



**T.C.  
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİSEL SÜREKLİLİK ÜZERİNE BİR  
ÇALIŞMA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Zeynep NAVRUZ**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN**

**AKSARAY, 2019**

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342606 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Zeynep NAVRUZ** tarafından hazırlanan **GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİSEL SÜREKLİLİK ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN**

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....  
Tunçar Şahan

**Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ**

Yozgat Bozok Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....  
Dr. Fulya

**Üye: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES**

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....  
Ayhan Erciyes

Tez Savunma Tarihi: 26 / 07 / 2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Zeynep NAVRUZ



AKSARAY, 2019

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren, tez konusunun belirlenmesinden tezin son aşamasına gelene kadar fazlaca yardımda bulunan, yoğun iş temposu arasında, çok değerli vakitlerini ayırarak destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans eğitimi tamamladığım Aksaray Üniversitesinde, üzerimde emeği bulunan başta Doç. Dr. Halis BİLGİL olmak üzere tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen canım annem, babam ve biricik kardeşime de teşekkür ederim.

Zeynep NAVRUZ  
AKSARAY, 2019

## İÇİNDEKİLER

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| TEŞEKKÜR.....                                   | i   |
| İÇİNDEKİLER.....                                | ii  |
| ÖZET.....                                       | iii |
| ABSTRACT .....                                  | iv  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....             | v   |
| 1. GİRİŞ .....                                  | 1   |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER .....           | 4   |
| 2.1 Topolojik Uzaylar.....                      | 4   |
| 2.2 Sürekli Fonksiyonlar.....                   | 8   |
| 2.3 Çarpım ve Bölüm Uzayları .....              | 10  |
| 2.4 Topolojik Gruplar .....                     | 11  |
| 3. $G$ –DİZİSEL SÜREKLİLİK .....                | 13  |
| 3.1 $G$ –Dizisel Kapalı Kümeler .....           | 13  |
| 3.2 $G$ –Dizisel Açık Kümeler.....              | 17  |
| 3.3 $G$ –Dizisel Süreklilik.....                | 20  |
| 4. $G - H$ –DİZİSEL SÜREKLİLİK.....             | 28  |
| 4.1 $G - H$ –Dizisel Sürekli Fonksiyonlar ..... | 28  |
| 4.2 $G - H$ –Dizisel Açık Fonksiyonlar .....    | 31  |
| 4.3 $G - H$ –Dizisel Kapalı Fonksiyonlar.....   | 32  |
| 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....                   | 35  |
| KAYNAKLAR.....                                  | 36  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                  | 38  |

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİSEL SÜREKLİLİK ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**Zeynep NAVRUZ**

**Aksaray Üniversitesi**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN**

**ÖZET**

$X$  birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan bir Hausdorff topolojik grup olsun.  $X$  kümesindeki bir dizinin limiti,  $X$  deki bütün yakınsak diziler kümesinden  $X$  kümesine  $\lim$  ile belirtilen bir fonksiyon tanımlar. Bu kavram, Connor ve Grosse Erdmann tarafından tüm gerçek dizilerin vektör uzayının lineer bir alt uzayında tanımlanan keyfi bir lineer fonksiyonel  $G$  ile değiştirildi. Son zamanlarda Çakallı, bu kavramı topolojik grup ortamına genişletmiş ve  $G$  –dizisel kompaktlık,  $G$  –dizisel süreklilik ve dizisel irtibatlılık kavramlarını ortaya koymuştur. Fakat bu genişletme işlemi sırasında tanımlanan  $G$  –dizisel süreklilik kavramı sadece  $X$  kümesinden yine kendisi üzerine tanımlı fonksiyonlar için verilmiştir.

Bu tez çalışmasında birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan Hausdorff topolojik gruplarda  $G - H$  –dizisel süreklilik kavramı tanımlanmış ve bu kavram hakkında ayrıntılı bir araştırma yapılmıştır.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar tartışılıp yapılabilecek yeni çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Dizisel açık küme,  $G$  –dizisel süreklilik,  $G - H$  –dizisel süreklilik.

