



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN
ÖRTÜLERİ VE YÜKSELMELERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze AYTEKİN ARICI

DANIŞMAN

Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 182342402 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Gamze AYTEKİN ARICI** tarafından hazırlanan **GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN ÖRTÜLERİ VE YÜKSELMELERİ** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Mustafa BAHŞİ

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 17 / 01 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Gamze AYTEKİN ARICI

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince değerli zamanını, bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca bana her türlü desteği sunan aileme ve her konuda yanımda olan eşim Berkant ARICI'ya çok teşekkür ederim.

Gamze AYTEKİN ARICI
AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
2.1 Kategori Teorisi.....	4
2.2 Çaprazlanmış Modüller.....	13
2.3 Cat^1 -Gruplar	17
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER.....	20
3.1 Etkimli Gruplar	20
3.2 Genelleştirilmiş Çaprazlanmış Modüller	22
3.3 Genelleştirilmiş Cat^1 -Gruplar.....	30
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL ÖRTÜLERİ.....	33
4.1 Etkimli Topolojik Gruplarda Bir Örnek.....	37
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL YÜKSELMELERİ	39
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	47
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ	51

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN ÖRTÜLERİ VE YÜKSELMELERİ

Gamze AYTEKİN ARICI

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ÖZET

Çaprazlanmış modüller matematik ve fiziğin birçok alanında uygulamaya sahip cebirsel yapılardır. Literatürde neredeyse bütün cebirsel yapılar için çaprazlanmış modüller tanımlanmış ve bunlarla ilgili çok çeşitli özellikler incelenmiştir. Topolojik uzaylarda önemli bir kavram olan örtü kavramı da çaprazlanmış modüller için tanımlanmış ve çeşitli kategorik denklikler elde edilmiştir. Yakın zamanda çaprazlanmış modüllerin yükselmesi kavramı ortaya çıkmıştır.

Çaprazlanmış modüllerin tanımındaki konjügasyon etkimeleri yerine keyfi etkimeler alınarak genelleştirilmiş çaprazlanmış modül tanımı elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında temel hedef olarak ise genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisinde örtü ve yükselme kavramları tanımlanıp literatürdekine benzer bir kategoriksel denklik elde edilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihçesi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise tezin geri kalan kısmında kullanılacak temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modül kavramı hatırlatılıp benzer düşünce kullanılarak genelleştirilmiş cat^1 -grup kavramı tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerde örtü kavramı tanımlanıp çeşitli özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerde yükselme kavramı tanımlanıp yine çeşitli özellikleri incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanıp sonrasında yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül, örtü, yükselme

Ocak, 2022; 51 sayfa

M.SC. THESIS

COVERINGS AND LIFTINGS OF GENERALIZED CROSSED MODULES

Gamze AYTEKİN ARICI

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

ABSTRACT

Crossed modules are algebraic structures that have applications in many fields of mathematics and physics. In the literature, crossed modules have been defined for almost all algebraic structures and various properties related to them have been investigated. Covering concept, which is an important concept in topological spaces, has also been defined for crossed modules and various categorical equivalences have been obtained. The concept of lifting of crossed modules has recently emerged.

The generalized crossed module definition is obtained by taking arbitrary actions instead of conjugation actions in the definition of crossed modules. In this thesis, as the main goal, the concepts of covering and lifting in the category of generalized crossed modules were defined and a categorical equivalence similar to the one in the literature was obtained.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, information about the history of the subject is given. In the second part, the basic concepts that will be used in the rest of the thesis are given. In the third chapter, the generalized crossed module concept is reminded and the generalized cat^1 -group concept is defined by using similar thinking. In the fourth chapter, the concept of cover in generalized crossed modules is defined and various properties are examined. In the fifth chapter, the concept of elevation in generalized crossed modules is defined and its various properties are examined. Finally, in the sixth section, the results obtained are interpreted and the studies that can be done afterwards are mentioned.

Keywords: Generalized crossed module, cover, lifting

January, 2022; 51 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Monomorfizm diyagramı	6
Şekil 2.2. Epimorfizm diyagramı	6
Şekil 2.3. Doğal dönüşüm diyagramı	10
Şekil 2.4. Çaprazlanmış modül şartlarının diyagramatik gösterimi	15
Şekil 2.5. Çaprazlanmış modül morfizmi	15
Şekil 3.1. Etkimli grup morfizmi	20
Şekil 3.2. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi.....	27
Şekil 3.3. Genelleştirilmiş cat^1 -grup morfizmi.....	31
Şekil 4.1. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtü morfizmi	33
Şekil 4.2. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtülerinin morfizmi	33
Şekil 4.3. $\langle f, \tilde{g} \rangle$ diyagramı	35
Şekil 4.4. Örtü morfizmlerinin bileşkesi.....	35
Şekil 5.1. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül yükselmesi.....	39
Şekil 5.2. $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü	41
Şekil 5.3. Yükselmelerin morfizmi.....	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Ab	Abeliyan grupların kategorisi
Cat	Tüm küçük kategorilerin kategorisi
$\text{coker } f$	f dönüşümünün dual çekirdeği
$\text{Cov}_{\text{GCM}}(A, B, \alpha)$	(A, B, α) nın örtülerinin kategorisi
GCM	Genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi
Gr*	Etkimli grupların kategorisi
Grp	Grupların kategorisi
$\text{Im } f$	f dönüşümünün görüntü kümesi
$\text{ker } f$	f dönüşümünün çekirdeği
$\text{LGCM}/(A, B, \alpha)$	(A, B, α) nın yükselmelerinin kategorisi
Mod_R	R –modüllerin kategorisi
Ring	Halkaların kategorisi
Ring_1	Birimli halkaların kategorisi
Set	Kümelerin kategorisi
Set_1	Tek elemanlı kümelerin kategorisi
Top	Topolojik uzayların kategorisi
Top^*	Noktalı topolojik uzayların kategorisi
TopGp	Topolojik grupların kategorisi
Vekt_F	F cismi üzerindeki vektör uzaylarının kategorisi
XMod	Çaprazlanmış modüllerin kategorisi

1. GİRİŞ

1940'lı yılların sonunda, J. H. C. Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerin reprezentasyonu anlamında çaprazlanmış modül kavramı ortaya çıkmıştır. Daha sonra S. Mac Lane ve Whitehead grup kohomolojisiinde üçüncü kohomoloji grubu H^3 'ü temsil etmek için çaprazlanmış modülleri kullanmıştır [1]. Bu yüzden çaprazlanmış modüller homotopi teorisinde, homolojik cebirde, abelian olmayan kohomolojide, kombinatoryal grup teorisinde, cebirsel K-teoresi, halka teoris ve ilgili cebirlerin uygulamalarında kullanılmıştır. Çaprazlanmış modüllerin cebirsel nesneler olarak kendi başlarına bile araştırılması ilgi konusudur.

Son zamanlarda, Norrie'nin doktora tezi [2] ile başlayarak, çaprazlanmış modüllerin cebirsel olarak incelenmesi anlamında bir araştırma alanı ortaya çıkmıştır. Norrie, çaprazlanmış modüllerin ve aralarındaki çaprazlanmış modül morfizmlerinin kategorisinin, grup kategorisine benzer birçok biçimsel özelliğe sahip olduğunu ve grup teorik kavramlarının ve sonuçlarının ne kadarının çaprazlanmış modüller için uygun karşılıkları olduğunu göstermiştir.

Loday [3]'te, çaprazlanmış modüllerin kategorisinin cat^1 -grupların kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Ayrıca, birçok matematikçi, çaprazlanmış modüllerin kategorisinin ve onun önemli bir alt kategori olan çaprazlanmış P -modüllerinin kategorisinin kategoriksel özelliklerini ve bu kategorilerde çarpımlar, eşitleyiciler, geri çekilmeler, dual çarpımlar vb. gibi önemli objelerini araştırmıştır (bkz. [4-8]).

A ve B iki grup ve $\alpha: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olsun. B nin A üzerine (sol) etkimesi

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \tag{1.1}$$

ile verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (A, B, α) üçlüsüne bir çaprazlanmış modül denir.

[CM1] Her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b \tag{1.2}$$

[CM2] Her $a, a_1 \in A$ için

$$\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a \tag{1.3}$$

(A, B, α) ve (A', B', α') iki çaprazlanmış modül ve $f_1: A \rightarrow A'$, $f_2: B \rightarrow B'$ iki grup homomorfizmi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\langle f_1, f_2 \rangle$ ikilisine bir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

$$[\text{CMM1}] \quad f_2 \alpha = \alpha' f_1 ,$$

$$[\text{CMM2}] \quad \text{Her } b \in B \text{ ve } a \in A \text{ için}$$

$$f_1(b \cdot a) = f_2(b) \cdot f_1(a). \quad (1.4)$$

Dikkat edilirse, çaprazlanmış modülün tanımında, A nın A üzerine ve B nin B üzerine etkimeleri konjugasyon etkimeleridir. Yakın zamanda, Yavari ve Salemkar [9], A nın A üzerine ve B nin B üzerine etkimelerinin keyfi olmasının çaprazlanmış modül kavramını genelleştirdiğini düşünmüşlerdir. Böylece, tüm genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller ve aralarındaki genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmlerinden **GCM** kategorisini elde etmişler ve bu kategorideki bazı önemli kategorik yapıları araştırmışlardır. Ayrıca, **GCM** kategorisindeki epimorfizmleri incelemiş ve epimorfizmler ile örten morfizmler arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır.

Genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller kategorisinin incelenmesi, sıradan çaprazlanmış modüller kategorisini daha iyi anlamamıza yardımcı olur. Konjugasyon etkimelerini genelleştirerek, konjugasyonun diğer etkimelere üstünlüğünün ne olduğunu bulabiliriz. Ayrıca, diğer etkimelerin (konjugasyon dışında) çaprazlanmış modül ile aynı özelliklere sahip olduğu genelleştirilmiş bir çaprazlanmış modül bulabiliriz. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorik özelliklerinin incelenmesi, bu kategoride çalışmayı ve bu kategorideki araştırmayı daha pürüzsüz hale getirecektir.

Bu çalışmanın amacı, literatürde gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller için elde edilmiş olan örtü çaprazlanmış modülü ve yükselme çaprazlanmış modülü kavramlarını gruplar üzerindeki genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller için de tanımlayıp bu iki kavramın kategorik olarak denk olduklarını göstermektir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle üçüncü bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerle ilgili tanım ve bazı sonuçlar hatırlatılmıştır. Daha sonra literatürde iyi bilinen cat^1 -gruplar ile çaprazlanmış modüllerin kategoriksel denkliği kullanılarak genelleştirilmiş cat^1 -grup kavramı tanımlanmış ve bu tür cebirsel yapıların kategorisi elde edilmiştir. Benzer bir denklik tanımlanamamış olsa da genelleştirilmiş cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – Grp** den genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi **GCM** ye bir fanktor tanımlanmıştır.

Yine literatürde çaprazlanmış modüller için örtü çaprazlanmış modülü ve yükselme

kavramları bulunmaktadır. Ayrıca verilen bir çaprazlanmış modül için bu çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi ile yükselmelerinin kategorisinin denk olduğu bilinmektedir. Benzer düşünce ile önce dördüncü bölümde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtü kavramı tanımlanmış ve verilen bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi elde edilmiştir. Yine bu bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin örtüleri ile ilgili literatürde bulunan benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün bir grup homomorfizmi üzerinden yükselmesi kavramı tanımlanmış ve verilen bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün yükselmelerinin kategorisi elde edilmiştir. Benzer şekilde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün yükselmeleri için de çeşitli sonuçlar gösterilmiştir. Ayrıca verilen bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ ile yükselmelerinin kategorisi $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ nin doğal olarak denk olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Kategori Teorisi

Bu bölümde kategori teorisinden tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve sonuçları vereceğiz. Bu kısımda hatırlatılan tanım ve sonuçlar için [10-12] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.1. Bir $C = (C_0, C_1, d_0, d_1, \varepsilon, \circ)$ kategorisi objelerin sınıfı olarak adlandırılan bir C_0 sınıfı, morfizmlerin sınıfı olarak adlandırılan bir C_1 sınıfını, sırasıyla başlangıç ve bitiş fonksiyonları olarak adlandırılan $d_0, d_1: C_1 \rightarrow C_0$ fonksiyonları, birim morfizm fonksiyonu olarak adlandırılan $\varepsilon: C_0 \rightarrow C_1$ fonksiyonu ve $C_1 * C_1 = \{(f, g) \mid d_0(g) = d_1(f)\}$ olmak üzere kısmi bileşke işlemi olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} \circ: C_1 * C_1 &\rightarrow C_1 \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned} \tag{2.1}$$

funksiyonundan oluşur. Bu tanımladığımız fonksiyonlar aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) Birleşme özelliği: $d_0(g) = d_1(f)$ ve $d_0(h) = d_1(g)$ olacak şekildeki $f, g, h \in C_1$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dır.
- (ii) Birim özelliği: Her $f \in C_1$ morfizmi için $\varepsilon(d_1(f)) \circ f = f$ ve $f \circ \varepsilon(d_0(f)) = f$ dır.

Bu tanımda $d_0(f) = A$ ve $d_1(f) = B$ ise bu $f: A \rightarrow B$ ile, her $A \in C_0$ için $\varepsilon(A) = 1_A: A \rightarrow A$ ile ve her $A, B \in C_0$ obje çifti için A dan B ye morfizmlerin kümesi $C(A, B)$ ile gösterilir. Ayrıca $f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ morfizmleri için $g \circ f: A \rightarrow C$ dir.

