ve tümevarım yoluyla

$$|\psi_1 + \dots + \psi_n| \leq |\psi_1| + \dots + |\psi_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.12 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği): $\zeta, [\psi, \eta]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olduğunda aşağıdaki

$$\left| \int_{\psi}^{\eta} \zeta(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \int_{\psi}^{\eta} |\zeta(\varkappa)| d\varkappa$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 3.1 (Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatör): $\zeta \in L[a, b]$ olmak şartıyla $I_{\psi+}^{\alpha}\zeta$ ve $I_{\eta-}^{\alpha}\zeta$ Riemann - Liouville kesirli integrallerinin $\psi > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$I_{\psi+}^{\alpha}\zeta(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\psi}^{\varkappa} (\varkappa - \delta)^{(\alpha-1)} \zeta(\delta) d\delta, \quad \varkappa > \psi \quad (3.1)$$

ve

$$I_{\eta-}^{\alpha}\zeta(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\eta} (\delta - \varkappa)^{(\alpha-1)} \zeta(\delta) d\delta, \quad \varkappa < \eta \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır (Samko et al., 1993).

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\delta} u^{\alpha-1} du$ olarak bilinen Gama fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann – Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Riemann – Liouville tanımında $\alpha = 0$ alınırsa,

$$J_{\psi+}^0 \zeta(\varkappa) = \zeta(\varkappa)$$

ve

$$J_{\eta-}^0 \zeta(\varkappa) = \zeta(\varkappa)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 3.2 (Hadamard Kesirli İntegral Operatör): $\zeta : [\psi, \eta] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\psi, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon $\alpha > 0$ ve $0 < \psi < \eta$ için

$${}_H J_{\psi+}^{\alpha} \zeta(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\psi}^{\varkappa} \frac{\zeta(t)}{(In_{\frac{\varkappa}{t}})^{(1-\alpha)}} \frac{dt}{t}, \quad \varkappa > \psi$$

ve

$${}_H J_{\eta-}^{\alpha} \zeta(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\eta} \frac{\zeta(t)}{(In_{\frac{\eta}{t}})^{(1-\alpha)}} \frac{dt}{t}, \quad \varkappa < \eta$$

integrallerine α . mertebeden Hadamard kesirli integrali denir ve burada ${}_H J_{0+}^{\alpha} \zeta = {}_H J_0^{\alpha} \zeta$ ve ${}_H J_{\infty-}^{\alpha} \zeta = {}_H J_{\infty}^{\alpha} \zeta$ dır (Samko et al., 1993).

Tanım 3.3 (Katugampola Kesirli İntegrali): $[\psi, \eta] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $\psi < \varkappa < \eta$ ve $\rho > 0$ olsun. ($\alpha > 0$) ve $\zeta \in X_c^p(\psi, \eta)$ için sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli

integralleri

$${}^{\rho}I_{\psi+}^{\alpha}\zeta(\varkappa) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\psi}^{\varkappa} \frac{t^{\rho-1}}{(\varkappa^{\rho} - t^{\rho})^{(1-\alpha)}} \zeta(t) dt$$

ve

$${}^{\rho}I_{\eta-}^{\alpha}\zeta(\varkappa) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\eta} \frac{t^{\rho-1}}{(\varkappa^{\rho} - t^{\rho})^{(1-\alpha)}} \zeta(t) dt$$

şeklinde (Katugampola, 2014).

Tanım 3.4 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali): $\zeta \in L(\psi, \eta)$, $\psi < x < \eta$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$$({}^{CF}I_{\psi}^{\alpha}\zeta)(\varkappa) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\zeta(x) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_{\psi}^{\varkappa} \zeta(t)dt \quad \varkappa > \psi$$

ve

$$({}^{CF}I_{\eta}^{\alpha}\zeta)(\varkappa) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\zeta(\varkappa) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\eta} \zeta(t)dt \quad \varkappa < \eta$$

olarak tanımlanır. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonu olup $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir. (Caputo and Fabrizio, 2015).

Tanım 3.5 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, monoton ve artan iki fonksiyon ve $h'(\delta)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında h fonksiyonuna bağlı $\alpha > 0$ mertebeden $I_{a+h}^{\alpha}w(x)$ ve $I_{b-h}^{\alpha}w(x)$ kesirli integralleri sırasıyla

$$I_{a+h}^{\alpha}w(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{h'(\delta)w(\delta)}{[h(x) - h(\delta)]^{1-\alpha}} d\delta, \quad x > a \quad (3.3)$$

ve

$$I_{b-h}^{\alpha}w(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{h'(\delta)w(\delta)}{[h(\delta) - h(x)]^{1-\alpha}} d\delta, \quad x < b \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır (Samko et al., 1993).

(3.3) ve (3.4) ifadelerinde $h(x) = x$ yazıldığında (3.1) ve (3.2) ifadelerindeki Riemann-Liouville kesirli integralleri elde edilir. Eğer (3.3) ve (3.4) ifadelerinde $h(x) = \ln x$ yazıldığında Hamadard kesirli integrali elde edilir. Sarıkaya ve arkadaşları tarafından 2020 yılında yapılan genelleştirilmiş bir kesirli integral operatör tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.6 $f \in L[u, v]$ olduğunda $I_{u+\phi}f$ ve $I_{v-\phi}f$ genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_{u+\phi}f(x) = \int_u^x \frac{\phi(x-\delta)}{x-\delta} f(\delta) d\delta, \quad x > u, \quad (3.5)$$

$$I_{v-\phi} f(x) = \int_x^v \frac{\phi(\delta-x)}{\delta-x} f(\delta) d\delta, \quad x < v \quad (3.6)$$

(Sarıkaya and Ertugral, 2020).

