

**T.C.**  
**AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ DELANNOY POLİNOMLARI ÜZERİNE**

**Serhat YAMAN**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**OCAK 2024**

**ANTALYA**

**T.C.**  
**AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ DELANNOY POLİNOMLARI ÜZERİNE**

**Serhat YAMAN**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**OCAK 2024**

**ANTALYA**

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DELANNOY POLİNOMLARI ÜZERİNE

Serhat YAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/01/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI (Danışman)

Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Doç. Dr. Ayhan DİL

## ÖZET

### GENELLEŞTİRİLMİŞ DELANNOY POLİNOMLARI ÜZERİNE

Serhat YAMAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Ocak 2024; 23 sayfa

Bu çalışmada, Delannoy polinomlarının bir genelleştirmesi tanımlanacaktır. Bu polinomların üreteç fonksiyonu ve çeşitli indirgeme formülleri verilecektir. Ayrıca, yeni bir ortogonal polinom sınıfı verilip bu polinomların genelleştirilmiş Delannoy polinomlarıyla ilişkisi kurulacaktır. Son olarak, bu ortogonal polinom sınıfı için çeşitli bağıntılar elde edilecektir.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Delannoy sayısı, Delannoy polinomları, ortogonal polinom, indirgeme formülü.

**JÜRİ:** Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Doç. Dr. Ayhan DİL

**ABSTRACT**  
**ON THE GENERALIZED DELANNOY POLYNOMIALS**

**Serhat YAMAN**

**MSc Thesis in MATHEMATICS**

**Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Muhammet Cihat DAĞLI**

**January 2024; 23 pages**

In this work, a generalization of the Delannoy polynomials is defined. A generating function and several recurrence relations are given for them. Also, after defining a general class of orthogonal polynomials, some relationships between these polynomials are derived. Finally, several relations are established for them.

**KEYWORDS:** Delannoy number, Delannoy polynomial, orthogonal polynomial, recurrence relation.

**COMMITTEE:** Assoc.Prof.Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Assoc.Prof.Dr. Ulaş YAMANCI

Assoc.Prof.Dr. Ayhan DİL

## ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kaynak Taraması ile Bulgular ve Tartışma olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular ve Tartışma bölümünde kullanılacak olan bazı temel kavramların tanımları ve bazı önemli sonuçları Kaynak Taraması bölümünde verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise Delannoy polinomlarının bir genelleştirmesi tanımlanacaktır. Bu polinomların üreteç fonksiyonu ve çeşitli indirgeme formülleri verilecektir. Ayrıca, yeni bir ortogonal polinom sınıfı verilip bu polinomların genelleştirilmiş Delannoy polinomları ile ilişkisi kurulacaktır. Son olarak, bu ortogonal polinom sınıfı için çeşitli bağıntılar elde edilecektir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, hiçbir konuda desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET . . . . .                                       | i   |
| ABSTRACT . . . . .                                   | ii  |
| ÖNSÖZ . . . . .                                      | iii |
| AKADEMİK BEYAN . . . . .                             | v   |
| SİMGELER . . . . .                                   | vi  |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                   | 1   |
| 2. KAYNAK TARAMASI . . . . .                         | 3   |
| 2.1. Delannoy Sayıları . . . . .                     | 3   |
| 2.2. Ortogonal Polinomlar . . . . .                  | 3   |
| 2.3. Genelleştirilmiş Delannoy Polinomları . . . . . | 4   |
| 3. MATERYAL VE METOT . . . . .                       | 9   |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .                    | 10  |
| 5. SONUÇLAR . . . . .                                | 21  |
| 6. KAYNAKLAR . . . . .                               | 22  |
| ÖZGEÇMİŞ <sup>24</sup> . . . . .                     |     |

## AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Delannoy Polinomları Üzerine” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/01/2024

Serhat YAMAN

İmza

XXXXXXXXXX

## SİMGELER

### Simgeler:

$\mathbb{N}_0$  :  $\{0, 1, 2, \dots\}$

$d_n(m)$  : Delannoy sayısı

$d_n(x)$  : Delannoy polinomu

$w(x)$  : Ağırlık fonksiyonu

$d_n^{(r)}(x)$  : Genelleştirilmiş Delannoy polinomu

$\binom{n}{k}$  : binom katsayısı

$[x]$  : Bir  $x$  gerçel sayısının tam değeri

## 1. GİRİŞ

$k, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  olmak üzere  $d_k(n)$  ile gösterilen Delannoy sayıları;  $(0, 0)$  noktasından  $(n, k)$  ye yalnızca *kuzey*  $(0, 1)$ , *doğu*  $(1, 0)$  ve *kuzeydoğu*  $(1, 1)$  adımları ile kabul edilen latis yollarının sayısı olarak tanımlanır. Bu sayılar,  $d_k(0) = d_0(n) = d_0(0) = 1$  başlangıç değerleriyle aşağıdaki rekürans formülünü sağlar:

$$d_k(n) = d_k(n-1) + d_{k-1}(n-1) + d_{k-1}(n)$$

Bu sayıların tarihsel önemi Banderier ve Schwer tarafından "Why Delannoy numbers?" çalışmasında verilmiştir.

Ayrıca, bu sayılar

$$\sum_{n,k \geq 0} d_k(n) x^n y^k = \frac{1}{1-x-y-xy}$$

üreteç fonksiyonunun sahipidir ve

$$d_k(n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n}{j} 2^j$$

kapalı formülüyle hesaplanabilir. Gould (1972) çalışmasında (3.17) eşitliği ile verilen

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{x}{j} t^j = \sum_{j=0}^j \binom{k}{j} \binom{x+j}{k} (t-1)^j$$

formülünden

$$d_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{x}{j} 2^j, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklindeki Delannoy polinomları tanımlanmıştır (Sun 2017).