Bu tanımları verdikten sonra $d_0(g) = d_1(f)$ olacak şekildeki her $f, g \in C_1$ morfizmleri için $g \circ f$ bileşkesi kısaca gf şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1. Tüm kümelerin sınıfından bir kategori oluşturabiliriz. Oluşturduğumuz kategorinin objeleri kümeler ve morfizmleri ise kümeler arasındaki aşıkâr fonksiyonlardır. A, B kümeleri için $C(A, B)$ sınıfı A dan B ye tüm fonksiyonların sınıfıdır. Kümeler kategorisindeki kısmi işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak

tanımlanır. Her bir A kümesi için birim morfizm $1_A: A \rightarrow A$ birim fonksiyonudur. Bu kategori **Set** ile adlandırılır.

Örnek 2.2. Bir başka uzay olarak; topolojik uzayların sınıfı ile bir kategori tanımlayabiliriz. Bu kategorinin objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem de fonksiyonların bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan böyle bir kısmi işlem tanımlıdır. Bu kategori **Top** ile adlandırılır.

Örnek 2.3. Topolojik uzaylardan noktalı topolojik uzayları alıp bir kategori tanımlayalım: objeleri noktalı topolojik uzaylardır. Noktalı topolojik uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler de morfizmleri alınarak oluşturulan kategori noktalı topolojik uzayların kategorisidir ve **Top*** şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.4. Gruplar teorisindeki gruplar objeleri, grup homomorfizmleri morfizmleri ve grup homomorfizmlerin bileşkesi kısmi işlemi olan bir kategori tanımlanır. Bu kategori **Grp** ile gösterilir. Bu örneğe benzer olarak halkalar ve halka homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. Bu kategori ise **Ring** ile gösterilir.

Örnek 2.5. Objeleri topolojik gruplar, morfizmleri de sürekli grup homomorfizmleri olan topolojik grupların kategorisi tanımlanır ve bu kategori **TopGp** ile gösterilir.

Örnek 2.6. R birimli bir halka, M ve N de birer (sol) R –modül olsun. M den N ye bir R –modül morfizmi her $r \in R$ ve $m \in M$ için $f(rm) = rf(m)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $f: M \rightarrow N$ grup homomorfizmi olarak tanımlanır. Objeleri R –modüller ve morfizmleri ise R –modül morfizmleri olan bir kategori oluşturulur. Bu kategori **Mod_R** şeklinde gösterilir.

Benzer bir şekilde bir F cismi üzerindeki vektör uzayların **Vekt_F** kategorisi oluşturulur. Objeleri vektör uzayları, morfizmleri ise vektör uzaylar arasındaki lineer dönüşümlerden oluşan kategori oluşur.

Tanım 2.2. C ve D birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa D kategorisine C kategorisinin bir alt kategorisi denir:

- (i) D_0 sınıfı C_0 sınıfının bir alt sınıfıdır.

- (ii) Her bir $A, B \in D_0$ için $D(A, B) \subseteq C(A, B)$ dir.
- (iii) D kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi, C kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi ile aynıdır.
- (iv) Her bir $A \in D_0$ için D deki 1_A birim morfizmi, C deki birim morfizm ile aynıdır.

Örnek 2.7. Birimli halkaların kategorisi **Ring**₁, halkaların kategorisi **Ring** in bir alt kategorisidir.

Tanım 2.3. D kategorisi C kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer her $A, B \in D_0$ iki obje ve $D(A, B) = C(A, B)$ ise D ye C nin bir dolu (full) alt kategorisi denir. Eğer $D_0 = C_0$ ise D ye C nin bir geniş alt kategorisi denir.

Örnek 2.8. Herhangi bir C kategorisi alalım. C nin sadece birim morfizmlerinden oluşan kategorisi, C nin bir geniş alt kategorisidir. Abelyan grupların kategorisi **Ab**, grupların kategorisi **Grp** nin bir dolu alt kategorisidir.

Tanım 2.4. C herhangi bir kategorisi ve $f: B \rightarrow C$ ise C de bir morfizm olsun. Eğer $fg = fh$ olacak şekilde her $g, h: A \rightarrow B$ morfizmleri için $g = h$ ise f morfizmine bir monomorfizm(mono) denir.

$$A \xrightarrow[h]{g} B \xrightarrow{f} C$$

Şekil 2.1. Monomorfizm diyagramı

Örnek 2.9. **Set** ve **Grp** kategorilerinde birebir morfizmler monomorfizmlerdir.

Epimorfizm tanımını da aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Tanım 2.5. C herhangi bir kategori ve $f: A \rightarrow B$ ise C de bir morfizm olsun. Eğer $gf = hf$ şeklinde tanımlı her $g, h: B \rightarrow C$ morfizmleri için $g = h$ ise f morfizmine bir epimorfizm (epi) denir.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow[h]{g} C$$

Şekil 2.2. Epimorfizm diyagramı

Örnek 2.10. **Set**, **Grp** kategorilerinde örten morfizmler epimorfizmlerdir.

Tanım 2.6. C herhangi bir kategori ve $f: A \rightarrow B$ ise C de bir morfizm olsun. Eğer $gf = 1_A$ ve $fg = 1_B$ olacak şekilde C de bir $g: B \rightarrow A$ morfizmi varsa f morfizmine bir izomorfizm, A ile B objelerine izomorftur denir ve $A \cong B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımlarla g morfizmine f morfizminin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir. Ayrıca f^{-1} de bir izomorfizmdir.

Örnek 2.11. **Set** kategorisindeki izomorfizmler birebir ve örten fonksiyonlardır. **Top** kategorisindeki tanımlı izomorfizmler homeomorfizmlerdir. **Grp** kategorisindeki izomorfizmler ise birebir örten grup homomorfizmleridir.

Tanım 2.7. C bir kategori ve $A \in C_0$ olsun. Her $X \in C_0$ objesi için bir tek $A \rightarrow X$ morfizmi varsa bu A objesine bir başlangıç objesi denir.

Örnek 2.12. **Set** kategorisinde boş küme, **Grp** kategorisinde ise tek elemanlı gruplar birer başlangıç objesidir.

Tanım 2.8. C bir kategori ve $A \in C_0$ olsun. Her $X \in C_0$ objesi için bir tek $X \rightarrow A$ morfizmi varsa bu A objesine bir bitiş objesi denir.

Örnek 2.13. **Set** kategorisinde tek elemanlı kümeler, **Grp** kategorisinde ise tek elemanlı gruplar birer bitiş objesidir.

Tanım 2.9. C bir kategori ve $A \in C_0$ olsun. Eğer A objesi hem başlangıç hem de bitiş objesi ise bu A objesi bir sıfır obje olarak tanımlanır.

Örnek 2.14. **Grp** kategorisinde tek elemanlı grup bir sıfır objedir.

Bir kategorideki başlangıç, bitiş ve böylece sıfır objeleri izomorfizme göre tektir. Eğer bir C kategorisinde de bir $0 \in C_0$ sıfır objesi varsa her $A, B \in C_0$ obje çifti için bir tek $A \xrightarrow{0_A} 0$ ve $0 \xrightarrow{0_B} B$ morfizmi vardır. Bu morfizmlerin bileşkesi A den B ye sıfır morfizm olarak tanımlanır ve $A \xrightarrow{0_{A,B}} B$ ile gösterilir.

Örneğin **Grp** kategorisindeki keyfi A ve B grupları için A nın her elemanını B nin birim elemanına eşleyen grup homomorfizmi sıfır morfizmdir. Sıfır objeye sahip bir

kategoride bir sıfır morfizm ile herhangi bir morfizmin bileşkesi yine bir sıfır morfizmdir.

Tanım 2.10. C herhangi bir kategori ve $f, g: A \rightarrow B$ ise C de iki morfizm olsun. Eğer bir $e: E \rightarrow A$ morfizmi için

- (i) $fe = ge$,
- (ii) $fx = gx$ olacak şekildeki her $x: X \rightarrow A$ morfizmi için $e\phi = x$ olacak şekilde bir tek $\phi: X \rightarrow E$ morfizmi vardır.

şartları sağlanıyorsa (E, e) ikilisine f ve g morfizmlerinin bir eşitleyicisi (equalizer) denir.

Örnek 2.15. **Set** kategorisinde keyfi A ve B kümeleri ve $f, g: A \rightarrow B$ fonksiyonları için $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ olmak üzere f ile g nin eşitleyicisi $i: E \rightarrow A$ içine fonksiyonudur.

Dual eşitleyici (coequaliser) tanımı aşağıda şekilde yapılır.

Tanım 2.11. C herhangi bir kategori ve $f, g: A \rightarrow B$ ise C de iki morfizm olsun. Eğer bir $c: B \rightarrow C$ morfizmi için

- (i) $cf = cg$
- (ii) $xf = xg$ tanımlı olacak şekilde her $x: B \rightarrow X$ morfizmi için $\phi c = x$ bir tek $\phi: C \rightarrow X$ morfizmi vardır.

şartları sağlanıyorsa (C, c) ikilisine f ve g morfizmlerinin bir dual eşitleyicisi (coequalizer) denir.

Örnek 2.16. **Set** kategorisinde A ve B kümeleri ile $f, g: A \rightarrow B$ fonksiyonları için B üzerindeki, her $a \in A$ için $f(a) \sim g(a)$ olacak şekildeki en küçük denklik bağıntısını alalım. Bu durumda f ile g fonksiyonlarının dual eşitleyicisi B nin bu denklik bağıntısı ile bölüm kümesi $B/\sim$ ile $B \xrightarrow{p} B/\sim$ doğal fonksiyonudur.

Tanım 2.12. C herhangi bir kategori ve $0 \in C$ bir sıfır obje olsun. Bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için f ve $0_{A,B}$ morfizmlerinin eşitleyicisine f morfizminin çekirdeği (kernel) denir ve $\ker f$ simgesiyle gösterilir.

Örnek 2.17. A ve B iki keyfi grup ve $f: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olmak üzere $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ dir.

Tanım 2.13. C herhangi bir kategori ve $0 \in C$ bir sıfır obje tanımlayalım. Bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için f ve $0_{A,B}$ morfizmlerinin dual eşitleyicisine f morfizminin dual çekirdeği (cokernel) denir ve $\operatorname{coker} f$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.18. A ve B herhangi iki grup ve $f: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi tanımlansın. $N(\operatorname{Im} f)$, $\operatorname{Im} f$ in normal kapanışı olmak üzere $\operatorname{coker} f = B/N(\operatorname{Im} f)$ eşitliği vardır.

Tanım 2.14. C ve D birer keyfi kategori olmak üzere C nin her bir A objesini D nin bir $F(A)$ objesine, C nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmini ise D nin bir $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne C den D ye bir fanktor denir ve $F: C \rightarrow D$ olarak yazılır.

- (i) C kategorisinde $g \circ f$ tanımlı olacak şekilde f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ve
- (ii) her $A \in C_0$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır [9].

Örnek 2.19. $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu dönüşüm bir topolojik uzayı, üzerinde tanımlı olduğu kümeye götüren bir fanktordur. Bu tanımlamadaki gibi objeler üzerindeki yapıyı unutan fanktora unutkan fanktor denir. $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U: \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ birer unutkan fanktor örneğidir.

İki fanktorun bileşkesinin yine bir fanktor olduğu aşikârdır. Bu şekilde objeleri küçük kategoriler, morfizmleri ise kategoriler arasındaki fanktorlar seçilerek bir kategori oluşturulabilir. Bu kategoriye küçük kategorilerin kategorisi denir ve $\mathbf{Cat}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. X ve Y birer topolojik uzay olmak üzere X in eğri bileşenlerinin kümesine $\pi_0(X)$ diyelim. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ fonksiyonunu " $C \in$

$\pi_0(X)$ için $\pi_0(f)(C)$, $f(C)$ yi içeren eğri bileşeni olsun." şeklinde tanımlayalım. O halde $\pi_0: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir fanktordur.

Örnek 2.20. Her bir noktalı topolojik uzayı, baz noktasındaki temel gruba götüren $\pi_1: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$ dönüşümü bir fanktordur.

Tanım 2.15. $F, G: C \rightarrow D$ iki fanktor olsun. C nin her $A \in C_0$ objesini D nin bir $\eta_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine dönüştüren bir $\eta: C_0 \rightarrow D_1$ dönüşümü tanımlayalım. Eğer C nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için Şekil 2.3'te verilen diyagram değişmeli ise η ya bir doğal dönüşüm denir ve $\eta: F \rightarrow G$ olarak gösterilir.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

Şekil 2.3. Doğal dönüşüm diyagramı

Tanım 2.16. $F, G: C \rightarrow D$ birer fanktor olsun. Bir $\eta: F \rightarrow G$ doğal dönüşümünde her bir $A \in C_0$ için $\eta_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmi D de bir izomorfizm ise η ya bir doğal izomorfizm, F ile G ye de doğal olarak denktir denir ve $F \cong G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2. $F, G: C \rightarrow D$ fanktorları verilsin. $F \cong G$ dir ancak ve ancak $\sigma\mu = 1_F$ ve $\mu\sigma = 1_G$ olacak şekilde $\mu: F \rightarrow G$ ve $\sigma: G \rightarrow F$ doğal dönüşümleri vardır.