Burada verilen $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\theta, \xi > 0$ sayılarından bağımsız $T_1, T_2, T_3 > 0$ sayıları için aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\int_0^1 \frac{\phi(\delta)}{\delta} d\delta < \infty, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\theta}{\xi} \leq 2 \text{ için } \frac{1}{T_1} \leq \frac{\phi(\theta)}{\phi(\xi)} \leq T_1, \quad (3.8)$$

$$\theta \leq \xi \text{ için } \frac{\phi(\xi)}{\xi^2} \leq T_2 \frac{\phi(\theta)}{\theta^2}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\theta}{\xi} \leq 2 \text{ için } \left| \frac{\phi(\xi)}{\xi^2} - \frac{\phi(\theta)}{\theta^2} \right| \leq T_3 |\xi - \theta| \frac{\phi(\xi)}{\xi^2} \quad (3.10)$$

Eğer $\phi(\xi) \xi^\alpha$ ($\alpha > 0$) artan ve $\frac{\phi(\xi)}{\xi^\beta}$ ($\beta > 0$) azalan ise ϕ fonksiyonu (3.7)-(3.10) arasındaki şartları sağlar.

Ni, Chen ve Dong tarafından 2023 yılında ortaya konmuş ve bu çalışmada ağırlıklı olarak ele alınan integral operatörü aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.7 (Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü) $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ artan, negatif olmayan monoton ve sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. σ fonksiyonu (3.7)-(3.10) şartlarını sağlıyor ve $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif ve integrallenebilir bir fonksiyon ise w fonksiyonunun h fonksiyonuna bağlı $\alpha > 0$ mertebeden kesirli integralleri

$${}_a^k I_{h\sigma}^\alpha w(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x \frac{\sigma(h(x) - h(\delta))}{h(x) - h(\delta)} h'(\delta) \cdot (h(x) - h(\delta))^{\frac{\alpha}{k}-1} w(\delta) d\delta, \quad x > a, \quad (3.11)$$

ve

$${}_b^k I_{h\sigma}^\alpha w(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b \frac{\sigma(h(\delta) - h(x))}{h(\delta) - h(x)} h'(\delta) \cdot (h(\delta) - h(x))^{\frac{\alpha}{k}-1} w(\delta) d\delta, \quad x < b \quad (3.12)$$

olarak tanımlanır (Ni et al., 2023).

Yukarıda verilen genel operatör, bazı özel koşullar altında aşağıdaki özel durumlara indirgenir.

* (1) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $h(\delta) = \sigma(\delta) = \delta$ ve $\alpha = k = 1$ yazılırsa aşağıda gösterildiği gibi Riemann integrali elde edilir:

$$I_{a+} f(x) = \int_a^x f(\delta) d\delta, \quad x > a,$$

$$I_{b-} f(x) = \int_x^b f(\delta) d\delta, \quad x < b$$

*(2) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $\sigma(\delta) = h(\delta) = \delta$ ve $k = 1$ yazılırsa Tanım 3.1 ifadesi elde edilir.

*(3) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $\sigma(\delta) = h(\delta) = \delta$ yazılırsa aşağıda gösterildiği gibi k -Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir:

$$I_{a+k}^\alpha f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-\delta)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\delta) d\delta \quad x > a,$$

$$I_{b-k}^\alpha f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (\delta-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\delta) d\delta \quad x < b.$$

*(4) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $h(\delta) = \delta$ ve $\alpha = k = 1$, yazılırsa Tanım 3.6 ifadesi elde edilir.

*(5) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $h(\delta) = \delta$ ve $\alpha = k = 1$ ve $\sigma(\delta) = \frac{\delta}{\alpha} e^{(-\frac{1-\alpha}{\delta}\delta)}$ yazılırsa $\alpha \in (0, 1)$ için aşağıda gösterildiği gibi üstel çekirdekli kesirli integral elde edilir.

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha} \int_a^x e^{(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-\delta))} f(\delta) d\delta, \quad x > a,$$

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha} \int_x^b e^{(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(\delta-x))} f(\delta) d\delta, \quad x < b,$$

*(6) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $k = 1$ ve $\sigma(\delta) = \delta$ yazılırsa Tanım 3.5 ifadesi elde edilir.

*(7) Eğer (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $k = 1$, ve $\sigma(\delta) = h(\delta) = \ln \delta$ yazılırsa aşağıda gösterildiği gibi Hadamard kesirli integrali elde edilir.

$${}_H I_{a+h}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\ln x - \ln \delta)^{\alpha-1} \frac{f(\delta)}{\delta} d\delta, \quad x > a,$$

$${}_H I_{b-h}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\ln \delta - \ln x)^{\alpha-1} \frac{f(\delta)}{\delta} d\delta, \quad x < b.$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, (3.11) ve (3.12)'de verilen yeni genelleştirilmiş kesirli integral operatörü kullanılarak yeni lemmalar ve teoremler elde edilmiştir.

4.1. Chebyshev Tipli Bulgular

Bu bölümde, (3.11) ve (3.12)'de verilen yeni genelleştirilmiş kesirli integral operatörü kullanılarak Chebyshev tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir, senkronize fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha u)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vfg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha v)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha ufg)(x) \\ & \geq ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha uf)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vf)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha ug)(x). \end{aligned} \quad (4.1)$$

İspat f ve g , $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı, senkronize fonksiyonlar olduğundan $(\tau, \rho) \in [a, b]^2$ için

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0 \quad (4.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan

$$f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau) \quad (4.3)$$

yazılabilir. $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ artan ve negatif olmayan fonksiyonu ve (3.7)'dan (3.10)'ya kadar olan şartları sağlayan σ fonksiyonu kullanılarak $\alpha, k > 0$ için (4.3) ifadesinin her iki yanı $v(\tau) \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau)(h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e kadar integrali alınır

$$({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vfg)(x) + f(\rho)g(\rho)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha v)(x) \geq g(\rho)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vf)(x) + f(\rho)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vg)(x) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) ifadesinin her iki yanı $u(\rho) \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho)(h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ρ 'ya göre a 'dan x 'e kadar integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha u)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vfg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha v)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha ufg)(x) \\ & \geq ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha uf)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha vf)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha ug)(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir, senkronize fonksiyon olsun. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere üç sürekli fonksiyon olduğu durumda $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& 2({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}fg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}fg)(x) \\
& + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}fg)(x) \\
\geq & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}g)(x) \right) \\
& + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}g)(x) \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