Aynı çalışmada bu polinomlar için süper kongrüans bağıntıları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in \mathbb{Z}$  için

$$x(x+1) \sum_{j=0}^{k-1} (2j+1) d_j(x)^2 \equiv 0 \pmod{2k^2},$$

ve  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon^j (2j+1) d_j(x)^{2n} \equiv 0 \pmod{k}$$

kongrüans bağıntıları öne sürülmüş, Guo (2016) çalışmasında bu bağıntılar

$$d_k(x)^2 = \sum_{j=0}^k \binom{k+j}{2j} \binom{x}{j} \binom{x+j}{j} 4^j$$

eşitliğini kullanılarak kanıtlanmıştır.

Bu polinomların ve sayıların bazı aritmetik, analitik özellikleri, kongrüans bağıntıları ile birlikte çeşitli genelleştirmeleri sunulmuştur (Caughman vd 2008, Dağlı 2020, 2021, Fray ve Roselle 1971, 1973, Liu 2016, Liu vd 2018, Noble 2012, Qi 2021, Qi vd 2019, Qi vd 2018, Razpet 2002, Sun 2011, 2017, 2018, Wang vd 2019).

Z.-H. Sun (2017) Delannoy polinomlarını,  $k \geq 0$  olmak üzere

$$d_k^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{k} \binom{x-r}{k-j}$$

şeklinde genelleştirip bu polimların rekürans formülleri, üreteç fonksiyonu gibi özelliklerini çalışmıştır.

Bu tez çalışmasında,  $d_k^{(r)}(x)$  polinomlarının bir genelleştirmesi olarak

$$d_k^{(r)}(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{j} \binom{x-r}{k-j} y^j$$

polinomu tanımlanacaktır. Bu polinomların üreteç fonksiyonu ve çeşitli rekürans formülleri verilecektir. Ayrıca, yeni bir ortogonal polinom sınıfı verilip bu polinomların  $d_n^{(r)}(x, y)$  ile ilişkisi kurulacaktır. Son olarak, bu ortogonal polinom sınıfı için çeşitli bağıntılar elde edilecektir.

## 2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölüm, tez çalışmasında başvurulacak olan bazı temel kavramların tanıtımı ve bu kavramların sağladıkları önemli özelliklerinde oluşmaktadır. Diğer kavramlar ve onların özellikleri, tez boyunca uygun yerlerde açıklanacaktır.

### 2.1. Delannoy Sayıları

**Tanım 2.1.**  $d_n(m)$  ile gösterilen Delannoy sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\sum_{k,n \geq 0} d_k(n) x^n y^k = \frac{1}{1 - x - y - xy}.$$

Ayrıca, bu sayılar  $d_n(0) = d_0(m) = d_0(0) = 1$  başlangıç değerleriyle aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar:

$$d_k(n) = d_k(n-1) + d_{k-1}(n-1) + d_{k-1}(n).$$

**Tanım 2.2.** Delannoy sayıları aşağıdaki kapalı formül ile hesaplanır:

$$d_k(n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n}{j} 2^j$$

Bu sayılar  $x \in \mathbb{R}$  olmak üzere Sun (2017) tarafından

$$d_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{x}{j} 2^j, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklinde polinom olarak genişletilmiştir. Ayrıca, daha genel durum olarak

$$d_k(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{x}{j} y^j$$

ifadesi tanımlanıp çeşitli süperkongrüans bağıntıları çalışılmıştır. Belirtelim ki  $d_k(x, 2) = d_k(x)$  olur.

### 2.2. Ortogonal Polinomlar

**Tanım 2.3.** (Gasper ve Rahman 2004)  $A_k, B_k, C_k$  reel sayılar ve  $A_k C_{k+1} > 0$  olsun. Reel değerli  $\{p_k(x)\}$  polinomlarının her ortogonal sistemi,  $p_{-1}(x) = 0$ ,  $p_0(x) = 1$  olmak üzere  $k \geq 0$  için

$$A_k p_{k+1}(x) + B_k p_k(x) + C_k p_{k-1}(x) = x p_k(x) \quad (2.1)$$

bağıntısını sağlar. Diğer taraftan eğer  $A_k, B_k, C_k$  reel sayılar ve  $A_k C_{k+1} > 0$  için (2.1) sağlanırsa, bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) p_s(x) p_t(x) dx = \begin{cases} 0, & s \neq t \\ \frac{1}{v_t} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx, & s = t \end{cases}$$

ifadesini sağlayan bir  $w(x)$  ağırlık fonksiyonu vardır. Burada

$$v_0 = 1 \text{ ve } v_t = \frac{A_0 A_1 \cdots A_{t-1}}{C_1 \cdots C_t}, (t \geq 1)$$

dir.

Zhi-Hong Sun (2017) tarafından  $\{D_k^{(r)}(x)\}$  ile gösterilen ve  $D_{-1}^{(r)}(x) = 0$ ,  $D_0^{(r)}(x) = 1$  başlangıç koşulları ile  $k \geq 0$  için

$$D_{k+1}^{(r)}(x) = x D_k^{(r)}(x) - k(k+2r) D_{k-1}^{(r)}(x)$$

şeklinde bir polinom ailesi sunulmuştur. Burada  $r > -\frac{1}{2}$  olur. Ayrıca,  $A_k = 1$ ,  $B_k = 0$ ,  $C_k = k(k+2r)$ ,  $v_0 = 1$  ve  $v_t = \frac{1}{t!(2r+1)(2r+2)\cdots(2r+t)}$ ,  $(t \geq 1)$  olur. Dolayısıyla  $A_k C_{k+1} > 0$  ve  $p_k(x) = D_k^{(r)}(x)$  için (2.1) için sağlanır. Buradan  $\{D_k^{(r)}(x)\}$  elemanları ortogonal polinomlardır. Bu polinomların ilk birkaç terimi

$$D_0^{(r)}(x) = 1,$$

$$D_1^{(r)}(x) = x,$$

$$D_2^{(r)}(x) = x^2 - 2r - 1,$$

$$D_3^{(r)}(x) = x^3 - (6r+5)x,$$

şeklindedir.

