



68945

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL
QUADRATURE METODUNUN
TİTREŞİM PROBLEMLERİNE UYGULANMASI .**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. Ahmet ÇETKİN**

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRĞİN

OCAK 1998

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE METODUNUN
TİTREŞİM PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Ahmet ÇETKİN

Anabilim Dalı : Makina

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN

OCAK 1998

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE
METODUNUN TİTREŞİM PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makina Müh. Ahmet ÇETKİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :15.01.1998

Tezin Savunulduğu Tarih :19.01.1998

Tez Danışmanı :Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN

Diğer Jüri Üyeleri :Doç. Dr. Faruk MENDİ

Yrd. Doç. Dr. Abdurrahman KARABULUT

OCAK 1998

Ahmet ÇETKİN'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulanması" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

19 / 1 / 1998

Tez Danışmanı

: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN

Diğer Jüri Üyeleri

: Doç. Dr. Faruk MENDİ

: Yrd. Doç. Dr. Abdurrahman KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 26. 19/1/1998. gün ve 98/2-2 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet SERTESER
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	iiix
TABLolar LİSTESİ	x
SEMBOLLER	xii
ÖZET	xiii
ABSTRACT	xiv
BÖLÜM 1. GENEL BİLGİLER	1
1.1.Giriş	1
1.2.Orjinal Diferansiyel Quadrature	3
1.3.Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu	5
BÖLÜM 2. GDQ METODUNUN UYGULAMALARI	9
2.1.Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun Bazı Yapısal Analiz Problemlerine Uygulanması	9
2.1.1.Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi	9
2.1.1.1.Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Ankastre–Bas Mes.)	11
2.1.1.2.Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Ankastre–Ankastre)	14
2.1.1.3.Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Bst. Mes.–Bst. Mes.)	16
2.1.2.Tekil Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi	18
2.1.3. İnce Elastik Çubukların Burkulması	20
2.1.3.1.İnce Elastik Çubukların Burkulması(Bst. Mes.-Bst. Mes.)	21
2.1.3.2.İnce Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Ankastre)	22
2.1.3.3.İnce Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Bst. Mes.)	23
2.1.3.4.İnce Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Serbest)	24
2.1.3.5.Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması	24

2.1.3.6.Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Basit Mesnet-Basit Mesnet)	25
2.1.3.7.Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Ankastre)	26
2.1.3.8.Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Basit Mesnet)	27
2.1.3.9.Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre-Serbest)	28
2.1.4.Dairesel İnce Plâğın Eğilmesi	29
2.2.İstenilen Herhangi Spesifik Bir Nokta İçin Ağırlıklı Katsayılar	31
 BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE METODUNUN TİTREŞİM PROBLEMLERİNDE UYGULANMASI	 32
3.1.Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri	34
3.1.1.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre-Serbest)	35
3.1.2.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre-Serbest)	35
3.1.3.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre-Ankastre)	36
3.1.4.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre-Ankastre)	36
3.1.5.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Basit Mesnet - Basit Mesnet)	37
3.1.6.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Basit Mesnet - Basit Mesnet)	38
3.1.7.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre- Basit Mesnet)	39
3.1.8.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre- Basit Mesnet)	39
3.1.9.Dairesel İnce Bir Plâğın Boyuna Titreşimi	41
3.2.Elastik Kirişin Eğilme Titreşimi	42
3.2.1.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ank.-Serbest)	44
3.2.2.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre-Serbest)	45
3.2.3.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre-Ankastre)	45
3.2.4.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre-Ankastre)	46

3.2.5.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Basit Mesnet-Basit Mesnet)	47
3.2.6.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Basit Mesnet-Basit Mesnet)	48
3.2.7.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet-Basit Mesnet)	48
3.2.8.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet-Basit Mesnet)	49
3.2.9.Dairesel Plağın Eğilme Titreşimleri	50
BÖLÜM 4. DEĞERLENDİRME VE SONUÇLAR	52
KAYNAKLAR	58
EKLER	60
Ek-A. Eşit Aralıklı Olarak Kesikli Hale Getirilmiş Ağırlıklı Katsayılar	60
Ek-B. Eşit Aralıklı Olamayan 17/20 Değeri İçin Ağırlıklı Katsayılar	70
ÖZGEÇMİŞ	74

ŞEKİLLER

Şekil No	Açıklamalar	Sayfa
Şekil 2.1	Değişik yüklemelerde eğim	9
Şekil 2.2	Kirişin küçük bir elemanında eğim ve kuvvetlerin durumu	9
Şekil 2.3	Ankastre-basit mesnet bağlantılı bir giriş	11
Şekil 2.4	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	14
Şekil 2.5	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	16
Şekil 2.6	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	18
Şekil 2.7	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	21
Şekil 2.8	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	22
Şekil 2.9	Ankastre-basit mesnet bağlantılı bir giriş	23
Şekil 2.10	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	24
Şekil 2.11	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	25
Şekil 2.12	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	26
Şekil 2.13	Ankastre-basit mesnet bağlantılı bir giriş	27
Şekil 2.14	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	28
Şekil 3.1	Elastik girişin boyuna titreşimi	32
Şekil 3.2	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	34
Şekil 3.3	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	35
Şekil 3.4	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	35
Şekil 3.5	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	36
Şekil 3.6	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	37
Şekil 3.7	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	38
Şekil 3.8	Ankastre mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	39
Şekil 3.9	Ankastre mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	39
Şekil 3.10	Bir sistemin eğilme titreşimi	42
Şekil 3.11	Eğilme titreşiminde bir elemanın durumu	42
Şekil 3.12	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	44
Şekil 3.13	Ankastre mesnet-serbest bağlantılı bir giriş	45
Şekil 3.14	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	45
Şekil 3.15	Ankastre mesnet-ankastre mesnet bağlantılı bir giriş	46
Şekil 3.16	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	47
Şekil 3.17	Basit mesnet-basit mesnet bağlantılı bir giriş	48

Şekil 3.18	Ankastre mesnet-basit mesnet bağlantılı bir kiriş	49
Şekil 3.19	Ankastre mesnet-basit mesnet bağlantılı bir kiriş	49
Şekil 4.1	Bir kenarı ankastre diğer kenarı serbest bağlı kesiti lineer değişen ince elastik kirişin boyuna titreşimi değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği	54
Şekil 4.2	Bir kenarı ankastre diğer kenarı serbest bağlı sabit kesitli ince elastik kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği	55
Şekil 4.3	Bir kenarı ankastre diğer kenarı serbest bağlı elastik bir kirişin enine titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği	56
Şekil 4.4	Dış kenarları ankastre olan dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği	57
Şekil 4.5	Dış kenarları ankastre olan dairesel bir plağın boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği	57

TABLolar

Tablo No	Açıklamalar	Sayfa
Tablo 2.1	N=5 Grid için GDQ yaklaşımı	12
Tablo 2.2	N=7 için GDQ yaklaşımı	13
Tablo 2.3	N=9 için GDQ yaklaşımı	13
Tablo 2.4	N=11 için GDQ yaklaşımı	13
Tablo 2.5	N=5 için GDQ yaklaşımı	15
Tablo 2.6	N=7 için GDQ yaklaşımı	15
Tablo 2.7	N=9 için GDQ yaklaşımı	15
Tablo 2.8	N=11 için GDQ yaklaşımı	16
Tablo 2.9	N=5 Grid için GDQ yaklaşımı	17
Tablo 2.10	N=7 için GDQ yaklaşımı	17
Tablo 2.11	N=9 için GDQ yaklaşımı	18
Tablo 2.12	N=11 için GDQ yaklaşımı	18
Tablo 2.13	N=5 için GDQ yaklaşımı	19
Tablo 2.14	N=7 için GDQ yaklaşımı	19
Tablo 2.15	N=9 için GDQ yaklaşımı	20
Tablo 2.16	N=11 için GDQ yaklaşımı	20
Tablo 2.17	İnce elastik çubukların burkulması	24
Tablo 2.18	Kesiti lineer değişen elastik çubukların burkulması	28
Tablo 2.19	N=5 Grid için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)	30
Tablo 2.20	N=7 için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)	30
Tablo 2.21	N=9 için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)	30
Tablo 2.22	N=11 için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)	31
Tablo 2.23	Ankastre- basit mesnet bağlantılı bir kirişteki 17I/20 (0.85) değeri için GDQ yaklaşımı	31
Tablo 3.1	İnce elastik kirişin boyuna titreşimi	40
Tablo 3.2	Dairesel plağın boyuna titreşimi	41
Tablo 3.3	Değişik sınır şartlarında elastik bir kirişin eğilme titreşiminde doğal frekans değerleri	50
Tablo 3.4	Dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerleri	51

Tablo 4.1	Ankastre mesnet – basit mesnet bağlantılara sahip üniform Yüklü bir kirişin sehim değerlerinin gdq metoduyla Elde edilen sonuçları (N=5)	52
Tablo 4.2	Değişik gridlerdeki 171/20 (0.85) değeri içindeki % hata miktarları (ankastre-basit mesnet)	53
Tablo 4.3	İnce elastik çubukların burkulması	53
Tablo 4.4	Ankastre – serbest bağlı kesiti lineer değişen ince elastik kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları	54
Tablo 4.5	Ankastre – serbest bağlı ince elastik kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları	54
Tablo 4.6	Bir kenarları ankastre diğer kenarı serbest elastik bir kirişin eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları	55
Tablo 4.7	Dış kenarları ankastre olan dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları	56
Tablo 4.8	Dış kenarları ankastre olan dairesel bir plağın boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları	57

SEMBOLLER

$C_{ij}^{(n)}$	n'nci dereceden ağırlıklı katsayı
N	Grid nokta sayısı
$L_n(x)$	n. dereceden Legendre polinomu
$L'_n(x)$	n. dereceden Legendre polinomunun birinci türevi
δ_{ij}	Kronecker operatörü
$M(x)$	Lagrange interpolasyon polinomu
M	Eğilme momenti
V	Kesme kuvveti
P, N	Normal kuvvet
A	Alan
L	Uzunluk
$Q(x), q(x)$	Yayılı yük
E	Elastiklik modülü
$I(x)$	Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti
$m(x)$	Kütle
Y_i, W_i	i'nci noktadaki sehim
D	Eğilme rijitliği
ε	Birim uzama
ω	Tabii frekans
$\bar{\omega}$	Boyutsuz tabii frekans
ρ	Yoğunluk

ÖZET

Bu çalışmada, ilk önce yapısal analizde kullanılan bazı metodlar tanıtılmıştır. Daha sonra Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunu kirişlerin sehim, çubukların burkulmaları ve serbest titreşim problemlerine uygulanmıştır.

Değişik yükleme ve sınır şartları için elde edilen sonuçlar, sistemin analitik ve/veya Rayleigh , Sonlu Elemanlar Metodu gibi diğer sayısal metodlardan elde edilen gerçek sayısal çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Bu çeşit problemlerde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun uygulanması bize, çok kısa bir zamanda ve çok kısa bir çabayla, gerçek değere çok yakın sonuçlar bulunabileceğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature , Doğal Titreşim , Sehim , Burkulma

SUMMARY

In this study, first, some approximate methods, which have been used for structural analysis, are introduced. Then Generalized Differential Quadrature Method is applied to the deflection of beams, buckling behavior and free vibration analysis.

Results are obtained to various boundary and loading conditions and are compared with existing exact numerical solutions by numerical analysis and/or other methods as a Rayleigh and Finite Element.

The applications of Generalized Differential Quadrature Method to this kind of problems is seen to lead to accurate results with relatively computational time and effort.

KEYWORD: Generalized Differential Quadrature , Vibration , Deflection , Buckling

BÖLÜM 1.

GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kısmi diferansiyel denklem çözümlerinin sayısal yaklaşım metodları, bir çok mühendislik problemlerine geniş bir şekilde uygulanmıştır. Sonlu Farklar Metodu ve Sonlu Elemanlar Metodu gibi değişik klasik sayısal teknikler, son derece geliştirilmişler ve tanınmışlardır. Yukarıda sayılan bu metodlar çok büyük grid sayılarının kullanılmasıyla gerçeğe son derece yakın sonuçlar elde edebilirler. Ancak gerçek değere son derece yakın sonuçlar, fiziksel alanda ancak birkaç spesifik noktada istenir. Kabul edilebilir doğruluğa sahip veya ona çok yakın sonuçları elde etmek için kullanılan geleneksel Sonlu Elemanlar Metodu veya Sonlu Farklar Metodu gibi metodlar hala çok yüksek grid sayısı isterler. Tabii ki bunun sonucunda problemlerin çözümü için gerekli olan bilgisayar kapasitesi ihtiyacı da büyük olur.

Daha hızlı işlem yapabilen bilgisayarların ilerlemesiyle, mühendislik ve fen bilimlerindeki problemlerin sayısal çözümlemeleri için yeni metodların araştırılmasında da bir hareketlilik oluşmuş ve bu tür araştırmalar modern teknolojinin ihtiyaçları doğrultusunda motive edilmiştir. Kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçları elde etmek için daha az grid nokta sayısı kullanan alternatif bir sayısal metod bulma araştırmaları sırasında Richard Bellman mühendislik bilimlerinin başlangıç ve/veya sınır değer problemleri için farklı bir çözüm tekniği olan Diferansiyel Quadrature Metodunu ortaya çıkarmıştır[1,2]. Diferansiyel Quadrature Metodu kapsamlı bir yaklaşım metodudur ve şu fikri baz alır; Koordinat yönüne göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir alandaki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurulabilen devamlı bir fonksiyon ve o yön boyunca bütün ağ noktalarındaki bütün fonksiyon değerlerinin lineer toplamı olarak ifade edilebilir.

Diferansiyel Quadrature Metodu Sonlu Elemanlar Metodundan iki farklılık gösterir. Birincisi; Diferansiyel Quadrature Metodu, yüksek dereceden bir polinom kullanarak global bir yaklaşım kurarken, Sonlu Elemanlar Metodunun yaklaşımı lokal elemanlar seviyesindeki bir fonksiyon yaklaşımında düşük dereceden polinomlar kullanır. İkincisi; Diferansiyel Quadrature Metodu bir noktadaki fonksiyonun türevine direk yaklaşım kurarken Sonlu Elemanlar Metodunun yaklaşımı bir lokal eleman

üzerine kurulur ve daha sonra türevler yaklaşım metodundan çözülür. Bu yönden bakıldığında Diferansiyel Quadrature Metodu Sonlu Farklar Metoduna çok benzer. Doğrusu $[x_i - 1, x_i + 1]$ bölgesinde lokal uygulama yapıldığında Sonlu Farklar Metodunun Diferansiyel Quadrature Metodunun özel bir hali olduğu görülebilir. Daha yakın sonuçları yakalamak bakımından Sonlu Farklar Metodu ve Sonlu Elemanlar Metodlarıyla karşılaştırıldığında Diferansiyel Quadrature Metodu, yüksek dereceden bir polinom yaklaşımı olduğundan yalnızca birkaç grid noktası gerektirir[3-4].

Ancak Diferansiyel Quadrature Metodu hem band tipine hemde simetrik olmayan sistem matrislerine götürür. Özellikle çözümler yalnızca birkaç spesifik noktada istendiğinde Diferansiyel Quadrature Metodu Sonlu Farklar Metodu veya Sonlu Elemanlar Metodu gibi geleneksel sayısal metodlara bir alternatif olabilir. Ancak ilk Diferansiyel Quadrature Metodunda bir ana engel vardı. Bu da ağırlıklı katsayıların hesaplanmasıdır. Herhangi bir dereceden kısmi türevin kesikli hale getirilebilmesi için ağırlıklı katsayının hesaplanması, bilindiği gibi Diferansiyel Quadrature Metodunun en önemli kısmını teşkil eder. Ağırlıklı katsayının hesaplanması için Bellman tarafından önerilen bu iki metod kullanılır[1,2].

Birinci metod eşit dereceden veya $N-1$ derecesinde bütün polinomlar için zorunlu lineer bağımlı olması istenen lineer cebirsel denklem dizisini çözmektir. Bu lineer denklem dizisinin tek bir çözümü vardır. Çünkü matrisin elemanları Vandermonde matrisinden oluşmuştur. Ne yazık ki N sayısı 22'den büyük olduğunda oluşan Vandermonde matrisinin tersinin hesaplanması imkansız hale gelir. Daha kötüsü $N \times N$ lineer cebirsel denklem dizisinin her bir dereceden türevinin çözülmesi gerekir. İkinci bir metod ise ağırlıklı katsayının cebirsel bir formülle hesaplanmasıdır. Fakat hesaplama N' nci dereceden ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak seçilen grid noktalarının koordinatına göre yapılır. Bunun anlamı şudur; eğer N belirlendiğinde, grid noktalarının dağılımı değişik fiziksel alan veya değişik sınır şartları için tayin edilir. Bazılarında gerekmediği durumlar olsa da diğer bazı pratik problemlerin çözümleri için sınıra yakın grid noktalarına ihtiyaç olduğundan, sözü edilen durum Diferansiyel Quadrature Metodu uygulamalarında ana zorluğu teşkil eder.