İspat Lemma 4.1 ifadesinde $u = \mathbf{v}$, $v = \mathbf{w}$ yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}fg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}fg)(x) \\
\geq & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}g)(x)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7) ifadesinin her iki yanını $({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x)$ çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}fg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}fg)(x) \right) \\
\geq & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v}g)(x) \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. Lemma 4.1 ifadesinde $u = \mathbf{u}$, $v = \mathbf{w}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}fg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}fg)(x) \\
\geq & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}g)(x)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) ifadesinin her iki yanını $({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x)$ çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}fg)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w})(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}fg)(x) \right) \\
\geq & ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{v})(x) \left(({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}g)(x) + ({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{w}f)(x)({}^k_{a+}I_{h\sigma}^\alpha \mathbf{u}g)(x) \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. (4.8) ve (4.10) ifadelerini toplayarak (4.6) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir, senkronize fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) \\ & \geq ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

İspat $\alpha, k > 0$ için (4.3) ifadesinin her iki yanını $v(\tau) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) + (f(\rho) \cdot g(\rho))({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x) \\ & \geq g(\rho)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x) + f(\rho)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) ifadesinin her iki yanını $u(\rho) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. Böylece (4.11) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir, senkronize fonksiyon olsun. $u, v, w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ üç sürekli fonksiyon olduğu durumda $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}w)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}vfg)(x) \\ & + 2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}v)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}wfg)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}w)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) \\ & + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}v)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}w)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}w)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x) \\ & \geq ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}vf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}wg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}wf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}vg)(x) \\ & + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}v)(x) ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}wg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}wf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) \\ & + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}w)(x) ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

İspat Lemma 4.2 ifadesinde $u = \mathbf{v}, v = \mathbf{w}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} f g \right)(x) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} g \right)(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. (4.15) ifadesinin her iki yanını $\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x)$ çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} f g \right)(x) \right) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} g \right)(x) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Lemma 4.2 ifadesinde $u = \mathbf{u}, v = \mathbf{w}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f g \right)(x) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} g \right)(x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

bulunur. (4.17) ifadesinin her iki yanını $\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} \right)(x)$ çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f g \right)(x) \right) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{v} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{w} f \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} g \right)(x) \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.18) ifadesinde $\mathbf{v}$ yerine $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{w}$ yerine $\mathbf{v}$ yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{w} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{v} f g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{v} \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f g \right)(x) \right) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{w} \right)(x) \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{v} g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} \mathbf{v} f \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} \mathbf{u} g \right)(x) \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.16), (4.18) ve (4.19) ifadelerini toplayarak (4.14) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir, senkronize fonksiyon olsun. $u, z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g z \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g z \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \\ & + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u z \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u z \right)(x) \\ & \geq \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f z \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f z \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g \right)(x) \\ & + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g z \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g z \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f \right)(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

İspat f ve g fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında iki senkronize fonksiyon ve $u, z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olduğundan her $(\tau, \rho) \in [a, b]^2$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))(z(\tau) + z(\rho)) \geq 0. \quad (4.21)$$

Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} & z(\tau)f(\tau)g(\tau) + z(\tau)f(\rho)g(\rho) + z(\rho)f(\tau)g(\tau) + z(\rho)f(\rho)g(\rho) \\ & \geq z(\tau)f(\tau)g(\rho) + z(\tau)f(\rho)g(\tau) + z(\rho)f(\tau)g(\rho) + z(\rho)f(\rho)g(\tau). \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur. (4.22) ifadesinin her iki yanını $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g z)(x) + f(\rho)g(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u z)(x) \\ & + z(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) + z(\rho)f(\rho)g(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) \\ & \geq g(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f z)(x) + f(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g z)(x) \\ & + z(\rho)g(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) + z(\rho)f(\rho)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) ifadesinin her iki yanını $u(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g z)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u z)(x) \\ & + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u z)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g z)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f z)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g z)(x) \\ & + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g z)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f z)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur. (4.20) ifadesi elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki integrallenebilir fonksiyon olsun. $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g^2)(x) \\ & \geq 2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g)(x), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g^2)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f^2)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) \\ & \geq 2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g)(x). \end{aligned} \quad (4.26)$$

İspat $(f(\tau) - g(\rho))^2 \geq 0$ olduğundan her $\tau, \rho \in [a, b]$ için

$$f^2(\tau) + g^2(\rho) \geq 2f(\tau)g(\rho) \quad (4.27)$$

yazılabilir. (4.27) ifadesinin her iki yanı $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho)$
 $\times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ 'ya ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u)(x) + ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g^2)(x) \\ & \geq 2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g)(x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Böylece (4.25) ifadesi elde edilmiş olur. Öte yandan $(f(\tau)g(\rho) - f(\rho)g(\tau))^2 \geq 0$ olduğundan her $\tau, \rho \in [a, b]$ için

$$f^2(\tau)g^2(\rho) + f^2(\rho)g^2(\tau) \geq 2f(\tau)g(\tau)f(\rho)g(\rho) \quad (4.29)$$

yazılabilir. (4.29) ifadesinin her iki yanı $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho)$
 $\times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ 'ya ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u g^2)(x) + ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f^2)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) \\ & \geq 2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} u f g)(x). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Böylece (4.26) ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.2. Grüss Tipli Bulgular

Bu bölümde, (3.11) ve (3.12)'de verilen yeni genelleştirilmiş kesirli integral operatörü kullanılarak Grüss tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.5 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir ve her $x \in [a, b]$, $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq f(x) \leq \Phi_2 \text{ ve } \Psi_1 \leq g(x) \leq \Psi_2$$

koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & \left| ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \right. \\ & \quad \left. - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \right| \\ & \leq ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) (\Phi_2 - \Phi_1) (\Psi_2 - \Psi_1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

İspat $Z(\tau, \rho)$ fonksiyonu her $\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki gibi tanımlansın

$$Z(\tau, \rho) = (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)). \quad (4.32)$$

(4.32) ifadesinin her iki yanını $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho)$
 $\times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} \\ & \times v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} Z(\tau, \rho) d\tau d\rho \\ & = ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