### 2.3. Genelleştirilmiş Delannoy Polinomları

**Tanım 2.4.**  $k \geq 0$  olmak üzere genelleştirilmiş Delannoy polinomları

$$d_k^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{j} \binom{x-r}{k-j}$$

şeklinde verilmiştir (Zhi-Hong Sun (2017)). İlk birkaç  $\{d_k(x)\}$  elemanı

$$d_0^{(r)}(x) = 1,$$

$$d_1^{(r)}(x) = 2x + 1,$$

$$d_2^{(r)}(x) = 2x^2 + 2x + r + 1,$$

$$d_3^{(r)}(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \left(2r + \frac{8}{3}\right)x + r + 1$$

şeklinde dir.  $r = 0$  özel durumunda  $d_k^{(0)}(x) = d_k(x)$  klasik Delannoy polinomları elde edilir. Ayrıca,

$$\binom{-x}{j} = (-1)^j \binom{x+j-1}{j}$$

bağıntısı kullanılarak

$$d_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{x-r}{j} \binom{-1-x-r}{j} (-1)^j = \sum_{j=0}^k \binom{x-r}{j} \binom{-1-x-r}{k-j} (-1)^{k-j}$$

yazılır ki buradan,

$$d_k^{(r)}(-1-x) = (-1)^k d_k^{(r)}(x)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, Z.H. Sun (2017) tarafından elde edilen genelleştirilmiş Delannoy polinomları için teoremleri sunalım.

**Teorem 2.5.** (Sun 2017)  $|z| < 1$  için genelleştirilmiş Delannoy polinomları

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x) z^k = \frac{(1+z)^{x-r}}{(1-z)^{x+r+1}}$$

üreteç fonksiyonuna sahiptir.

Bu üreteç fonksiyonu yardımıyla  $k \in \mathbb{N}$  için

$$d_k^{(r)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & 2 \nmid k \text{ ise} \\ \left(-\frac{1}{2} - r\right) \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} (-1)^{\frac{k}{2}}, & 2 \mid k \text{ ise} \end{cases}$$

formülü elde edilebilir.

**Teorem 2.6.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}$  için genelleştirilmiş Delannoy polinomları

$$(1+2x) d_k^{(r)}(x) + (k+2r) d_{k-1}^{(r)}(x) = (k+1) d_{k+1}^{(r)}(x)$$

indirgeme formülünü sağlar.

**Teorem 2.7.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere, genelleştirilmiş Delannoy polinomları ile klasik Delannoy polinomları arasındaki aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:

$$d_k^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{r-1+j}{j} d_{k-2j}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{2r-1+j}{j} d_{k-j}(x-r)$$

ve

$$d_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{r}{j} (-1)^j d_{k-2j}^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{2r}{j} (-1)^j d_{k-j}^{(r)}(x+r).$$

**Teorem 2.8.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}$  için

$$d_k^{(r)}(x) = d_k^{(r+1)}(x) - d_{k-2}^{(r+1)}(x),$$

$$d_k^{(r+1)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{k-2j}^{(r)}(x),$$

$$4(x-r)(x+1+r) \left( d_k^{(r+1)}(x)^2 - d_{k-1}^{(r+1)}(x)^2 \right) = (k+1)^2 d_{k+1}^{(r)}(x)^2 - (k+2r+1)^2 d_k^{(r)}(x)^2$$

ve

$$k^2 d_k^{(r)}(x)^2 - 4(x-r)(x+1+r) d_{k-1}^{(r+1)}(x)^2 = (2r+1) \sum_{j=0}^{k-1} (2j+2r+1) d_j^{(r)}(x)^2$$

bağıntıları geçerlidir.

**Teorem 2.9.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$  ve  $x \in \mathbb{Z}$  olmak üzere genelleştirilmiş Delannoy polinomları

$$(2r+1) \prod_{j=-r}^r (x+j)(x+1-j) \sum_{j=0}^{k-1} (2j+2r+1) d_j^{(r)}(x)^2 \equiv 0 \pmod{2k^2(k+1)^2 \dots (k+2r)^2}$$

kongrüans bağıntısını sağlar.

**Teorem 2.10.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}_0$  ve  $r \notin \{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\}$  olsun. Bu taktirde,

$$d_k^{(r)}(x)^2 = \binom{k+2r}{k} \sum_{j=0}^k \frac{\binom{x-r}{j} \binom{x+r+j}{j} \binom{k+2r+j}{k-j}}{\binom{j+2r}{j}} 4^j$$

dir.

**Teorem 2.11.** (Sun 2017)  $n, k \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere

$$d_n^{(r)}(x) d_k^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^{\min\{n,k\}} \binom{n+k-2j}{n-j} \binom{2r+n+k-j}{j} (-1)^j d_{n+k-2j}^{(r)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

**Teorem 2.12.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} 2(1+x+y) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2r+j+1) \cdots (2r+k)}{(j+1) \cdots k} d_j^{(r)}(x) d_j^{(r)}(y) \\ = (k+2r)(d_k^{(r)}(x) d_{k-1}^{(r)}(y) + d_{k-1}^{(r)}(x) d_k^{(r)}(y)) \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 2.13.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}_0$  için,  $d_k^{(r)}(x)$  genelleştirilmiş Delannoy polinomları ile  $D_k^{(r)}(x)$  ortogonal polinomları arasında aşağıdaki gibi ilişki vardır:

$$d_k^{(r)}(x) = \frac{i^k D_k^{(r)}(-i(1+2x))}{k!}$$

ve

$$D_k^{(r)}(x) = (-i)^k k! d_k^{(r)}\left(\frac{ix-1}{2}\right).$$

**Teorem 2.14.** (Sun 2017)  $k \in \mathbb{N}$  için

$$\sum_{j=0}^{k-1} (2j+2r+1) \prod_{\mu=j+1}^k \mu(\mu+2r) D_j^{(r)}(x)^2 = k(k+2r) \left( D_k^{(r)}(x)^2 - D_{k-1}^{(r)}(x) D_{k+1}^{(r)}(x) \right)$$

olur. Dolayısıyla  $r > -\frac{1}{2}$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için

$$D_k^{(r)}(x)^2 - D_{k+1}^{(r)}(x) D_{k-1}^{(r)}(x) > 0$$

olur.