Açıkça görülmektedir ki Diferansiyel Quadrature Metodu tarafından gerekli olan ağırlıklı katsayıların bulunması için bu iki metod bazı engellere sahiptir. Bu zorlukların üstesinden gelmek için Shu ve Richard tarafından Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu önerilmiş, bazı akışkanlar dinamiği denklemlerine uygulanmış ve çözümler elde edilmiştir. İlk sonuçlar göstermiştir ki Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu çok efektif ve kullanışlıdır[5-6].

Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu, yapısal analiz problemleri için bazı zorluklar gösterse de ilk Diferansiyel Quadrature Metodunda karşılaşılabilecek benzerlik problemlerinin üzerinden gelmiştir. Üstelik Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunda birinci ve daha yüksek dereceden türevlerin

ağırlıklı katsayılarının hesaplanmasında basit cebirsel ifadeler, yinelenen bağıntılar ve keyfi grid noktaları seçimi de vardır. İlk Diferansiyel Quadrature Metodunda görülen grid sayısındaki kısıtlama kalkmıştır. Sonuçta Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu bazı pratik yapısal analiz problemlerinin çözümü için uygulanmış ve sayısal çözümlemedeki basit kullanımı ve doğruluğu görülmüştür.

Malik ve Bert Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunu daha da geliştirerek sınır şartlarını daha matrisler elde etmeden önceki işlemlerde yerine koymuşlar ve bu şekilde denklemin sağ tarafını her zaman sabit hale getirmişlerdir[7].

1.2.Orjinal Diferansiyel Quadrature

Diferansiyel Quadrature Metodu , o değişken sahasının bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin lineer toplamı olarak ifade edilebilen, verilen ayrık noktalardaki uzaysal değişkene göre bir fonksiyonun kısmi türevidir.

Bir boyutlu fonksiyonun birinci türevi göz önüne ele alındığında $u(x,t)$, aslında yüksek dereceden kısmi türevler aynı formasyona sahip olacaktır. Bir grid üzerindeki i 'nci ayrık noktadaki $u(x,t)$ fonksiyonunun birinci türevinin Diferansiyel Quadrature yaklaşımı aşağıdaki biçimde verilir.

$$u_x(x_i, t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} u(x_j, t) \quad i = 1, 2 \dots N \quad (1.1)$$

i 'deki $u(x,t)$ 'nin x 'e göre birinci türevi $u_x(x_i, t)$ 'dir. N ayrık grid noktalarının sayısı $c_{ij}^{(1)}$ birinci türev yaklaşımı için ağırlık katsayısıdır.

Bilindiği gibi Diferansiyel Quadrature Metodunun en önemli kısmı, c_{ij} ağırlık katsayısının hesaplanmasıdır. Diferansiyel Quadrature Metodu bunun için iki yaklaşım kullanmaktadır.

1.Yaklaşım: Önce $N-1$ 'e eşit veya daha küçük dereceden polinomlar için (1.1) denklemi tam olarak alındığında.

$$g(x) = x^k, k = 0, 1, 2 \dots (N-1) \quad (1.2a)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j^k = k x_i^{k-1}, k = 0, 1, 2 \dots (N-1) \text{ ve } i = 1, 2 \dots N \text{ için} \quad (1.2b)$$

Bu polinom dizisini (1.1) denklemde yerine konulduğunda; Gridler yani x_i verildiğinde bu bağıntı bizi $N \times N$ lineer cebirsel denklem dizisine götürür. Bu denklem dizisinin matrisi Vandermonde formunda olduğu için, N çok büyük olduğu zaman, bu tip denklem dizilerinin sonuçları tekilleşir ve sonuçta onları çözmek zor hale gelir.

Bu tekilliği gidermek için, ağırlıklı katsayılar, değişik grid nokta sayıları ile (1.2) denkleme göre eşit değere sahip gridler için hesaplanır. Bu hesaplamadan alınabilecek en büyük grid sayısının 22 olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu sayının 22'den daha büyük alındığı durumlarda lineer cebirsel denklem dizisi sonucu tek olur ve işlemler çözülemez. Daha sonra ortaya çıkmış olan Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yardımıyla bulunan doğru katsayılar karşılaştırılmış ve 20'den daha büyük olan grid sayıları için sonuçlarda hata olduğu gözlenmiştir. Bu yüzden ağırlıklı katsayıların belirlenmesinde eğer bu metod kullanılacaksa, en büyük grid sayısı eşit aralıklar için 20 alınır. Buna ek olarak temel denklemlerde, her bir dereceden türevler için bir $N \times N$ lineer cebirsel denklem dizisi çözülmek zorundadır.

$$g(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_j)L'_N(x_j)} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{ için} \quad (1.3)$$

2.Yaklaşım: Ağırlıklı katsayının bulunmasında kullanılan ikinci bir diğer yaklaşım da, bir farkla önceki yaklaşıma çok benzer. (1.1) denklem için test fonksiyonu olarak $g(x)$ seçilir.

N = Grid noktası sayısı

$L_N(x)$ = N .'nci dereceden Legendre polinomu

$L'_N(x)$ = N .'nci dereceden Legendre polinomunun birinci dereceden türevi.

x_j 'yi ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak alıp (1.3).denklemini (1.1)'de yerine koyarak Bellman ağırlık katsayıları $c_{ij}^{(1)}$ için, bir basit cebirsel ifade elde etmiştir[2].

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{L'_N(x_i)}{(x_i - x_j)L'_N(x_j)} \quad , \quad j \neq i \text{ ve } i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{ için} \quad (1.4a)$$

$$c_{ii}^{(1)} = \frac{1 - x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad , \quad j = i \text{ ve } i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{ için} \quad (1.4b)$$

Şu açıkça bellidir ki N grid sayısı belirlenip, ötelenmiş Legendre fonksiyonunun kökleri verildiğinde, fiziksel problemler hesaba katılmaksızın grid noktalarının kesin dağılımları bulunmuş olur. Bu durum, pratikte uygulanan değişik yapısal geometrik şekiller ve değişik sınır şartları için ihtiyaç duyulan grid ağları ve karşılaşılabilecek çeşitli sınır şartları yüzünden yapısal analiz problemlerine metodun uygulamalarında bir engel teşkil eder.

Yukarıda belirtildiği gibi, yapısal analiz problemlerine bu metodun uygulamalarında bazı sınırlamalar vardır. Diferansiyel Quadrature Metodunun yapısal analiz problemlerine uygulamalarında kullanılmamasının ana nedeni budur. Sayılan bu

engellerin aşılması için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu önerilmiş ve yapısal analizdeki bazı problemler çözümü için kullanılmıştır.

1.3. Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu

Bazı araştırmacılar, ağırlıklı katsayıların belirlenmesinde yukarıda tanımlandığı gibi bu iki yaklaşımı önermişlerdir. Fakat her iki yaklaşımın da bazı engelleri vardır. İlk engel, lineer cebirsel denklemin çözülmesinin gerekli olduğuyla beraber, küçük sayıda grid kullanılmasıdır. İkincisi ise yapısal analizde önemi olan grid noktalarının dağılımının sınırlı olmasıdır. Bu yetersizliklerin çaresi ise istediğimiz biçimde ağırlıklı katsayıların belirlenmesiyle olacaktır. Kullanılan metodun, grid ağlarının seçiminde bir sınırlama getirmemesi ve basit cebirsel ifadeler vermesi gerekir. Shu ve Richard tarafından önerilen bu tip bir metod, akışkanlar dinamiğinde kullanılan bazı kısmi diferansiyel denklem çözümleri ile ilişkili olarak uygulanmıştır[5,6].

Seçilen grid ağlarında herhangi bir sınırlama olmaksızın katsayıların hesaplanmasında basit cebirsel ifadeleri bulmak için, yüksek dereceden polinomlar veya Legendre polinomları yerine test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomu seçilsin.

N grid noktası sayısı ise;

$$g_i(x) = \frac{M(x)}{(x - x_i)M^{(1)}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (1.5)$$

$$M(x) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (1.6)$$

$M(x)$ 'in birinci türevi ;

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (1.7)$$

Sadeleştirme yapıldığında;

$$M(x) = N(x, x_i)(x - x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

$$N(x, x_i) = M^{(1)}(x_i)\delta_{ij}$$

δ_{ij} = Kronecker Oparatörü

$$M^{(1)}(x) = N^{(k)}(x, x_j)(x - x_j) + kN^{(k-1)}(x - x_j) \quad k = 1, 2, \dots, (N - 1) \text{ için} \quad (1.9)$$

Böylece, $M^{(k)}(x)$ ve $N^{(k)}(x, x_j)$ k 'nci dereceden $M(x)$ ve $N(x, x_j)$ 'nin türevleridir. (1.8)'teki denklemi (1.4)'de yerine konulduğunda ;

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad i \neq j \quad (1.10a)$$

$$c_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_j)} \quad i = j, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.10b)$$

elde edilir .

(1.10)'daki denklemler sınırlaması olmayan grid noktalarıyla işlem görebileceğimiz c_{ij} hesabında kullanılan bir basit ifadedir. Şu açıktır ki x_i gridleri verildiğinde (1.9)'deki denklemden $M^{(1)}(x)$ çok kolay elde edilebilir. Böylece $c_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$ için kolayca hesaplanabilir.

$c_{ii}^{(1)}$ 'yi hesaplama ise, elde edilmesi daha zor olan $M(x)$ 'in ikinci türevini baz alır.(1.10a) denklemi yerine, daha fazla kullanışlı bir bağıntı elde edilebilir ve kullanılabilir. Taylor serisi açılım bağıntısı kullanılarak $c_{ij}^{(1)}$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (1.11)$$

(1.11) denkleminde $c_{ii}^{(1)}$ katsayısı, $c_{ij}^{(1)}$ ($i \neq j$) hesabından elde edilir.

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N c_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (1.12)$$

İkinci ve daha yüksek dereceden türevler için ağırlık katsayısı da yukarıdakilere benzer biçimde elde edilebilir . $U(x, t)$ 'nin m 'nci dereceden türevinin kesikleştirilmiş hale getirildiğinde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature yaklaşımının aşağıdaki gibi olduğu kabul edildiğinde;

$$U^{(m)}(x_i, t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(m)} U(x_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (1.13)$$

Tekrar test fonksiyonu olarak Lagrange İnterpolasyon polinomunu kullanılır. $c_{ij}^{(m)}$ m 'nci dereceden ağırlıklı katsayı için ilginç bir yinelenen bağıntı elde edilir.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left[c_{ij}^{(m-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{(x_i - x_j)} \right] \quad m = 2, 3, \dots, (N-1) \text{ ve } i, j = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (1.14)$$

Yine (1.11). denklemine benzer bir bağıntıdan $c_{ii}^{(m)}$ de elde edilebilir.

$$c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N c_{ij}^{(m)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

Birinci dereceden N'nci dereceye kadar olan türevlerin hepsi için, ağırlıklı katsayıların elde edilmesinde , (1.14) ve (1.15) denklemler ile (1.10a) ve (1.12) denklemler beraber genel ve uygun bir form verirler. Grid noktalarından seçilen koordinatlar üzerinde herhangi bir sınırlama yoktur. N grid sayısı büyük alındığında oluşabilecek kötü şekilli cebirsel denklem dizisinden ağırlıklı katsayıların belirlenmesine bu şekilde gerek duyulmaz. Buna ek olarak ağırlıklı katsayıların belirlenmesinde, bu tip ifade dizileri çok kısa ve basit olmasının yanı sıra , yinelenme özelliği yüzünden programlamanın ve formülasyonunun yapılması da çok kolaydır.

Yapısal analizdeki pratik problemlerin çözülmesinde bu özellikler, Diferansiyel Quadrature Metoduna büyük bir kullanılışlık verir. Bu şekilde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun yapısal analizdeki kullanımının potansiyeli hemen fark edilebilir. Bu metodun 2 boyutlu problemlere uygulamaları da basittir. Bir boyutta olduğu gibi, her boyut için sistem ayrı ayrı ele alınır. x yönündeki grid noktalarını N_x , y yönündeki grid noktalarını N_y kabul edildiğinde, x_i ve y_i 'deki x 'e göre n 'nci dereceden $U(x,y)$ 'nin kısmi türevi ve y 'e göre m 'nci dereceden $U(x,y)$ 'nin kısmi türevi şu şekilde kesikli hale getirilebilir.

$$U_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} c_{ik}^{(n)} U(x_k, y_j) \quad , n = 1, 2, \dots, (N_x - 1) \quad (1.16a)$$

$$U_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_y} c_{jk}^{(m)} U(x_i, y_k), m=1, 2, \dots, (N_y - 1) \quad i=1, 2, \dots, N_x, j=1, 2, \dots, N_y \quad (1.16b)$$

Yapısal analizde hem kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde hem de adi diferansiyel denklem çözümlerinde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılabilir. Bu metodun statik problemlerine uygulaması, bizi bilinmeyen grid noktalarındaki fonksiyon değerleriyle bir cebirsel denklem dizisine götürür. Zamana bağlı dinamik problemlerinde de sonuç, bilinmeyen grid noktasındaki zamana bağlı fonksiyon değerleriyle oluşan adi diferansiyel denklem dizisidir.

Zamana bağlı adi diferansiyel denklem daha sonra mevcut integrasyon tertibinden çözülebilir. Sonuçta bütün gridlerdeki fonksiyon değerleri elde edildiğinde, polinom yaklaşımının terimlerindeki çepeçevre ağırlıklı fonksiyon değerlerinin elde edilmesi çok kolaydır.

İki boyutlu bir fonksiyonun Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature yaklaşımı aşağıda olduğu gibi verilir;

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U(x_i, y_j) r_i(x) s_j(y) \quad (1.17)$$

$r_i(x)$ ve $s_j(y)$ sırasıyla x ve y yönü boyunca Lagrange interpolasyon polinomlarıdır.

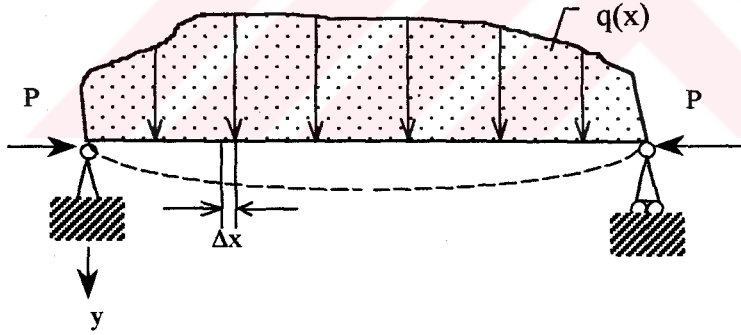
BÖLÜM 2.

GDQ METODUNUN UYGULAMALARI

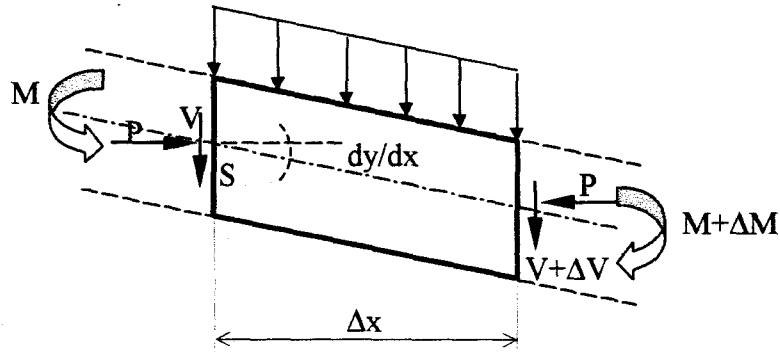
2.1.Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun Bazı Yapısal Analiz Problemlerine Uygulanması

2.1.1.Yayıllı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi :

Yukarıdaki kiriş Şekil (2.1) de görüldüğü gibi x 'in bir fonksiyonu olan yayılı yük taşımakta ve buna ek olarak kiriş yatay P yükü altında çalışmaktadır. Eğilme sırasında kirişin Δx kadar uzama gösterdiği ve şekilde görülen q yükünün doğrultusunun pozitif olduğu kabul edilmektedir. Δx Şekil (2.2)'de açık olarak gösterilmektedir.