(2.5) ifadesindeki koşula göre her $\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$|Z(\tau, \rho)| = |(f(\tau) - f(\rho)) (g(\tau) - g(\rho))| \leq (\Phi_2 - \Phi_1)(\Psi_2 - \Psi_1). \quad (4.34)$$

(4.34) ifadesi (4.33) ifadesinde kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \right. \\ & \left. - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \right| \\ & \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) \\ & \times (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} \\ & \times h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |Z(\tau, \rho)| d\tau d\rho \\ & \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} (\Phi_2 - \Phi_1)(\Psi_2 - \Psi_1) d\tau d\rho \\ & = ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) (\Phi_2 - \Phi_1)(\Psi_2 - \Psi_1). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir ve (2.11) koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$

için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq M \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) \right. \\
& \quad \left. - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) \right). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

İspat (2.11) ifadesindeki koşula göre her $\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$|(f(\tau) - f(\rho))| \leq M |(g(\tau) - g(\rho))|. \tag{4.37}$$

(4.32) ve (4.37) ifadelerinden aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$|Z(\tau, \rho)| = |(f(\tau) - f(\rho))| |(g(\tau) - g(\rho))| \leq M (g(\tau) - g(\rho))^2. \tag{4.38}$$

(4.38) ifadesi (4.33) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \\
& \times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |Z(\tau, \rho)| d\tau d\rho \\
& \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \\
& \times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} M (g(\tau) - g(\rho))^2 d\tau d\rho \\
& = M \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) \right) \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir ve L_1, L_2 sabitleriyle Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq L_1 L_2 \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v i^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u i^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u i)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v i)(x) \right) \tag{4.40}
\end{aligned}$$

İspat Teorem 4.7 ifadesindeki koşuldan her $\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|(f(\tau) - f(\rho))| \leq L_1 |\tau - \rho| \quad (4.41)$$

$$|g(\tau) - g(\rho)| \leq L_2 |\tau - \rho|$$

ki buradan

$$|Z(\tau, \rho)| = |f(\tau) - f(\rho)| |g(\tau) - g(\rho)| \leq L_1 L_2 (\tau - \rho)^2 \quad (4.42)$$

yazılabilir. (4.42) ifadesi (4.33) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |Z(\tau, \rho)| d\tau d\rho \\ & \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} L_1 L_2 (\tau - \rho)^2 d\tau d\rho \\ & = L_1 L_2 \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v i^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u i^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u i)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v i)(x) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.8 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki pozitif, integrallenebilir ve $f' \in L^p [a, b]$, $g' \in L^q [a, b]$ koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olsun. $p, q, r > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$ ve $1/r + 1/r' = 1$ şartları altında $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & 2 \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \right| \\ & \leq \|f'\|_p \|g'\|_q \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} u(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} d\tau d\rho. \end{aligned} \quad (4.44)$$

İspat (4.32) ifadesi $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau)$

$\times (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} Z(\tau, \rho) d\tau d\rho \\ & = 2 \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ufg)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} uf)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ug)(x) \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

(4.32) ifadesinden her $\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$Z(\tau, \rho) = \int_{\rho}^{\tau} \int_{\rho}^{\tau} f'(\theta) g'(\vartheta) d\theta d\vartheta. \quad (4.46)$$

Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|(f(\tau) - f(\rho))| \leq |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |f'(\theta)|^p d\theta \right|^{\frac{1}{p}} \quad \text{ve} \quad |g(\tau) - g(\rho)| \leq |\tau - \rho|^{\frac{1}{q'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |g'(\theta)|^q d\theta \right|^{\frac{1}{q}} \quad (4.47)$$

yazılabilir. (4.47) ifadesi (4.46) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$|Z(\tau, \rho)| \leq |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |f'(\theta)|^p d\theta \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |g'(\theta)|^q d\theta \right|^{\frac{1}{q}}. \quad (4.48)$$

(4.48) ifadesi (4.45) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\begin{aligned} & 2 \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ufg)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} uf)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ug)(x) \right| \\ & \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \\ & \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} \\ & \times \left| \int_{\rho}^{\tau} |f'(\theta)|^p d\theta \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |g'(\theta)|^q d\theta \right|^{\frac{1}{q}} d\tau d\rho. \end{aligned} \quad (4.49)$$

(4.49) ifadesine Hölder integral eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& 2 \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ufg)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} uf)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ug)(x) \right| \\
& \leq \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} \left| \int_\rho^\tau |f'(\theta)|^p d\theta \right|^{\frac{r}{p}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right]^{\frac{1}{r'}} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} \left| \int_\rho^\tau |g'(\theta)|^q d\theta \right|^{\frac{r'}{q}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{r'}}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Öte yandan

$$\begin{aligned}
\left| \int_\rho^\tau |f'(\theta)|^p d\theta \right|^{\frac{1}{p}} & \leq \|f'\|_p^p \\
\left| \int_\rho^\tau |g'(\theta)|^q d\theta \right|^{\frac{1}{q}} & \leq \|g'\|_q^q
\end{aligned} \tag{4.51}$$

eşitsizlikleri yardımıyla (4.50) ifadesi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& 2 \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ufg)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} uf)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} ug)(x) \right| \\
& \leq \left[\|f'\|_p^r \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \times \left[\|g'\|_q^{r'} \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right]^{\frac{1}{r'}} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{r'}} \\
& = \|f'\|_p \|g'\|_q \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \\
& \quad \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki pozitif integrallenebilir ve $f' \in L^p[a, b]$, $g' \in L^q[a, b]$ koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olsun. $p, q, r > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$ ve $1/r + 1/r' = 1$ şartları altında $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki

eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq \|f'\|_{\mathbf{p}} \|g'\|_{\mathbf{q}} \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} \\
& \quad \times v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} (h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'} + \frac{1}{\mathbf{q}'}}) d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

İspat (4.48) ifadesi (4.35) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} \\
& \quad \times h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'} + \frac{1}{\mathbf{q}'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |f'(\theta)|^{\mathbf{p}} d\theta \right|^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |g'(\theta)|^{\mathbf{q}} d\theta \right|^{\frac{1}{\mathbf{q}}} d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