**Teorem 2.15.** (Sun 2017)  $\{D_k^{(r)}(x)\}$  ortogonal polinomları

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x) \frac{z^k}{k!} = (1+z^2)^{-r-\frac{1}{2}} e^{x \arctan z}$$

üreteç fonksiyonuna sahiptir.

Üreteç fonksiyonunun bir sonucu olarak  $k \in \mathbb{N}_0$  için,

$$D_k^{(r)}(-x) = (-1)^k D_k^{(r)}(x) \text{ ve } D_k^{(r)}(0) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ k! \left(-\frac{r-\frac{1}{2}}{2}\right), & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

özdeşlikleri sağlanır (Sun (2017)).

Bu tez çalışmasında,  $d_k^{(r)}(x)$  polinomlarının bir genelleştirmesi olarak

$$d_k^{(r)}(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{j} \binom{x-r}{k-j} y^j$$

polinomu tanımlanacaktır. Bu polinomların üreteç fonksiyonu, çeşitli rekürans formülleri verilecektir. Ayrıca, yukarıda verilen  $D_n^{(r)}(x)$  ortogonal polinom sınıfının  $D_n^{(r)}(x, y)$  şeklinde bir genelleştirmesi verilip bu polinomların üreteç fonksiyonu, indirgeme bağıntıları gibi özellikleri verilecektir. Dahası,  $D_n^{(r)}(x, y)$  ortogonal polinom sınıfı ve  $d_n^{(r)}(x, y)$  polinomlarını içeren formüller elde edilecektir.

### 3. MATERYAL VE METOT

Kaynak taraması bölümünde yer alan genelleştirilmiş Delannoy polinomu  $d_n^{(r)}(x)$  ve ortogonal polinomların geniş bir sınıfı olan  $D_n^{(r)}(x)$  polinomlarının sağladıkları özellikler ve bu özellikleri elde etmek için başvurulan yöntem Materyal ve Metot olarak kullanılacaktır.



#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Delannoy polinomlarının bir genelleştirmesi tanımlanıp bu polinomların üreteç fonksiyonu ve çeşitli indirgeme formülleri verilecektir. Ayrıca, yeni bir ortogonal polinom sınıfı tanımlanıp bunlar için üreteç fonksiyonu, indirgeme bağıntıları gibi özellikleri verilecektir. Dahası, bu iki polinom arasında çeşitli bağıntılar elde edilecektir.

**Tanım 4.1.**  $y \in \mathbb{R}$  ve  $k = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere genelleştirilmiş Delannoy polinomları

$$d_k^{(r)}(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{j} \binom{x-r}{k-j} y^j$$

şeklinde tanımlanır.

İlk birkaç  $d_k^{(r)}(x, y)$  polinomu aşağıdaki gibidir:

$$d_0^{(r)}(x, y) = 1,$$

$$d_1^{(r)}(x, y) = x - r + y(x + r + 1),$$

$$\begin{aligned} d_2^{(r)}(x, y) &= \frac{(x-r)(x-r-1)}{2} + (x+r+1)(x-r)y \\ &+ \frac{(x+r+2)(x+r+1)}{2}y^2. \end{aligned}$$

$y = 1$  için, Z. H. Sun (2017) tarafından elde edilen genelleştirilmiş Delannoy polinomları  $d_k^{(r)}(x, 1) = d_k^{(r)}(x)$  olur.  $y = 1$  ve  $r = 0$  için ise  $d_k^{(0)}(x, 1) = d_k(x)$  olup klasik Delannoy polinomları elde edilir.  $r = 0$  ve  $y$  yerine  $y - 1$  alınırsa, Z. W. Sun (2017) de tanımlanan  $d_k^{(0)}(x, y - 1) = D_k(x, y)$  polinomları elde edilir.

$$\binom{x}{j} = (-1)^j \binom{-x+j-1}{j} \quad (4.1)$$

ifadesi yardımıyla

$$\begin{aligned} d_k^{(r)}(x, y) &= \sum_{j=0}^k \binom{x+r+j}{j} \binom{x-r}{k-j} y^j \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-1-x-r}{j} \binom{x-r}{k-j} y^j \end{aligned} \quad (4.2)$$

yazılabilir.

**Teorem 4.2.** *Genelleştirilmiş Delannoy polinomları için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

$$d_k^{(r)}\left(-1-x, \frac{1}{y}\right) = \left(-\frac{1}{y}\right)^k d_k^{(r)}(x, y) \quad (4.3)$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k = \frac{(1+z)^{x-r}}{(1-yz)^{x+r+1}} \quad (|z| < 1). \quad (4.4)$$

**İspat**  $d_k^{(r)}(x, y)$  polinomunun tanımından ve  $\binom{x}{j} = (-1)^j \binom{-x+j-1}{j}$  ifadesinden,

$$\begin{aligned} d_k^{(r)}\left(-1-x, \frac{1}{y}\right) &= \sum_{j=0}^k \binom{-1-x+r+j}{j} \binom{-1-x-r}{k-j} y^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{x-r}{j} \binom{-1-x-r}{k-j} y^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{x-r}{k-j} \binom{-1-x-r}{j} y^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^k \binom{x-r}{k-j} \binom{x+r+j}{j} y^{j-k} \\ &= \left(-\frac{1}{y}\right)^k d_k^{(r)}(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (4.3) eşitliğini kanıtlamış olur.  $\alpha \in \mathbb{C}$  ve  $|z| < 1$  olmak üzere