Şekil 2.1 Değişik yüklemelerde eğim



Şekil 2.2 Kirişin küçük bir elemanında eğim ve kuvvetlerin durumu

V kesme kuvveti ve M eğilme momenti Şekil (2.2)'deki elemanın kenarlarında gösterilen doğrultuda pozitif olduğu, yükleme boyunca V kesme kuvveti ve M eğilme momenti elemanın dengede olacağı kabul edildiğinde, y yönündeki kuvvetlerin toplamı;

$$-V + q\Delta x + (V + \Delta V) = 0 \quad (2.1)$$

veya limit $\Delta x > 0$ olduğunda yayılı yük eşitliği aşağıdaki hale gelir;

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad (2.2)$$

S noktasına göre moment alıp yatayla, eğilmiş olan kiriş arasındaki açının çok küçük olduğunu kabul edildiğinde;

$$M + q\Delta x \frac{\Delta x}{2} + (V + \Delta V)\Delta x - (M + \Delta M) + P \frac{dy}{dx} \Delta x = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir. Eşitlik sadeleştirilse;

$$q \frac{\Delta x}{2} + V + \Delta V - \frac{\Delta M}{\Delta x} + P \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.4)$$

Limit $\Delta x > 0$;

$$V = \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx} \quad (2.5)$$

olur. Kirişin eğilme durumuna göre kesme kuvveti deformasyonunu hesaba katmayabiliriz. Eğer kirişin yataya göre eğriligi aşağıdaki gibi alındığında ise;

E=Kirişin yapıldığı malzemenin elastiklik modülü

I=Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \text{ olur.} \quad (2.6)$$

(2.3),(2.4) ve (2.5) denklemleri beraber ele alınırsa aşağıdaki denklemleri elde edilir [8].

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + p \frac{dx}{dy} = -V \quad (2.7a)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + p \frac{d^2 x}{dy^2} = q \quad (2.7b)$$

2.1.1.1. Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Ankastre-Basit mesnet):

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + q(x) = 0 \quad 0 < x < L \quad (2.8)$$

Burada ;

EI = Kirişin rijitliği;

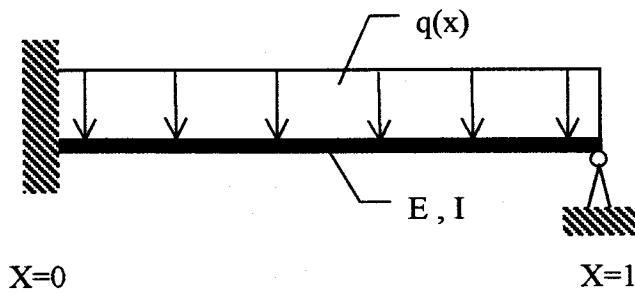
$q(x)$ = Yayılı yük;

$q(0)$ = $X=0$ da yayılı yükün değeri;

L = Kirişin uzunluğudur.

Bu denklem boyutsuz hale getirmek için $X=x/L$, $Y=y/L$, $a=q_0 L^4 / (EI)$ ve $Q(X)=q(x) / q_0$ alındığında;

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Q(x) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad \text{olur.} \quad (2.9)$$



Şekil 2.3 Ankastre - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.3)'teki gibi kirişin sağ tarafının ankastre mesnet, sol kısmının da basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde, sınır şartları şu şekilde oluşur.

$$X = 0 \text{ da } \frac{dY}{dX} = 0, X = 1 \text{ de } \frac{d^2 Y}{dX^2} = 0 \quad (2.10)$$

Verilen grid sayısına göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı (2.6) denkleme uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (2.11)$$

Sınır şartları ise;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.12a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.12b)$$

Şeklinde oluşur. Sınırdaki 4 durum şartı fazla olduğu için bunlar yok edildiğinde;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 3, 4, \dots, (N - 2) \quad (2.13)$$

için uygulama yapılır. Değişik grid sayıları için elde ettiğimiz sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1 N=5 grid için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	-2.441406250000000x10 ⁻³
3	-5.208333333333331x10 ⁻³
4	-4.394531249999998x10 ⁻³
5	0

Tablo 2.2 $N=7$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-1.286008230452676 \times 10^{-3}$
3	$-3.600823045267494 \times 10^{-3}$
4	$-5.208333333333341 \times 10^{-3}$
5	$-5.144032921810707 \times 10^{-3}$
6	$-3.215020576131693 \times 10^{-3}$
7	0

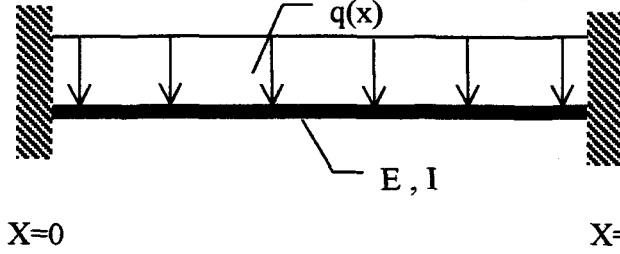
Tablo 2.3 $N=9$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-7.832845052083284 \times 10^{-4}$
3	$-2.441406250000008 \times 10^{-3}$
4	$-4.119873046875012 \times 10^{-3}$
5	$-5.208333333333358 \times 10^{-3}$
6	$-5.340576171875039 \times 10^{-3}$
7	$-4.394531250000045 \times 10^{-3}$
8	$-2.492268880208366 \times 10^{-3}$
9	0

Tablo 2.4 $N=11$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-5.24999999997379 \times 10^{-4}$
3	$-1.73333333332760 \times 10^{-3}$
4	$-3.14999999999194 \times 10^{-3}$
5	$-4.39999999999028 \times 10^{-3}$
6	$-5.20833333332269 \times 10^{-3}$
7	$-5.39999999998928 \times 10^{-3}$
8	$-4.89999999999033 \times 10^{-3}$
9	$-3.73333333332579 \times 10^{-3}$
10	$-2.02499999999562 \times 10^{-3}$
11	0

2.1.1.2. Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Ankastre–Ankastre):



Şekil 2.4 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.4)'teki gibi kirişin sağ ve sol tarafının ankastre mesnet olarak kabul edildiğinde, sınır şartları şu şekilde oluşur.

$$X = 0,1 \text{ de } \frac{dY}{dX} = 0 \quad (2.14)$$

Verilen grid sayısına göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı (2.6) denkleme uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^{(N)} C_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (2.15)$$

Sınır şartları ise;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.16a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.16b)$$

Şeklinde oluşur. Sınırdaki var olan 4 durum şartı fazla olduğu için bunları elimine edildiğinde;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 3, 4, \dots, (N-2) \text{ için} \quad (2.17)$$

uygulama yapılır.

Tablo 2.5 $N=5$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$1.4648437500000000 \times 10^{-3}$
3	$2.6041666666666666 \times 10^{-3}$
4	$1.4648437500000000 \times 10^{-3}$
5	0

Tablo 2.6 $N=7$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$8.037551440329218 \times 10^{-4}$
3	$2.057613168724278 \times 10^{-3}$
4	$2.6041666666666666 \times 10^{-3}$
5	$2.057613168724279 \times 10^{-3}$
6	$8.037551440329212 \times 10^{-4}$
7	0

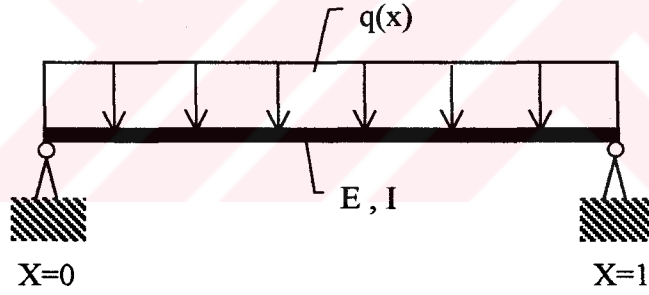
Tablo 2.7 $N=9$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$4.984537760416626 \times 10^{-4}$
3	$1.4648437499999997 \times 10^{-3}$
4	$2.288818359374991 \times 10^{-3}$
5	$2.604166666666655 \times 10^{-3}$
6	$2.288818359374989 \times 10^{-3}$
7	$1.4648437499999992 \times 10^{-3}$
8	$4.984537760416620 \times 10^{-4}$
9	0

Tablo 2.8 $N=11$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$3.374999999999220 \times 10^{-4}$
3	$1.066666666666520 \times 10^{-3}$
4	$1.837499999999822 \times 10^{-3}$
5	$2.399999999999816 \times 10^{-3}$
6	$2.604166666666491 \times 10^{-3}$
7	$2.399999999999848 \times 10^{-3}$
8	$1.837499999999886 \times 10^{-3}$
9	$1.066666666666596 \times 10^{-3}$
10	$3.374999999999702 \times 10^{-4}$
11	0

2.1.1.3. Yayılı Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi (Basit Mesnet–Basit Mesnet)



Şekil 2.5 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.5)'te gösterildiği gibi bir kirişin sağ ve sol tarafının da basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde, sınır şartları şu şekilde oluşur.

$$X = 0,1 \text{ da } \frac{d^2 Y}{dX^2} = 0 \quad (2.18)$$

Verilen grid sayısına göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı (2.6) denkleme uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (2.19)$$

Sınır şartları ise;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.20a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.20b)$$

Sınırdaki var olan 4 durum şartı fazla olduğu için bunlar elimine edildiğinde;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i = 3, 4, \dots, (N-2) \text{ için} \quad (2.21)$$

uygulama yapılır. Değişik grid sayıları için bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 2.9 N=5 için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-1.855468750000001 \times 10^{-2}$
3	$-2.604166666666668 \times 10^{-2}$
4	$-1.855468750000000 \times 10^{-2}$
5	0

Tablo 2.10 N=7 için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-1.318158436213994 \times 10^{-2}$
3	$-2.263374485596712 \times 10^{-2}$
4	$-2.604166666666672 \times 10^{-2}$
5	$-2.263374485596712 \times 10^{-2}$
6	$-1.318158436213994 \times 10^{-2}$
7	0

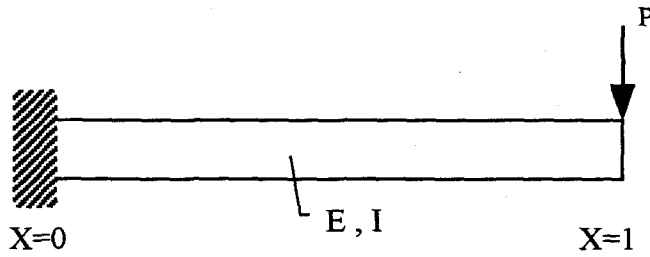
Tablo 2.11 $N=9$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-1.011149088541633 \times 10^{-2}$
3	$-1.855468749999955 \times 10^{-2}$
4	$-2.410888671874952 \times 10^{-2}$
5	$-2.604166666666625 \times 10^{-2}$
6	$-2.410888671874976 \times 10^{-2}$
7	$-1.855468749999992 \times 10^{-2}$
8	$-1.011149088541667 \times 10^{-2}$
9	0

Tablo 2.12 $N=11$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-8.17499999987474 \times 10^{-3}$
3	$-1.546666666664444 \times 10^{-2}$
4	$-2.117499999997115 \times 10^{-2}$
5	$-2.479999999996740 \times 10^{-2}$
6	$-2.604166666663308 \times 10^{-2}$
7	$-2.479999999996808 \times 10^{-2}$
8	$-2.117499999997242 \times 10^{-2}$
9	$-1.546666666664598 \times 10^{-2}$
10	$-8.17499999988596 \times 10^{-3}$
11	0

2.1.2. Tekil Yük Altındaki Bir Kirişin Eğimi :



Şekil 2.6 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.6)'da gösterildiği gibi bir kirişin sağ tarafının ankastre sol tarafının ise serbest olduğunu kabul edildiğinde, sınır şartları şu şekilde oluşur.

(2.6) denkleminde M yerine konulup ve denklem boyutsuz hale getirildiğinde;

$$EI \frac{d^2 Y}{dX^2} = -(1 - X_i) \quad (2.22)$$

$$X = 0 \text{ da } \frac{dY}{dX} = 0 \quad (2.23)$$

olur. Böylece GDQ yaklaşımı uygulandığında ;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} Y_j = X_i - 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (2.24)$$

Burada gerekli olan sınır şartları uygulandığında ;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} Y_j = X_i - 1 \quad i = 2, 3, \dots, N \text{ için} \quad (2.25)$$

Değişik grid sayıları için bulunan sonuçlar aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 2.13 N=5 için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-2.864583333333384 \times 10^{-2}$
3	$-1.041666666666681 \times 10^{-1}$
4	$-2.109375000000022 \times 10^{-1}$
5	$-3.333333333333366 \times 10^{-1}$

Tablo 2.14 N=7 için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-1.311728395061762 \times 10^{-2}$
3	$-4.938271604938342 \times 10^{-2}$
4	$-1.041666666666677 \times 10^{-1}$
5	$-1.728395061728408 \times 10^{-1}$
6	$-2.507716049382736 \times 10^{-1}$
7	$-3.333333333333352 \times 10^{-1}$

Tablo 2.15 $N=9$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-7.486979166669926 \times 10^{-3}$
3	$-2.864583333334194 \times 10^{-2}$
4	$-6.152343750001305 \times 10^{-2}$
5	$-1.041666666666851 \times 10^{-1}$
6	$-1.546223958333570 \times 10^{-1}$
7	$-2.109375000000264 \times 10^{-1}$
8	$-2.711588541666984 \times 10^{-1}$
9	$-3.333333333333712 \times 10^{-1}$

Tablo 2.16 $N=11$ için GDQ yaklaşımı

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$-4.833333333171070 \times 10^{-3}$
3	$-1.866666666625450 \times 10^{-2}$
4	$-4.049999999933241 \times 10^{-2}$
5	$-6.933333333241366 \times 10^{-2}$
6	$-1.041666666654907 \times 10^{-1}$
7	$-1.439999999985705 \times 10^{-1}$
8	$-1.878333333316497 \times 10^{-1}$
9	$-2.346666666647296 \times 10^{-1}$
10	$-2.834999999978054 \times 10^{-1}$
11	$-3.333333333308864 \times 10^{-1}$

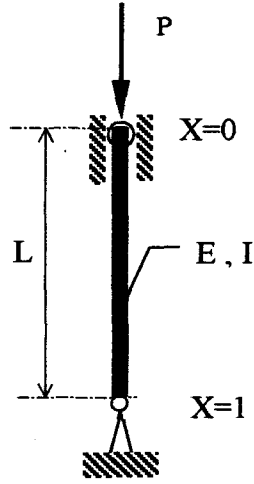
2.1.3. İnce Elastik Çubukların Burkulması:

Çubukların burkulması aşağıdaki denklemde olduğu gibi verilmiştir.

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + PL^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.26)$$

$\lambda = -PL^2/EI$ şeklinde verildiğinde çözüm, bir özdeğer çözümü olur. Burkulma problemleri sınır şartlarıyla, özdeğer probleminin beraber işleme tabi tutulmasıyla çözülebilir.

2.1.3.1. İnce Elastik Çubukların Burkulması (Basit Mesnet-Basit Mesnet):



Şekil 2.7 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.7)'te gösterildiği gibi bir çubuğun her iki ucunun basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları elde edilir. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

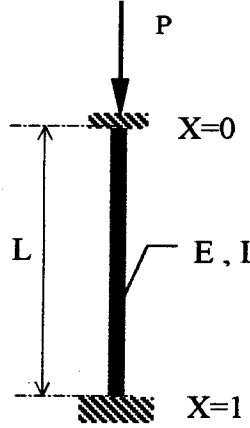
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.27a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.27b)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -\frac{PL^2}{EI} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,(N-1) \text{ için} \quad (2.28)$$

Tablo (2.17)'de yukarıdaki şartlara göre bu yaklaşım kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

**2.1.3.2. İnce Elastik Çubukların Burkulması
(Ankastre Mesnet - Ankastre Mesnet):**



Şekil 2.8 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.8)'de gösterildiği gibi bir her iki ucun da ankastre olduğu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları ile beraber bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

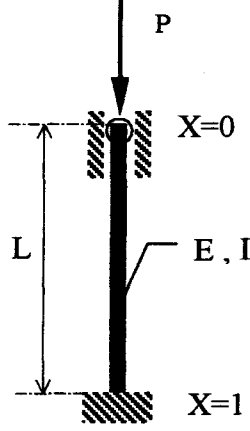
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.29a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.29b)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -\frac{PL^2}{EI} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,(N-1) \text{ için} \quad (2.30)$$

Tablo (2.17)'de yukarıdaki şartlara göre bu yaklaşım kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

2.1.3.3. İnce Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre Mesnet -Basit mesnet):



Şekil 2.9 Ankastre - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.9)'de gösterildiği gibi bağlantıda bir ucun ankastre diğer ucun basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları oluşur. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

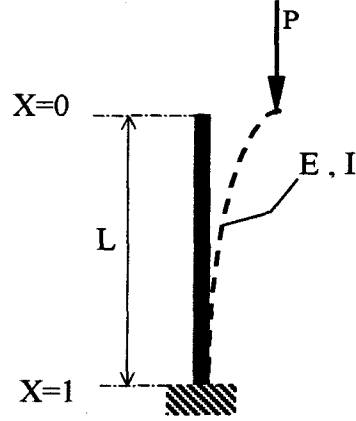
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.31a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.31b)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -\frac{PL^2}{EI} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,(N-1) \text{ için} \quad (2.32)$$

Tablo (2.17)'de yukarıdaki şartlara göre bu yaklaşım kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

2.1.3.4. İnce Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre Mesnet -Serbest Mesnet):



Şekil 2.10 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.10)'de gösterildiği gibi bir çubuğun bir ucunun ankastre diğer ucunun serbest olduğunu düşünülürse aşağıda yazılan sınır şartları elde edilir. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.33)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(4)} Y_j = -\frac{PL^2}{EI} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,N \text{ için} \quad (2.34)$$

Aşağıdaki Tablo (2.17)'de yukarıda verilen şartlara göre bu yaklaşım kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

Tablo 2.17 İnce elastik çubukların burkulması

Sınır Şartı	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)	GDQ(13)
Mf-Mf.	10.06071777	9.864190520	9.86970173	9.86960324
An.-An.	49.09090909	38.84782543	39.5164550	39.4769589
An.-Mf.	19.77835599	20.25463125	20.1865324	20.1908743
An.-Srb.	*	*	*	*

2.1.3.5. Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması:

Çubukların burkulması aşağıdaki yukarıda da verilen denklemde olduğu gibi verilmiştir.