**Temmuz, 2019; 38 sayfa**

**M.Sc. THESIS**

**A STUDY ON GENERALIZED SEQUENTIAL CONTINUITY**

**Zeynep NAVRUZ**

**Aksaray University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tunçar AHAN**

**ABSTRACT**

Let  $X$  be a Hausdorff topological group which satisfies the first countability axiom. The limit of a sequence in  $X$  defines a function denoted by  $\lim$  from the set of all convergent sequences in  $X$  to  $X$ . This notion has been modified by Connor and Grosse-Erdmann for real functions by replacing  $\lim$  with an arbitrary linear functional  $G$  defined on a linear subspace of the vector space of all real sequences. Recently, akallı has extended this concept to the topological group setting and introduced the concepts of  $G$ –sequential compactness,  $G$ –sequential continuity and sequential connectedness. However, during this extension process, the concept of  $G$ –sequential continuity is given only for the functions defined on a set  $X$  to itself.

In this thesis study we introduce and give a further investigation of  $G - H$ –sequential continuity in topological groups which satisfy the first countability axiom.

In the fifth chapter, the results obtained in the thesis are discussed and some suggestions are given for new studies.

**Keywords:** Sequentially open set,  $G$ –sequential continuity,  $G - H$ –sequential continuity.

**July, 2019; 38 pages**

## SİMGELER VE KISALTMALAR

|                  |                                                            |
|------------------|------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$     | Reel Sayılar Kümesi                                        |
| $(X, \tau)$      | Topolojik Uzay                                             |
| $A^o$            | Bir $A$ Kümesinin İçi                                      |
| $\overline{A}$   | Bir $A$ Kümesinin Kapanışı                                 |
| $A'$             | Bir $A$ Kümesinin Yığılma Noktalarının Kümesi              |
| $A^b$            | Bir $A$ Kümesinin Sınırı                                   |
| $A^{oG}$         | Bir $A$ Kümesinin $G$ –Dizisel İçi                         |
| $\overline{A}^G$ | Bir $A$ Kümesinin $G$ –Dizisel Kapanışı                    |
| $(A')^G$         | Bir $A$ Kümesinin $G$ –Dizisel Yığılma Noktalarının Kümesi |
| $(A^b)^G$        | Bir $A$ Kümesinin $G$ –Dizisel Sınırı                      |
| $\tau$           | Topoloji                                                   |
| $\tau_A$         | $A$ Alt Kümesi Üzerindeki Alt Uzay Topolojisi              |

## 1. GİRİŞ

Süreklilik kavramı ve süreklilikle ilgili herhangi bir kavram, yalnızca teorik matematikte değil, aynı zamanda özellikle bilgisayar bilimi, bilgi teorisi, biyolojik bilim ve dinamik sistemler gibi matematiği içeren diğer bilim dallarında da çok önemli bir rol oynamaktadır. Connor ve Grosse-Erdmann [1], dizilerin yakınsama tanımının değiştirilmesinin, reel değerli fonksiyonların dizisel sürekliliğinin yapısı üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Çakallı [2] bu kavramı topolojik grup değerli dizilere genişletmiş ve bu genelleştirilmiş ortamda yeni teoremler elde etmiştir. Bu teoremlerden bazıları sadece topolojik grup açısından yeni değil, aynı zamanda reel durum açısından da yenidir. Ayrıca, Çakallı [3] dizisel irtibatlılık (bağlantılılık) kavramını tanımlamış ve [4] de bu kavramın özellikleri ile ilgili ileri araştırmalar yapmıştır.

Bu çalışma boyunca,  $\mathbb{N}$  pozitif tam sayı kümesini,  $X$  ve  $Y$  birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan toplamsal olarak yazılan birer topolojik Hausdorff grubunu gösterir.  $X$  veya  $Y$  kümesinin terimlerinden oluşan  $\mathbf{x} = (x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_n)$ , ... dizilerini  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ , ... gibi kalın harflerle göstereceğiz.  $s(X)$  ve  $c(X)$  sırasıyla, tüm  $X$  değerli dizilerin kümesini ve  $X$  de yakınsak tüm  $X$ -değerli dizilerin kümesini belirtir.