Tanım 2.17. $F: C \rightarrow D$ bir fanktor olsun. Eğer $G \circ F \cong 1_C$ ve $F \circ G \cong 1_D$ olacak şekilde $G: D \rightarrow C$ fanktoru varsa bu kategorilere doğal olarak denktir denir ve $C \cong D$ olarak yazılır.

Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye bir grupoid denir. Bir monoid tek objeli bir kategori olarak bir grup ise tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir [11]. Grupoidin ayrıntılı tanımını Mackenzie [12] deki gibi verelim.

Tanım 2.18. G_0 objelerin sınıfı, G_1 tüm morfizmlerin sınıfı ve $x, y \in G_0$ için x den y ye morfizmlerin sınıfı $G(x, y)$ olmak üzere aşağıdaki dönüşümler verilsin.

- (i) Her bir $a \in G(x, y)$ için $s(a) = x$ ve $t(a) = y$ ile tanımlanan $s, t: G_1 \rightarrow G_0$ sırasıyla başlangıç ve bitiş dönüşümleridir.
- (ii) Her bir $x \in G_0$ objesi için $1_x, x$ objesindeki birim morfizm olmak üzere $\varepsilon: G_0 \rightarrow G_1, x \rightarrow \varepsilon(x) = 1_x \in G(x, x)$ ile tanımlanan birim morfizm dönüşümüdür.
- (iii) Her bir $a \in G(x, y)$ için $a^{-1} \in G(y, x)$ olacak şekilde tanımlı olan $u: G_1 \rightarrow G_1, a \rightarrow u(a) = a^{-1}$ ters eleman dönüşümüdür.
- (iv) $G * G = \{(b, a) \in G \times G \mid s(b) = t(a)\}$ olmak üzere $m: G * G \rightarrow G, (b, a) \rightarrow b \circ a$ ile tanımlanan parçalı işlem.

Eğer bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar ise G_1 sınıfına G_0 üzerinde bir grupoid denir ve bu grupoid G ile gösterilir [11].

- (a) Her $(b, a) \in G * G$ için $s(b \circ a) = s(a)$ ve $t(b \circ a) = t(b)$ dir.
- (b) $(b, a), (c, b) \in G * G$ için $c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a$ dır.
- (c) Her bir $x \in G_0$ için $1_x, x$ noktasındaki birim morfizm olmak üzere $s(1_x) = t(1_x) = x$ dir.
- (d) Her $a \in G_1$ için $1_{t(a)} \circ a = a$ ve $a \circ 1_{s(a)} = a$ dır.
- (e) Her bir $a \in G$ için $s(a^{-1}) = t(a), t(a^{-1}) = s(a)$ olmak üzere $a \circ a^{-1} = 1_{t(a)}$ ve $a^{-1} \circ a = 1_{s(a)}$ dır.

Örnek 2.21. **Set** kategorisinin bir elemanlı kümelerin kategorisi bir alt kategoridir ve **Set**₁ bir grupoiddir.

Örnek 2.22. X bir topolojik uzay olsun. X deki $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ eğrilerinin $[\alpha]$ ile gösterilen uç noktalarına göre homotopi sınıflarının kümesi $\pi_1 X$, X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid X uzayının temel grupoidi olarak adlandırılır.

G ve H birer grupoid olmak üzere $f: G \rightarrow H$ fanktoruna bir grupoid morfizmi denir. Bir G grupoidinde her $x, y \in G_0$ için $G(x, y) \neq \emptyset$ ise G ye irtibatlı (geçişken), $G(x, y) = \emptyset$ ise G ye tamamen irtibatsız denir. Bir $x \in G_0$ için $s^{-1}(x)$ kümesine G nin x objesindeki starı denir ve **St** _{G} x ile gösterilir. Her x objesi için $G(x, x)$ kümesi grupoidin bileşke işlemine göre bir grup olur ve bu gruba x objesindeki obje grubu denir. Bu obje grubu genellikle $G(x)$ ile gösterilir. Tamamen irtibatsız bir grupoid sadece obje grupları tarafından belirlenir. Bu şekildeki bir grupoid genelde grupların demeti olarak adlandırılır [12].

Özel olarak $\pi_1 X$ irtibatlıdır ancak ve ancak X eğrisel irtibatlıdır.

Tanım 2.19. Keyfi bir X topolojik uzayında her $x, y \in X$ için $\pi_1 X(x, y)$ yalnızca bir elemana sahipse bu grupoid 1-irtibatlıdır veya tree grupoid denir. Ayrıca $\pi_1 X$ bir tree grupoid ise X uzayına 1-irtibatlıdır denir. Bu ise X in eğrisel irtibatlı olması ile mümkündür.

Örnek 2.23. X boştan farklı bir küme ve $R \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı tanımlı olsun. $(x_1, x_2), x_1$ den x_2 ye bir morfizm olmak üzere R bağıntısı

$$\begin{aligned} \circ: \quad R \times R &\rightarrow R \\ ((x_1, x_2), (x_2, x_3)) &\mapsto ((x_2, x_3) \circ (x_1, x_2)) = (x_1, x_3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan işlemine göre 1-irtibatlı bir grupoid (tree grupoid) oluşturulur.

Örnek 2.24. $G_0 = \{0, 1\}$ ojelerinden oluşan, birim morfizmler dışındaki morfizmleri $\iota: 0 \rightarrow 1$ ve bu morfizmin tersi olan $\iota^{-1}: 1 \rightarrow 0$ olan grupoid 1-irtibatlı bir grupoiddir. Bu grupoid özel olarak $\mathcal{J}$ ile gösterilir.

Tanım 2.20. Bir X topolojik uzayının eğri bileşenlerinin herbiri 1-irtibatlı ise her $x, y \in X$ için $\pi_1 X(x, y)$ birden fazla eleman içermez ve bu durumda X ve $\pi_1 X$ e basit irtibatlıdır denir. Bir G grupoidinde her $x, y \in G_0$ için $G(x, y)$ birden fazla elemana sahip değilse bu G grupoidine basit irtibatlıdır denir [11].

Önerme 2.1. Basit irtibatlı bir grupoidde bütün diyagramlar değişmelidir.

Önerme 2.2. Bir G grupoidi başlangıç veya bitiş objesine sahip ise her $x, y \in G_0$ objeleri için $x \cong y$ dir.

Sonuç 2.1. Bir grupoidde başlangıç ya da bitiş objesi varsa bu grupoiddeki tüm objeler birbirlerine izomorfturlar. Bu durumda başlangıç ve bitiş objeleri de birbirine izomorftur o zaman bunlar sıfır objedir. Yani başlangıç (bitiş) objesine sahip bir grupoidde bu obje sıfır objedir. Ek olarak böyle bir grupoid 1-irtibatlıdır.

Lemma 2.1. G herhangi bir grupoid ve C bir kategori olsun. $F: G \rightarrow C$ bir fanktor olmak üzere F fanktoru morfizmler üzerinde örten ise C bir grupoiddir.

İspat: F fanktoru morfizmler üzerinde örten ise herhangi bir $b \in C(X, Y)$ morfizmi için $F(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in G(A, B)$ morfizmi vardır. G bir grupoid olduğundan a bir izomorfizmdir. Ayrıca F bir fanktor olduğundan $b = F(a)$ morfizmi de bir izomorfizm olur. O halde C bir grupoiddir [9].

Tanım 2.21. Bir G grupoidinin bir H altkümesi G deki işlemlere göre bir grupoid oluyorsa H grupoidine G nin bir altgrupoidi denir. H, G nin bir altgrupoidi olmak üzere eğer $H_0 = G_0$ ise H grupoidine G nin bir geniş altgrupoid denir [11].

Tanım 2.22. G herhangi bir grupoid ve N de G nin bir geniş altgrupoidi olsun. Eğer her $x, y \in G_0$ ve her $a \in G(x, y)$ için $a \circ N(x) = N(y) \circ a$ ise N ye G nin bir normal altgrupoidi denir.

Örnek 2.25. G ve H herhangi iki grupoid ve $f: G \rightarrow H$ bir grupoid morfizmi tanımlı olsun. Bu durumda $N = \{a \in G \mid f(a) = 1_{f(s(a))}\}$ kümesi G nin bir normal altgrupoididir.

2.2 Çaprazlanmış Modüller

Bu kısımda grupların kategorisindeki çaprazlanmış modül kavramı hatırlatılıp tezin devamında kullanılacak bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

Tanım 2.23. G ve H birer grup olmak üzere

$$\begin{aligned} H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto h \cdot g \end{aligned} \tag{2.3}$$

dönüşümünü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa H grubu, G grubu üzerine (soldan) etkir denir.

(i) Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için

$$h \cdot (h_1 \cdot g) = (h + h_1) \cdot g \tag{2.4}$$

(ii) Her $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için

$$h \cdot (g + g_1) = (h \cdot g) + (h \cdot g_1) \quad (2.5)$$

(iii) Her $g \in G$ ve $e_H \in H$ birim elemanı için

$$e_H \cdot g = g \quad (2.6)$$

Örnek 2.26. Aşağıda verilenler iyi bilinen etkime örnekleridir:

- (i) G herhangi bir grup ve N de normal bir alt grup olsun. $G \times N \rightarrow N$, $(g, n) \rightarrow g + n - g$ dönüşümü bir etkimedir ve bu etkiye konjügasyon etkimesi olarak adlandırılır.
- (ii) G ve H iki grup olmak üzere $H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \rightarrow g$ dönüşümü aşıkâr etkiye olarak adlandırılır.
- (iii) Keyfi bir A grubu için $\text{Aut } A \times A \rightarrow A$, $(f, a) \rightarrow f(a)$ dönüşümü de bir etkimedir.

Tanım 2.24. A ve B herhangi iki grup ve $\alpha: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olsun. B nin A üzerine (soldan) etkimesi

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (A, B, α) üçlüsüne bir çaprazlanmış modül denir [13].

(i) Her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b, \quad (2.8)$$

(ii) her $a, a_1 \in A$ için

$$\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a. \quad (2.9)$$

Çaprazlanmış modül şartları değişmeli diyagramlar cinsinden de ifade edilebilir. ψ_A , A üzerindeki, ψ_B ise B üzerindeki konjügasyon etkimesini göstermek üzere Şekil 2.4 teki diyagram değişmeli ise (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olur.

$$\begin{array}{ccccc}
A \times A & \xrightarrow{\psi_A} & A \\
\alpha \times 1_A \downarrow & & \downarrow 1_A \\
B \times A & \xrightarrow{\cdot} & A \\
1_B \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\
B \times B & \xrightarrow{\psi_B} & B
\end{array}$$

Şekil 2.4. Çaprazlanmış modül şartlarının diyagramatik gösterimi

Örnek 2.27. Aşağıdaki verilen homomorfizmler birer çaprazlanmış modül örneğidir:

- (i) X bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. $\pi_2(X, A, x)$, X in relatif homotopi grubu olmak üzere $\rho: \pi_2(X, A, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ sınır dönüşümü,
- (ii) G bir grup ve N de normal bir alt grup olsun. $G \times N \rightarrow N$, $(g, n) \rightarrow g + n - g$ konjugasyon etkimesi ile birlikte $i: N \rightarrow G$ içine dönüşümü,
- (iii) A bir B -modül olmak üzere $0: A \rightarrow B$ sıfır morfizmi,
- (iv) Örtten ve merkezsiz çekirdeğe sahip olan herhangi bir $\alpha: A \rightarrow B$ grup homomorfizmi ve
- (v) herhangi bir A grubu için $\varphi: A \rightarrow \text{Aut } A$ iç otomorfizm dönüşümü birer çaprazlanmış modül olur.

Tanım 2.25. (A, B, α) ve (A_0, B_0, α_0) iki çaprazlanmış modül ve $f_1: A \rightarrow A_0$, $f_2: B \rightarrow B_0$ iki grup homomorfizmi olsun. $\langle f_1, f_2 \rangle$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir çaprazlanmış modül morfizmi olarak adlandırılır.

- (i) $f_2 \alpha = \alpha_0 f_1$,
- (ii) her $b \in B$ ve $a \in A$ için

$$f_1(b \cdot a) = f_2(b) \cdot f_1(a). \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{ccccc}
B \times A & \xrightarrow{\cdot} & A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
f_2 \times f_1 \downarrow & & f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
B_0 \times A_0 & \xrightarrow{\cdot} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & B_0
\end{array}$$

Şekil 2.5. Çaprazlanmış modül morfizmi

Objeleri çaprazlanmış modüller, morfizmleri ise yukarıdaki şekilde tanımlanan çaprazlanmış modül morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategoriye

grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi denir ve **XMod** ile gösterilir. Bu kategorideki birim morfizmler ise $\langle 1_A, 1_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A, B, \alpha)$ şeklindedir.

Tanım 2.26. (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir (S, T, σ) çaprazlanmış modülüne (A, B, α) nın bir alt çaprazlanmış modülü denir [14].

- (i) S ve T sırasıyla A ve B nin birer altgrubudur.
- (ii) σ morfizmi α morfizminin kısıtlamasıdır.
- (iii) T nin S üzerindeki etkimesi A nın B üzerine etkimesinin kısıtlamasıdır.

Bu tanıma denk olarak, (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun. S ve T sırasıyla A ve B nin birer altgrubu ve $\nu: S \rightarrow T$ dönüşümü α nın bir kısıtlaması olmak üzere $\langle i_S, i_T \rangle: (S, T, \nu) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ise (S, T, ν) çaprazlanmış modülünü (A, B, α) nın bir alt çaprazlanmış modülü olur. $\langle f_1, f_2 \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (C, D, \gamma)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ise $(\text{Im } f_1, \text{Im } f_2, \gamma^*)$ bir çaprazlanmış modül olup (C, D, γ) nın bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Norrie bir alt çaprazlanmış modül için normallik tanımından şöyle bahsetmektedir [14]:

Tanım 2.27. (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (S, T, ν) da (A, B, α) nın bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (S, T, ν) çaprazlanmış modülüne (A, B, α) nın bir normal alt çaprazlanmış modülü denir [14].