$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$  binom teoremi, Cauchy çarpımı ve (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \binom{x-r}{j} z^j \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-x-r-1}{j} (-yz)^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^j \binom{-x-r-1}{i} (-1)^i \binom{x-r}{j-i} y^i \right) z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{(r)}(x, y) z^j \end{aligned}$$

sonucundan (4.4) eşitliğinin kanıtı tamamlanır.  $\square$

**Teorem 4.3.**  $k \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $d_k^{(r)}(x, y)$  için aşağıdaki indirgeme bağıntısı sağlanır:

$$\begin{aligned} (x-r-k+y(x+r+k+1)) d_k^{(r)}(x, y) + y(k+2r) d_{k-1}^{(r)}(x, y) \\ = (k+1) d_{k+1}^{(r)}(x, y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

**İspat** (4.4) üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1}^{(r)}(x, y) k^n - y \sum_{k=0}^{\infty} k d_k^{(r)}(x, y) z^k \\
&= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1}^{(r)}(x, y) z^{k+1} - yz \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k \\
&= \frac{d}{dz} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} - yz \frac{d}{dz} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} \\
&= (1-yz) \frac{d}{dz} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} \\
&= (1-yz) ((x-r)(1+z)^{x-r-1} (1-yz)^{-x-r-1} + y(x+r+1)(1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-2}) \\
&= (1-yz) (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} \left( \frac{x-r}{1+z} + \frac{y(x+r+1)}{1-yz} \right)
\end{aligned}$$

yazılır, buradan

$$\begin{aligned}
& ((x-r)(1-yz) + y(x+r+1)(1+z)) \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) k^n \\
&= (1+z) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1}^{(r)}(x, y) z^k - y \sum_{k=0}^{\infty} k d_k^{(r)}(x, y) z^k \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da kanıtı tamamlar.  $\square$

**Teorem 4.4.**  $k \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere  $d_k(x, y)$  için aşağıdaki formüller sağlanır:

$$d_k^{(r+1)}(x, y) - y d_{k-1}^{(r+1)}(x, y) = \sum_{j=0}^k (-1)^j d_{k-j}^{(r)}(x, y),$$

$$d_k^{(r+1)}(x, y) + d_{k-1}^{(r+1)}(x, y) = \sum_{j=0}^k y^j d_{k-j}^{(r)}(x, y)$$

ve

$$d_k^{(r)}(x, y) = d_k^{(r+1)}(x, y) + (1-y) d_{k-1}^{(r+1)}(x, y) - y d_{k-2}^{(r+1)}(x, y).$$

**İspat** İlk olarak, (4.4) üreteç fonksiyonundan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r+1)}(x, y) z^k &= \frac{(1+z)^{x-r-1}}{(1-yz)^{x+r+2}} = \frac{1}{(1+z)(1-yz)} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} \\
&= \frac{1}{(1+z)(1-yz)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılabilir. Buradan,

$$(1 - yz) \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r+1)}(x, y) z^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k \right)$$

eşitliği yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafı için Cauchy çarpımı yapıp  $z^k$  katsayıları eşitlenirse teoremin ilk eşitliği elde edilir. İkinci eşitlik ise (4.6) ifadesi

$$(1 + z) \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r+1)}(x, y) z^k = \frac{1}{1 - yz} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k$$

şeklinde yazılıp benzer işlemler yapılırsa elde edilir. Son eşitliğe ise (4.6) eşitliğinin

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r+1)}(x, y) z^k = \frac{1}{1 - (1 - y)z - yz^2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(r)}(x, y) z^k$$

şeklinde yazılması durumunda ulaşılabilir. Dolayısıyla teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

□

Şimdi,  $D_k^{(r)}(x, y)$  ile gösterilecek olan ortogonal polinomlarının yeni bir genel sınıfını tanımlayalım.

**Tanım 4.5.**  $D_{-1}^{(r)}(x, y) = 0$  ve  $D_0^{(r)}(x, y) = 1$  başlangıç değerleriyle, her  $k \geq 0$  için  $D_k^{(r)}(x, y)$  ile gösterilen ortogonal polinom

$$xD_k^{(r)}(x, y) - yk(k + 2r)D_{k-1}^{(r)}(x, y) = D_{k+1}^{(r)}(x, y) \quad (4.7)$$

yineleme bağıntısı ile verilsin.

İlk birkaç  $D_k^{(r)}(x, y)$  polinomu aşağıdaki gibidir:

$$D_0^{(r)}(x, y) = 1,$$

$$D_1^{(r)}(x, y) = x,$$

$$D_2^{(r)}(x, y) = x^2 + y(1 + 2r).$$

Gasper ve Rahman (2004) çalışmasında verilen tanıma göre  $r > -\frac{1}{2}$  ve  $y > 0$  şartları altında  $A_k, B_k, C_k$  değerleri sırasıyla 1, 0 ve  $yk(k + 2r)$  değerlerine karşılık gelir. Ayrıca  $k \geq 1$  için  $v_0 = 1$  ve

$$v_k = \frac{1}{y^k k! (1 + 2r)(2 + 2r) \dots (k + 2r)}$$

olur. Dolayısıyla,  $A_k C_{k+1} > 0$  ve  $\{D_k^{(r)}(x, y)\}$  polinomları ortogonal polinomlardır.

Aşağıdaki lemmadan  $D_k^{(r)}(x, y)$  ve  $d_k^{(r)}(x, y)$  polinomları arasındaki bağlantı gözlemlenebilir.

**Lemma 4.6.**  $k \in \mathbb{N}_0$  için

$$d_k^{(r)}(x, y) = \frac{i^k D_k^{(r)}(-iw, y)}{k!}$$

sağlanır. Burada  $w = x - r - k + y(x + r + k + 1)$  olur. Ayrıca,

$$D_k^{(r)}(x, y) = (-i)^k k! d_k^{(r)}\left(\frac{ix + (r + k - y(r + k + 1))}{1 + y}, y\right)$$

olur.