1946 yılında yayınlanan bir makalede [5] verilen bir fikrin ardından, birkaç yazar Posner [6], Iwinski [7], Srinivasan [8], Antoni [9], Antoni ve Salat [10] bir regüler toplanabilme matrisi  $A$  tarafından tanımlanan  $A$ -sürekliliği çalışmışlardır. Öztürk [11], Savaş ve Das [12], Savaş [13], Borsik ve Salat [14] gibi bazı yazarlar hemen-hemen yakınsaklık metodu ve ilgili metotlar için  $A$ -sürekliliği çalışmışlardır. Ayrıca, toplanabilme matrislerine bir giriş için [15] numaralı; topolojik gruplarda toplanabilme teorisi için [16] numaralı kaynaklara bakınız.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [17] tarafından ortaya atılmış ve Fridy [18] tarafından araştırılmıştır. Zygmund [19] ise bu yakınsamayı hemen-hemen yakınsaklık olarak adlandırmış ve güçlü toplanabilme ile arasında bir ilişki kurmuştur.  $X$  değerli bir  $(x_n)$  dizisi için, eğer 0 (sıfır) ın her  $U$  komşuluğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k - l \notin U\}| = 0 \quad (1.1)$$

oluyorsa  $(x_n)$  dizisi  $l \in X$  elemanına istatistiksel olarak yakınsar denir ve bu  $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  olarak gösterilir [20]. İstatistiksel limit,  $X$  deki istatistiksel yakınsak dizileri grubu üzerinde tanımlı toplamsal bir fonksiyondur. Daha detaylı bilgi için [21], [22] ve [23] numaralı kaynaklara bakabilirsiniz.

$\theta = (k_r)$  dizisi,  $k_0 = 0$  ve  $r \rightarrow \infty$  iken  $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$  olacak şekilde pozitif tamsayılarının artan bir dizisi olsun. Böyle bir diziye lacunary dizi denir. Bir topolojik gruptaki bir  $(x_k)$  dizisi için,  $I_r = (k_{r-1}, k_r)$  olmak üzere 0 ın her  $U$  komşuluğu için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : x_k - l \notin U\}| = 0 \quad (1.2)$$

ise bu  $(x_k)$  dizisine  $l \in X$  noktasına lacunary istatistiksel yakınsak denir [18].

Sabit bir  $\theta = (k_r)$  lacunary dizisi için, bir topolojik gruptaki lacunary istatistiksel yakınsak diziler, tüm  $X$ -değerli dizilerin grubunun bir alt grubudur ve lacunary istatistiksel limit bu uzay üzerinde toplamsal bir fonksiyondur. Topolojik grup durumu için [24]; reel durumu için [25] ve [26] numaralı kaynaklara bakınız.

Bir dizisel yakınsaklık metodu veya kısaca bir metot,  $s(X)$  in bir alt grubu  $c_G(X)$  den  $X$  e tanımlanan toplamsal bir  $G$  fonksiyonu anlamına gelir [27]. Bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi için, eğer  $\mathbf{x} \in c_G(X)$  ve  $G(\mathbf{x}) = l$  ise bu  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi  $l \in X$  elemanına  $G$  -yakınsaktır denir. Özel olarak  $\lim, c(X)$  grubu üzerinde tanımlı  $\lim \mathbf{x} = \lim_n x_n$  fonksiyonunu gösterir. Her yakınsak  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi için  $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$  ile  $G$  -yakınsak ise  $G$  bir regüler metot olarak adlandırılır. Bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu için  $\mathbf{x} \in c_G(X)$  iken  $G(f(\mathbf{x})) = f(G(\mathbf{x}))$  ise bu  $f$  fonksiyonu  $G$  -dizisel sürekli olarak adlandırılır [2]. Açıkça, eğer  $f, X$  üzerinde  $G$  -dizisel sürekli ise, o zaman  $X$  in her bir  $Z$  alt kümesinde  $G$  -dizisel süreklidir. Ancak bu ifadenin tersi genelde doğru değildir. Çünkü ikinci durumda diziler  $Z$  kümesine sınırlandırılmıştır. Bu durum reel değerli fonksiyonlar için örneklendirilmiştir [1]. Yukarıda tanımlanan süreklilik kavramı, toplanabilme matrisleri için klasik süreklilik kavramı ile örtüşmektedir.