- (i) T, B nin bir normal altgrubudur,
- (ii) her $b \in B$ ve $s \in S$ için $b \cdot s \in S$ dir,
- (iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için $(t \cdot a) - a \in S$ dir.

Örneğin $\langle f_1, f_2 \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (C, D, \gamma)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ise bu morfizmin çekirdeği olarak adlandırılan $(\ker f_1, \ker f_2, \alpha^*)$ çaprazlanmış modülü (A, B, α) nın bir normal alt çaprazlanmış modülüdür.

Tanım 2.28. (A, B, α) herhangi bir çaprazlanmış modül ve (S, T, σ) da (A, B, α) nın bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu tanımla $(A/S, B/T, \alpha)$ da bir

çaprazlanmış modül olur. Bu şekilde oluşturulan çaprazlanmış modüle (A, B, α) nın (S, T, σ) tarafından bölüm çaprazlanmış modülü denir [15].

Burada $\alpha(a + S) = \alpha(a) + T$ şeklinde ve B/T bölüm grubunun A/S bölüm grubu üzerine etkimesi ise $(b + T) \cdot (a + S) = (b \cdot a) + S$ şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca bir (A, B, α) bir çaprazlanmış modülü ve bu çaprazlanmış modülün bir normal alt çaprazlanmış modülü (S, T, σ) verildiğinde $p_A: A \rightarrow A/S$ ve $p_B: B \rightarrow B/T$ kanonik izdüşüm fonksiyonları birer grup homomorfizmi olup $\langle p_A, p_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A/S, B/T, \alpha)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Bu $\langle p_A, p_B \rangle$ çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği ise (S, T, σ) çaprazlanmış modülüdür [15].

Sonuç 2.2. (A, B, α) ve (S, T, σ) birer çaprazlanmış modül olmak üzere (S, T, σ) çaprazlanmış modülü (A, B, α) nın bir normal alt çaprazlanmış modülüdür ancak ve ancak (S, T, σ) bir $\langle f_1, f_2 \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (C, D, \gamma)$ çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeğidir [15].

Teorem 2.3. (A, B, α) ve (C, D, γ) birer çaprazlanmış modül ve $\langle f_1, f_2 \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (C, D, \gamma)$ olmak üzere

$$\frac{(A, B, \alpha)}{(\ker f_1, \ker f_2, \alpha^*)} = \left(\frac{A}{\ker f_1}, \frac{B}{\ker f_2}, \alpha \right) \cong (\text{Im } f_1, \text{Im } f_2, \gamma^*) \quad (2.11)$$

dir [15].

Sonuç 2.3. (A, B, α) ve (C, D, γ) birer çaprazlanmış modül ve $(f_1, f_2): (A, B, \alpha) \rightarrow (C, D, \gamma)$ dönüşümü f_1 ve f_2 örten olacak şekilde bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$\frac{(A, B, \alpha)}{(\ker f_1, \ker f_2, \alpha^*)} = \left(\frac{A}{\ker f_1}, \frac{B}{\ker f_2}, \alpha \right) \cong (C, D, \gamma) \quad (2.12)$$

dır [15].

Önerme 2.3. (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (S, T, σ) ise (A, B, α) nin bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $A/S \times B/T \cong (A \times B)/(S \times T)$ dir [15].

2.3. Cat^1 -gruplar

Bu bölümde cat^1 -grup kavramının tanımını hatırlatıp Loday [3] tarafından ispatlanan denklik verilecektir.

Tanım 2.29. G bir grup, s ve t ise G nin birer endomorfizmi olsun. Eğer;

- (i) $st = t$ ve $ts = s$,
- (ii) $[\ker s, \ker t] = 0$

şartları sağlanıyorsa (G, s, t) üçlüsüne bir cat^1 -grup denir [3].

Burada $[\ker s, \ker t]$, $\ker s$ ve $\ker t$ tarafından elde edilen komutatör alt grubu göstermektedir.

Örnek 2.28. Her G grubu için $s = 1_G = t$ olarak alınırsa $(G, 1_G, 1_G)$ bir cat^1 -grup olur. O halde her grup bir cat^1 -grup olarak düşünülebilir.

Örnek 2.29. Herhangi bir G abelyan grubu için s ve t sıfır morfizm olarak alınırsa (G, s, t) bir cat^1 -grup olur.

Örnek 2.30. G bir grup ve $X = G \times G$ çarpım grubu olsun. $s(g_1, g_2) = (g_1, g_1)$ ve $t(g_1, g_2) = (g_2, g_2)$ grup homomorfizmleri ile birlikte (X, s, t) bir cat^1 -grup olur.

(G, s, t) ve (G_0, s_0, t_0) birer cat^1 -grup olmak üzere bir $f: G \rightarrow G_0$ grup homomorfizmi için $s_0 f = f s$ ve $t_0 f = f t$ oluyorsa f morfizmine bir cat^1 -grup morfizmi denir.

Örnek 2.31. Yukarıdaki örneklerde elde edilen $(G \times G, s, t)$ ve $(G, 1_G, 1_G)$ cat^1 -gruplarını ele alalım. Bu durumda $\pi_1, \pi_2: G \times G \rightarrow G$ izdüşüm morfizmleri birer cat^1 -grup morfizmleridir.

Objeleri cat^1 -gruplar, morfizmleri ise cat^1 -grup morfizmleri olan kategori **$\text{Cat}^1 - \text{Grp}$** ile gösterilir.

Loday grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile cat^1 -grupların kategorisinin denk olduğunu göstermiştir [3]. Burada teoremin ispatını kısaca verelim.

Teorem 2.4. Grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod** ile cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – Grp** denktir [3].

İspat: $\Gamma: \text{Cat}^1 - \text{Grp} \rightarrow \text{XMod}$ fanktoru şu şekilde tanımlansın: (G, s, t) , **Cat¹ – Grp** kategorisinde bir obje olsun. Bu cat^1 -gruptan, $A = \ker s$, $B = \text{Im } s$ ve $t|_A = \alpha: A \rightarrow B$ olmak üzere (A, B, α) çaprazlanmış modülü elde edilir. Burada A ve B birer gruptur ve B nin A üzerine etkimesi $i: B \rightarrow A$ içine dönüşümü olmak üzere

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a = i(b) + a - i(b) \end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\alpha: A \rightarrow B$ çaprazlanmış modül şartlarını sağlar.

Tersine olarak $\theta: \text{XMod} \rightarrow \text{Cat}^1 - \text{Grp}$ fanktoru ise şu şekilde tanımlansın: (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu çaprazlanmış modüle karşılık gelen G grubu $G = A \rtimes B$ yarı direkt çarpımı olup $s(a, b) = (0, b)$ ve $t(a, b) = \alpha(a) + b$ şeklinde tanımlanır. Burada (G, s, t) nin bir cat^1 -grup olduğu kolaylıkla görülür. Bu şekilde tanımlanan Γ ve θ fanktorları için $\Gamma\theta \simeq 1_{\text{XMod}}$ ve $\theta\Gamma \simeq 1_{\text{Cat}^1 - \text{Grp}}$ olduğundan kategori denkliği sağlanır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1. Etkimeli Gruplar

Datuashvili [16-17] tarafından Loday'in problemlerine çözüm bulmak için yakın zamanda etkimeli grup kavramı tanımlanmış ve bu tür cebirsel yapıların kategorisi oluşturulmuştur. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül kavramı ile ilgili tanım ve sonuçları vermeden önce Datuashvili tarafından verilen etkimeli grup kavramını hatırlatıp etkimeli gruplarla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 3.1. G bir grup olmak üzere G nin kendi üzerine $\varepsilon: G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1^{g_2}$ şeklinde gösterilen bir grup etkimesi verilsin. Bu durumda (G, ε) ikilisine bir etkimeli grup denir [16-17].

Örnek olarak, her G grubu kendi üzerindeki aşıkâr ve konjügasyon etkimeleri ile birlikte bir etkimeli grup olur.

(G, ε) ve (G', ε') birer etkimeli grup ve $\varphi: G \rightarrow G'$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer her $g_1, g_2 \in G$ için $\varphi(g_1^{g_2}) = \varphi(g_1)^{\varphi(g_2)}$ oluyorsa φ ye etkimeli grupların bir morfizmi denir. Diğer bir ifadeyle φ nin bir etkimeli grup morfizmi olması için Şekil 3.1 de verilen diyagramın değişmeli olması gerekir.

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\varepsilon} & G \\ \varphi \times \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G' \times G' & \xrightarrow{\varepsilon'} & G' \end{array}$$

Şekil 3.1. Etkimeli grup morfizmi

Tüm etkimeli gruplar yukarıda tanımı verilen etkimeli grup morfizmleri ile birlikte bir kategori oluşturur ve bu kategori $\mathbf{Gr}^*$ ile gösterilir. Buradan sonra etkimeli grupları (G, ε) yerine kısaca G ile göstereceğiz.

Tanım 3.2. G bir etkimeli grup ve H , G nin bir alt grubu ($H \leq G$) olsun. Eğer H alt grubu G nin kendi üzerindeki etkimesi altında kapalı, yani her $h_1, h_2 \in H$ için $h_1^{h_2} \in H$, ise H ye G nin bir alt objesi veya etkimeli alt grubu denir [16-17].

Lemma 3.1. $\varphi: G \rightarrow G'$ bir etkimeli grup morfizmi olmak üzere $\text{Im } \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ kümesi G' nün bir etkimeli alt grubudur [16-17].

İspat: Öncelikle $\text{Im } \varphi$ nin G' nün bir alt grubu olduğunu biliyoruz. Şimdi $\text{Im } \varphi$ nin G' üzerindeki etkiye altında kapalı olduğunu göstermeliyiz. $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in \text{Im } \varphi$ olsun. Buradan

$$\varphi(g_1)^{\varphi(g_2)} = \varphi(g_1^{g_2}) \quad (3.1)$$

olduğundan açıkça $g_1^{g_2} \in \text{Im } \varphi$ bulunur. Böylece $\text{Im } \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ kümesi G' nün bir etkimeli alt grubu olur.

Tanım 3.3. G bir etkimeli grup ve N ise G nin bir etkimeli alt grubu olsun. Eğer;

- (i) N , G nin bir normal alt grubu ($H \trianglelefteq G$),
- (ii) her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $n^g \in N$ ve
- (iii) her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $g^n - g \in N$

şartları sağlanıyorsa N ye G nin bir ideali veya etkimeli normal alt grubu denir [16-17].

Lemma 3.2. $\varphi: G \rightarrow G'$ bir etkimeli grup morfizmi olmak üzere $\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = 0\}$ kümesi G nin bir idealidir.

İspat: Öncelikle $\ker \varphi$ nin G nin bir etkimeli alt grubu olduğunu göstermeliyiz. $x_1, x_2 \in \ker \varphi$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi(x_1^{x_2}) &= \varphi(x_1)^{\varphi(x_2)} \\ &= 0^0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilip $x_1^{x_2} \in \ker \varphi$ olduğu görülür. Böylece $\ker \varphi$, G nin bir etkimeli alt grubudur. Şimdi Tanım 3.3 ün şartlarının sağlandığını göstermeliyiz. Tanım 3.3 ün (i) şartının sağlandığı çok iyi bilinmektedir. O halde

- (i) $x \in \ker \varphi$ ve $g \in G$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(x^g) &= \varphi(x)^{\varphi(g)} \\
&= 0^{\varphi(g)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Yani $x^g \in \ker \varphi$ dir.

(ii) Son olarak $x \in \ker \varphi$ ve $g \in G$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(g^x - g) &= \varphi(g)^{\varphi(x)} - \varphi(g) \\
&= \varphi(g)^0 - \varphi(g) \\
&= \varphi(g) - \varphi(g) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitliğini buluruz ki bu ise $g^x - g \in \ker \varphi$ olduğu anlamına gelir.

Sonuç olarak $\ker \varphi \trianglelefteq G$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Etkimeli gruplarda bölüm objesi Datuashvili tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir. G bir etkimeli grup ve N ise G nin bir ideali olsun. Bu durumda G/N nin bir grup olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte G nin kendi üzerine etkimesinden G/N nin kendi üzerine

$$\begin{aligned}
G/N \times G/N &\rightarrow G/N \\
(N + g_1, N + g_2) &\mapsto (N + g_1)^{(N+g_2)} = N + (g_1^{g_2})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlı bir etkimesi elde edilir. Bu etkimeyle beraber G/N bir etkimeli grup olur. Bu etkimeli gruba etkimeli bölüm grubu denir.

3.2. Genelleştirilmiş Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde, genelleştirilmiş çaprazlanmış modül kavramını hatırlatıp, bu cebirsel objelerin kategorisini **GCM** olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, ihtiyacımız olan tanımların verilmesine devam edilmiştir. İlk olarak, genelleştirilmiş bir çaprazlanmış modül kavramını hatırlayalım.