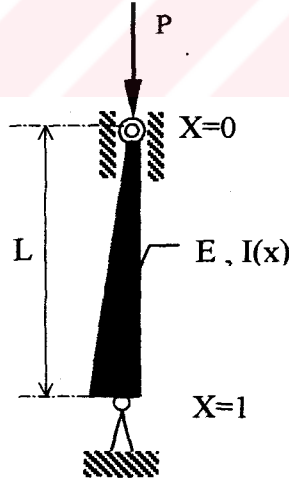
$$\frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + PL^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.35)$$

Eğer x 'in bir fonksiyonu olarak verildiğinde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$I \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} Y_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j = - \frac{PL^2}{E} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad (2.36)$$

$\lambda = -PL^2/EI$ şeklinde verildiğinde çözüm bir özdeğer çözümü olur. Bükülme problemleri sınır şartlarıyla özdeğer probleminin beraber işleme tabi tutulmasıyla çözülebilir.

2.1.3.6. Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Basit Mesnet-Basit Mesnet):



Şekil 2.11 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.11)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan her iki ucun basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları elde edilir. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$I = (X + 1)^2 \quad (2.37)$$

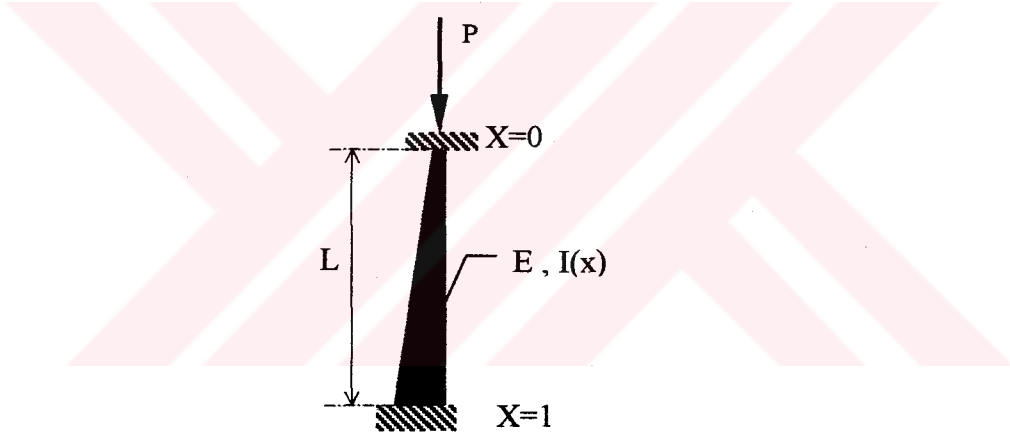
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.38a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.38b)$$

$$I \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} Y_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j = -\frac{PL^2}{E} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2, \dots, (N-1) \quad (2.39)$$

Tablo (2.18)'de yukarıdaki verilen şartlara göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı kullanılarak elde edilen değerler değişik referanslardan alınan değerlerle beraber verilmiştir[9,10].

2.1.3.7. Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre Mesnet - Ankastre Mesnet):



Şekil 2.12 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.12)'de gösterildiği gibi bir kirişin her iki ucunun da ankastre olduğu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları ile beraber bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$I = (X + 1)^2 \quad (2.40)$$

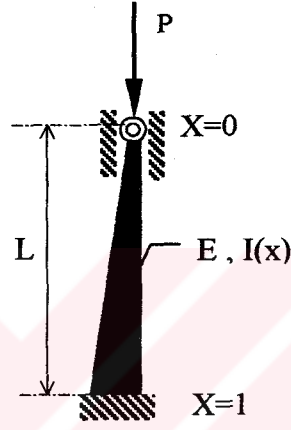
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.41a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.41b)$$

$$I \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} Y_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j = -\frac{PL^2}{E} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2, \dots, (N-1) \quad (2.42)$$

Tablo (2.18)'de yukarıdaki şartlara göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

2.1.3.8. Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre Mesnet -Basit Mesnet):



Şekil 2.13 Ankastre - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.13)'de de gösterildiği gibi bir kirişin bir ucunun ankastre diğer ucunun da basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır şartları oluşur. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$I = (X + 1)^2 \quad (2.43)$$

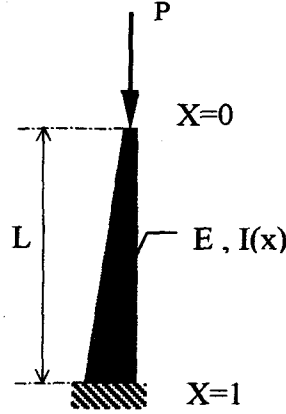
$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.44a)$$

$$Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.44b)$$

$$I \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} Y_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j = -\frac{PL^2}{E} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2, \dots, (N-1) \quad (2.45)$$

Tablo (2.18)'de yukarıdaki şartlara göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

2.1.3.9. Kesiti Lineer Değişen Elastik Çubukların Burkulması (Ankastre Mesnet -Serbest Mesnet):



Şekil 2.14 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (2.14)'de de gösterildiği gibi bir çubuğun bir ucunun ankastre diğer ucunun serbest olduğunu düşünülürse aşağıda yazılan sınır şartları elde edilir. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$I = (X + 1)^2 \quad (2.46)$$

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.47)$$

$$I \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(4)} Y_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(3)} Y_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} Y_j = -\frac{PL^2}{E} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,N \quad (2.48)$$

Tablo (2.18)'de yukarıdaki şartlara göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir.

Tablo 2.18 Kesiti lineer değişen elastik çubukların burkulması

Sınır Şartı	I Fonk.	1.Referans	2.Referans	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)
Mf.-Mf.	$I = (X + 1)^2$	20.7923	27.455	18.07449	18.77710	18.79573
An.-An.	$I = (X + 1)^2$	-	-	69.69214	86.63762	82.01451
An.-Mf.	$I = (X + 1)^2$	-	-	58.00000	45.29451	45.26209
Ank.-Srb.	$I = (X + 1)^2$	-	-	5.694444	5.515624	5.410000

2.1.4.Dairesel İnce Plağın Eğilmesi;

Dairesel ince plağın uniform kalınlıkta genel merkezci aksenal yük altındaki eğilmesi aşağıdaki denklemde olduğu gibi verilmiştir;

$$\frac{d^4 y}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 y}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dy}{dr} = \frac{p(r)}{D} \quad (2.49)$$

Burada D plağın eğilme rijitliği, p plağa uygulanan normal yükü, r dairenin yarıçapını ve y ise eğilme değerini göstermektedir.

$\rho=r/a$, $Y=y/\alpha$, $\alpha=pa^4/D$ ve a'nın da yarıçap olduğu biçiminde ele alıp (2.49) denklemi bu şekilde boyutsuz hale getirildiğinde, denklem şu hale gelir;

$$\frac{d^4 Y}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 Y}{d\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 Y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{dY}{d\rho} = 1 \quad (2.50)$$

Plağın merkezinde ($\rho=0$) ve kenarlarda ($\rho=1$) sınır şartları merkezde ankastre, kenarlarda basit mesnet bağlantılar için;

$$\rho = 0 \text{ da } \frac{dY}{d\rho} = 0, \rho = 1 \text{ de } D \left(\frac{d^2 Y}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dY}{d\rho} \right) = 0 \quad (2.51)$$

olarak kabul edilir. (2.50) denkleme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j + \frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} Y_j - \frac{1}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j + \frac{1}{\rho_i^3} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} Y_j = 1, \quad i=2, \dots, (N-2) \quad (2.52)$$

Benzer biçimde sınır şartları da aşağıdaki gibi olur;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} Y_j = 0, \quad Y_N = 0 \quad (2.53a)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j + \frac{\nu}{\rho} \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} Y_j = 0 \quad (2.53b)$$

Tablo (2.19)'da Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş olan değerler verilmiştir.

Tablo 2.19 $N=5$ Grid için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$2.486572265625024 \times 10^{-2}$
3	$4.628906250000047 \times 10^{-2}$
4	$6.060791015625065 \times 10^{-2}$
5	$6.562500000000072 \times 10^{-2}$

Tablo 2.20 $N=7$ için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$1.673659336419539 \times 10^{-2}$
3	$3.260030864197124 \times 10^{-2}$
4	$4.628906249999431 \times 10^{-2}$
5	$5.679012345678313 \times 10^{-2}$
6	$6.338011188270815 \times 10^{-2}$
7	$6.562499999999176 \times 10^{-2}$

Tablo 2.21 $N=9$ için GDQ yaklaşımı ($\nu=0.25$ için)

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$1.257705688475002 \times 10^{-2}$
3	$2.486572265622066 \times 10^{-2}$
4	$3.627090454097490 \times 10^{-2}$
5	$4.628906249995017 \times 10^{-2}$
6	$5.450820922845904 \times 10^{-2}$
7	$6.060791015618888 \times 10^{-2}$
8	$6.435928344720178 \times 10^{-2}$
9	$6.562499999993467 \times 10^{-2}$

Tablo 2.22 $N=11$ için GDQ yaklaşımı ($v=0.25$ için)

Grid Numarası	Eğilme Değeri
1	0
2	$1.006406249979571 \times 10^{-2}$
3	$2.002499999959251 \times 10^{-2}$
4	$2.956406249939382 \times 10^{-2}$
5	$3.839999999920252 \times 10^{-2}$
6	$4.628906249902173 \times 10^{-2}$
7	$5.302499999885511 \times 10^{-2}$
8	$5.843906249870710 \times 10^{-2}$
9	$6.239999999858356 \times 10^{-2}$
10	$6.481406249849303 \times 10^{-2}$
11	$6.562499999845245 \times 10^{-2}$

2.2.İstenilen Herhangi Spesifik Bir Nokta İçin Ağırlıklı Katsayılar

Fiziksel alanda sonuçlar yalnızca birkaç spesifik alanda istenir. Halbuki N grid sayısının belirlenmesiyle beraber elde edilen i 'nci gridteki değer bizim istediğimiz noktadaki değerimiz olmayabilir. Aranılan noktadaki değeri elde etmek için N grid sayısını değiştirmemiz gerekebilir. Bunun için belki de imkansız büyüklükteki değerlerle karşılaşabiliriz. Elde etmek istediğimiz değere göre daha küçük bir grid sayısı için eşit aralıklı olmayan gridler oluşturarak gerekli fiziksel alandaki noktanın değerlerinin elde edilebileceği görülmüştür.

Eşit aralıklı olmayan bu değerler için elde edeceğimiz ağırlıklı katsayı örnekleri Ek B 'de ve bu şekilde elde edilmiş olan katsayılarla ankastre- basit mesnetli bağlantılı bir kirişteki sehim değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.23 Ankastre- basit mesnet bağlantılı bir kirişteki 171/20 (0.85) değeri için

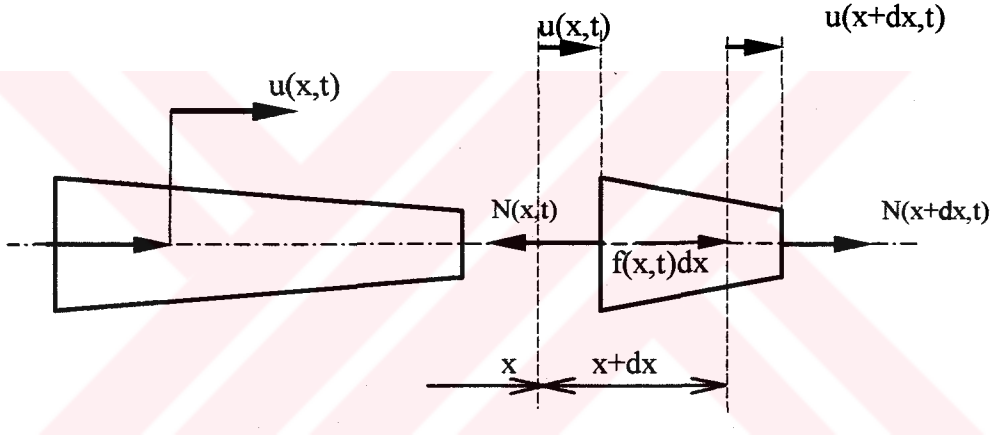
GDQ yaklaşımı ($\times 10^{-3}$)

	GDQ(5)	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)	GDQ(13)
0.85 İçin Eğilme Değeri	2.93515625	2.93515625	2.93515625	2.935156250	2.935156249

BÖLÜM 3.

GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE METODUNUN TİTREŞİM PROBLEMLERİNDE UYGULANMASI

3.1.Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri



Şekil 3.1 Elastik kirişin boyuna titreşimi

$f=f(x,t)$ =Çubuk eksenini boyunca yayılı yükün yoğunluğu,

$F/L=f$ 'in boyutu,

L =Elemanın boyu,

$\rho A dx$ =Elemanın kütlesi,

$u(x,t)$, elemanın x mesafesindeki yer değiştirmesi olarak ele alındığında, $u(x+dx,t)$ 'nin yer değiştirmesi Taylor seri açılımının dx 'e göre ikiden fazla terimleri ihmal edilerek aşağıdaki bağıntı elde edilir[11].

$$u(x + dx, dt) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (3.1)$$

Buradan dx elemanın şekil değiştirmesi ve uzaması;

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x + dx, t) - u(x, t) \quad (3.2a)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ olur.} \quad (3.2b)$$

Diğer taraftan x kesitindeki kesit normal kuvvetinin $N(x, t)$, $x+dx$ kesitindeki kuvveti aynı şekilde Taylor seri açılımının dx 'e göre ikiden fazla terimleri ihmal edilerek;

$$N(x + dx, t) = N(x, t) + \frac{\partial N}{\partial x} dx \quad (3.3)$$

haline gelir. $N = EA\varepsilon$ olduğundan

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Newton'un ikinci kanunundan;

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} dx + f(x, t) dx \quad (3.5)$$

olur. Buradan (3.4) denklemi yerine konursa sonuçta aşağıdaki denklemi elde edilir .

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial u}{\partial x}) + q(x, t) \quad (3.6)$$

Kiriş sabit kesitli olmadığında $A=A(x)$ olacağı ve titreşim alanı boyunca sistemi titreşime zorlayacak bir kuvvet veya bir moment bulunmadığında $f(x, t)=0$ olacağından yukarıdaki bu denklemi şu şekile dönüştürebiliriz;

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Aynı şekilde ince bir sabit kesitli çubukta bu denklem şu şekilde ifade edilir;

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

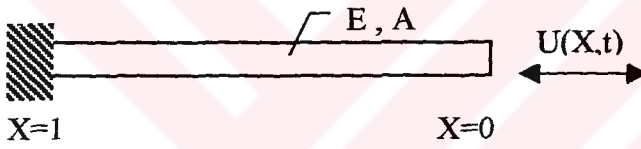
$$\bar{\omega}^2 = \left(\frac{m}{EA} \right) \omega^2 \quad (3.9)$$

olarak alıp, Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunu (3.8) denkleminde uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.10)$$

elde edilir.