İki dizisel yakınsaklık metodu  $G_1$  ve  $G_2$  nin toplamı  $c_{(G_1+G_2)}(\mathbf{x}) = c_{G_1}(X) \cap c_{G_2}(X)$  olmak üzere  $(G_1 + G_2)(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{x}) + G_2(\mathbf{x})$  olarak tanımlanır [2]. Yukarıda bahsedilen regülerlik kavramı toplanabilme matrisleri için tanımlanmış klasik regülerlik kavramı ile aynıdır. Regüler toplanabilme matrislerine bir giriş için [15]

numaralı; reel veya kompleks dizilere genel bir bakış için [19] numaralı kaynaklara bakınız.

Yakın zamanda, Çakallı [27],  $G$  –dizisel kompaktlık kavramını tanımlamış ve  $X$  in herhangi bir  $G$  –dizisel kompakt alt kümesinin  $G$  –dizisel sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün de  $G$  –dizisel kompakt olduğunu kanıtlamıştır [28, Teorem 7]. Çakallı bu çalışmasında  $G$  –dizisel sürekliliği incelemiş ve [2] de çok daha fazla sonuç elde etmiştir. Ayrıca herhangi bir dizisel metotla verilmeyen bazı diğer süreklilik türleri için [28-32] numaralı kaynaklara bakınız.

Görüldüğü gibi,  $G$  –dizisel süreklilik kavramı bir  $X$  topolojik grubundan kendi üzerine tanımlanmış  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonları için tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında  $G$  –dizisel süreklilik kavramından daha genel bir kavram olan  $X$  üzerinde verilmiş bir  $G$  dizisel yakınsaklık metodu,  $Y$  üzerinde verilmiş bir  $H$  dizisel süreklilik metodu ve bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu için  $G - H$  –dizisel süreklilik kavramı tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Açıkça görülüyor ki bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonunun  $G - G$  –dizisel sürekli olması  $G$  –dizisel sürekli olması anlamına gelir. Yani  $G - H$  –dizisel süreklilik kavramı  $G$  –dizisel süreklilik kavramının bir genelleştirmesidir.

$G - H$  –dizisel süreklilik kavramı aynı zamanda  $G$  dizisel süreklilik metotları ile ilgili bazı kavramların tanımlanmasında da kullanılabilir. Örneğin, bir  $X$  topolojik grubu üzerinde verilen bir  $G$  metodu için yine  $X$  üzerinde  $H$  metodu olarak  $H = \lim$  alınırsa  $1_X : X \rightarrow X$  birim dönüşümünün  $G - H$  –dizisel sürekli olması için gerek ve yeter şart  $G$  metodunun regüler olmasıdır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

### 2.1 Topolojik Uzaylar

Bu kısımda topolojik uzaylarla ilgili iyi bilinen kavramlar hatırlatılıp bu kavramlarla ilgili yine iyi bilinen bazı özellikler verilmiştir.

**Tanım 2.1.1**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $\tau$  da  $X$  in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer

[T1]  $X, \emptyset \in \tau$ ,

[T2]  $U, V \in \tau$  iken  $U \cap V \in \tau$ ,

[T3]  $I$  bir indis kümesi olmak üzere her  $i \in I$  için  $U_i \in \tau$  iken  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

şartları sağlanıyor ise  $\tau$  sınıfına  $X$  üzerinde bir topoloji ve  $(X, \tau)$  ikilisine de bir topolojik uzay denir.

**Teorem 2.1.2** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında bir  $U \subseteq X$  alt kümesi için  $U \in \tau$  dır ancak ve ancak her  $x \in U$  için  $x \in G_x \subseteq U$  olacak şekilde bir  $G_x \in \tau$  vardır.

**Tanım 2.1.3** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $\tau$  sınıfının elemanlarına açık kümeler denir.

**Örnek 2.1.4**  $X$  boştan farklı bir küme olsun.  $\tau = P(X)$  kuvvet kümesi  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye  $X$  üzerindeki diskre topoloji denir.

**Örnek 2.1.5**  $X$  boştan farklı bir küme olsun.  $\tau = \{X, \emptyset\}$  kümesi  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye  $X$  üzerindeki indiskre topoloji denir.

**Örnek 2.1.6**  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesindeki açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan  $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} | \forall x \in U, \exists \epsilon \in \mathbb{R}, (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U\}$  sınıfı  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu şekilde elde edilen  $\mathbb{R}$  üzerindeki topolojiye  $\mathbb{R}$  nin alışılmış veya standart topolojisi denir.