Tanım 3.4. A ve B birer etkimeli grup ve $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$ için A nın kendi üzerine a^{a_1} şeklinde B nin kendi üzerine b^{b_1} şeklinde gösterilen etkimleri bulunsun. B nin A

üzerine $b \cdot a$ şeklinde gösterilen soldan etkimesi ile beraber $\alpha: A \rightarrow B$ grup homomorfizmi aşağıdaki şartları sağlıyorsa (A, B, α) üçlüsüne bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül denir [9]:

- (i) $\alpha(b \cdot a) = \alpha(a)^b$,
- (ii) $\alpha(a) \cdot a_1 = a_1^a$.

Not 3.1. Burada dikkat edelim ki bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü için $a, a_1 \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha(a_1^a) &= \alpha(\alpha(a) \cdot a_1) \\ &= \alpha(a_1)^{\alpha(a)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

olduğundan α grup homomorfizmi aslında $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir morfizm, yani bir etkimeli grup morfizmidir.

Bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü için $\ker \alpha = 0$, yani α birebir ise (A, B, α) ya asferikal, coker $\alpha = 0$, yani α örten ise (A, B, α) ya basit irtibatlıdır denir.

Örnek 3.1. A ve B nin kendi üzerine etkimeleri konjügasyon etkimeleri olarak alınırsa (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü bilinen anlamda bir çaprazlanmış modül olur. Böylece her çaprazlanmış modül aslında bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.2. A herhangi bir etkimeli grup olsun. Bu durumda $(A, A, 1_A)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.3. Tüm etkimelerin aşikâr etkime olduğunu düşünürsek (A, B, α) üçlüsü bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, eğer A ve B keyfi gruplar olmak üzere, A nın ve B nin kendi üzerlerine etkimeleri aşikâr etkime olsun. Bu durumda, $0: A \rightarrow B$ sıfır homomorfizmi olmak üzere, $(A, B, 0)$ üçlüsü bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.4. G bir etkimeli grup ve $H \subseteq G$ ise her $g \in G$ ve her $h \in H$ için $h^g \in H$ olacak şekilde G nin bir altgrubu olsun. Bu durumda $i: H \rightarrow G$ içine dönüşümü ve G nin H üzerine etkimesi $g \cdot h = h^g$ şeklinde tanımlanmış olmak üzere (H, G, i) bir

genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur. Özel olarak N, G nin bir ideali ise (N, G, i) de bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur.

Örnek 3.5. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere $(\ker \alpha, A, i)$ üçlüsü Örnek 3.4 teki gibi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur.

Örnek 3.6. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $K = \alpha(A) = \text{Im } \alpha$ olmak üzere (K, B, i) üçlüsü Örnek 3.4 teki gibi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur.

Önerme 3.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere A nın kendi üzerine etkimesinden üretilen $\ker \alpha$ nın A üzerine etkimesi aşıkâr etkimedir.

İspat: Kabul edelim ki $x \in \ker \alpha$ yani $\alpha(x) = 0$ olsun. Buradan

$$a^x = \alpha(x) \cdot a = 0 \cdot a = a \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.3. (A, B, α) herhangi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $f: B \rightarrow B'$ dönüşümü ise $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir izomorfizm olsun. Bu durumda $\tilde{\alpha} = f\alpha$ ve B' nün A üstüne etkimesi

$$\begin{aligned} B' \times A &\rightarrow A \\ (b', a) &\mapsto b' \cdot a = (f^{-1}(b')) \cdot a \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde verilmiş olmak üzere $(A, B', \tilde{\alpha})$ da bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur. Ayrıca (A, B, α) ile $(A, B', \tilde{\alpha})$ birbirine izomorftur.

İspat: $(A, B', \tilde{\alpha})$ nın Tanım 3.4'te verilen şartların sağlandığını göstermemiz gerekmektedir.

(i) $a \in A$ ve $b' \in B'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(b' \cdot a) &= f\left(\alpha\left((f^{-1}(b')) \cdot a\right)\right) \\
&= f(\alpha(a)^{f^{-1}(b')}) \\
&= f\alpha(a)^{ff^{-1}(b')} \\
&= f\alpha(a)^{b'} \\
&= \tilde{\alpha}(a)^{b'}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(ii) $a, a_1 \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(a) \cdot a_1 &= \left(f^{-1}(\tilde{\alpha}(a))\right) \cdot a_1 \\
&= \left(f^{-1}(f\alpha(a))\right) \cdot a_1 \\
&= \alpha(a) \cdot a_1 \\
&= a_1^a
\end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $(A, B', \tilde{\alpha})$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Lemma 3.4. (A, B, α) herhangi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $g: A' \rightarrow A$ dönüşümü ise $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir izomorfizm olsun. Bu durumda $\hat{\alpha} = \alpha g$ ve B nin A' üstüne etkimesi

$$\begin{aligned}
B \times A' &\rightarrow A' \\
(b, a') &\mapsto b \cdot a' = g^{-1}(b \cdot g(a'))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde verilmiş olmak üzere $(A', B, \hat{\alpha})$ da bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur. Ayrıca (A, B, α) ile $(A', B, \hat{\alpha})$ birbirine izomorftur.

İspat: $(A', B, \hat{\alpha})$ nin Tanım 3.4'te verilen şartların sağlandığını göstermemiz gerekmektedir.

(i) $a' \in A'$ ve $b \in B$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(b \cdot a') &= \alpha g \left(g^{-1}(b \cdot g(a')) \right) \\
&= \alpha(b \cdot g(a')) \\
&= \alpha g(a')^b \\
&= \hat{\alpha}(a')^b.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(ii) $a', a_1' \in A'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(a') \cdot a_1' &= g^{-1}(\hat{\alpha}(a') \cdot g(a_1')) \\
&= g^{-1}(\alpha(g(a')) \cdot g(a_1')) \\
&= g^{-1}(g(a_1')^{g(a')}) \\
&= g^{-1}g(a_1')^{g^{-1}g(a')} \\
&= (a_1')^{a'}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $(A', B, \hat{\alpha})$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Sonuç 3.1. (A, B, α) herhangi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $g: A' \rightarrow A$, $f: B \rightarrow B'$ dönüşümleri ise $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde birer izomorfizm olsun. Bu durumda $\gamma = f\alpha g$ ve B' nün A' üstüne etkimesi

$$\begin{aligned}
B' \times A' &\rightarrow A' \\
(b', a') &\mapsto b' \cdot a' = g^{-1}(f^{-1}(b') \cdot g(a'))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde verilmiş olmak üzere (A', B', γ) da bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur. Bununla birlikte (A, B, α) , $(A, B', \tilde{\alpha})$, $(A', B, \hat{\alpha})$ ve (A', B', γ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerinin hepsi birbirine izomorftur.

(A, B, α) ve (A', B', α') dönüşümü birer genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere $f: A \rightarrow A'$ ve $g: B \rightarrow B'$ birer grup homomorfizmleri $g\alpha = \alpha'g$ ve $f(b \cdot a) = g(b) \cdot f(a)$ şartlarını sağlıyorsa $\langle f, g \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ dönüşümüne genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi denir. Diğer bir ifadeyle Şekil 3.2 de verilen diyagramın değişmeli olması gerekir.

$$\begin{array}{ccccc}
B \times A & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
g \times f \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow g \\
B' \times A' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B'
\end{array}$$

Şekil 3.2. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi

Tüm genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller ve bunların arasında yukarıda tanımı verilen genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmleri bir kategori oluşturur ve bu kategori **GCM** ile gösterilir.

Tanım 3.5. (A, B, α) ve (S, T, σ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere

- (i) S ve T sırasıyla A ve B nin birer alt grubudur,
- (ii) $\sigma = \alpha|_S$, yani σ dönüşümü α nın S ye kısıtlamasıdır,
- (iii) S nin kendi üzerine etkimesi A nın kendi üzerine etkimesinin kısıtlaması ve T nin kendi üzerine etkimesi B nin kendi üzerine etkimesinin kısıtlamasıdır,

şartları sağlanıyorsa (S, T, σ) ye (A, B, α) nın bir genelleştirilmiş alt çaprazlanmış modülü denir. Bu durum $(S, T, \sigma) \leq (A, B, \alpha)$ ile gösterilir [9].

Tanım 3.6. (S, T, σ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü (A, B, α) nın bir genelleştirilmiş alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

- (i) S ve T sırasıyla A ve B nin birer normal alt grubudur,
- (ii) her $b \in B$ ve $s \in S$ için $b \cdot s \in S$,
- (iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için $-a + t \cdot a \in S$

şartları sağlanıyorsa (S, T, σ) ye (A, B, α) nın bir ideali denir. Bu durum $(S, T, \sigma) \trianglelefteq (A, B, \alpha)$ ile gösterilir [9].

(A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve (S, T, σ) bir ideali olsun. Bu durumda $i = \langle i_1, i_2 \rangle: (S, T, \sigma) \rightarrow (A, B, \alpha)$ içine dönüşümünü alalım. Burada i_1 ve i_2 içine dönüşümlerdir ve normal monomorfizmlerdir. Bu nedenle **GCM** kategorisinde bir ideal aslında kategorisinde bir normal alt objedir [9].

Tanım 3.7. $f = \langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$, **GCM** kategorisinde bir morfizm olsun. Eğer f_A ve f_B dönüşümleri **Grp** kategorisinde birer monomorfizm ise f dönüşümüne injektiftir denir [9].

Önerme 3.2. **GCM** kategorisinde, monomorfizmler birebir morfizmlerdir [9].

İspat: $f = \langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi, $K_A = \ker f_A$ ve $K_B = \ker f_B$ olsun. Açıkça $\alpha^* = \alpha|_{K_A}: K_A \rightarrow K_B$ bir grup homomorfizmi ve (K_A, K_B, α^*) , (A, B, α) nin bir genelleştirilmiş alt çaprazlanmış modülüdür. Şimdi $i = \langle i_A, i_B \rangle, 0 = \langle 0_A, 0_B \rangle: (K_A, K_B, \alpha^*) \rightarrow (A, B, \alpha)$ morfizmlerini ele alalım. Burada i_A ve i_B içine dönüşümler ve 0_A ve 0_B aşıkâr grup homomorfizmleridir. O halde $fi = f0$ olduğu aşıkârdır. f bir monomorfizm olduğundan $i = 0$ olup bu ise $K_A = \{e_A\}$ ve $K_B = \{e_B\}$ olduğu anlamına gelir. Böylece f birebirdir. Bunun tersi de doğrudur. Çünkü eğer $f = \langle f_A, f_B \rangle$ birebir ise, f_A ve f_B **Grp** kategorisinde birebir monomorfizmlerdir. Bu durumda f nin **GCM** kategorisinde bir monomorfizm olduğu açıktır.

Not 3.2. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere N ve N^* sırasıyla A ve B nin

- (i) $(N, N^*, \alpha^* = \alpha|_N) \trianglelefteq (A, B, \alpha)$,
- (ii) $(N, N, 1_N) \trianglelefteq (A, A, 1_A)$,
- (iii) $(N^*, N^*, 1_{N^*}) \trianglelefteq (N, N, 1_B)$

şartları sağlanacak şekilde birer normal alt grubu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}: A/N &\rightarrow B/N^* \\ a + N &\mapsto \bar{\alpha}(a + N) = \alpha(a) + N^* \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm için aşağıda tarif edilen etkimelerle birlikte $(A/N, B/N^*, \bar{\alpha})$ üçlüsü bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olur. Gerçekten;

- (i) A/N in kendi üzerine etkimesi her $a, a_1 \in A$ için $(N + a)^{(N+a_1)} = N + (a^{a_1})$ olarak tanımlıdır. Bu etkimenin iyi tanımlı olduğunu göstermek için $i = 1, 2, 3, 4$ için $a_i \in A$ olmak üzere $N + a_1 = N + a_2$ ve $N + a_3 = N + a_4$ olsun.

O halde $a_1 = n_1 + a_2$ ve $a_3 = n_2 + a_4$ olacak şekilde $n_1, n_2 \in N$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
(a_3^{a_1}) + N &= ((n_2 + a_4)^{a_1}) + N \\
&= (n_2^{a_1}) + (a_4^{a_1}) + N \\
&= (a_4^{a_1}) + N \\
&= (a_4^{(n_1+a_2)}) + N \\
&= (a_4^{n_1})^{a_2} + N
\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $(N, N, 1_N) \trianglelefteq (A, A, 1_A)$ ve

$$-(a_4^{a_2}) + (a_4^{n_1})^{a_2} = (-a_4 + a_4^{n_1})^{a_2} \in N \tag{3.17}$$

olduğundan istenilen elde edilmiş olur.

- (ii) B/N^* ın A/N üzerine etkimesi her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $(b + N^*) \cdot (a + N) = (b \cdot a) + N$ şeklinde tanımlanır. Bu etkimenin de iyi tanımlı olduğu $(N, N^*, \alpha^* = \alpha|_N) \trianglelefteq (A, B, \alpha)$ olduğundan **(i)** durumdakine benzer şekilde ispatlanır.
- (iii) B/N^* in kendi üzerine etkimesi her $b, b_1 \in B$ için $(N^* + b)^{(N^*+b_1)} = N^* + (b^{b_1})$ olarak tanımlıdır. Bu etkimenin de iyi tanımlı olduğu $(N^*, N^*, 1_{N^*}) \trianglelefteq (N, N, 1_B)$ olduğundan **(i)** durumdakine benzer şekilde ispatlanır.
- (iv) $\bar{\alpha}$ bir grup homomorfizmidir. Gerçekten;

- İyi tanımlılık: $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 + N = a_2 + N$ olsun. O halde $-a_2 + a_1 \in N$ olup $-\alpha(a_2) + \alpha(a_1) = \bar{\alpha}(-a_2 + a_1) \in N$ ve buradan $\alpha(a_1) + N^* = \alpha(a_2) + N^*$ eşitliği elde edilir.
- İşlemi koruma: $a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}((a_1 + N) + (a_2 + N)) &= \alpha(a_1 + a_2) + N^* \\
&= \alpha(a_1) + N^* + \alpha(a_2) + N^* \\
&= \bar{\alpha}(a_1 + N) + \bar{\alpha}(a_2 + N)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olduğundan $\bar{\alpha}$ nın işlemi koruduğu görülür.