3.1.1.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre Mesnet -Serbest Mesnet)



Şekil 3.2 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.2)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sağ tarafının serbest sol tarafının da ankastre olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X=0 \text{ da } \frac{dU}{dX} = 0 \text{ ve } X=1 \text{ de } U=0 \quad (3.11)$$

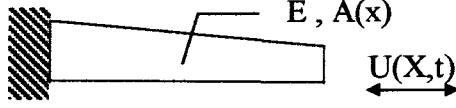
Bu sınır şartına ve (3.8) denkleminde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=2,3,\dots,N \quad (3.12a)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^{N-1} c_{1j}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.12b)$$

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.2. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre Mesnet –Serbest Mesnet)



$X=1$

$X=0$

Şekil 3.3 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.3)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip kesiti lineer değişen ince kirişin değerlerini $A(x)=2xA$ ve $m(x)=2xm$ olarak alındığında (3.7) denklemi aşağıdaki biçime dönüşür;

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[2A x \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2mx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.13)$$

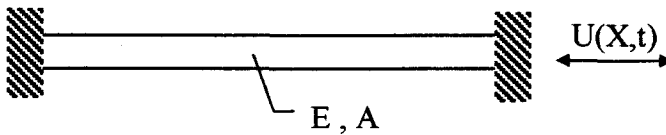
Buradan (3.9) denklemine göre sadeleştirilip boyutsuz hale getirildiğinde, (3.12) sınır şartlarıyla denklemleriyle beraber Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulanır ve aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} U_j + \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(1)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=2,3,\dots,N \quad (3.14)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^{N-1} c_{1j}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.15)$$

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.3. Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre Mesnet - Ankastre Mesnet)



$X=0$

$X=1$

Şekil 3.4 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.4)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin hem sağ ve hemde sol tarafının ankastre olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıdaki gibi olur;

$$X = 0,1 \text{ de } \frac{dU}{dX} = 0 \quad (3.16)$$

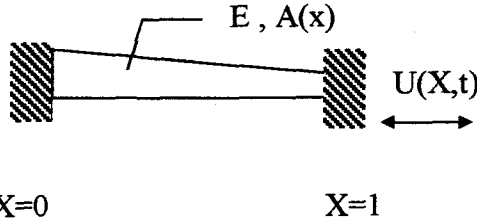
Bu sınır şartına ve (3.8) denkleminin Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.17a)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j = 0 \text{ ve } U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.17b)$$

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.4. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre Mesnet - Ankastre Mesnet)



Şekil 3.5 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.5)'te de gösterildiği gibi bağlantılara sahip kesiti lineer değişen ince kirişin değerlerini $A(x)=2xA$ ve $m(x)=2xm$ olarak alındığında (3.7) denklemini aşağıdaki biçime dönüştür;

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[2Ax \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2mx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

buradan (3.9) denkleminin göre sadeleştirme yapıp, (3.12) sınır şartlarıyla denklemleriyle beraber Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

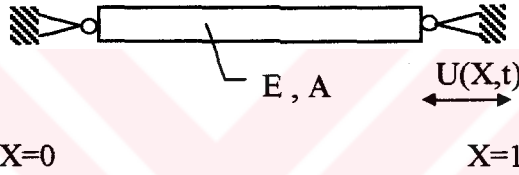
$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j + \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.19a)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} U_j = 0 \quad , \quad U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.19b)$$

elde edilir .

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.5.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Basit Mesnet- Basit Mesnet)



Şekil 3.6 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.6)'da da gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sağ ve sol tarafının da basit mesnet olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X = 0,1 \text{ de } \frac{d^2 U}{dX^2} = 0 \quad (3.20)$$

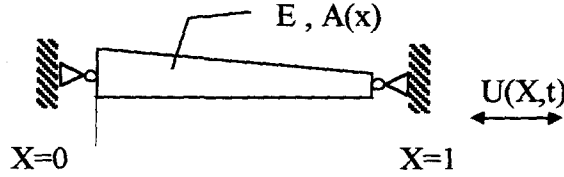
Bu sınır şartına ve (3.8) denkleminde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j = \bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.21a)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} U_j = 0 \quad , \quad U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} U_j = 0 \quad (3.21b)$$

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.6. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Basit Mesnet - Basit Mesnet)



Şekil 3.7 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.7)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip kesiti lineer değişen ince kirişin değerlerini $A(x)=2xA$ ve $m(x)=2xm$ olarak alındığında (3.7) denklemi aşağıdaki biçime dönüşür;

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[2Ax \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2mx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

buradan (3.9) denklemine göre sadeleştirme yapıp, (3.21) sınır şartlarıyla denklemleriyle beraber Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

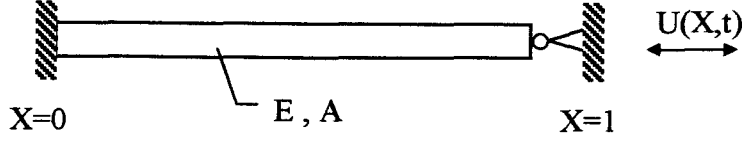
$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j + \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.23a)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} U_j = 0 \quad , \quad U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} U_j = 0 \quad (3.23b)$$

elde edilir .

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.7.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre- Basit Mesnet)



Şekil 3.8 Ankastre mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.8)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sol tarafının ankastre ve sağ tarafının da basit mesnet olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X=0 \text{ da } \frac{dU}{dX}=0 \text{ ve } X=1 \text{ de } \frac{d^2U}{dX^2}=0 \quad (3.24)$$

Bu sınır şartına ve (3.8) denkleminin Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

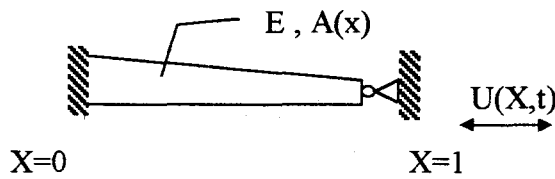
$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.25)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.26a)$$

$$U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} U_j = 0 \quad (3.26b)$$

Tablo (3.1)'de elastik bir kirişin boyuna titreşimleri ile ilgili Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile elde edilmiş değerler verilmiştir.

3.1.8.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Boyuna Titreşimleri (Ankastre- Basit Mesnet)



Şekil 3.9 Ankastre mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.9)'da da gösterildiği gibi bağlantılara sahip kesiti lineer değişen ince kirişin değerlerini $A(x)=2xA$ ve $m(x)=2xm$ olarak alındığında (3.7) denklemi aşağıdaki biçime dönüşür;

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[2Ax \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2mx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.27)$$

buradan (3.9) denklemine göre sadeleştirme yapıp, (3.26) sınır şartlarıyla denklemleriyle beraber Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j + \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i \quad i=3,4,\dots,N-2 \quad (3.28)$$

$$U_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} U_j = 0 \quad (3.29a)$$

$$U_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} U_j = 0 \quad (3.29b)$$

elde edilir .

Aşağıdaki tabloda yukarıda sayılmış olan bütün sınır şartları ve sistemin sabit kesitli olup olmama durumuna göre değişik grid sayılarında elde edilen birinci mod değerleri verilmiştir.

Tablo 3.1 İnce elastik kirişin boyuna titreşimi

Sınır Şartı	A(x)	m(x)	GDQ(5)	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)
Ank-Srb.	A	m.	1.566703072	1.570853746	1.570795935	1.570796328
Ank-Srb.	2Ax	2mx	2.406526740	2.404804191	2.404825741	2.404825556
Ank-Ank.	A	m.	4.000000000	3.674234614	3.495304256	3.401346389
Ank-Ank.	2Ax	2mx	2.518354198	2.903742753	3.042672594	3.056141650
B.m.-B.m.	A	m.	3.098386676	3.142493269	3.141581381	3.141592754
B.m.-B.m.	2Ax	2mx	2.898336524	3.012026150	2.977440097	2.939339557
Ank.-B.m.	A	m.	3.464101615	3.367363917	3.299431828	3.261010998
Ank.-B.m.	2Ax	2mx	2.922227888	3.079299381	3.052687733	3.012469762

3.1.9.Dairesel İnce Bir Plağın Boyuna Titreşimi

Dairesel ince plağın titreşimi aşağıdaki denklemde olduğu gibi verilmiştir[12];

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} + \bar{\omega}^2 = 0 \quad (3.30)$$

Burada $R=r/a$ şeklinde boyutsuz hale getirilmiş dairenin çapıdır. Plağın merkezinde ($R=0$) ankastre tutturulmuş ve kenarlar serbest bırakılmış biçimindeki sınır şartları için aşağıdaki gibi yazılıp (3.30) denkleminde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulanmaktadır;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(1)} U_j = 0, \quad U_N = 0 \quad (3.31)$$

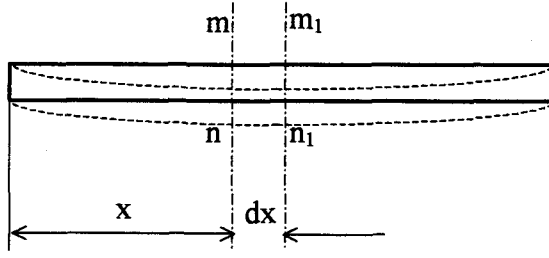
$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} U_j + \frac{1}{R_i} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(1)} U_j = -\bar{\omega}^2 U_i, \quad i=2,3,\dots,(N-1) \quad (3.32)$$

olur. Bu işlemden yukarıda verilen sınır şartına göre alınan değerler Tablo (3.2)'de verilmiştir.

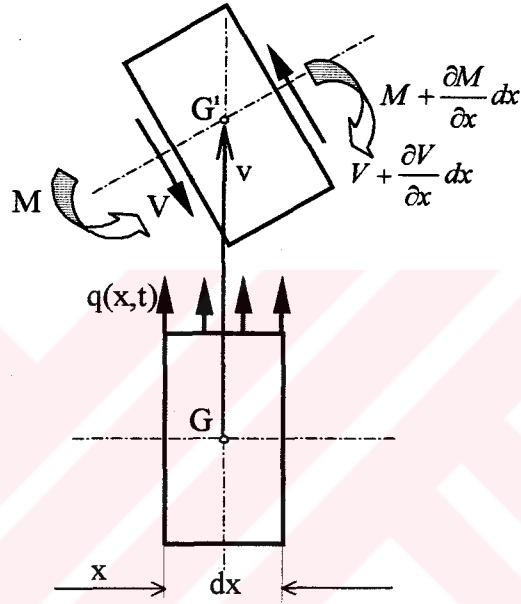
Tablo 3.2 Dairesel plağın boyuna titreşimi

Titreşim Değeri	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)	GDQ(13)
1. Mod	2.40480419120	2.40482574191	2.4048255565	2.4048255577
2. Mod	5.54164163963	5.51900723164	5.52011499728	5.5200772022
3. Mod	9.47850912178	8.57799693983	8.66035713039	8.6533390386

3.2.Elastik Kirişin Eğilme Titreşimi



Şekil 3.10 Bir sistemin eğilme titreşimi



Şekil 3.11 Eğilme titreşiminde bir elemanın durumu

Elemanın kütlesi= $dm=\rho(x)A(x)dx$

Kütleli atalet momenti = $dI=d(x)I(x)dx$

Şekil (3.11)'deki eleman eksen dik bir v ötelenmesiyle bir $\partial v / \partial x$ dönmesi yapan rijit bir cisim gibi düşünülebilir[11].

Eksene dik olan kuvvet;

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + q(x,t)dx \quad (3.33)$$

Ağılık merkezine göre dönme momenti;

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx + Vdx \quad (3.34)$$

dx elemanın ağırlık merkezi $x+dx/2$ de bulunur. Fakat Taylor teoremine göre ikiden daha fazla terimler atıldığında $v(x+dx/2)$ yerine $v(x)$ alınabilir. Newton'un ikinci teoreminden;

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx + q(x,t) dx \quad (3.35)$$

Hareket miktarına göre;

$$\rho I dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial M}{\partial x} dx + V dx \quad (3.36)$$

olur. x 'e göre her iki tarafının da türevini alıp $\partial V / \partial x$ 'i yerine konulduğunda;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho I \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx \right) = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(x,t) \quad (3.37)$$

elde edilir. Öbür yandan

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

olduğundan;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho I \frac{d^2 v}{dt^2} \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (3.39)$$

elde edilir. Serbest sönümlü titreşimlerde $q(x,t)=0$ olur. Aynı zamanda dönme ataleti göz önüne alınmazsa , basit çubukta (Bernoulli-Euler çubuğu) kullanılan aşağıdaki denklemi elde edilir ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho A_0 l^4 \omega^2}{EI_0} \quad (3.41)$$

Şeklinde tabii frekansı boyutsuz hale getirip (3.40) denkleminde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i,j=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (3.42)$$

denklemleri elde edilmiştir.

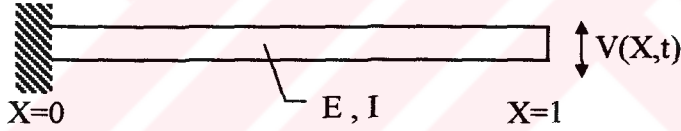
Yine aynı biçimde eğer serbest sönümlü titreşimlerde $q(x,t)=0$ olur, aynı zamanda dönme ataleti göz önüne alınmazsa ve sabit kesitli bir çubuk için boyutsuz halde ($I = 2I_0 X^2$, $m = 2m_0 X^2$) alınıp, Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında aşağıda verilen denklem elde edilir;

$$I \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j + 2 \frac{dI}{dX} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{d^2 I}{dX^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j = m \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j \quad (3.43)$$

I ve m için yukarıda verilen değerler yerine konursa;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{4}{x_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{2}{x_i^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j = \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j \text{ elde edilir.} \quad (3.44)$$

3.2.1. Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet - Serbest Mesnet)



Şekil 3.12 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.12)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sağ tarafının serbest sol tarafının da ankastre olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X=0 \text{ da } \frac{dV}{dX} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.45)$$

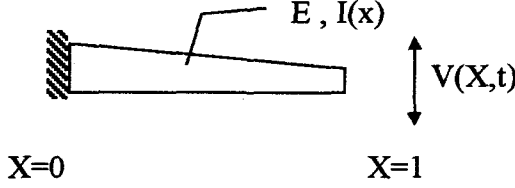
Buraya Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i=2,3,\dots,N \quad (3.46a)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{1j}^{(1)} V_j = 0 \quad V_1 = 0 \quad (3.46b)$$

Tablo (3.3)'de ankastre - serbest bağlantı için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan sabit kesitli elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.2.Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet -Serbest Mesnet)



Şekil 3.13 Ankastre mesnet - serbest bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.13)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince kirişin sağ tarafının serbest sol tarafının da ankastre bağlantılı olduğu durumu ele alıp (3.40) denkleminin beraber yukarıda belirtilen sınır şartlarına Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

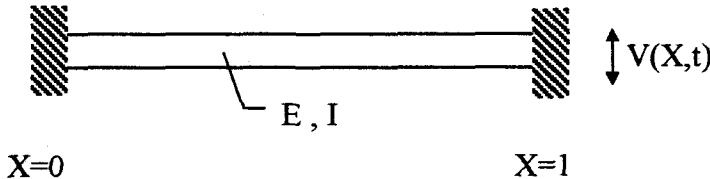
$$X = 0 \text{ da } \frac{dV}{dX} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.47)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{4}{X_i} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{2}{X_i^2} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} V_j = \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} V_j \quad i=2,3,\dots,N \quad (3.48a)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{1j}^{(1)} V_j = 0 \quad V_N = 0 \quad (3.48b)$$

Tablo (3.3)'de ankastre - serbest bağlantı için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan kesiti lineer değişen elastik bir kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.3.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet - Ankastre Mesnet)



Şekil 3.14 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.14)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sağ ve sol taraflarının ankastre olduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X = 0,1 \text{ de } \frac{dV}{dX} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.49)$$

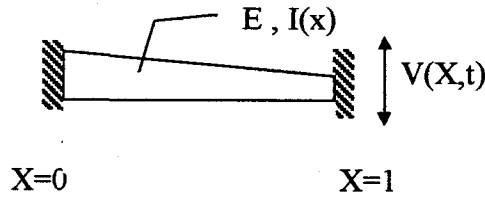
Buraya Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i=3, \dots, N-2 \text{ ve } V_N=0 \quad (3.50a)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} V_j = 0 \quad (3.50b)$$

Tablo (3.3)'de ankastre - ankastre bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan sabit kesitli elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.4. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet- Ankastre Mesnet)



Şekil 3.15 Ankastre mesnet - ankastre mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.15)'te de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin sağ ve sol taraflarının ankastre olduğu durumu ele alıp (3.40) denklemiyle beraber yukarıda belirtilen sınır şartlarına Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