(4.54) ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x)({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \right. \\
& \quad \times \left. \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'} + \frac{1}{\mathbf{q}'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |f'(\theta)|^{\mathbf{p}} d\theta \right|^{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{p}}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{\mathbf{r}}} \\
& \quad \times \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x) - h(\tau))}{h(x) - h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1} - 1} v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \right. \\
& \quad \times \left. \frac{\sigma(h(x) - h(\rho))}{h(x) - h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2} - 1} |\tau - \rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'} + \frac{1}{\mathbf{q}'}} \left| \int_{\rho}^{\tau} |g'(\theta)|^{\mathbf{q}} d\theta \right|^{\frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{q}}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{\mathbf{r}'}}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

(4.51) ifadesi kullanılarak (4.55) ifadesi yeniden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq \left[\|f'\|_{\mathbf{p}} \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1\Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau)(h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} v(\rho) \frac{1}{k_2\Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} \right. \\
& \quad \left. \times h'(\rho)(h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1} |\tau-\rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'}+\frac{1}{\mathbf{q}'}} d\tau d\rho \right]^{\frac{1}{\mathbf{r}}} \\
& \quad \times \left[\|g'\|_{\mathbf{q}} \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1\Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau)(h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} v(\rho) \frac{1}{k_2\Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} \right]^{\frac{1}{\mathbf{r}'}} \\
& \quad \times h'(\rho)(h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1} |\tau-\rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'}+\frac{1}{\mathbf{q}'}} d\tau d\rho \\
& = \|f'\|_{\mathbf{p}} \|g'\|_{\mathbf{q}} \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1\Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau)(h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} \\
& \quad \times v(\rho) \frac{1}{k_2\Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho)(h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1} |\tau-\rho|^{\frac{1}{\mathbf{p}'}+\frac{1}{\mathbf{q}'}} d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve her $x \in [a, b]$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq f(x) \leq \Phi_2$$

koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olduğunda $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf^2)(x) - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)^2 \\
& = (\Phi_2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)) (({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) - \Phi_1({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)) \\
& \quad - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

İspat Her $x \in [a, b]$ için f , $\Phi_1 \leq f(x) \leq \Phi_2$ koşulunu sağlayan integrallenebilir bir fonksiyon olduğuna göre her $\rho, \tau \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& (\Phi_2 - f(\rho))(f(\tau) - \Phi_1) + (\Phi_2 - f(\tau))(f(\rho) - \Phi_1) \\
& - (\Phi_2 - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1) - (\Phi_2 - f(\rho))(f(\rho) - \Phi_1) \\
& = f^2(\tau) + f^2(\rho) - 2f(\rho)f(\tau).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

(4.58) ifadesinin her iki yanını $u(\rho) \frac{1}{k_1\Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho)(h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ çarpılır ve elde

edilen ifadenin ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (f(\tau) - \Phi_1) \left(\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \right) + (\Phi_2 - f(\tau)) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \\
& - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - (\Phi_2 - f(\tau)) (f(\tau) - \Phi_1) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \\
& = f^2(\tau) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) + ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2f(\tau) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

(4.59) ifadesinin her iki yanı $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) (\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) \\
& + (\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) \\
& - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \\
& = ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) + ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Böylece (4.57) ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve her $x \in [a, b]$, $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq f(x) \leq \Phi_2 \text{ ve } \Psi_1 \leq g(x) \leq \Psi_2$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olduğunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \left| ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \right| \\
& \leq \frac{1}{4} (\Phi_2 - \Phi_1) (\Psi_2 - \Psi_1) (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x))^2
\end{aligned} \tag{4.61}$$

İspat (4.32) ifadesinin her iki yanı $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau)$ $\times (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \\
& \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} Z(\tau, \rho) d\tau d\rho \\
& = 2 (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x)).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Çift katlı integrale Cauchy-Schwartz integral eşitsizliği uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right. \\
& \quad \left. \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} Z(\tau, \rho) d\tau d\rho \right]^2 \\
& \leq \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right. \\
& \quad \left. \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} (f(\tau)-f(\rho))^2 d\tau d\rho \right] \\
& \quad \times \left[\int_a^x \int_a^x u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} u(\rho) \right. \\
& \quad \left. \times \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1} (g(\tau)-g(\rho))^2 d\tau d\rho \right] \quad (4.63) \\
& = 4 \left(({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x))^2 \right) \\
& \quad \times \left(({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) - (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x))^2 \right).
\end{aligned}$$

$(\Phi_2 - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1) \geq 0$ ve $(\Psi_2 - g(\tau))(g(\tau) - \Psi_1) \geq 0$ eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u(\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) & \geq 0, \\
({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u(\Psi_2 - g)(g - \Psi_1))(x) & \geq 0.
\end{aligned} \quad (4.64)$$

Buradan (4.64) ve Lemma 4.3 yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x))^2 \\
& \leq (\Phi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x))
\end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
& ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) - (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x))^2 \\
& \leq (\Psi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) - \Psi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)).
\end{aligned} \quad (4.66)$$

(4.62), (4.63), (4.65) ve (4.66) birleştirilerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x))^2 \\
& \leq (\Phi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) \\
& \quad \times (\Psi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) - \Psi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)).
\end{aligned} \quad (4.67)$$

(4.67) ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $4xy \leq (x+y)^2$ eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& 4(\Phi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) \\
& \leq ((\Phi_2 - \Phi_1) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x))^2,
\end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned}
& 4(\Psi_2 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x)) (({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) - \Psi_1 ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) \\
& \leq ((\Psi_2 - \Psi_1) ({}^{k_1}_{a+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x))^2.
\end{aligned} \quad (4.69)$$

(4.67)-(4.69) ifadelerinden (4.61) ifadesini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.4 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki pozitif, integrallenebilir fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right)^2 \\ \leq & \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) \right) \\ & \times \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