- (v) Son olarak $\bar{\alpha}$ nin etkimler üzerindeki etkisine bakalım.

- $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}((b + N^*) \cdot (a + N)) &= \bar{\alpha}((b \cdot a) + N) \\
&= \alpha(b \cdot a) + N^* \\
&= \alpha(a)^b + N^* \\
&= (\alpha(a) + N^*)^{(b+N^*)} \\
&= (\bar{\alpha}(a + N))^{(b+N^*)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

eşitliğini elde ederiz.

- $a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(a_1 + N) \cdot (a_2 + N) &= (\alpha(a_1) + N^*) \cdot (a_2 + N) \\
&= (\alpha(a_1) \cdot a_2) + N^* \\
&= a_2^{a_1} + N \\
&= (a_2 + N)^{(a_1+N)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir.

Burada (i)-(v) şartlarından görüyoruz ki $(A/N, B/N^*, \bar{\alpha})$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür. Bu genelleştirilmiş çaprazlanmış modül genelleştirilmiş bölüm çaprazlanmış modülü olarak adlandırılır [9].

3.3 Genelleştirilmiş Cat^1 -Gruplar

Bu kısımda literatürde iyi bilinen cat^1 -gruplar ile çaprazlanmış modüllerin kategoriksel denkliği [3] kullanılarak genelleştirilmiş cat^1 -grup kavramı tanımlanmış ve bu tür cebirsel yapıların kategorisi elde edilmiştir. Benzer bir denklik tanımlanamamış olsa da genelleştirilmiş cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – Grp** den genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi **GCM** ye bir fanktor tanımlanmıştır.

Tanım 3.8. G bir etkimeli grup ve $s, t: G \rightarrow G$ birer etkimeli grup morfizmi olsunlar. Eğer

- (i) $st = t, ts = s$ ve
- (ii) her $x \in \ker s$ ve her $y \in \ker t$ için $x^y = x$

şartları sağlanıyorsa (G, s, t) üçlüsüne bir **genelleştirilmiş cat^1 -grup** denir.

Burada dikkat edelim ki bir (G, s, t) genelleştirilmiş cat^1 -grubu için G nin kendi üzerine etkimesi konjügasyon etkimesi ise (ii) şartında her $x \in \ker s$ ve her $y \in \ker t$ için $x^y = -y + x + y = x$ olup buradan $x + y = x + y$ eşitliği elde edilir. Böylece (G, s, t) bir cat^1 -grup olur. Yani her cat^1 -grup bir genelleştirilmiş cat^1 -gruptur.

Örnek 3.7. G herhangi bir grup olmak üzere G nin kendi üzerine aşikâr etkimesini alalım. Bu durumda $(G, 1_G, 1_G)$ bir genelleştirilmiş cat^1 -grup olur.

(G, s, t) ve (G', s', t') birer genelleştirilmiş cat^1 -grup olmak üzere bir $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmi için $fs = s'f$ ve $ft = t'f$ oluyorsa, yani Şekil 3.3'de verilen diyagram değişmeli ise f ye bir genelleştirilmiş cat^1 -grup morfizmi denir.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightleftharpoons[s]{s} & G' \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ G' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & G' \end{array}$$

Şekil 3.3. Genelleştirilmiş cat^1 -grup morfizmi

Objeleri genelleştirilmiş cat^1 -gruplar ve morfizmleri yukarıdaki tanımlandığı şekilde genelleştirilmiş cat^1 -grup morfizmleri olan bir kategori tanımlanabilir. Bu kategoriye $\mathbf{GC}^1 - \mathbf{Grp}$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.1. Bir (G, s, t) genelleştirilmiş cat^1 -grubu için $\bar{t} = t|_{\ker s}$ olmak üzere $(\ker s, \text{Im } s, \bar{t})$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

İspat: Burada $\text{Im } s$ in $\ker s$ üzerindeki etkimesi her $g \in \ker s$ ve her $x \in \text{Im } s$ için $x \cdot g = g^x$ şeklinde tanımlıdır. Açıkça görülmektedir ki $\text{Im } s$ ve $\ker s$ in kendi üzerlerine etkimleri G nin kendi üzerine etkimesinden indirgenmiş etkimlerdir. O halde Tanım 3.1 in (i) ve (ii) şartlarının sağlandığını göstermemiz yeterlidir.

- (i) $g \in \ker s$ ve her $x \in \text{Im } s$ olsun. Bu durumda $s(g_1) = x$ olacak şekilde bir $g_1 \in G$ vardır ve buradan

$$\begin{aligned}
\bar{t}(x \cdot g) &= \bar{t}(g^x) \\
&= t(g^x) \\
&= t(g)^{t(x)} \\
&= t(g)^{t(s(g_1))} \\
&= t(g)^{s(g_1)} \\
&= t(g)^x
\end{aligned} \tag{3.21}$$

istenilen eşitliği elde ederiz.

(ii) $g, g' \in \ker s$ olsun. Bu durumda $t(g) - g \in \ker t$ dir ve Tanım 3.8 in (ii) şartından $(g')^{t(g)-g} = g'$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\bar{t}(g) \cdot g' &= (g')^{\bar{t}(g)} \\
&= (g')^{t(g)} \\
&= (g')^{(t(g)-g)+g} \\
&= ((g')^{(t(g)-g)})^g \\
&= (g')^g
\end{aligned} \tag{3.22}$$

istenilen eşitliğini elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremden yapılan inşa $\mathbf{GC}^1 - \mathbf{Grp}$ genelleştirilmiş cat^1 -grupların kategorisinden $\mathbf{GCM}$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisine bir $\mathbf{GC}^1 - \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{GCM}$ fanktorü tanımlar.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL ÖRTÜLERİ

Çaprazlanmış modüllerde örtü kavramı ilk olarak Brown ve Mucuk [18] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca bir X topolojik grubunun örtülerinin kategorisi ile bu topolojik gruba karşılık gelen çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisinin doğal olarak denk olduğunu göstermişlerdir. Bu bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller için örtü kavramı verilip çeşitli özelliklerini incelenmiştir.

Tanım 4.1. (A, B, α) ve $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ birer genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olsun. Eğer $f: A \rightarrow \tilde{A}$ bir izomorfizm olacak şekilde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir $\langle f, g \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ morfizmi varsa (A, B, α) ya $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ nın bir örtüsü ve $\langle f, g \rangle$ ye ise bir örtü morfizmi denir (Şekil 4.1).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{B} \\ f \downarrow \cong & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Şekil 4.1 Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtü morfizmi

Örnek 4.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$\langle 1_A, 1_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A, B, \alpha) \quad (4.1)$$

dönüşümü bir örtü morfizmidir.

$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ ve $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ birer örtü morfizmi olmak üzere genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A', B', \alpha')$ morfizmi $\langle f', g' \rangle \circ \langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$, yani $f' \circ f = \tilde{f}$ ve $g' \circ g = \tilde{g}$, şartını sağlıyorsa $\langle f, g \rangle$ ya (A, B, α) nın örtülerinin bir morfizmi denir (Şekil 4.2).

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & (A', B', \alpha') \\ & \searrow \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle & \swarrow \langle f', g' \rangle \\ & (A, B, \alpha) & \end{array}$$

Şekil 4.2 Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtülerinin morfizmi

Bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün örtüleri yukarıda tanımlandığı gibi bu örtüler arasındaki morfizmlerle birlikte bir kategori oluşturur. Bu kategori $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ ile gösterilir.

Önerme 4.1. $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir örtü morfizmi olsun. Bu durumda $f(\ker \tilde{\alpha}) \subseteq \ker \alpha$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $a \in \ker \alpha$ olsun. O halde $\alpha(a) = 0$ olur. Buradan $\langle f, g \rangle$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi olduğu için

$$\alpha(f(a)) = g(\alpha(a)) = g(0) = 0 \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $f(a) \in \ker \alpha$ olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

(A, B, α) bir asferikal genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir örtü morfizmi olsun. (A, B, α) asferikal olduğundan $\ker \alpha = 0$ dır. Önerme 4.1 den $f(\ker \tilde{\alpha}) = 0$ olup bunun sonucunda f bir izomorfizm olduğundan $\ker \tilde{\alpha} = 0$ bulunur.

Sonuç 4.1. Bir asferikal genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün her örtüsü de asferikaldır.

Örnek 4.2. Örnek 3.4'te verilen (H, G, i) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü asferikal olduğu için (H, G, i) nin her örtüsü de asferikaldır.

Lemma 4.1. $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir örtü morfizmi olsun. $h: \tilde{B} \rightarrow \tilde{C}$ ve $k: B \rightarrow C$ dönüşümleri $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde birer izomorfizm olmak üzere $\tilde{g} = kgh^{-1}$ için

$$\langle f, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{C}, h\tilde{\alpha}) \rightarrow (A, C, k\alpha) \quad (4.3)$$

dönüşümü de genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir örtü morfizmidir.

İspat: Aşağıda Şekil 4.3'te verilen diyagramın değişmeli olduğunu göstermek, yani $\tilde{g}h\tilde{\alpha} = k\alpha f$ olduğunu yeterlidir.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{A} & \xrightarrow{h\tilde{\alpha}} & \tilde{C} \\
f \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{g} \\
A & \xrightarrow{k\alpha} & C
\end{array}$$

Şekil 4.3 $\langle f, \tilde{g} \rangle$ diyagramı

$\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir örtü morfizmi olduğundan $g\tilde{\alpha} = \alpha f$ olduğunu biliyoruz. Buradan istenilen

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(h\tilde{\alpha}) &= kgh^{-1}(h\tilde{\alpha}) \\
&= kg\tilde{\alpha} \\
&= k\alpha f
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 4.2. $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ ve $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin iki örtü morfizmi olsun. Bu durumda $f' = f \circ \tilde{f}$ ve $g' = g \circ \tilde{g}$ olmak üzere $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü de bir örtü morfizmidir (Şekil 4.4).

$$\begin{array}{ccc}
A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \\
\tilde{f} \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{g} \\
\tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{B} \\
f \downarrow \cong & & \downarrow g \\
A & \xrightarrow{\alpha} & B
\end{array}
\begin{array}{l}
\left. \vphantom{\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \\ \tilde{f} \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{g} \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{B} \\ f \downarrow \cong & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}} \right\} f' \\
\left. \vphantom{\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \\ \tilde{f} \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{g} \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{B} \\ f \downarrow \cong & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}} \right\} g'
\end{array}$$

Şekil 4.4 Örtü morfizmlerinin bileşkesi

İspat: $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde izomorfizmlerin bileşkesi yine bir izomorfizm olduğundan ispat açıktır.

Lemma 4.2. $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ ve $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ birer örtü morfizmi ve $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A', B', \alpha')$ dönüşümü (A, B, α) nın örtülerinin bir morfizmi olmak üzere $\langle f, g \rangle$ morfizmi de bir örtü morfizmidir.

İspat: Biliyoruz ki $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A', B', \alpha')$ dönüşümü (A, B, α) nın örtülerinin bir morfizmi olduğundan $\langle f', g' \rangle \circ \langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$, yani $f' \circ f = \tilde{f}$ ve $g' \circ g = \tilde{g}$ dir. Burada f' ve $\tilde{f}$ birer izomorfizm ve $f = (f')^{-1} \circ \tilde{f}$ olduğundan f dönüşümü de bir izomorfizm olur. Böylece $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A', B', \alpha')$ dönüşümünün bir örtü morfizmi olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 4.1. (C, D, γ) basit irtibatlı olmak üzere (A, B, α) ve (C, D, γ) birer genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $\langle f, g \rangle: (C, D, \gamma) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Eğer $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir örtü morfizmi ise bu durumda $\langle f, g \rangle \circ \langle f', g' \rangle = \langle f, g \rangle$ olacak şekilde bir $\langle f', g' \rangle: (C, D, \gamma) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi vardır ancak ve ancak $f(\ker \gamma) \subseteq f(\ker \tilde{\alpha})$ dir.

İspat: Öncelikle $f(\ker \gamma) \subseteq f(\ker \tilde{\alpha})$ olduğunu kabul edelim. $f' = (\tilde{f})^{-1} f$ olarak alıp $g': D \rightarrow B$ dönüşümünü ise $\gamma(c) = d$ olacak şekilde herhangi bir $c \in C$ için $g'(d) = \alpha f'(c)$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\langle f', g' \rangle$ dönüşümünün genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi olduğu açıkça görülmektedir.

Diğer taraftan, kabul edelim ki $c \in \ker \gamma$ olsun. Buradan $g': D \rightarrow B$ dönüşümünün tanımından

$$0 = g'(0) = \tilde{\alpha}(f'(c)) = \tilde{\alpha}\left((\tilde{f})^{-1}(f(c))\right) \quad (4.5)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $f^{-1}(f(c)) \in \ker \alpha$ olduğu görülür ki bu ise $f(c) \in f(\ker \alpha)$ ifadesine denktir.