Benzer şekilde,  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesindeki sınırlı, alttan açık ve üstten kapalı aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan  $\tau^L$  sınıfı ile sınırlı, alttan kapalı ve üstten açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan  $\tau_L$  sınıfı  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi üzerinde birer topolojidir. Bu topolojiler sırası ile  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesinin üst limit ve alt limit topolojileri olarak adlandırılır.

**Örnek 2.1.7**  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $\tau = \{G \subseteq X | G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$  sınıfı  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye  $X$  in tümleyeni sonlu (veya sonlu tümleyenler) topolojisi denir. Benzer olarak  $\tau = \{G \subseteq X | G^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$  sınıfı da  $X$  üzerinde bir topoloji olup  $X$  in tümleyeni sayılabilir (veya sayılabilir tümleyenler) topolojisi olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.8**  $X$  bir küme olmak üzere  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  sınıfları  $X$  üzerinde birer topoloji olsun. Eğer  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  ise  $\tau_1$  topolojisi  $\tau_2$  den daha kaba veya  $\tau_2$  topolojisi  $\tau_1$  den daha ince denir.

Boştan farklı bir  $X$  kümesi üzerindeki en ince topoloji  $\tau = P(X)$  diskre topoloji ve en kaba topoloji ise  $\tau = \{X, \emptyset\}$  indiskre topolojisidir.

**Tanım 2.1.9**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $A \subseteq X$  ve  $a \in A$  olsun. Eğer  $a \in G_a \subseteq A$  olacak şekilde bir  $G_a \in \tau$  açık kümesi varsa  $a$  elemanına  $A$  nın bir iç noktası denir.  $A$  nın tüm iç noktalarının kümesine  $A$  nın içi denir ve  $A^\circ$  ile gösterilir.

**Teorem 2.1.10** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında bir  $A \subseteq X$  alt kümesinin içi  $A$  kümesinin kapsadığı açık kümelerin birleşimi yani

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subseteq A}} U \quad (2.1)$$

dir.

**Teorem 2.1.11**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Eğer  $A \subseteq B$  ise  $A^\circ \subseteq B^\circ$  dır.

**Teorem 2.1.12**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1)  $A^\circ \subseteq A$  dır.
- (2)  $A^\circ$  açıktır.
- (3)  $A$  açıktır ancak ve ancak  $A^\circ = A$  dır.
- (4)  $A^\circ$ ,  $A$  nın kapsadığı en geniş açık kümedir.
- (5)  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$  dır.

**Tanım 2.1.13** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında bir  $A \subseteq X$  alt kümesi verilsin. Eğer  $A^c$  açık ise  $A$  ya kapalı bir küme denir.

**Tanım 2.1.14**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye  $A$  nın kapanışı denir ve  $\bar{A}$  ile gösterilir.

**Teorem 2.1.15**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesini kapsayan kapalı kümelerin sınıfı  $\mathcal{K}_A$  olmak üzere

$$\bar{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_A} K \quad (2.2)$$

dır.

**Teorem 2.1.16**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Eğer  $A \subseteq B$  ise  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$  dir.

**Teorem 2.1.17**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1)  $A \subseteq \bar{A}$  dir.
- (2)  $\bar{A}$  kapalıdır.
- (3)  $A$  kapalıdır ancak ve ancak  $A = \bar{A}$  dir.
- (4)  $\overline{(\bar{A})} = A$  dir.

**Teorem 2.1.18**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda  $x \in \bar{A}$  dir ancak ve ancak  $x$  in her  $U$  açık komşuluğu için  $A \cap U \neq \emptyset$  dir.

**Tanım 2.1.19**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Eğer  $\bar{A} = X$  ise  $A$  ya  $X$  de bir yoğun küme denir.

**Teorem 2.1.20** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayında bir  $A \subseteq X$  alt kümesi yoğundur ancak ve ancak  $X$  deki boştan farklı her  $U$  açık kümesi için  $A \cap U \neq \emptyset$  dir.