**İspat** (4.7) den,

$$\begin{aligned} & (k+1) \frac{i^{k+1} D_{k+1}^{(r)}(-iw, y)}{(k+1)!} \\ &= \frac{i^{k+1} D_{k+1}^{(r)}(-iw, y)}{k!} \\ &= \frac{i^{k+1}}{k!} \left( -iw D_k^{(r)}(-iw, y) - yk(k+2r) D_{k-1}^{(r)}(-iw, y) \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{i^{k+1} D_{k+1}^{(r)}(-iw, y)}{k!} = w \frac{i^k D_k^{(r)}(-iw, y)}{k!} + y(k+2r) \frac{i^{k-1} D_{k-1}^{(r)}(-iw, y)}{(k-1)!}$$

dir. Bunun ise, (4.5) ile verilen  $d_k^{(r)}(x, y)$  için indirgeme formülü olduğu görülür.  $D_0^{(r)}(-iw, y) = 1$  ve  $iD_1^{(r)}(-iw, y) = w$  oldukları göz önünde bulundurularak  $d_k^{(r)}(x, y) = \frac{i^k D_k^{(r)}(-iw, y)}{k!}$  elde edilir. İkinci eşitlik ise  $x$  yerine  $\frac{ix + (r + k - y(r + k + 1))}{1 + y}$  yazılarak elde edilir.  $\square$

**Teorem 4.7.**  $D_k^{(r)}(x, y)$  polinomları aşağıdaki üstel üreteç fonksiyona sahiptir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{k!} = (1 + yz^2)^{-r - \frac{1}{2}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}} \arctan(\sqrt{y}z)}.$$

**İspat**  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{k!}$  olsun. Bu durumda, (4.7) yardımıyla

$$\frac{d}{dz} f(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+1}^{(r)}(x, y) \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} - y \sum_{k=1}^{\infty} k(k+2r) D_{k-1}^{(r)}(x, y) \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} f(z) &= x \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{k!} - y \sum_{k=1}^{\infty} (k+2r) D_{k-1}^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{(k-1)!} \\ &= x f(z) - 2ryz f(z) - yz \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} D_{k-1}^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{(k-1)!} \\ &= (x - 2ryz) f(z) - yz \frac{d}{dz} z f(z) \\ &= (x - 2ryz - yz) f(z) - yz^2 \frac{d}{dz} f(z), \end{aligned}$$

elde edilir ki son ifade

$$\frac{\frac{d}{dz} f(z)}{f(z)} = \frac{x - yz(2r+1)}{1 + yz^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem çözülerek sonuca ulaşılır.  $\square$

Üreteç fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki üç eşitlik elde edilebilir.

**Sonuç 4.8.**  $k \in \mathbb{N}_0$  için,

$$D_k^{(r)}(-x, y) = (-1)^k D_k^{(r)}(x, y), \quad (4.8)$$

$$D_k^{(r)}(0, y) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ k! \left(-r - \frac{1}{2}\right) y^{\frac{k}{2}}, & k \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.9)$$

ve

$$D_k^{(r+1)}(x, y) + yk(k-1) D_{k-2}^{(r+1)}(x, y) = D_k^{(r)}(x, y) \quad (4.10)$$

dir.

**İspat** Teorem 4.7 den

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(-x, y) \frac{(-z)^k}{k!} &= (1 + yz^2)^{-r-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x}{\sqrt{y}} \arctan(-\sqrt{y}z)} \\ &= (1 + yz^2)^{-r-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}} \arctan(\sqrt{y}z)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{k!}, \end{aligned}$$

yazılır ki bu da (4.8) ifadesini verir. (4.9) eşitliği ise Teorem 4.7 de  $x = 0$  alınıp binom teoremi kullanılarak kolayca elde edilir. (4.10) eşitliği için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)}(x, y) \frac{z^k}{k!} &= (1 + yz^2) \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r+1)}(x, y) \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r+1)}(x, y) \frac{z^k}{k!} + y \sum_{k=0}^{\infty} D_{k-2}^{(r+1)}(x, y) \frac{z^k}{(k-2)!} \end{aligned}$$

yazılır. Son ifadede  $\frac{z^k}{k!}$  katsayıları karşılaştırılarak elde edilir.  $\square$

**Teorem 4.9.**  $k \in \mathbb{N}_0$  için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (2j + 2r + 1) \prod_{\mu=j+1}^k \mu (\mu + 2r) y^{\mu+1-k} \left[ D_j^{(r)}(x, y) \right]^2 \\ = k(k + 2r) \left( \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_{k-1}^{(r)}(x, y) D_{k+1}^{(r)}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dolayısıyla,  $r > -\frac{1}{2}$  ve  $y > 0$  için  $\left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_{k-1}^{(r)}(x, y) D_{k+1}^{(r)}(x, y) > 0$  olur.

**İspat** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır.  $k = 1$  için (4.11) in her iki tarafı  $y(1 + 2r)^2$  ye eşittir. (4.11) denklemini  $k$  için sağlansın. Sade olması için,  $\lambda_k^{(r)}(x, y) = \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_{k-1}^{(r)}(x, y) D_{k+1}^{(r)}(x, y)$  yazılsın. (4.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}^{(r)}(x, y) - yk(k + 2r)\lambda_k^{(r)}(x, y) \\ = \left\{ \left[ D_{k+1}^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_k^{(r)}(x, y) D_{k+2}^{(r)}(x, y) - yk(k + 2r) \right. \\ \left. \left( \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_{k-1}^{(r)}(x, y) D_{k+1}^{(r)}(x, y) \right) \right\} \\ = \left[ D_{k+1}^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_k^{(r)}(x, y) \left( x D_{k+1}^{(r)}(x, y) - y(k + 1)(k + 1 + 2r) D_k^{(r)}(x, y) \right) \\ - yk(k + 2r) \left( \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - D_{k-1}^{(r)}(x, y) D_{k+1}^{(r)}(x, y) \right) \\ = D_{k+1}^{(r)}(x, y) \left( D_{k+1}^{(r)}(x, y) - x D_k^{(r)}(x, y) + yk(k + 2r) D_{k-1}^{(r)}(x, y) \right) \\ + (y(k + 1)(k + 1 + 2r) - yk(k + 2r)) \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 \\ = y(2k + 2r + 1) \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{j=0}^k (2j + 2r + 1) \prod_{\mu=j+1}^{k+1} \mu (\mu + 2r) y^{\mu-k} \left[ D_j^{(r)}(x, y) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= (k+1)(k+1+2r)y \\
&\times \left( (2k+2r+1) \left[ D_k^{(r)}(x, y) \right]^2 + \sum_{j=0}^{k-1} (2j+2r+1) \prod_{\mu=j+1}^k \mu(\mu+2r) y^{\mu-k} \left[ D_j^{(r)}(x, y) \right]^2 \right) \\
&= (k+1)(k+1+2r)y \left( \frac{\lambda_{k+1}^{(r)}(x, y) - yk(k+2r)\lambda_k^{(r)}(x, y)}{y} + k(k+2r)\lambda_k^{(r)}(x, y) \right) \\
&= (k+1)(k+1+2r)\lambda_{k+1}^{(r)}(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (4.11) in  $k+1$  için doğru olduğunu gösterir. (4.11) ve  $D_0^{(r)}(x, y) = 1$  gerçeğinden,  $r > -\frac{1}{2}$  ve  $y > 0$  için  $\lambda_k^{(r)}(x, y) \geq (2r+1) \frac{y^k k!(1+2r)\dots(k+2r)}{k(k+2r)} > 0$  elde edilir. Sonuç olarak kanıt tamamlanır.  $\square$