Sonuç 4.2. (A', B', α') basit irtibatlı olmak üzere $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ ve $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ birer örtü morfizmi olsun. Bu durumda (A', B', α') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ nın bir örtüsüdür ancak ve ancak $f(\ker \alpha') \subseteq \tilde{f}(\ker \tilde{\alpha})$ dir.

Sonuç 4.3. (A', B', α') ve $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ birer basit irtibatlı genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ ve $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ birer örtü morfizmi olsun. Bu durumda (A, B, α) nın örtülerinin bir

$\langle f, g \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ izomorfizmi vardır ancak ve ancak $f(\ker \alpha') = \tilde{f}(\ker \tilde{\alpha})$ dır.

4.1 Etkimli Topolojik Gruplarda Bir Örnek

X bir topolojik grup olmak üzere X in kendi üzerine sürekli bir grup etkimesi varsa X topolojik grubuna bir etkimeli topolojik grup denir. X etkimeli topolojik grubundaki bütün eğrilerin homotopi sınıflarının kümesini $\pi(X)$ ile başlangıç noktası $x_0 \in X$ olan tüm eğrilerin homotopi sınıflarının kümesini $\mathcal{P}(X, x_0)$ ile göstereceğiz. Yani $\mathcal{P}(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha(0) = x_0\}$. Daha önceden biliyoruz ki $\pi(X)$ ve $\mathcal{P}(X, x_0)$ kümeleri X üzerindeki grup işleminden türetilen işlemle beraber birer gruptur. Ayrıca X in kendi üzerine sürekli etkimesinden türetilen etkiye ile birlikte $\pi(X)$ bir etkimeli gruptur. Yani,

$$\begin{aligned} \phi & : \pi(X) \times \pi(X) \rightarrow \pi(X) \\ ([\alpha], [\beta]) & \mapsto [\beta]^{[\alpha]} = [\beta^\alpha] \end{aligned} \quad (4.6)$$

dönüşümü $t \in [0, 1]$ için $(\beta^\alpha)(t) = \beta(t)^{\alpha(t)}$ olmak üzere bir etkimedir. Gerçekten, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in X$ olmak üzere $F: \alpha \simeq \alpha'$ ve $G: \beta \simeq \beta'$ homotopilerinin varlığını kabul edelim. X in kendi üzerine sürekli etkimesini $\psi: X \times X \rightarrow X$ ile gösterirsek $H := \psi \circ (F, G)$ dönüşümü de bir homotopi, $H: \beta^\alpha \simeq \beta'^{\alpha'}$, olur. Bu ise ϕ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterir. ϕ dönüşümünün grup etkimesi şartlarını sağladığı da kolaylıkla görülebilir.

Önerme 4.3. X birim elemanı e olan bir etkimeli topolojik grup olmak üzere $\mathcal{P}(X, e)$ etkimeli grubu $\pi(X)$ etkimeli grubunun bir idealidir.

İspat: Daha önceden biliyoruz ki $\mathcal{P}(X, e)$ grubu $\pi(X)$ grubunun bir normal alt grubudur. Çünkü $\mathcal{P}(X, e)$ grubu $s: \pi(X) \rightarrow X, [\alpha] \mapsto \alpha(0)$ grup homomorfizminin çekirdeğidir. Yani $\ker s = \mathcal{P}(X, e)$ dir. O halde sadece Tanım 3.3 ün (ii) ve (iii) şartlarının sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Varsayalım ki $[\alpha] \in \pi(X)$ ve $[\beta] \in \mathcal{P}(X, e)$ olsun.

(ii) Bu durumda $\beta(0) = e$ olur ve böylece

$$(\beta^\alpha)(0) = \beta(0)^{\alpha(0)} = e^{\alpha(0)} = e \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir ki bu ise $[\beta]^{[\alpha]} \in \mathcal{P}(X, e)$ olduğu anlamına gelir.

(iii) Bu şart için

$$\begin{aligned} (\alpha^\beta - \alpha)(0) &= \alpha(0)^{\beta(0)} - \alpha(0) \\ &= \alpha(0)^e - \alpha(0) \\ &= \alpha(0) - \alpha(0) \\ &= e \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir ki buda $[\alpha]^{[\beta]} - [\alpha] \in \mathcal{P}(X, e)$ olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.3. Birim elemanı e olan X etkimeli topolojik grubu için $(\mathcal{P}(X, e), \pi(X), i)$ üçlüsü Örnek 3.4 deki gibi bir asferikal genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Sonuç 4.4. Birim elemanları sırasıyla $\tilde{e}$ ve e olan $\tilde{X}$ ve X etkimeli topolojik grupları için $p: \tilde{X} \rightarrow X$ dönüşümü her $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2}) = p(\tilde{x}_1)^{p(\tilde{x}_2)}$ şartını sağlayacak şekilde topolojik grupların bir örtü morfizmi olsun. Bu durumda her $[\tilde{\alpha}] \in \pi(\tilde{X})$ için $p^*: \pi(\tilde{X}) \rightarrow \pi(X)$, $p^*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}]$ şeklinde tanımlanmış olmak üzere

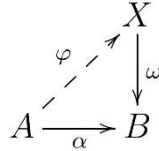
$$\langle p^*|_{\mathcal{P}(\tilde{X}, \tilde{e})}, p^* \rangle: (\mathcal{P}(\tilde{X}, \tilde{e}), \pi(\tilde{X}), i) \rightarrow (\mathcal{P}(X, e), \pi(X), i) \quad (4.9)$$

dönüşümü genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir örtü morfizmidir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL YÜKSELMELERİ

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller için yükselme kavramı Mucuk ve Şahan tarafından, gruplar üzerinde grup-grupoid etkimelerinin çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki yorumlaması olarak tanımlanmıştır [19]. Çaprazlanmış modüllerin yükselmeleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi almak için [20,21] kaynaklarına bakılabilir. Mucuk ve Şahan, çaprazlanmış modüllerin örtülerinin kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin yükselmelerinin kategorisi arasında doğal bir denklik olduğunu göstermişlerdir [19]. Bu sonucun ışığında bizde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller için yükselme kavramını tanımlayıp çeşitli özelliklerini inceleyeceğiz ve son olarak Mucuk ve Şahan tarafından verilen sonucun bir genelleştirmesini elde edeceğiz.

Tanım 5.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül, X ise $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir obje, yani bir etkimeli grup, ve $\omega: X \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olsun. Burada X grubunun A grubu üzerine ω vasıtasıyla $x \in X$ ve $a \in A$ için $x \cdot a = \omega(x) \cdot a$ şeklinde bir etkimesi elde edilir. Eğer bu etkiye ile beraber $\omega\varphi = \alpha$ olacak şekilde bir (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü varsa (A, X, φ) ya (A, B, α) nın bir yükselmesi denir.



Şekil 5.1. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül yükselmesi

Örnek 5.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ise bu durumda $(A, \alpha(A), \alpha)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü (A, B, α) nın $i: \alpha(A) \rightarrow B$ içine grup homomorfizmi vasıtasıyla bir yükselmesidir.

Örnek 5.2. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $(A, B', \tilde{\alpha})$ ise Lemma 3.3 deki gibi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere (A, B, α) , $f: B \rightarrow B'$ izomorfizmi vasıtasıyla $(A, B', \tilde{\alpha})$ nın bir yükselmesidir.

Örnek 5.3. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve $(A', B, \hat{\alpha})$ ise Lemma 3.4 teki gibi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere her izomorfizm bir

genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olduğundan (A', A, g) , $\alpha: A \rightarrow B$ vasıtasıyla $(A', B, \hat{\alpha})$ nın bir yükselmesidir.

Örnek 5.4. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmak üzere $(A, A/\ker \alpha, p)$ üçlüsü $\omega: A/\ker \alpha \rightarrow B$, $a + \ker \alpha \mapsto \alpha(a)$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesidir.

Lemma 5.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül, X ise $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir obje ve $\varphi: A \rightarrow X$, $\omega: X \rightarrow B$ dönüşümleri ise $\omega\varphi = \alpha$ olacak şekilde iki grup homomorfizmi olsun. Bu durumda (A, X, φ) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve böylece (A, B, α) nın bir yükselmesi olur ancak ve ancak her $x \in X$ ve $a \in A$ için $\varphi(x \cdot a) = \varphi(a)^x$ dır.

İspat: Gereklik kısmındaki şart genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olmanın ilk şartı olduğundan burası açıktır. Yeterlilik için kabülden dolayı Tanım 3.4 teki (ii) şartının sağladığını göstermek yeterlidir. $a, a_1 \in A$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\varphi(a) \cdot a_1 &= \omega(\varphi(a)) \cdot a_1 \\ &= \alpha(a) \cdot a_1 \\ &= (a_1)^a\end{aligned}\tag{5.1}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Önerme 5.1. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve (A, X, φ) ise (A, B, α) nın $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla bir yükselmesi olsun. Bu durumda $\ker \varphi \subseteq \ker \alpha$ ve $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat: Öncelikle $x \in \ker \varphi$ olsun. Yani $\varphi(x) = 0$ dır ve

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \omega\varphi(x) \\ &= \omega(\varphi(x)) \\ &= \omega(0) \\ &= 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

bulunur. Böylece $x \in \ker \alpha$ dır. Bu ise $\ker \varphi \subseteq \ker \alpha$ anlamına gelir. $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümünün bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül

morfizmi olduğunu göstermek için öncelikle Şekil 5.2 de verilen diyagramın değişmeli olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ 1_A \downarrow & & \downarrow \omega \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Şekil 5.2. $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü

(A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olduğundan $\omega\varphi = \alpha$ dır. Buradan açıkça görülüyor ki $\omega\varphi = \alpha = \alpha 1_A$ ve böylece Şekil 5.2 de verilen diyagram değişmelidir. Son olarak $x \in X$ ve $a \in A$ olmak üzere

$$1_A(x \cdot a) = x \cdot a = \omega(x) \cdot a = \omega(x) \cdot 1_A(a) \quad (5.3)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmidir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1. Bir (A, B, α) asferikal genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün her (A, X, φ) yükselmesi de asferikaldir. Çünkü (A, B, α) asferikal olduğundan $\ker \alpha = \{0\}$ ve $\ker \varphi \subseteq \ker \alpha = \{0\}$ olduğundan $\ker \varphi = \{0\}$ olup (A, X, φ) de asferikaldir.

Örnek 5.5. (H, G, i) Örnek 3.4 deki gibi bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olsun. i injektif, yani birebir, olduğundan (H, G, i) asferikaldir ve böylece (H, G, i) nin her (H, X, φ) yükselmesi de asferikaldir. Bununla birlikte H etkimeli grubu X etkimeli grubunun da bir etkimeli alt grubu olarak düşünülebilir.

Lemma 5.2. (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün bir yükselmesi olsun. Eğer $f: X \rightarrow X'$ ve $g: B \rightarrow B'$ dönüşümleri $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde birer izomorfizm ise $\varphi' = f\varphi$ ve $\alpha' = g\alpha$ olmak üzere (A, X', φ') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega' := g\omega f^{-1}: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B', α') nın bir yükselmesi olur.

İspat: Lemma 3.4 den biliyoruz ki (A, X', φ') ve (A, B', α') birer genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür. O halde sadece $\omega'\varphi' = \alpha'$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olduğundan $\omega\varphi = \alpha$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}\omega'\varphi' &= (g\omega f^{-1})(f\varphi) \\ &= g\omega\varphi \\ &= g\alpha \\ &= \alpha'\end{aligned}\tag{5.4}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

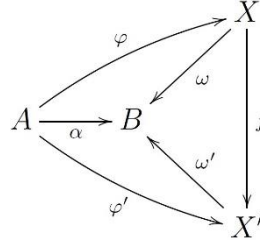
Önerme 5.2. (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün bir yükselmesi ve (A, X', φ') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega': X' \rightarrow X$ vasıtasıyla (A, X, φ) nin bir yükselmesi olsun. Bu durumda (A, X', φ') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega\omega': X' \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olur.

İspat: $(\omega\omega')\varphi' = \alpha$ eşitliğini göstermemiz yeterli olacaktır. (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olduğundan $\omega\varphi = \alpha$ olduğunu ve (A, X', φ') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega': X' \rightarrow X$ vasıtasıyla (A, X, φ) nin bir yükselmesi olduğundan $\omega'\varphi' = \varphi$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$(\omega\omega')\varphi' = \omega(\omega'\varphi') = \omega\varphi = \alpha\tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi sabit bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün yükselmeleri arasındaki dönüşümleri tanımlayacağız. (A, X, φ) ve (A, X', φ') genelleştirilmiş çaprazlanmış modülleri sırasıyla $\omega: X \rightarrow B$ ve $\omega': X' \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün birer yükselmesi olsun. Eğer $\omega'f = \omega$ olacak şekilde $\mathbf{Gr}^*$ kategorisinde bir $f: X \rightarrow X'$ morfizmi varsa bu f dönüşümüne (A, B, α) nın yükselmelerinin bir morfizmi denir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3. Yükselmelerin morfizmi

Verilmiş sabit bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü için (A, B, α) nın yükselmeleri ve bunlar arasında yukarıda verilen şekilde tanımlı yükselme morfizmleri bir kategori oluşturur ve bu kategori $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ ile gösterilir.