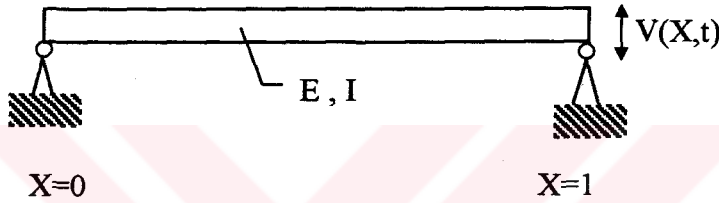
$$X = 0,1 \text{ de } \frac{dV}{dX} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.51)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{4}{X_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{2}{X_i^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j = \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j \quad i=2, \dots, N-2 \quad (3.52a)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} V_j = 0, \quad V_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} V_j = 0 \quad (3.52b)$$

Tablo (3.3)'de ankastre - ankastre bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan kesiti lineer değişen elastik bir kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.5.Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Basit Mesnet-Basit Mesnet)



Şekil 3.16 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.16)'da da gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin her iki ucunun da basit mesnetli bir bağlantı ile tutulduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X = 0, 1 \text{ de } \frac{dV}{dX} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.53)$$

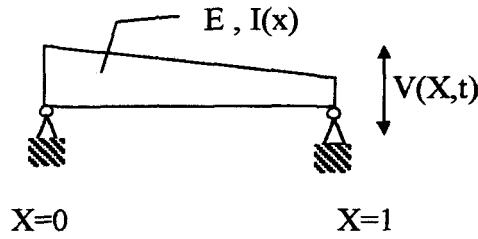
Buraya Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i=3, \dots, N-2 \quad (3.54a)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} V_j = 0, \quad V_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} V_j = 0 \quad (3.54b)$$

Tablo (3.3)'de basit mesnet - basit mesnet bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan Sabit Kesitli elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.6. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Basit Mesnet-Basit Mesnet)



Şekil 3.17 Basit mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.17)'de da gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin her iki ucunun da basit mesnetli bir bağlantı ile tutulduğu durumu ele alıp (3.40) denkleminin beraber yukarıda belirtilen sınır şartlarına Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

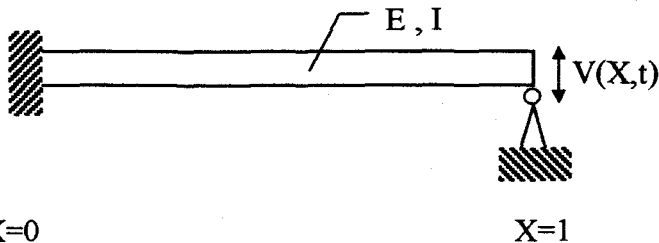
$$X = 0, 1 \text{ de } \frac{d^2 V}{dX^2} = 0 \text{ ve } V = 0 \quad (3.55)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{4}{X_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{2}{X_i^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j = \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j \quad i=2, \dots, N-2 \quad (3.56a)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} V_j = 0, \quad V_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} V_j = 0 \quad (3.56b)$$

Tablo (3.3)'de basit mesnet - basit mesnet bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan kesiti lineer değişen elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.7. Sabit Kesitli Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet-Basit Mesnet)



X=0

X=1

Şekil 3.18 Ankastre mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.18)'de de gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin bir ucunun ankastre diğer ucunun da basit mesnetli bir bağlantı ile tutulduğu durumu ele alındığında sınır şartları aşağıda gösterildiği gibi olur;

$$X=0 \text{ da } \frac{dV}{dX} = 0 \quad (3.57a)$$

$$X=1 \text{ de } \frac{d^2V}{dX^2} = 0 \quad (3.57b)$$

Buraya Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

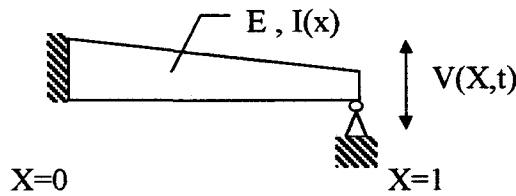
$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i=3, \dots, N-2 \quad (3.58a)$$

$$V_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} V_j = 0 \quad (3.58b)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} V_j = 0 \quad (3.58c)$$

Tablo (3.3)'de ankastre - basit mesnet bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan sabit kesitli elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

3.2.8. Kesiti Lineer Değişen Elastik Kirişin Eğilme Titreşimleri (Ankastre Mesnet-Basit Mesnet)



Şekil 3.19 Ankastre mesnet - basit mesnet bağlantılı bir kiriş

Şekil (3.19)'da da gösterildiği gibi bağlantılara sahip olan ince bir kirişin bir ucunun ankastre diğer ucunun da basit mesnetli bir bağlantı ile tutulduğu durumu ele alıp (3.40) denklemiyle beraber yukarıda belirtilen sınır şartlarına Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında;

$$X=0 \text{ da } \frac{dV}{dX} = 0 \quad (3.59a)$$

$$X=1 \text{ de } \frac{d^2V}{dX^2} = 0 \quad (3.59b)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{4}{X_i} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} V_j + \frac{2}{X_i^2} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j = \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} V_j \quad i=3, \dots, N-2 \quad (3.60a)$$

$$V_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} V_j = 0 \quad (3.60b)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} V_j = 0 \quad (3.60c)$$

Tablo (3.3)de ankastre - basit mesnet bağlantılar için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılarak bulunan sabit kesitli olmayan elastik kirişin eğilme titreşimlerine ait değerler verilmiştir.

Tablo 3.3. Değişik sınır şartlarında elastik bir kirişin eğilme titreşiminde doğal frekans değerleri

Sınır Şartı	I(x)	m(x)	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)	GDQ(13)
Ank-Srb.	I	m.	3.473657229	3.517241357	3.516003308	3.516015354
Ank-Srb.	2Ix ²	2mx ²	2.645751311	2.645751311	2.645751308	2.645751310
Ank-Ank.	I	m.	22.95858843	22.35292291	22.37420909	22.37327028
Ank-Ank.	2Ix ²	2mx ²	2.946183972	2.860712056	2.813108644	2.782768702
B.m.-B.m.	I	m.	9.959144732	9.866944564	9.869652504	9.869603828
B.m.-B.m.	2Ix ²	2mx ²	2.946183972	2.860712056	2.813108645	2.782768713
Ank.-B.m.	I	m.	15.48903916	15.41589014	15.41799946	15.41820777
Ank.-B.m.	2Ix ²	2mx ²	2.946183972	2.860712056	2.813108644	2.782768741

3.2.9.Dairesel Plağın Eğilme Titreşimleri

Dairesel plağın eğilme titreşimleri aşağıda belirtilen denklemde verilmiştir.

$$\frac{d^4V}{dR^4} + \frac{2}{R} \frac{d^3V}{dR^3} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2V}{dR^2} + \frac{1}{R^3} \frac{dV}{dR} - \bar{\omega}^2 V = 0 \quad (3.61)$$

$$R = r/a \text{ ve } \bar{\omega}^2 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D} \quad (3.62)$$

Denklem (3.62)'deki kabullerle boyutsuz hale getirilip ve kenarları ankastre olan bir dairenin sınır değerleriyle beraber Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu uygulandığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(4)} V_j + \frac{2}{R_i} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(3)} V_j - \frac{1}{R_i^2} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(2)} V_j + \frac{1}{R_i^3} \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}^{(1)} V_j = \bar{\omega}^2 V_i, i=2 \dots (N-2) \quad (3.63a)$$

$$V_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^{N-1} c_{1j}^{(1)} V_j = 0 \quad (3.63b)$$

Tablo (3.4)'te kenarları ankastre bağlı olan bir ince dairesel plağın Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile bulunan eğilme titreşim değerleri verilmiştir.

Tablo 3.4 Dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerleri

Titreşim Değeri	GDQ(7)	GDQ(9)	GDQ(11)	GDQ(13)
1.Mod	10.37799866	10.21084086	10.21596812	10.21582461
2.Mod	52.79906722	39.17793877	39.81634034	39.76891243
3.Mod	57.88800911	96.52412270	84.76506162	89.84454031

BÖLÜM 4.

DEĞERLENDİRME VE SONUÇLAR

Bu çalışmada değişik mekanik sistemlerin analizinde kullanılan metodlar tanıtılmış Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun etkili bir yaklaşım tekniği olduğu gösterilmiştir. Ankastre Mesnet – Basit Mesnetli Üniform Yüklü Bir Kirişin sehimleriyle ilgili değerler, Tablo (4.1)'de gerçek değerleriyle beraber verilmiştir.

Bu kirişin gerçek değerlerini veren eşitlik aşağıdaki gibidir;

$$W = \frac{1}{48} x^2 (5x - 2x^2 - 3) \quad (4.1)$$

Elde edilen sayısal sonuçların sadece 5 grid noktası gibi az grid için gerçeğe son derece yakın sonuçlar vermesi Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun yapısal analizde ne kadar kullanılabilir olduğunu göstermektedir..

Tablo 4.1 Ankastre mesnet – basit mesnetli üniform yüklü bir kirişin sehim değerlerinin GDQ metoduyla (N=5) elde edilen sonuçları

Grid Numarası	Gerçek Değer	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
1	0	0	0
2	-0.00244140625	-0.00244140625	0
3	-0.005208333333	-0.005208333333	0
4	-0.00439453125	-0.00439453125	0
5	0	0	0

Yine aynı biçimde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun Tablo (4.2) ve (4.3)'te de görülebileceği gibi, eşit aralıklı olmayan ağırlıklı katsayılardan elde edilen, herhangi bir noktadaki sehim değerinin bulunmasında ve değişik sınır şartlarında kolonların burkulma problemlerinde kullanılabilir olduğu görülmüştür.

Değişik grid sayıları için elde edilen değerler, gerek analitik gerekse Sonlu Elemanlar Metoduyla bulunan değerlerle karşılaştırıldığında, sonuçlarının gerçek değerlerine çok yakın olduğu görülür. Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature

Metodu ile bulunan değerler Sonlu Elemanlar Metoduyla karşılaştırıldığında bu metod ile bulunan değerlere göre daha yakın sonuçlar elde edilir[13].

Özellikle çubukların burkulma problemlerinde $N=5$ grid için bulunan hata miktarının %0 olması ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu ile çözümde özdeğer probleminin sadece 5×5 matris problemi için gerçekleştirildiği göz önüne alındığında, bu metodun kullanılışının basit ve kısa olduğu söylenebilir.

Tablo 4.2 Değişik gridlerdeki 17l/20 (0.85) değeri içindeki % hata miktarları (Ankastre-Basit mesnet)

	Gerçek Değer	GDQ Yaklaşımı	% Hata
GDQ(5)	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	0
GDQ(7)	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	0
GDQ(9)	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	0
GDQ(11)	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	0
GDQ(13)	$2.9351562500 \times 10^{-3}$	$2.9351562499 \times 10^{-3}$	3.4×10^{-11}

Tablo 4.3 İnce elastik çubukların burkulması

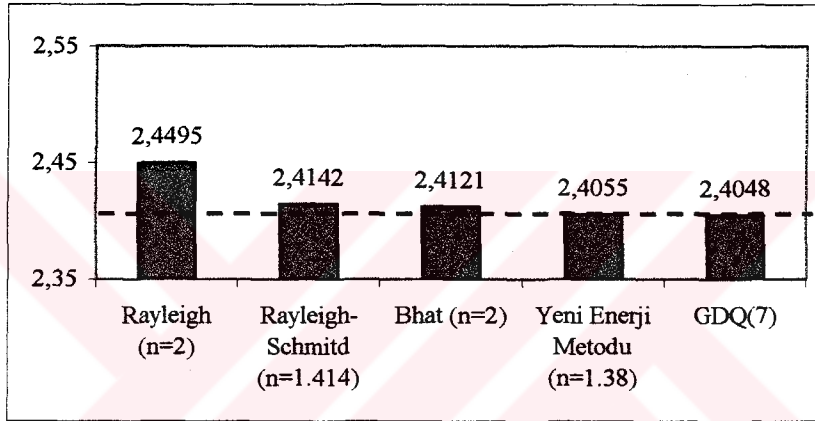
Sınır Şartı	Gerçek Değer	Sonlu E.M.	Hata (%)	GDQ (7)	Hata (%)	GDQ (9)	Hata (%)	GDQ (11)	Hata (%)
Maf-Maf.	9.8696	9.9438	-0.7518	10.0607	-1.9362	9.8642	0.0547	9.8697	-0.0010
An.-An.	39.4784	39.9730	-1.2528	49.0909	-24.3488	38.8478	1.5973	39.5164	-0.0963
An.-Maf.	20.1421	20.4972	-1.7630	19.7783	1.8062	20.2546	-0.5585	20.1865	-0.2204
Ank.-Srb.	2.4674	-	-	*	*	*	*	*	*

Değişik mekanik sistemlerin titreşim çözümünde Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılmıştır. Aşağıda verilen tablo ve şekillerde de görüldüğü gibi farklı metodlara karşılaştırıldığında bu metodun gerçek değerlere çok yakın değerler verdiği görülebilir[14-18].

Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun gerek çözüm prosedürü gerekse sınır şartlarının diferansiyel denklemlere uygulanması kolaydır. Elde edilen değerlerin hassasiyeti mekanik sistemlerin analizinde bu metodun büyük bir potansiyele sahip olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.4 Ankastre – serbest bağı kesiti lineer değişen ince elastik kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları (Gerçek Değ. = 2.4048)

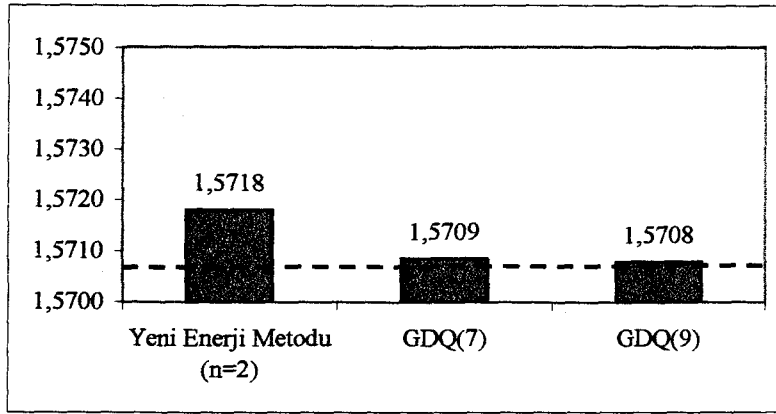
Kullanılan Metod	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
Rayleigh (n=2)	2.4495	1.858
Rayleigh-Schmitd (n=1.414)	2.4142	0.391
Bhat (n=2)	2.4121	0.303
Yeni Enerji Metodu (n=1.38)	2.4055	0.029
GDQ(7)	2.4048	0



Şekil 4.1 Ankastre serbest bağı kesiti lineer değişen ince elastik kirişin boyuna titreşimi değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği

Tablo 4.5 Ankastre – serbest bağı ince elastik kirişin boyuna titreşimi değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları (Gerçek Değer=1.57079)

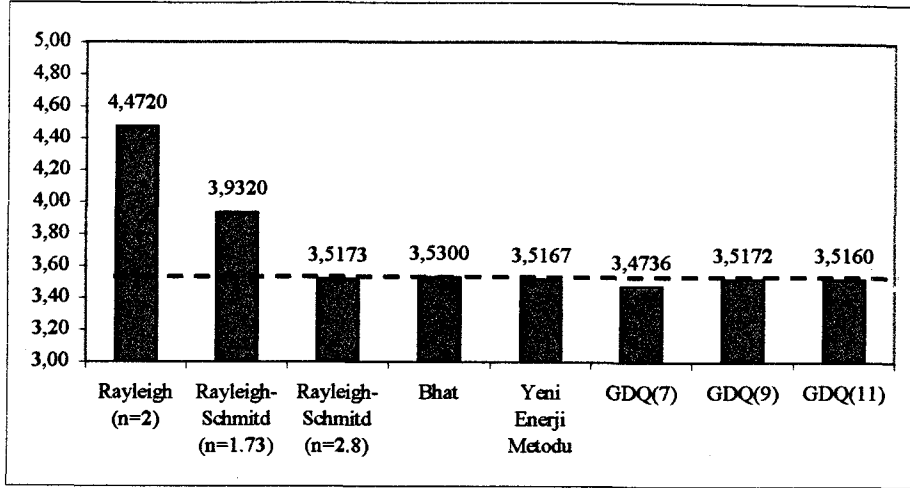
Kullanılan Metod	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
Yeni Enerji Metodu (n=2)	1.5718	0.0639
GDQ(7)	1.57085	0.0034
GDQ(9)	1.57079	-0.0004



Şekil 4.2 Ankastre serbest bağlı sabit kesitli ince elastik kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği

Tablo 4.6 Bir kenarı ankastre diğeri serbest elastik bir kirişin eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları (Gerçek Değer=3.5156)