**Açıklama 4.10.** (4.11) ifadesinde  $x$  yerine  $-iw$  alınıp Lemma 4.6 kullanılırsa  $d_n^{(r)}(x, y)$  polinomu için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (2j+2r+1) \frac{(j+1+2r)\dots(k+2r)}{(j+1)\dots k} y^{\frac{(k-j)(j-k+3)}{2}} \left[ d_j^{(r)}(x, y) \right]^2 \\
&= (-1)^k (k+2r) \left( k \left[ d_k^{(r)}(x, y) \right]^2 - (k+1) d_{k-1}^{(r)}(x, y) d_{k+1}^{(r)}(x, y) \right). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Dahası, (4.12) de  $x = m \in \mathbb{N}_0$ ,  $y = 1$  ve  $r = 0$  alınır, klasik Delannoy sayıları için

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (2j+1) [d_j(m)]^2 = (-1)^k k (k [d_k(m)]^2 - (k+1) d_{k-1}(m) d_{k+1}(m))$$

eşitliğine ulaşılır.

**Teorem 4.11.**  $k \in \mathbb{N}_0$  için,

$$D_k^{(r)}(x, y) = x^k - y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) D_{j-1}^{(r)}(x, y) x^{k-1-j} \quad (4.13)$$

ve

$$k! d_k^{(r)}(x, y) = w^k + y \sum_{j=1}^{k-1} j! (j+2r) d_{j-1}^{(r)}(x, y) w^{k-1-j} \quad (4.14)$$

dir. Burada,  $w = x - r - n + y(x + r + n + 1)$  olur.

**İspat**  $j = 1, 2, \dots$  ve  $x \neq 0$  için,

$$\frac{D_{j+1}^{(r)}(x, y)}{x^{j+1}} - \frac{D_j^{(r)}(x, y)}{x^j} = -yj(j+2r) \frac{D_{j-1}^{(r)}(x, y)}{x^{j+1}}$$

yazılır.  $j = 1$  den  $j = k - 1$  e toplam alırsa,

$$\begin{aligned} -y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) \frac{D_{j-1}^{(r)}(x, y)}{x^{j+1}} &= \sum_{j=1}^{k-1} \left( \frac{D_{j+1}^{(r)}(x, y)}{x^{j+1}} - \frac{D_j^{(r)}(x, y)}{x^j} \right) \\ &= \frac{D_k^{(r)}(x, y)}{x^k} - \frac{D_1^{(r)}(x, y)}{x} \end{aligned}$$

elde edilir.  $D_1^{(r)}(x, y) = x$  olduğu kullanılıp her iki taraf  $x^k$  ile çarpılırsa (4.13) elde edilir.

Şimdi, (4.14) iddiasını kanıtlayalım. Lemma 4.7 den,

$$\begin{aligned} &(-i)^k k! d_k^{(r)}(x, y) \\ &= D_k^{(r)}(-iw, y) \\ &= (-iw)^k - y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) D_{j-1}^{(r)}(-iw, y) (-iw)^{k-1-j} \\ &= (-iw)^k - y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) (-i)^{j-1} (j-1)! d_{j-1}^{(r)}(x, y) (-iw)^{k-1-j} \\ &= (-i)^k \left( w^k + y \sum_{j=1}^{k-1} j! (j+2r) d_{j-1}^{(r)}(x, y) w^{k-1-j} \right) \end{aligned}$$

yazılır ki bu da kanıtı tamamlar. □

Teorem 4.11 yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 4.12.**  $k \in \mathbb{N}$  için,  $[x^k]$  katsayı operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} [x^k] D_k^{(r)}(x, y) &= 1, \\ [x^{k-2}] D_k^{(r)}(x, y) &= -\frac{yk(k-1)(2k-1+6r)}{6} \quad (k \geq 2 \text{ için}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [x^k] d_k^{(r)}(x, y) &= \frac{(1+y)^k}{k!}, \\ [x^{k-1}] d_k^{(r)}(x, y) &= \frac{(1+y)^{k-1}}{(k-1)!}, \\ [x^{k-2}] d_k^{(r)}(x, y) &= \frac{(1+y)^{k-2}}{(k-2)!} \left( ry + \frac{1}{2} + \frac{y(2k-1)}{6} \right) \end{aligned}$$

dir.