Lemma 5.3. $f: X \rightarrow X'$ dönüşümü (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün sırasıyla $\omega: X \rightarrow B$ ve $\omega': X' \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, X, φ) ve (A, X', φ') yükselmeleri arasında bir yükselme morfizmi olsun. Eğer $\omega': X' \rightarrow B$ bir monomorfizm, yani birebir, ise (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $f: X \rightarrow X'$ vasıtasıyla (A, X', φ') nın bir yükselmesi olur.

İspat: Kabul edelim ki $\omega': X' \rightarrow B$ bir monomorfizm olsun. (A, X, φ) ve (A, X', φ') sırasıyla $\omega: X \rightarrow B$ ve $\omega': X' \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın birer yükselmesi olduğundan $\omega\varphi = \alpha = \omega'\varphi'$ dir. Buradan

$$\omega'(f\varphi) = (\omega'f)\varphi = \omega\varphi = \omega'\varphi' \quad (5.6)$$

eşitliği elde edilir ve $\omega': X' \rightarrow B$ bir monomorfizm olduğundan $f\varphi = \varphi'$ bulunur. Böylece (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün $f: X \rightarrow X'$ vasıtasıyla (A, X', φ') nın bir yükselmesi olduğu görülür.

Önerme 5.3. $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi ve $(\tilde{A}, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ nın $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{B}$ vasıtasıyla bir yükselmesi olsun. Bu durumda $\tilde{g} = g\tilde{\omega}$ olmak üzere $\langle f, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{X}, \tilde{\varphi}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir morfizmidir.

İspat: İstenileni göstermek için $\tilde{g}\tilde{\varphi} = \alpha f$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\tilde{g} = g\tilde{\omega}$ olduğundan

$$\tilde{g}\tilde{\varphi} = (g\tilde{\omega})\tilde{\varphi} = g(\tilde{\omega}\tilde{\varphi}) = g\tilde{\alpha} = \alpha f \quad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremden bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizminin bir yükselmeye yükseltilmesi için bir kriter verilmektedir.

Teorem 5.1. $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ basit irtibatlı olacak şekilde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi ve (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olsun. Bu durumda $\omega\tilde{g} = g$ olacak şekilde bir $\langle f, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, X, \varphi)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin morfizmi vardır ancak ve ancak $f(\ker \tilde{\alpha}) \subseteq \ker \varphi$ dır.

İspat: Öncelikle kabul edelim ki $f(\ker \tilde{\alpha}) \subseteq \ker \varphi$ olsun. Şimdi $\tilde{g}: \tilde{B} \rightarrow X$ dönüşümünü tanımlayalım: $\tilde{\alpha}(\tilde{a}) = \tilde{b}$ olacak şekildeki bir $\tilde{a} \in \tilde{A}$ için $\tilde{g}(\tilde{b}) = \varphi f(\tilde{a})$ olarak tanımlansın. $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha})$ basit irtibatlı ve $f(\ker \tilde{\alpha}) \subseteq \ker \varphi$ olduğundan bu $\tilde{g}: \tilde{B} \rightarrow X$ dönüşümü iyi tanımlı bir grup homomorfizmidir. Diğer detaylar ise açıkça görülmektedir.

Tersine olarak $\tilde{x} \in \ker \tilde{\alpha}$ olsun. $\tilde{g}: \tilde{B} \rightarrow X$ dönüşümünün tanımından

$$\varphi(f(\tilde{x})) = \tilde{g}(\tilde{\alpha}(\tilde{x})) = \tilde{g}(0) = 0 \quad (5.8)$$

olur ve böylece $f(\tilde{x}) \in \ker \varphi$ olduğu ortaya çıkar. Bu ise ispatı tamamlar. Yani $f(\ker \tilde{\alpha}) \subseteq \ker \varphi$ dır.

Sonuç 5.2. $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ basit irtibatlı olmak üzere sırasıyla $\omega: X \rightarrow B$ ve $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, X, φ) ve $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ yükselmelerine sahip bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü için $\ker \tilde{\varphi} \subseteq \ker \varphi$ dir ancak ve ancak $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü (A, X, φ) nın bir yükselmesidir.

Sonuç 5.3. (A, X, φ) ve $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ basit irtibatlı olmak üzere sırasıyla $\omega: X \rightarrow B$ ve $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, X, φ) ve $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ yükselmelerine sahip bir (A, B, α)

genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü için $\ker \tilde{\varphi} = \ker \varphi$ dir ancak ve ancak $\mathbf{LGXM}/(A, B, \alpha)$ kategorisinde bir $\langle f, g \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ izomorfizmi vardır.

Teorem 5.2. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve N ise A nın $N \subseteq \ker \alpha$ şartını sağlayacak şekilde bir ideali olsun. Bu durumda $\varphi: A \rightarrow A/N$, $\varphi(a) = a + N$ ve $\omega(a + N) = \alpha(a)$ olmak üzere $(A, A/N, \varphi)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: A/N \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olur. Bu durumda ayrıca $\ker \varphi = N$ olur.

İspat: Tanımlarından açıkça görülüyor ki $\omega\varphi = \alpha$ dir. O halde Lemma 5.1 in şartlarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Herhangi $a, a_1 \in A$ elemanları için

$$\begin{aligned} \varphi((a + N) \cdot a_1) &= \varphi(\alpha(a) \cdot a_1) \\ &= \varphi(a_1^a) \\ &= \varphi(a_1)^{\varphi(a)} \\ &= \varphi(a_1)^{a+N} \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitliği sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

Mucuk ve Şahan [19] grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin örtüleri ile yükselmelerinin kategorik olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Aşağıdaki teoremden ise mucuk ve Şahan tarafından elde edilen bu sonucun genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllere genelleştirilmesi elde edilmiştir.

Teorem 5.3. (A, B, α) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olsun. O halde (A, B, α) nın örtülerinin kategorisi $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ ile yükselmelerinin kategorisi $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ doğal olarak denktir.

İspat: Açıkça görülüyor ki eğer (A, X, φ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $\omega: X \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülünün bir yükselmesi ise $\langle 1_A, \omega \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmidir. 1_A bir izomorfizm olduğundan (A, X, φ) , (A, B, α) nın bir örtüsüdür. Bununla birlikte kabul edelim ki $(A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü (A, B, α) nın $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow B$ vasıtasıyla başka bir yükselmesi ve $f: X \rightarrow \tilde{X}$ dönüşümü $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ kategorisinde bir morfizm olsun. Buradan

$\langle 1_A, f \rangle: (A, X, \varphi) \rightarrow (A, \tilde{X}, \tilde{\varphi})$ dönüşümü ise $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ kategorisinde bir morfizm olur. Bu inşaa açıkça bir $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha) \rightarrow \mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ fanktoru tanımlar.

Tersine olarak, eğer $\langle f, g \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, B, \alpha)$ dönüşümü genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtü morfizmi ise $f: \tilde{A} \rightarrow A$ bir izomorfizmdir ve $\varphi = \tilde{\alpha}f^{-1}$ olarak alırsak $(A, \tilde{B}, \varphi)$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü $g: \tilde{B} \rightarrow B$ vasıtasıyla (A, B, α) nın bir yükselmesi olur. Çünkü $\langle f, g \rangle$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtü morfizmi olduğundan $g\tilde{\alpha} = \alpha f$ olup buradan

$$g\varphi = g\tilde{\alpha}f^{-1} = \alpha f f^{-1} = \alpha \quad (5.10)$$

olur. Ayrıca $\langle f', g' \rangle: (A', B', \alpha') \rightarrow (A, B, \alpha)$ başka bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül örtü morfizmi ve $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A', B', \alpha')$ dönüşümü $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha)$ kategorisinde bir morfizm ise $\tilde{g}: \tilde{B} \rightarrow B'$ dönüşümü $\mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ kategorisinde bir morfizmdir. Bu inşaa ise bir $\mathbf{Cov}_{\mathbf{GCM}}(A, B, \alpha) \rightarrow \mathbf{LGCM}/(A, B, \alpha)$ fanktoru tanımlar. Diğer detaylar basit hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebilir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüller grupların kendi üzerlerine konjügasyon etkimeleri alınarak tanımlanmıştır. Yakın zamanda ise bu konjügasyon etkimeleri yerine grupların kendi üzerlerine keyfi etkimeleri alınarak genelleştirilmiş çaprazlanmış modül ve genelleştirilmiş çaprazlanmış modül morfizmi kavramları ortaya çıkmıştır. Sonrasında bu şekilde tanımlanan genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi **GCM** nin kategorik özellikleri bakımından özel objeleri ve özel morfizmleri incelenmiştir.

Bu çalışmada öncelikle üçüncü bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerle ilgili tanım ve bazı sonuçlar hatırlatılmıştır. Daha sonra literatürde iyi bilinen cat^1 -gruplar ile çaprazlanmış modüllerin kategoriksel denkliği kullanılarak genelleştirilmiş cat^1 -grup kavramı tanımlanmış ve bu tür cebirsel yapıların kategorisi elde edilmiştir. Benzer bir denklik tanımlanamamış olsa da genelleştirilmiş cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – Grp** den genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi **GCM** ye bir fanktor tanımlanmıştır.

Yine literatürde çaprazlanmış modüller için örtü çaprazlanmış modülü ve yükselme kavramları bulunmaktadır. Ayrıca verilen bir çaprazlanmış modül için bu çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi ile yükselmelerinin kategorisinin denk olduğu bilinmektedir. Benzer düşünce ile önce dördüncü bölümde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtü kavramı tanımlanmış ve verilen bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi elde edilmiştir. Yine bu bölümde genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin örtüleri ile ilgili literatürde bulunan benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün bir grup homomorfizmi üzerinden yükselmesi kavramı tanımlanmış ve verilen bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün yükselmelerinin kategorisi elde edilmiştir. Benzer şekilde bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün yükselmeleri için de çeşitli sonuçlar gösterilmiştir. Ayrıca verilen bir (A, B, α) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülün örtülerinin kategorisi **Cov_{GCM}(A, B, α)** ile yükselmelerinin kategorisi **LGCM/(A, B, α)** nin doğal olarak denk olduğu gösterilmiştir.

Bu tezde yapılan benzer düşünce tarzı ile farklı cebirsel kategorilerdeki çaprazlanmış modüller için elde edilen izoklinizm, kapabilite, etkime, derivasyon ve aktör gibi çeşitli kavram ve sonuçlar genelleştirilmiş çaprazlanmış modüllerin kategorisi için de incelenebilir.



KAYNAKLAR

1. Mac Lane, S. ve Whitehead, J.H.C., 1950. On the 3-types of a complex, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1), 41 – 48.
2. Norrie, K., 1987. Crossed modules and analogues of groups theorems, Dissertation, King's College, University of London.
3. Loday, J.L., 1982. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 24, 179 – 202.
4. Alp, M., 1998. Pullbacks of crossed modules and cat^1 -groups, Turkish Journal of Mathematics, 22, 273 – 281.
5. Brown, R., 1984. Coproducts of crossed P-modules: Applications to second homotopy groups and to the homology of groups, Topology, 23(3), 337 – 345.
6. Mohammadzadeh, H., Shahrokkhi, S. ve Salemkar, A.R., 2014. Some results on stem covers of crossed modules, Journal of Pure and Applied Algebra, 218, 1964 – 1972.
7. Rodeja, E.G., Ladra M. ve Lopez M.P., 2004. Epimorphisms in the category of crossed modules, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 28, 287 – 302.
8. Salemkar, A.R., Mohammadzadeh H. ve Shahrokh S., 2016. Isoclinism of crossed modules, Assian-European Journal of Mathematics, 9(3), 1650091.
9. Yavari M. ve Salemkar A., 2019. The category of generalized crossed modules. Categories and General Algebraic Structures with Applications, 10(1), 157 – 171.
10. Mucuk, O., 2011. Topoloji ve Kategori, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
11. Brown, R., 1987. From groups to groupoids: a brief survey, Bulletin of the London Mathematical Society, 19, 113 – 134.
12. Mackenzie, K.C.H., 1987. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, volume 124 of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press.
13. Whitehead, J.H.C., 1946. Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups, Annals of Mathematics, 47(4), 806 – 810.
14. Norrie, K., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, Bulletin de la Société Mathématique de France, 118(2), 129 – 146.
15. Mucuk, O., Şahan, T., ve Alemdar, N., 2014. Normality and quotients in crossed modules and group-groupoids, Applied Categorical Structures, 23, 415 – 428.

16. Datuashvili, T., 2002. Central series for groups with action and leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 9(4), 671 – 682.
17. Datuashvili, T., 2004. Witt's theorem for groups with action and free leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 11(4), 691 – 712.
18. Brown, R. ve Mucuk, O., 1994. Covering groups of nonconnected topological groups revisited, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 115(1), 97 – 110.
19. Mucuk, O. ve Şahan, T., 2019. Group-groupoid actions and liftings of crossed modules, Georgian Mathematical Journal, 26(3), 437 – 447.
20. Şahan, T., 2019. Further remarks on liftings of crossed modules, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48(3), 743 – 752.
21. Akız, H.F., Mucuk, O. ve Şahan, T. 2020. Liftings of crossed modules in the category of groups with operations, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 38(7), 181 – 193.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Gamze AYTEKİN ARICI

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011-2017

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik A.B.D., 2018-2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Gamze Aytekin Arıcı, Tunçar Şahan (2020). A Note On Generalized Crossed Modules, 4th International Conference on Mathematics “An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, Sayfa 14, 27-30 Ekim 2020, İstanbul, Türkiye.