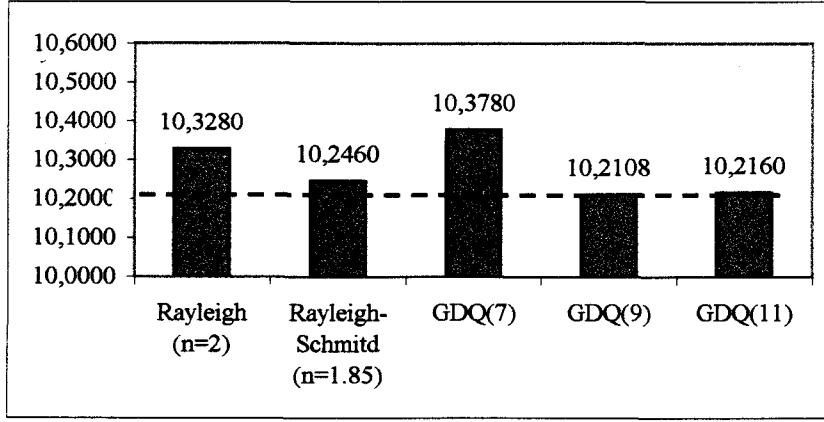
Kullanılan Metod	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
Rayleigh (n=2)	4.472	27.204
Rayleigh-Schmitd (n=1.73)	3.932	11.844
Rayleigh-Schmitd (n=2.8)	3.5173	0.048
Bhat	3.5300	0.409
Yeni Enerji Metodu	3.5167	0.0313
GDQ(7)	3.4736	-1.194
GDQ(9)	3.5172	0.0455
GDQ(11)	3.5160	0.011



Şekil 4.3 Bir kenarları ankastre diğer kenarı serbest elastik bir kirişin boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği

Tablo 4.7 Dış kenarları ankastre dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları(Gerçek Değer=10.216)

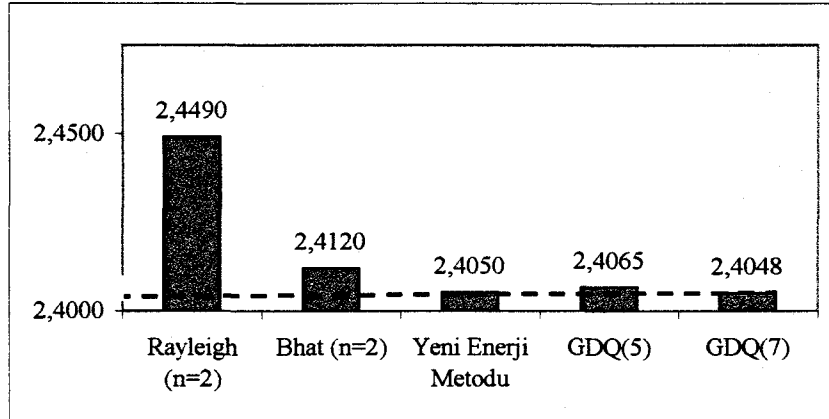
Kullanılan Metod	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
Rayleigh (n=2)	10.328	1.096319
Rayleigh-Schmitd (n=1.85)	10.246	0.293657
GDQ(7)	10.377998	1.585728
GDQ(9)	10.210840	-0.05051
GDQ(11)	10.215968	-0.00031



Şekil 4.4 Dış kenarları ankastre dairesel bir plağın eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği

Tablo 4.8 Dış kenarları ankastre olan dairesel plağın boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla elde edilmiş sonuçları (Gerçek Değer=2.404)

Kullanılan Metod	Elde Edilen Sonuç	Hata (%)
Rayleigh (n=2)	2.449	1.872
Bhat (n=2)	2.412	0.3327
Yeni Enerji Metodu	2.405	0.0416
GDQ(5)	2.4065	0.104
GDQ(7)	2.4048	0.033



Şekil 4.5 Bir kenarı ankastre diğer kenarı serbest dairesel plağın boyuna titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metodlarla karşılaştırma grafiği

KAYNAKLAR

- [1] BELLMAN ,CASTI. ,Differential Quadrature and Long-term Integration., J. Math. Anal. Appl.,34, 235-238, (1971)
- [2] BELLMAN, KASHEF,CASTI, Differential Quadrature a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation., J. Compute. Phys., 10, 40-50., (1972)
- [3] CİVAN, SLIEPCEVIC., Application of Differential Quadrature to Transport Progresses., J. Math. Anal. Appl.,93, 206-211, (1983)
- [4] NAADIMUTHI, BELMAN, WANG, LEE., Differential Quadrature and Partial Diferantial Equations: Some Numerical Results. J. Math. Anal. Appl.,98, 220-235, (1984)
- [5] SHU, RICHARDS., High Resolution of Natural Convection in a Square Caviaty by Genaralized Differential Quadrature., Proc. 3rd. Int. Conf. on Advances in Numer. Methods in Eng., Theory and Appliactians., 11, Swansea , UK., 978-985,(1990)
- [6] SHU, RICHARDS., Application of Genaralized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equation, Int. J. Numer. Methods Fluids, 15,791,798 (1992)
- [7] MALIK, BERT., Implementing Multiple Boundary Conditions in the UQ. Solution of Higher-order PDE's Application to Free Vibration of Plates., Int. J. Of Mun. Methods in Eng., Vol 39, 1237-1257,(1996).
- [8] L. S. SRINATH, Advanced Mechanicals of Solids ,McGraw-Hill ,(1992)
- [9] C. W. BERT, Improved Technique for Estimating Buckling Loads. , J.Eng. Mech., 110., 1655,1665., (1984)

[10] F.BLEICH, Buckling Strenght of Metal Structures., McGraw-Hill, Newyork, (1977)

[11] TIMOSCENKO, Theory of Elastic Stability

[12] DU, LIM, LIN, Application of Generalized Differential Quatrature Method to Structural Problems, Int. J. for Num. Methods in Eng., Vol 37.,1881-1896., (1994)

[13] NEWBERRY, BERT, STRIZ ,Noninteger-polynominal Finite Element Analysis of Cloumn Buckling. , J.Eng. Mech., 113., 873,878., (1987)

[14] R. SCHMIDT, A Wariant of the Rayleigh-Ritz Method., Jour. of the Endustrial Math. Soc., Vol.31,37-46, (1981)

[15] R. B. BHAT, Obtaining Natural Frequences of Elastic System by Using an Improved Strain Energy Formulation in the Rayleigh-Ritz Method., Jour. Of Sound and Vibration., Vol.93, 314-320,(1984)

[16] L.MEIROVITCH, Analytical Methods in Vibration., McMillan, Newyork,(1967)

[17] BERT, NEWBERRY., Improved Finite Element Analysis of Beam Vibration, Jour. Of Sound and Vibration., Vol.105, 179-183,(1986)

[18] R. SCHMIDT, Technique for Estimating Frequences , Jour. of Eng. Mech., Vol.109, 654-657,(1983)

EKLER

Ek-A. Eşit Aralıklı Olarak Kesikli Hale Getirilmiş Ağırlıklı Katsayılar

N=3 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

N=3 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

N=3 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N=3 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N=4 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} -11/2 & 9 & -9/2 & 1 \\ -1 & -3/2 & 3 & -1/2 \\ 1/2 & -3 & 3/2 & 1 \\ -1 & 9/2 & -9 & 11/2 \end{bmatrix}$$

N=4 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 18 & -45 & 36 & -9 \\ 9 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 9 \\ -9 & 36 & -45 & 18 \end{bmatrix}$$

N=4 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} -27 & 81 & -81 & 27 \\ -27 & 81 & -81 & 27 \\ -27 & 81 & -81 & 27 \\ -27 & 81 & -81 & 27 \end{bmatrix}$$

N=4 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix}$$

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 140/3 & -416/3 & 152 & -224/3 & 44/3 \\ 44/3 & -80/3 & 8 & 16/3 & -4/3 \\ -4/3 & 64/3 & -40 & 64/3 & -4/3 \\ -4/3 & 16/3 & 8 & -80/3 & 44/3 \\ 44/3 & -224/3 & 152 & -416/3 & 140/3 \end{bmatrix}$$

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-160	576	-768	448	-96
-96	320	-384	192	-32
-32	64	0	64	32
32	-192	384	-320	96
96	-448	768	-576	160

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

256	-1024	1536	-1024	256
256	-1024	1536	-1024	256
256	-1024	1536	-1024	256
256	-1024	1536	-1024	256
256	-1024	1536	-1024	256

N=6 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-137/12	25	-25	50/3	-25/4	1
-1	-65/12	10	-5	5/3	-1/4
1/4	-5/2	-5/3	5	-5/4	1/6
-1/6	5/4	-5	5/3	5/2	-1/4
1/4	-5/3	5	-10	65/12	1
-1	25/4	-50/3	25	-25	137/12

N=6 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

375/4	-1925/6	2675/6	-325	1525/12	-125/6
125/6	-125/4	-25/3	175/6	-25/2	25/12
-25/12	100/3	-125/2	100/3	-25/12	0
0	-25/12	100/3	-125/2	100/3	-25/12
25/12	-25/2	175/6	-25/3	-125/4	125/6
-125/6	1525/12	-325	2675/6	-1925/6	375/4

N=6 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-2125/4	8875/4	-7375/2	6125/2	-5125/4	875/4
-875/4	3125/4	-2125/2	1375/2	-875/4	125/4
-125/4	-125/4	625/2	-875/2	875/4	-125/4
125/4	-875/4	875/2	-625/2	125/4	125/4
-125/4	875/4	-1375/2	2125/2	-3125/4	875/4
-875/4	5125/4	-6125/2	7375/2	-8875/4	2125/4

N=6 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

1875	-8750	16250	-15000	6875	-1250
1250	-5625	10000	-8750	3750	-625
625	-2500	3750	-2500	625	0
0	625	-2500	3750	-2500	625
-625	3750	-8750	10000	-5625	1250
-1250	6875	-15000	16250	-8750	1875

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-147/10	36	-45	40	-45/2	36/5	-1
-1	-77/10	15	-10	5	-3/2	1/5
1/5	-12/5	-7/2	8	-3	4/5	-1/10
-1/10	9/10	-9/2	0	9/2	-9/10	1/10
1/10	-4/5	3	-8	7/2	12/5	-1/5
-1/5	3/2	-5	10	-15	77/10	1
1	-36/5	45/2	-40	45	-36	147/10

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

812/5	-3132/5	1053	-1016	594	-972/5	137/5
137/5	-147/5	-51	94	-57	93/5	-13/5
-13/5	228/5	-84	40	3	-12/5	2/5
2/5	-27/5	54	-98	54	-27/5	2/5
2/5	-12/5	3	40	-84	228/5	-13/5
-13/5	93/5	-57	94	-51	-147/5	137/5
137/5	-972/5	594	-1016	1053	-3132/5	812/5

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-1323	6264	-12447	13392	-8289	2808	-405
-405	1512	-2241	1728	-783	216	-27
-27	-216	945	-1296	783	-216	27
27	-216	351	0	-351	216	-27
-27	216	-783	1296	-945	216	27
27	-216	783	-1728	2241	-1512	405
405	-2808	8289	-13392	12447	-6264	1323

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

7560	-40176	88776	-104544	69336	-24624	3672
3672	-18144	36936	-39744	23976	-7776	1080
1080	-3888	4536	-864	-1944	1296	-216
-216	2592	-8424	12096	-8424	2592	-216
-216	1296	-1944	-864	4536	-3888	1080
1080	-7776	23976	-39744	36936	-18144	3672
3672	-24624	69336	-104544	88776	-40176	7560

N=8 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-363/20	49	-147/2	245/3	-245/4	147/5	-49/6	1
-1	-203/20	21	-35/2	35/3	-21/4	7/5	-1/6
1/6	-7/3	-329/60	35/3	-35/6	7/3	-7/12	1/15
-1/15	7/10	-21/5	-7/4	7	-21/10	7/15	-1/20
1/20	-7/15	21/10	-7	7/4	21/5	-7/10	1/15
-1/15	7/12	-7/3	35/6	-35/3	329/60	7/3	-1/6
1/6	-7/5	21/4	-35/3	35/2	-21	203/20	1
-1	49/6	-147/5	245/4	-245/3	147/2	-49	363/20

N=8 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

22981/90	-10927/10	43071/20	-46501/18	2009	-9849/10	30236/109	-343/10
343/10	-343/18	-1323/10	931/4	-3283/18	441/5	-49/2	539/180
-539/180	5243/90	-1029/10	637/18	833/36	-147/10	196/45	-49/90
49/90	-147/20	147/2	-2401/18	147/2	-147/20	49/90	0
0	49/90	-147/20	147/2	-2401/18	147/2	-147/20	49/90
-49/90	196/45	-147/10	833/36	637/18	-1029/10	5243/90	-539/180
539/180	-49/2	441/5	-3283/18	931/4	-1323/10	-343/18	343/10
-343/10	30236/109	-9849/10	2009	-46501/18	43071/20	-10927/10	22981/90

N=8 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-331681/120	218834/15	-202147/6	133427/3	-254606/7	91924/5	-89846/17	9947/15
-9947/15	43198/17	-19894/5	82663/24	-5831/3	30527/40	-2744/15	2401/120
-2401/120	-7546/15	45559/23	-8575/3	49049/24	-4116/5	24353/120	-343/15
343/15	-24353/120	686/5	16807/24	-3773/3	30527/40	-2744/15	2401/120
-2401/120	2744/15	-30527/40	3773/3	-16807/24	-686/5	24353/120	-343/15
343/15	-24353/120	4116/5	-49049/24	8575/3	-33674/17	7546/15	2401/120
-2401/120	2744/15	-30527/40	5831/3	-82663/24	19894/5	-43198/17	9947/15
-9947/15	89846/17	-91924/5	254606/7	-133427/3	202147/6	-218834/15	331681/120

N=8 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

67228/3	-266511/2	340942	-487803	422576	-444185/2	196882/3	-16807/2
16807/2	-134456/3	204085/2	-129654	602651/6	-48020	26411/2	-4802/3
4802/3	-26411/6	0	74431/6	-52822/3	21609/2	-9604/3	2401/6
-2401/6	4802	-31213/2	67228/3	-31213/2	4802	-2401/6	0
0	-2401/6	4802	-31213/2	67228/3	-31213/2	4802	-2401/6
2401/6	-9604/3	21609/2	-52822/3	74431/6	0	-26411/6	4802/3
-4802/3	26411/2	-48020	602651/6	-129654	204085/2	-134456/3	16807/2
-16807/2	196882/3	-444185/2	422576	-487803	340942	-266511/2	67228/3

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-761/35	64	-112	448/3	-140	448/5	-112/3	64/7	-1
-1	-446/35	28	-28	70/3	-14	28/5	-4/3	1/7
1/7	-16/7	-38/5	16	-10	16/3	-2	16/35	-1/21
-1/21	4/7	-4	-18/5	10	-4	4/3	-2/7	1/35
1/35	-32/105	8/5	-32/5	0	32/5	-8/5	32/105	-1/35
-1/35	2/7	-4/3	4	-10	18/5	4	-4/7	1/21
1/21	-16/35	2	-16/3	10	-16	38/5	16/7	-1/7
-1/7	4/3	-28/5	14	-70/3	28	-28	446/35	1
1	-64/7	112/3	-448/5	140	-448/3	112	-64	761/35

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

118124/315	-61568/35	19872/5	-148133/26	5528	-18048/5	68576/45	-13184/35	1452/35
1452/35	512/315	-1328/5	2448/5	-4232/9	1504/5	-624/5	4077/134	-116/35
-116/35	2496/35	-5296/45	64/5	72	-2368/45	112/5	-192/35	188/315
188/315	-304/35	464/5	-7552/45	88	-16/5	-112/45	32/35	-4/35
-4/35	512/315	-64/5	512/5	-1640/9	512/5	-64/5	512/315	-4/35
-4/35	32/35	-112/45	-16/5	88	-7552/45	464/5	-304/35	188/315
188/315	-192/35	112/5	2368/45	72	64/5	-5296/45	2496/35	-116/35
-116/35	4077/134	-624/5	1504/5	-4232/9	2448/5	-1328/5	512/315	1452/35
1452/35	-13184/35	68576/45	-18048/5	5528	-148133/26	19872/5	-61568/35	118124/315

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-25632/5	89344/3	-626449/8	612096/5	-372992/3	83473	-35904	134912/15	-15008/15
-15008/15	19392/5	-93568/15	17216/3	-3648	26048/15	-8576/15	576/5	-32/3
-32/3	-13568/15	17472/5	-80128/15	13184/3	-2304	12608/15	-2816/15	96/5
96/5	-2752/15	-640/3	9408/5	-8768/3	29632/15	-3456/5	448/3	-224/15
-224/15	768/5	-10816/15	15616/15	0	-15616/15	10816/15	-768/5	224/15
224/15	-448/3	3456/5	-29632/15	8768/3	-9408/5	640/3	2752/15	-96/5
-96/5	2816/15	-12608/15	2304	-13184/3	80128/15	-17472/5	13568/15	32/3
32/3	-576/5	8576/15	-26048/15	3648	-17216/3	93568/15	-19392/5	15008/15
15008/15	-134912/15	35904	-83473	372992/3	-612096/5	548143/7	-89344/3	25632/5