**Tanım 2.1.21**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu takdirde  $\tau_A = \{A \cap U | U \in \tau\}$  sınıfı  $A$  üzerinde bir topoloji olup bu topoloji  $A$  üzerindeki alt topoloji ve  $(A, \tau_A)$  ikilisi alt uzay olarak adlandırılır.

**Teorem 2.1.22**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $U \in \tau$  olsun. Herhangi bir  $A \subseteq U$  alt kümesi  $U$  da açıktır ancak ve ancak  $X$  de açıktır.

**Teorem 2.1.23**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bir  $F \subseteq A$  alt kümesi  $A$  da

kapalıdır ancak ve ancak  $K$  kümesi  $X$  de kapalı bir küme olmak üzere  $F = K \cap A$  dır.

**Teorem 2.1.24**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $K \subseteq X$  kapalı bir küme olsun. Herhangi bir  $F \subseteq K$  alt kümesi  $K$  da kapalıdır ancak ve ancak  $X$  de kapalıdır.

**Tanım 2.1.25**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\beta$  da  $X$  in açık alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer  $\tau$  daki her bir  $U$  açık kümesi  $\beta$  nın bir alt sınıfı üzerinden birleşim olarak yazılabiliyorsa, yani  $\beta$  sınıfının bir  $\beta^*$  alt sınıfı için

$$U = \bigcup_{B \in \beta^*} B \quad (2.3)$$

ise  $\beta$  sınıfına  $\tau$  topolojisi için bir baz denir.

**Örnek 2.1.26**  $\beta = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$  sınıfı  $\mathbb{R}$  nin alışılmış topolojisi için bir bazdır. Çünkü  $U$ ,  $\mathbb{R}$  nin alışılmış topolojisinde açık bir küme ise her bir  $x \in U$  için  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U$  olacak şekilde bir  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  pozitif reel sayısı vardır.

**Örnek 2.1.27** Benzer şekilde  $\beta_L = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$  sınıfı  $\mathbb{R}$  nin alt limit topolojisi için ve  $\beta^L = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$  sınıfı  $\mathbb{R}$  nin üst limit topolojisi için bir bazdır.

**Teorem 2.1.28**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $\beta$  da  $X$  in bazı alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda  $\beta$  sınıfı baz olacak şekilde  $X$  üzerinde bir tek topoloji vardır ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

[B1]  $X = \bigcup_{B \in \beta} B$  ve

[B2] Eğer  $B_1, B_2 \in \beta$  ise  $B_1 \cap B_2$  kümesi  $\beta$  daki kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilir, yani her bir  $x \in B_1 \cap B_2$  için  $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$  olacak şekilde bir  $B_x \in \beta$  vardır.

**Tanım 2.1.29**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(a_n)$ ,  $X$  de bir dizi ve  $a \in X$  olsun. Eğer  $a \in U_a$  olacak şekilde her  $U_a \in \tau$  için  $n > n_0$  iken  $a_n \in U_a$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  doğal sayısı varsa  $(a_n)$  dizisi  $a \in X$  noktasına yakınsaktır denir ve bu  $(a_n) \rightarrow a$  şeklinde veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir.

## 2.2 Sürekli Fonksiyonlar

**Tanım 2.2.1**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu ve bir  $x \in X$  noktası verilsin. Eğer  $f(x)$  ın her bir  $V$  açık komşuluğu için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x_0$  ın bir  $U$  açık komşuluğu varsa  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in X$  noktasında süreklidir denir. Eğer  $f$  fonksiyonu  $X$  ın her noktasında sürekli ise  $f$  fonksiyonuna bir sürekli fonksiyon denir.

**Teorem 2.2.2**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak  $Y$  deki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$  de açıktır.

**Teorem 2.2.3**  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  topolojik uzaylar arasında bir fonksiyon ve  $\beta \subseteq \sigma$  sınıfı da  $\sigma$  topolojisi için bir baz olsun. Bu durumda  $f$  süreklidir ancak ve ancak her bir  $B \in \beta$  için  $f^{-1}(B) \in \tau$  dir.

**Teorem 2.2.4**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak  $Y$  deki her kapalı kümenin ters görüntüsü  $X$  de kapalıdır.