İspat (4.33) ifadesinde çift katlı integrale Cauchy-Schwartz integral eşitsizliği uygulandığında (4.70) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.5 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olduğunda aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) \\ = & \left(\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \right) \left(({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) \right) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \\ & + \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) \right) \left(\Phi_2 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) \right) \\ & - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x). \end{aligned} \quad (4.71)$$

İspat (4.59) ifadesinin her iki yanı $v(\tau) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınır aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & \left(({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) \right) \left(\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \right) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \\ & + \left(\Phi_2 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) \right) \left(({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) \right) \\ & - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \\ = & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f^2)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Böylece (4.71) ifadesine eşit olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.11 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, integrallenebilir ve her $x \in [a, b]$, $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq f(x) \leq \Phi_2 \text{ ve } \Psi_1 \leq g(x) \leq \Psi_2$$

koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, k_1, k_2 > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f g)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f g)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) \end{aligned} \right)^2 \\ \leq & (\Phi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x)) \\ & + (\Phi_2 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x)) (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - \Phi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)) \\ & \times (\Psi_2 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x)) (({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) - \Psi_1 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x)) \\ & + (\Psi_2 ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x)) (({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g)(x) - \Psi_1 ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x)). \end{aligned} \quad (4.73)$$

İspat $(\Phi_2 - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1) \geq 0$ ve $(\Psi_2 - g(\tau))(g(\tau) - \Psi_1) \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$-({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \leq 0, \quad (4.74)$$

$$-({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Psi_2 - g)(g - \Psi_1))(x) - ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Psi_2 - g)(g - \Psi_1))(x) \leq 0. \quad (4.75)$$

Lemma 4.5 ifadesinde fonksiyon olarak f seçildiğinde (4.74), g seçildiğinde (4.75) elde edilir. Bu ifadeler Lemma 4.4'te kullanarak (4.73) ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.12 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olsun. $\Phi_1, \Phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonları her $t \in [a, b]$ için

$$\Phi_1(t) \leq f(t) \leq \Phi_2(t), \quad (4.76)$$

olduğunda $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) + ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \\ \geq & ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1)(x) ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) + ({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x). \end{aligned} \quad (4.77)$$

İspat Her $t \in [a, b]$ için $\Phi_1(t) \leq f(t) \leq \Phi_2(t)$ olduğundan her $\tau, \rho \in [a, b]$ için

$$(\Phi_2(\tau) - f(\tau))(f(\rho) - \Phi_1(\rho)) \geq 0 \quad (4.78)$$

yazılabilir. Yukarıda eşitsizlik düzenlenirse

$$\Phi_2(\tau)f(\rho) + \Phi_1(\rho)f(\tau) \geq \Phi_1(\rho)\Phi_2(\tau) + f(\tau)f(\rho) \quad (4.79)$$

elde edilir. (4.79) ifadesinin her iki tarafı $u(\tau)\frac{1}{k_1\Gamma_{k_1}(\alpha_1)}\frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)}h'(\tau)(h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$
 $\times v(\rho)\frac{1}{k_2\Gamma_{k_2}(\alpha_2)}\frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)}h'(\rho)(h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin
sırasıyla τ ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Böylece (4.77) ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.13 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki integrallenebilir fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olsun. $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda her $t \in [a, b]$ için

$$\Phi_1(t) \leq f(t) \leq \Phi_2(t) \quad (4.81)$$

$$\Psi_1(t) \leq g(t) \leq \Psi_2(t)$$

şartları altında $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$\begin{aligned} & (B1)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B2)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_2)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_2)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B3)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_2)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_2)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B4)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) \\ & \geq ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Psi_1)(x). \end{aligned}$$

İspat Her $t \in [a, b]$ için $\Phi_1(t) \leq f(t) \leq \Phi_2(t)$ ve $\Psi_1(t) \leq g(t) \leq \Psi_2(t)$ olduğundan her $\tau, \rho \in [a, b]$ için

$$(\Phi_2(\tau) - f(\tau))(g(\rho) - \Psi_1(\rho)) \geq 0 \quad (4.82)$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\Phi_2(\tau)g(\rho) + \Psi_1(\rho)f(\tau) \geq \Psi_1(\rho)\Phi_2(\tau) + f(\tau)g(\rho), \quad \forall \tau, \rho \in [a, b]. \quad (4.83)$$

bulunur. (4.83) ifadesinin her iki yanı $u(\tau) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x) - h(\tau))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$
 $\times v(\rho) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x) - h(\rho))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin sırasıyla τ ve ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x) + ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_1)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) \\ & \geq ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_1)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) + ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g)(x). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Bu eşitsizlik bize (B1) ifadesini verir. (B2)-(B4) ispatlamak için (B1) ispatındaki yolu kullanarak

$$(B2) \text{ için } (f(\tau) - \Phi_1(\tau))(\Psi_2(\rho) - g(\rho)) \geq 0,$$

$$(B3) \text{ için } (\Phi_2(\tau) - f(\tau))(\Psi_2(\rho) - g(\rho)) \geq 0,$$

$$(B4) \text{ için } (f(\tau) - \Phi_1(\tau))(g(\rho) - \Psi_1(\rho)) \geq 0 \text{ eşitsizliklerinden faydalanılabilir.}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.6 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve (4.76) koşulunu sağlayan fonksiyon olsun.

$u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olmak üzere $\alpha, k > 0$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned} & ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f^2)(x) + ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2)(x) - 2 ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) \\ & = (({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) - ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x)) (({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) - ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1)(x)) \\ & \quad - ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_1 + \Phi_2))(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x) + (({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) - ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1)(x)) (({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_2)(x) \\ & \quad - ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f)(x)) - ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_1 + \Phi_2))(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f)(x) + ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_1 + \Phi_2) f)(x) \\ & \quad + ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_1 + \Phi_2) f)(x) + ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_2)(x) \\ & \quad + ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2)(x) - ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_2 - f) (f - \Phi_1))(x) \\ & \quad - ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u)(x) ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1 \Phi_2)(x) - ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_2 - f) (f - \Phi_1))(x) \\ & \quad - ({}_{a^+}^{k_2} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v)(x) ({}_{a^+}^{k_1} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1 \Phi_1)(x). \end{aligned} \quad (4.85)$$