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

273664/5	-359356	0	0	0	0	574054	-585455/4	247552/15
247552/15	-281395/3	234769	-342562	323072	-203298	83217	-100352/5	32512/15
32512/15	-45056/15	-78848/5	368913/7	-208384/3	249856/5	-318464/15	77824/15	-2816/5
-2816/5	108544/15	-349184/15	157696/5	-54784/3	22528/15	13312/5	-14336/15	1792/15
1792/15	-8192/5	173056/15	-233199/7	46592	-266513/8	173056/15	-8192/5	1792/15
1792/15	-14336/15	13312/5	22528/15	54784/3	157696/5	-349184/15	108544/15	-2816/5
-2816/5	77824/15	-318464/15	249856/5	-208384/3	368913/7	-78848/5	-45056/15	32512/15
32512/15	-100352/5	83217	-203298	323072	-342562	234769	-281395/3	247552/15
247552/15	-585455/4	574054	0	0	0	0	-359356	273664/5

N=10 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-7129/280	81	-162	252	-567/2	1134/5	-126	324/7	-81/8	1
-1	-4329/280	36	-42	42	-63/2	84/5	-6	9/7	-1/8
1/8	-9/4	-1377/140	21	-63/4	21/2	-21/4	9/5	-3/8	1/28
-1/28	27/56	-27/7	-111/20	27/2	-27/4	3	-27/28	27/140	-1/56
1/56	-3/14	9/7	-6	-9/5	9	-3	6/7	-9/56	1/70
-1/70	9/56	-6/7	3	-9	9/5	6	-9/7	3/14	-1/56
1/56	-27/140	27/28	-3	27/4	-27/2	111/20	27/7	-27/56	1/28
-1/28	3/8	-9/5	21/4	-21/2	63/4	-21	1377/140	9/4	-1/8
1/8	-9/7	6	-84/5	63/2	-42	42	-36	4329/280	1
-1	81/8	-324/7	126	-1134/5	567/2	-252	162	-81	7129/280

N=10 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

9947/19	-29333/11	74704/11	-56601/5	250049/19	-21465/2	60381/10	-78327/35	56179/114	-6849/140
6849/140	549/16	-16281/35	9207/10	-10467/10	33291/40	-459	11727/70	-729/20	2007/560
-2007/560	13816/163	-3555/28	-351/10	6723/40	-2871/20	1593/20	-405/14	3501/560	-171/280
171/280	-5427/560	7857/70	-801/4	1863/20	567/40	-153/10	891/140	-81/56	81/560
-81/560	72/35	-81/5	648/5	-1845/8	648/5	-81/5	72/35	-81/560	0
0	-81/560	72/35	-81/5	648/5	-1845/8	648/5	-81/5	72/35	-81/560
81/560	-81/56	891/140	-153/10	567/40	1863/20	-801/4	7857/70	-5427/560	171/280
-171/280	3501/560	-405/14	1593/20	-2871/20	6723/40	-351/10	-3555/28	13816/163	-2007/560
2007/560	-729/20	11727/70	-459	33291/40	-10467/10	9207/10	-16281/35	549/16	6849/140
-6849/140	6179/114	-78327/35	60381/10	-21465/2	276370/21	-56601/5	74704/11	-29333/11	9947/19

N=10 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-122121/14	331307/6	-162752	587809/2	-356426	298252	-512165/3	128127/2	-213584/15	54105/38
-54105/38	71698/13	-70831/8	105379/13	-66260/13	95013/40	-2997/4	9674/71	-1921/233	-27/35
27/35	-24336/171	05449/19	-80518/9	107485/13	-211653/40	101493/40	-23571/28	5300/31	-8937/560
8937/560	-44469/280	-26395/37	29079/8	-72736/13	29725/7	-38799/20	44180/71	-13851/112	1593/140
-1593/140	6098/47	-27505/41	13041/20	9963/8	-109107/40	74277/40	-13214/23	11132/101	-1107/112
1107/112	-11132/101	13214/23	-74277/40	109107/40	-9963/8	-13041/20	27505/41	-6098/47	1593/140
-1593/140	13851/112	-44180/71	38799/20	-29725/7	72736/13	-29079/8	26395/37	44469/280	-8937/560
8937/560	-5300/31	23571/28	-101493/40	211653/40	-107485/13	98411/11	-105449/19	24336/17	-27/35
27/35	2696/327	9674/71	2997/4	-95013/40	66260/13	-105379/13	70831/8	-71698/13	54105/38
-54105/38	213584/15	-128127/2	512165/3	-298252	356426	-587809/2	162752	-331307/6	122121/14

N=10 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

584339/5	-838386	0	0	0	0	0	0	578407/2	-262768/9
262768/9	-525290/3	475454	-780650	865396	-673541	365229	-131548	84965/3	-63505/23
63505/23	63423/40	-203391/4	432370/3	-803285/4	169602	-93713	67797/2	-65692/9	28431/40
-28431/40	59213/6	-303993/10	137781/4	-56534/11	-868239/40	203391/10	-168399/20	15309/8	-15309/80
15309/80	-13122/5	129361/7	-266814/5	223894/3	-266814/5	129361/7	-13122/5	15309/80	0
0	15309/80	-13122/5	129361/7	-266814/5	223894/3	-266814/5	129361/7	-13122/5	15309/80
-15309/80	15309/8	-168399/20	203391/10	-868239/40	-102789/20	137781/4	-303993/10	59213/6	-28431/40
28431/40	-65692/9	67797/2	-93713	169602	-803285/4	432370/3	-203391/4	63423/40	63505/23
-63505/23	84965/3	-131548	365229	-673541	865396	-780650	475454	-525290/3	321161/11
-321161/11	578407/2	0	0	0	0	0	0	-838386	584339/5

N=11 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-7381/252	100	-225	400	-525	504	-350	1200/7	-225/4	100/9	-1
-1	-4609/252	45	-60	70	-63	42	-20	45/7	-5/4	1/9
1/9	-20/9	-341/28	80/3	-70/3	56/3	-35/3	16/3	-5/3	20/63	-1/36
-1/36	5/12	-15/4	-319/42	35/2	-21/2	35/6	-5/2	3/4	-5/36	1/84
1/84	-10/63	15/14	-40/7	-11/3	12	-5	40/21	-15/28	2/21	-1/126
-1/126	25/252	-25/42	50/21	-25/3	0	25/3	-50/21	25/42	-25/252	1/126
1/126	-2/21	15/28	-40/21	5	-12	11/3	40/7	-15/14	10/63	-1/84
-1/84	5/36	-3/4	5/2	-35/6	21/2	-35/2	319/42	15/4	-5/12	1/36
1/36	-20/63	5/3	-16/3	35/3	-56/3	70/3	-80/3	341/28	20/9	-1/9
-1/9	5/4	-45/7	20	-42	63	-70	60	-45	4609/252	1
1	-100/9	225/4	-1200/7	350	-504	525	-400	225	-100	7381/252

N=11 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

7732/11	-61727/16	153025/14	-269946/13	168775/6	-27508	174025/9	-76419/8	47317/15	-13150/21	7129/126
7129/126	2255/28	-10445/14	33490/21	-18845/9	3979/2	-4105/3	16623/25	-3035/14	10735/252	-481/126
-481/126	690/7	-9448/73	-2440/21	335	-2972/9	1355/6	-760/7	4415/126	-430/63	17/28
17/28	-2645/252	3695/28	-14465/63	505/6	109/2	-895/18	535/21	-235/28	415/252	-37/252
-37/252	20/9	-130/7	3280/21	-5005/18	152	-40/3	-80/63	5/4	-20/63	2/63
2/63	-125/252	250/63	-500/21	500/3	-5269/18	500/3	-500/21	250/63	-125/252	2/63
2/63	-20/63	5/4	-80/63	-40/3	152	-5005/18	3280/21	-130/7	20/9	-37/252
-37/252	415/252	-235/28	535/21	-895/18	109/2	505/6	-14465/63	3695/28	-2645/252	17/28
17/28	-430/63	4415/126	-760/7	1355/6	-2972/9	335	-2440/21	-9448/73	690/7	-481/126
-481/126	10735/252	-3035/14	16623/25	-4105/3	3979/2	-18845/9	33490/21	-10445/14	2255/28	7129/126
7129/126	-13150/21	47317/15	-76419/8	174025/9	-27508	168775/6	-269946/13	153025/14	-61727/16	7732/11

Ek-B. Eşit Aralıklı Olamayan 17/20 Değeri İçin Ağırlıklı Katsayı Örnekleri

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-139/17	136/9	-68/7	5000/1071	-17/9
-18/17	-3	36/7	-625/357	2/3
7/17	-28/9	8/7	2500/1071	-7/9
-126/425	119/75	-612/175	-115/119	238/75
9/17	-8/3	36/7	-5000/357	11

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

756/17	-1136/9	120	-10000/153	244/9
252/17	-248/9	72/7	5000/1071	-20/9
-12/17	160/9	-216/7	9169/491	-44/9
108/85	-376/45	936/35	-4076/73	1628/45
180/17	-464/9	648/7	-6676/55	628/9

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-2496/17	1504/3	-576	20000/51	-512/3
-1536/17	288	-2112/7	20000/119	-64
-576/17	224/3	-192/7	-7507/134	128/3
768/17	-224	2496/7	-44000/119	192
1344/17	-352	3648/7	-60000/119	256

N=5 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

3840/17	-2560/3	7680/7	-47507/53	1280/3
3840/17	-2560/3	7680/7	-47507/53	1280/3
3840/17	-2560/3	7680/7	-47507/53	1280/3
3840/17	-2560/3	7680/7	-47507/53	1280/3
3840/17	-2560/3	7680/7	-47507/53	1280/3

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-499/34	7344/205	-1377/31	272/7	-459/22	3757/586	-17/15
-205/204	-1571/205	1845/124	-205/21	205/44	-569/426	41/180
31/153	-496/205	-213/62	496/63	-31/11	582/817	-31/270
-7/68	189/205	-567/124	1/7	189/44	-569/710	7/60
11/102	-176/205	99/31	-176/21	89/22	1746/817	-11/45
-473/2191	667/416	-2419/460	2353/231	-2492/179	1891/304	1105/797
15/17	-1296/205	1215/62	-240/7	405/11	-2276/71	461/30

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

2750/17	-25488/41	32157/31	-6896/7	6048/11	-8309/48	31
2801/102	-1224/41	-99/2	1912/21	-1161/22	14194/857	-53/18
-133/51	1872/41	-2610/31	848/21	27/11	-1746/817	4/9
13/34	-216/41	3321/62	-680/7	1161/22	-1707/355	1/2
28/51	-144/41	207/31	688/21	-810/11	1746/43	-31/9
-3001/1378	2639/173	-4777/106	23981/350	-3753/176	-4126/81	4038/113
431/17	-7344/41	16848/31	-6416/7	10017/11	-32909/59	174

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-22335/17	254016/41	-134426/11	90624/7	-84159/11	70011/28	-457
-6873/17	61776/41	-68931/31	11856/7	-8073/11	14233/74	-31
-471/17	-8640/41	28755/31	-8832/7	8073/11	-14233/74	31
471/17	-9072/41	11421/31	-240/7	-3321/11	14233/74	-31
-447/17	8640/41	-23733/31	8832/7	-9855/11	14233/74	23
1383/34	-26519/85	26632/25	-75036/35	56957/23	-27698/17	25141/50
6537/17	-108864/41	46703/6	-86784/7	121257/11	-27889/5	1439

N=7 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

127152/17	-197877/5	433951/5	-201271/2	191219/3	-43853/2	4128
61992/17	-53863/3	363089/10	-154039/4	244296/11	-41545/6	1224
18432/17	-90151/23	143856/31	-7488/7	-18144/11	42699/37	-240
-3528/17	103680/41	-254664/31	81792/7	-86184/11	41545/18	-264
-3888/17	57024/41	-69984/31	-1728/7	40176/11	-41545/12	1152
20664/17	-60362/7	52049/2	293184/7	-110101/3	-195873/11	21864/5
60192/17	-236441/10	66096	-687168/7	876096/11	-214649/6	8304

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(1)}$

-1851/85	7139/111	-340/3	8704/57	-1020/7	4352/45	-136/3	887/67	-17/21
-203/204	-5269/412	1015/36	-1624/57	145/6	-406/27	203/30	-2311/1197	29/252
12/85	-1337/589	-23/3	1536/95	-72/7	256/45	-12/5	887/1340	-4/105
-19/408	114/203	-95/24	-352/95	285/28	-38/9	19/12	-712/1721	19/840
7/255	-128/435	14/9	-1792/285	-4/21	896/135	-28/15	996/2257	-1/45
-9/340	54/203	-5/4	72/19	-135/14	142/45	9/2	-887/1072	1/28
2/51	-384/1015	5/3	-256/57	60/7	-128/9	28/5	887/268	-2/21
-246/2353	608/617	-5854/1395	3771/352	-6123/331	5825/244	-23839/789	1815/107	3419/7129
21/17	-2304/203	140/3	-10752/95	180	-1792/9	168	-6209/67	2143/105

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(2)}$

20701/55	-70883/40	12088/3	-29181/5	40344/7	-101467/26	83408/45	-22363/41	3532/105
4427/107	1923/719	-7291/27	10517/21	-10274/21	9085/28	-6814/45	9472/215	-2533/945
-56/17	72192/1015	-1052/9	1024/95	528/7	-512/9	136/5	-2661/335	152/315
454/765	-3929/454	278/3	-11389/68	612/7	-112/45	-148/45	887/670	-2/21
-92/765	1024/609	-352/27	88064/855	-3848/21	13891/134	-128/9	1551/659	-76/945
-7/85	624/1015	11/9	-32/5	654/7	-7856/45	502/5	-9244/735	131/315
256/765	-3072/1015	12	-8089/307	192/7	1024/15	-8104/45	12185/118	-64/35
-2875/871	3839/125	-10912/85	40747/128	-22440/43	7770/13	-11360/27	9124/87	3989/176
4076/85	-13995/32	16024/9	-80896/19	46392/7	-35328/5	27568/5	-86603/34	21316/63

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(3)}$

-77392/15	60183/2	-318471/4	754397/6	-129952	180937/2	-306417/7	169305/13	-36592/45
-23022/23	31059/8	-18764/3	52030/9	-3720	27392/15	-10088/15	14846/89	-124/15
-848/85	-132096/145	31696/9	-173153/32	4512	-164151/67	5024/5	-13320/49	688/45
4756/255	-7311/41	-2116/9	65845/34	-3016	27191/13	-12328/15	10163/47	-532/45
-3664/255	13199/89	-2096/3	43317/44	96	-17408/15	12832/15	-51822/233	176/15
1212/85	-20736/145	5980/9	-15263/8	2808	-53906/31	264/5	10892/41	-692/45
-5744/255	14449/66	-8752/9	10549/4	-4960	169271/28	-64288/15	32744/25	1328/45
-12682/597	41529/227	-46131/68	136001/100	-65999/49	-15124/33	105951/34	-102064/37	22959/38
46621/42	-130274/13	362224/9	-661116/7	142944	-291165/2	521824/5	-215616/5	103637/23

N=9 İçin Ağırlıklı Katsayı $c_{ij}^{(4)}$

552709/10	-364403	0	0	0	0	702123	-211934	121088/9
66309/4	-188981/2	237696	-699913/2	335616	-437817/2	302336/3	-174371/6	5248/3
60155/28	-81920/29	-148736/9	163840/3	-72704	108013/2	-77312/3	90151/12	-4096/9
-28544/51	93643/13	-208256/9	343058/11	-17664	20480/27	10496/3	-40133/29	896/9
6400/51	-49152/29	11776	-135671/4	47616	-311296/9	38912/3	-90151/38	256/3
4736/51	-20480/29	14464/9	29175/7	-22784	185837/5	-88832/3	136215/13	-3712/9
-28160/51	66101/13	-187136/9	439781/9	-67584	151097/3	-39424/3	-100036/23	18944/9
51395/41	-202000/17	152477/3	-129660	658514/3	-255265	417467/2	-188659/2	173117/16
142597/8	-476266/3	626460	0	0	0	0	-520345	188985/4

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında İstanbul'da doğdu. İlk , orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1990 yılında Uludağ Üniversitesi Balıkesir Mühendislik Fakültesi'nden mezun oldu. Halen Afyon Kocatepe Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