**Teorem 2.2.5**  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  sürekli bir fonksiyon ve  $A \subseteq X$  ise

$$f_A: (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \sigma), f_A(a) = f(a) \quad (2.5)$$

ile tanımlanan  $f_A$  kısıtlanmış fonksiyonu da süreklidir.

**Teorem 2.2.6** Bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her  $B \subseteq Y$  için  $f^{-1}(B^o) \subseteq (f^{-1}(B))^o$  dir.

**Teorem 2.2.7** Bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  için  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  dir.

**Teorem 2.2.8** Bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her  $B \subseteq Y$  için  $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$  dir.

**Tanım 2.2.9**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu ve bir  $a \in X$  noktası verilsin. Eğer  $a$  noktasına yakınsayan her  $(a_n)$  dizisi

için  $(f(a_n)) \rightarrow f(a)$  ise  $f$  fonksiyonu  $a$  noktasında dizisel süreklidir denir. Her noktada dizisel sürekli olan bir fonksiyona dizisel süreklidir denir.

**Teorem 2.2.10** Sürekli bir fonksiyon dizisel süreklidir.

**Tanım 2.2.11**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  deki her  $U$  açık kümesi için  $f(U)$  görüntü kümesi  $Y$  de açık ise  $f$  ye bir açık fonksiyon denir.

Benzer tanım kapalılık için de aşağıdaki şekilde yapılabilir.

**Tanım 2.2.12**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  deki her  $K$  kapalı kümesi için  $f(K)$  görüntü kümesi  $Y$  de kapalı ise  $f$  ye bir kapalı fonksiyon denir.

**Teorem 2.2.13**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere  $f$  açıktır ancak ve ancak kapalıdır.

**Teorem 2.2.14**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu açıktır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  için  $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$  dir.

**Sonuç 2.2.15**  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere  $f$  sürekli ve açıktır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  için  $f(A^\circ) = (f(A))^\circ$  dir.

**Teorem 2.2.16** Bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu kapalıdır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  için  $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$  dir.

**Sonuç 2.2.17** Bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu sürekli ve kapalıdır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  için  $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$  dir.

**Tanım 2.2.18**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $f$  fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve  $f$  fonksiyonunun tersi  $f^{-1}: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$  de sürekli ise  $f$  fonksiyonuna bir homeomorfizm denir. Eğer  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm varsa homeomorf uzatlar denir.

**Teorem 2.2.19** Topolojik uzayların homeomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

**Tanım 2.2.20** Homeomorfizm altında korunan bir özelliğe topolojik özellik denir.

### 2.3 Çarpım ve Bölüm Uzayları

**Tanım 2.3.1**  $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$  topolojik uzaylar ve  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  olsun.  $\beta = \{\prod_{i=1}^n U_i \mid U_i \in \tau_i, 1 \leq i \leq n\}$  sınıfını baz kabul eden  $X$  üzerindeki topolojiye sonlu çarpım topolojisi denir.

**Teorem 2.3.2**  $(X, \tau), (Y, \sigma)$  ve  $(Z, \rho)$  birer topolojik uzay olmak üzere  $f: Z \rightarrow X$  ve  $g: Z \rightarrow Y$  fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak

$$(f, g): Z \rightarrow X \times Y, (f, g)(z) = (f(z), g(z)) \quad (2.6)$$

fonksiyonu süreklidir.

**Teorem 2.3.3**  $(X, \tau), (X', \tau'), (Y, \sigma)$  ve  $(Y', \sigma')$  birer topolojik uzay olmak üzere  $f: X \rightarrow X'$  ve  $g: Y \rightarrow Y'$  fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak

$$(f, g): X \times Y \rightarrow X' \times Y', (f, g)(x, y) = (f(x), g(y)) \quad (2.7)$$

fonksiyonu süreklidir.

**Tanım 2.3.4**  $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$  topolojik uzaylar ve  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olsun. Her bir  $1 \leq i \leq n$  için  $A_i \subseteq X_i$  olmak üzere

$$(1) (\prod_{i=1}^n X_i)^o = \prod_{i=1}^n (A_i)^o$$

$$(2) \overline{(\prod_{i=1}^n X_i)} = \prod_{i=1}^n \overline{(A_i)}$$

dır.

**Tanım 2.3.5**  $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$  topolojik uzayların keyfi bir sınıfı ve  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  olmak üzere  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  izdüşüm fonksiyonlarına göre  $X$  üzerindeki başlangıç topolojisine keyfi çarpım topolojisi denir.