İspat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve (4.76) koşulunu sağlayan fonksiyon olduğu için her

$\tau, \rho \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& (\Phi_2(\rho) - f(\rho))(f(\tau) - \Phi_1(\tau)) + (\Phi_2(\tau) - f(\tau))(f(\rho) - \Phi_1(\rho)) \\
& - (\Phi_2(\tau) - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1(\tau)) - (\Phi_2(\rho) - f(\rho))(f(\rho) - \Phi_1(\rho)) \\
& = f^2(\tau) + f^2(\rho) - 2f(\rho)f(\tau) + (\Phi_1(\rho) + \Phi_2(\rho))f(\tau) + (\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau))f(\rho) \\
& - \Phi_1(\tau)\Phi_2(\rho) - \Phi_1(\rho)\Phi_2(\tau) - (\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau))f(\tau) \\
& - (\Phi_1(\rho) + \Phi_2(\rho))(f(\rho) + \Phi_2(\tau)) + \Phi_1(\rho)\Phi_2(\rho).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

(4.86) ifadesinin her iki yanı $u(\rho) \frac{1}{k_1 \Gamma_{k_1}(\alpha_1)} \frac{\sigma(h(x)-h(\rho))}{h(x)-h(\rho)} h'(\rho) (h(x)-h(\rho))^{\frac{\alpha_1}{k_1}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin ρ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınrsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& (f(\tau) - \Phi_1(\tau))(({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x) - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)) + ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\
& - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x)(\Phi_2(\tau) - f(\tau)) - (\Phi_2(\tau) - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1(\tau))({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) \\
& - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_2 - f))(f - \Phi_1) \\
& = f^2(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) + ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf^2)(x) - 2f(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) + f(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_1 + \Phi_2))(x) \\
& + (\Phi_1(\tau)\Phi_2(\tau))({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) - \Phi_1(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x) - (\Phi_2(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) \\
& - (\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau))f(\tau)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_1 + \Phi_2)f)(x) \\
& + (\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau))({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) + ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1\Phi_1)(x)
\end{aligned} \tag{4.87}$$

(4.87) ifadesinin her iki yanı $v(\tau) \frac{1}{k_2 \Gamma_{k_2}(\alpha_2)} \frac{\sigma(h(x)-h(\tau))}{h(x)-h(\tau)} h'(\tau) (h(x)-h(\tau))^{\frac{\alpha_2}{k_2}-1}$ çarpılır ve elde edilen ifadenin τ 'ya göre a 'dan x 'e integrali alınrsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& (({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x) - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_1)(x))({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\
& - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\Phi_2 - f))(f - \Phi_1)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) \\
& + (({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_2)(x) - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x))({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) \\
& - ({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_2 - f))(f - \Phi_1)({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x) \\
& = ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf^2)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) + ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf^2)(x) - 2({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\
& + ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_1 + \Phi_2))(x) + ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\Phi_1 + \Phi_2))(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x) \\
& - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\Phi_1 + \Phi_2)f)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_1 + \Phi_2)f)(x) \\
& - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_1)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_2)(x) - ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_2)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1)(x) \\
& + ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\Phi_1\Phi_2)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x) + ({}^{k_2}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a^+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\Phi_1\Phi_1)(x)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.14 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki integrallenebilir fonksiyon olsun. $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ iki sürekli fonksiyon olduğunda

$$\begin{aligned}
\wp(\eta, \gamma_1, \gamma_2) = & (({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\gamma_2)(x) - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\eta)(x))({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\eta)(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\gamma_1)(x)) \\
& + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\gamma_1 + \gamma_2)\eta)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\eta)(x) \\
& - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\gamma_1)(x))({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\gamma_2)(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\eta)(x)) \\
& + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\gamma_1 + \gamma_2)\eta)(x) - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\gamma_1 + \gamma_2))(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\eta)(x) \\
& - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\gamma_1 + \gamma_2))(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\eta)(x) + ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\gamma_1)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\gamma_2)(x) \\
& + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\gamma_1)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u\gamma_2)(x) - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v\gamma_1\gamma_2)(x) \\
& - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\gamma_1\gamma_2))(x)
\end{aligned} \tag{4.89}$$

için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) \end{aligned} \right| \\
& \leq \sqrt{\wp(f, \Phi_1, \Phi_2)\wp(g, \Psi_1, \Psi_2)}.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

İspat Lemma 4.4 ifadesinden aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vfg)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ufg)(x) \\ & - ({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x) \end{aligned} \right]^2 \\
& \leq [({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf^2)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf^2)(x) - 2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}uf)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vf)(x)] \\
& \quad \times [({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg^2)(x) + ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug^2)(x) - 2({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}ug)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}vg)(x)]
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$(\Phi_2(\tau) - f(\tau))(f(\tau) - \Phi_1(\tau)) \geq 0$ ve $(\Psi_2(\tau) - g(\tau))(g(\tau) - \Psi_1(\tau)) \geq 0$ olduğundan

$$-({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Phi_2 - f)(f - \Phi_1))(x) \leq 0 \tag{4.92}$$

$$-({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u)(x)({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v(\Psi_2 - g)(g - \Psi_1))(x) - ({}^{k_2}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_2}v)(x)({}^{k_1}_{a+}I_{h\sigma}^{\alpha_1}u(\Psi_2 - g)(g - \Psi_1))(x) \leq 0 \tag{4.93}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Lemma 4.6 ifadesinden