**İspat** Önceki teoremden  $[x^k] D_k^{(r)}(x, y) = 1$  olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} [x^{k-2}] D_k^{(r)}(x, y) &= -y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) = -y \sum_{j=1}^{k-1} j^2 - 2ry \sum_{j=1}^{k-1} j \\ &= -\frac{yn(k-1)(2k-1+6r)}{6} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, yine önceki teoremden

$$\begin{aligned} [x^k] d_k^{(r)}(x, y) &= [x^k] \frac{w^k}{k!} = \frac{(1+y)^k}{k!}, \\ [x^{k-1}] d_k^{(r)}(x, y) &= [x^k] \frac{w^k}{k!} = \frac{(1+y)^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [x^{k-2}] k! d_k^{(r)}(x, y) &= \binom{k}{2} (1+y)^{k-2} + y \sum_{j=1}^{k-1} j(j+2r) (1+y)^{j-1} (1+y)^{k-1-j} \\ &= (1+y)^{k-2} \left( \frac{k(k-1)}{2} + y \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + yr(k-1)k \right) \\ &= (1+y)^{k-2} k(k-1) \left( ry + \frac{1}{2} + \frac{y(2k-1)}{6} \right) \end{aligned}$$

eşitliklerinin doğruluğu görülebilir. □

**Teorem 4.13.** Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{d}{dz^k} \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{(r)}(x, y) z^j = \langle x-r \rangle_k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x-r-k}{i} z^i$$

dir. Burada,  $x \in \mathbb{R}$  için

$$\langle x \rangle_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x-j) = \begin{cases} x(x-1)\dots(x-k+1), & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

ile verilen azalan faktöriyeldir.

**İspat** (4.4) den ve türev için Leibnitz formülünden,

$$\frac{d}{dz^k} \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{(r)}(x, y) z^j$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dz^k} (1+z)^{x-r} (1-yz)^{-x-r-1} \\
&= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{d}{dz^l} ((1+z)^{x-r}) \frac{d}{dz^{k-l}} (1-yz)^{-x-r-1} \\
&= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \langle x-r \rangle_l (1+z)^{x-r-l} \langle -x-r-1 \rangle_{k-l} (-y)^{k-l} (1-yz)^{-x-r-1-k+l} . \\
&\rightarrow \langle x-r \rangle_k (1+z)^{x-r-k}, \quad (y \rightarrow 0 \text{ için})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadede binom teoremi uygulanırsa kanıt tamamlanır. □

## 5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Delannoy polinomlarının bir genelleştirmesi tanımlanarak bu polinomların üreteç fonksiyonu ve çeşitli indirgeme formülleri gibi özellikleri verildi. Ayrıca, yeni bir ortogonal polinom sınıfı verilip bu polinomların genelleştirilmiş Delannoy polinomları ile ilişkisi kuruldu. Son olarak, bu ortogonal polinom sınıfı için çeşitli bağıntılar elde edildi.



## 6. KAYNAKLAR

- Banderier, C. and Schwer, S. 2005. Why Delannoy numbers?. *J. Statist. Plann. Inference*, 135: 40–54.
- Caughman, J. S., Haithcock, C. R., and Veerman, J. J. P. 2008. A note on lattice chains and Delannoy numbers. *Discrete Math.*, 308(12): 2623–2628.
- Dağlı, M. C. 2020. A new generalization of Delannoy numbers. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 51(4): 1729–1735.
- Dağlı, M. C. 2021. A new recursive formula arising from a determinantal expression for weighted Delannoy numbers. *Turk J. Math.*, 45(1): 471–478.
- Fray, R. D. and Roselle, D. P. 1971. Weighted lattice paths. *Pacific J. Math.*, 37(1): 85–96.
- Fray, R. D. and Roselle, D. P. 1973. On weighted lattice paths. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 14(1): 21–29.
- Gasper, G. and Rahman, M. 2004. Basic Hypergeometric Series, 2nd edition, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol.96, Cambridge University Press, Cambridge.
- Gould, H. W. 1972. Combinatorial Identities, a Standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations, West Virginia University, Morgantown, WV.
- Guo, V. J. W. 2016. Proof of Sun’s conjectures on integer-valued polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 444: 182–191.
- Liu, J. C. 2016. A supercongruence involving Delannoy numbers and Schröder numbers. *J. Number Theory*, 168: 117–127.
- Liu, J. C. Li, L., and Wang, S. D. 2018. Some congruences on Delannoy numbers and Schröder numbers. *Int. J. Number Theory*, 14: 2035–2041.
- Noble, R. 2012. Asymptotics of the weighted Delannoy numbers. *Int. J. Number Theory*, 8(1): 175–188.

- Qi, F. 2021. A determinantal expression and a recursive relation of the Delannoy numbers. *Acta Univ. Sapientiae Math.* 13(2): 442–449.
- Qi, F., Cernanova, V., and Semenov, Y. S. 2019. Some tridiagonal determinants related to central Delannoy numbers, the Chebyshev polynomials, and the Fibonacci polynomials. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 81: 123–136.
- Qi, F., Cernanova, V., Shi, X. T., and Guo, B. N. 2018. Some properties of central Delannoy numbers. *J. Comput. Appl. Math.*, 328: 101–115.
- Razpet, M. 2002. The Lucas property of a number array. *Discrete Math.*, 248: 157–168.
- Sun, Z. H. 2017. A kind of orthogonal polynomials and related identities. *J. Math. Anal. Appl.* 456: 912–926.
- Sun, Z. W. 2011. On Delannoy numbers and Schröder numbers. *J. Number Theory*, 131: 2387–2397.
- Sun, Z. W. 2017. Supercongruences involving dual sequences. *Finite Fields Appl.*, 46: 179–216.
- Sun, Z. W. 2018. Arithmetic properties of Delannoy numbers and Schröder numbers. *J. Number Theory*, 183: 146–171.
- Wang, Y., Zheng, S. N., and Chen, X. 2019. Analytic aspects of Delannoy numbers. *Discrete Math.*, 342(8): 2270–2277.

## ÖZGEÇMİŞ

Serhat YAMAN

### ÖĞRENİM BİLGİLERİ

|                |                                                                     |
|----------------|---------------------------------------------------------------------|
| Yüksek Lisans: | Akdeniz Üniversitesi                                                |
| 2021-2024      | Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya                     |
| Lisans:        | Akdeniz Üniversitesi                                                |
| 2016-2020      | Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Antalya |