$$\begin{aligned}
& \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f^2 \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f^2 \right)(x) - 2 \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f \right)(x) \\
\leq & \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2 \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f \right)(x) \right) \left(\left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1 \right)(x) \right) \\
& + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_1 + \Phi_2) f \right)(x) \\
& + \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1 \right)(x) \right) \left(\left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_2 \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f \right)(x) \right) \\
& + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_1 + \Phi_2) f \right)(x) \\
& - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Phi_1 + \Phi_2) \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v f \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Phi_1 + \Phi_2) \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u f \right)(x) \\
& + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1 \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_2 \right)(x) \\
& + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1 \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_2 \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Phi_1 \Phi_2 \right)(x) \\
& - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Phi_1 \Phi_1 \right)(x) \\
= & \wp(f, \Phi_1, \Phi_2)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g^2 \right)(x) + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g^2 \right)(x) - 2 \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g \right)(x) \\
\leq & \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Psi_2 \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g \right)(x) \right) \left(\left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_1 \right)(x) \right) \\
& + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Psi_1 + \Psi_2) g \right)(x) \\
& + \left(\left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Psi_1 \right)(x) \right) \left(\left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_2 \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g \right)(x) \right) \\
& + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Psi_1 + \Psi_2) g \right)(x) \\
& - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u (\Psi_1 + \Psi_2) \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v g \right)(x) - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v (\Psi_1 + \Psi_2) \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u g \right)(x) \\
& + \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Psi_1 \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_2 \right)(x) \\
& + \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_1 \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Psi_2 \right)(x) - \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \right)(x) \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \Psi_1 \Psi_2 \right)(x) \\
& - \left({}^{k_2}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_2} v \right)(x) \left({}^{k_1}_{a^+} I_{h\sigma}^{\alpha_1} u \Psi_1 \Psi_1 \right)(x) \\
= & \wp(g, \Psi_1, \Psi_2).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.94), (4.95) ve (4.91) ifadeleri birlikte kullanıldığında (4.90) ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Chebyshev ve Grüss tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Chebyshev ve Grüss tipli eşitsizliklerin birbirine benzer yönleri olduğu için bu tez çalışmasında bu iki eşitsizlik türü seçilmiştir. Chebyshev ve Grüss eşitsizliklerinin bulguları iki ayrı başlık altında sunulurken okuyucunun bu eşitsizlikler arasındaki farkı daha iyi anlaması amaçlanmıştır. Chebyshev eşitsizliğinde iki fonksiyonun çarpımının ortalama değerinin, fonksiyonların ortalama değerlerinin çarpımından büyük yada eşit olduğu aşıkardır ancak Grüss eşitsizliğinde fonksiyonların çarpımının ortalama değeri, fonksiyonların ortalama değerleri çarpımından büyük yada küçük olduğu tam olarak bilinmediği için bu durum mutlak değer içinde ifade edilir. Yazılan bu ifadenin fonksiyonun sınırlarının farkının çarpımlarının dörtte birinden küçük yada eşit olduğu belirtilir. Chebyshev eşitsizliğinde fonksiyonların senkronize olma şartı vardır. Grüss eşitsizliğinde fonksiyonların sınırları ve belirlenen sabit önemlidir.

Kullanılan operatör literatürde var olan bazı kesirleri integral operatörlere gerekli şartlar altında indirgenebilmektedir. Operatörün bu özelliği sayesinde elde edilen bulgulara $\sigma(\delta) = h(\delta) = \delta$ ve $k = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ile elde edilen özel durumlara, $\sigma(\delta) = h(\delta) = \delta$ seçilirse k -Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ile elde edilen özel durumlara, $h(\delta) = \delta$ ve $\alpha = k = 1$ ve $\sigma(\delta) = \frac{\delta}{\alpha} e^{(-\frac{1-\alpha}{\delta}\delta)}$ seçilirse üstel çekirdekli kesirli integral operatörü ile elde edilen özel durumlara, $k = 1$ ve $\sigma(\delta), h(\delta) = \ln \delta$ seçilirse Hadamard kesirli integral operatörü ile elde edilen özel durumlara indirgenen sonuçlar elde edilir.

Operatör farklı tipte eşitsizliklere uygulanarak yeni eşitsizlikler literatüre kazandırılabilir. Operatörün özel halleri kullanılarak farklı tipteki eşitsizlikler için de birçok özel sonuç elde etme fırsatını bizlere sunmaktadır. Operatörün özel şartlar altında hangi operatörlere indirgendiği belirtilmiştir. Dileyen araştırmacılar kullanılan operatörü kullanarak literatürde mevcut birçok eşitsizliği genelleştirebilir veya literatüre yeni eşitsizlikler kazandırabilir.

KAYNAKLAR

- Baloch, I. A. and İşcan, İ. (2015). Some Ostrowski type inequalities for harmonically-convex functions in second sense. *International Journal of Analysis*, 2015.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi.
- Caputo, M. and Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2):1–13.
- Chebyshev, P. (1882). Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites. In *Proc. Math. Soc. Charkov*, volume 2, pages 93–98.
- Dragomir, S. S. (1998). Some integral inequalities of grüss type. *RGMIA research report collection*, 1(2).
- Dragomir, S. S., Agarwal, R., and Cerone, P. (1999). On Simpson’s inequality and applications. *RGMIA research report collection*, 2(3).
- Grüss, G. (1935). Über das maximum des absoluten betrages von $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$. *Mathematische Zeitschrift*, 39:215–226.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.
- İşcan, İ. (2016). Ostrowski type inequalities for p -convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3):140–150.
- Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.
- Katugampola, U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4):1–15.
- Machado, J. T., Kiryakova, V., and Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus.

Communications in nonlinear science and numerical simulation, 16(3):1140–1153.

Miller, K. S. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*).

Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1991). *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Springer Netherlands.

Mitrinovic, D. S., Pečarić, J., and Fink, A. M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic Publishers, UK.

Mitrinovic, D. S. and Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.

Ni, J., Chen, G., and Dong, H. (2023). Study on Hermite-Hadamard-type inequalities using a new generalized fractional integral operator. *Journal of Inequalities and Applications*, 2023(1):59.

Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.

Ostrowski, A. (1937). Über die absolutabweichung einer differentiierebaren funktion von ihrem integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10(1):226–227.

Pearce, C. E., Pečarić, J., and Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard’s inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1):99–109.

Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., et al. (1993). *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland.

Sarikaya, M. Z. and Ertugral, F. (2020). On the generalized Hermite-Hadamard inequalities. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 47(1):193–213.

Spanier, J. (1974). *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. New York: Academic Press.

Szarski, J. (1965). *Differential inequalities*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk.

Young, W. H. (1912). On classes of summable functions and their fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 87(594):225–229.



ÖZGEÇMİŞ