$\mathcal{A} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \tau_i\}$  sınıfı  $X$  kümesi üzerindeki keyfi çarpım topolojisi için bir alt bazdır.

**Tanım 2.3.6**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $Y$  boştan farklı bir küme ve  $f: X \rightarrow Y$  örten bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonuna göre  $Y$  üzerindeki bitiş topolojisi  $\sigma$  olmak üzere  $(Y, \sigma)$  topolojik uzayına bir bölüm uzayı ve  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonuna da bölüm fonksiyonu denir.

Burada dikkat edelim ki  $\sigma = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \tau\}$  dır.

**Teorem 2.3.7** Örten olan sürekli bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu açık ise bir bölüm fonksiyonudur.

**Teorem 2.3.8** Örten olan sürekli bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu kapalı ise bir bölüm fonksiyonudur.

## 2.4 Topolojik Gruplar

**Tanım 2.4.1**  $G$  bir grup ve  $\tau$  da  $G$  üzerinde bir topoloji olsun.  $G \times G$  üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olmak üzere, eğer grup yapısını oluşturan

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned} \tag{2.8}$$

ve

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

fonksiyonları sürekli ise  $G$  ye bu topoloji ile birlikte bir topolojik grup denir.

**Önerme 2.4.2** Bir  $G$  grubu üzerinde bir topoloji verilsin. Bu durumda  $G$  grubu bu topoloji ile beraber bir topolojik gruptur ancak ve ancak fark fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} \delta: G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a^{-1}b \end{aligned} \tag{2.10}$$

fonksiyonu süreklidir.

**Örnek 2.4.3** Tanım kümesi üzerindeki topoloji ayrık (diskre) topoloji olan her fonksiyon sürekli olduğundan her grup üzerindeki ayrık topoloji ile birlikte bir topolojik grup yapısı oluşturur.

**Örnek 2.4.4** Değer kümesi üzerindeki topoloji ayrık olmayan (indiskre) topoloji olan her fonksiyon sürekli olduğundan her grup üzerindeki ayrık olmayan topoloji ile birlikte bir topolojik grup yapısı oluşturur.

**Örnek 2.4.5** Reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış (standart) topoloji ve adi toplama işlemi ile birlikte bir topolojik grup yapısına sahiptir.

**Tanım 2.4.6**  $G$  ve  $H$  birer topolojik grup olsun. Eğer  $f: G \rightarrow H$  dönüşümü sürekli ve her  $x, y \in G$  için  $f(xy) = f(x)f(y)$  ise  $f$  fonksiyonuna topolojik grupların bir morfizmi denir.



### 3. $G$ –DİZİSEL SÜREKLİLİK

Bu bölümde öncelikle topolojik uzaylarda iyi bilinen iç nokta, kapanış noktası, yığılma noktası gibi kavramların herhangi bir  $G$  dizisel süreklilik metodu için  $G$  –dizisel iç nokta,  $G$  –dizisel kapanış noktası ve  $G$  –dizisel yığılma noktası tanımlarına genelleştirilmeleri ve daha sonra bu kavramlar yardımı ile daha önce literatürde verilmiş olan  $G$  –dizisel açık küme ve  $G$  –dizisel kapalı küme kavramları ile bu kavramların çeşitli özellikleri hatırlatılmıştır.

#### 3.1 $G$ –Dizisel Kapalı Kümeler

İlk olarak bir dizinin  $G$  –dizisel yakınsaklığı ve  $X$  in bir alt kümesinin  $G$  –dizisel kapanışı tanımlarını hatırlatalım.  $\mathbf{x} = (x_n) \in c_G(X)$  ve  $l \in X$  olmak üzere  $G(\mathbf{x}) = l$  ise bu  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisine  $l \in X$  noktasına  $G$  –dizisel yakınsaktır denir.

**Tanım 3.1.1**  $A \subseteq X$  ve  $l \in X$  olsun. Bu durumda  $G(\mathbf{x}) = l$  olacak şekilde  $A$  kümesinin elemanlarından oluşan bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  bir dizi varsa, o zaman  $l \in X$  elemanına  $A$  kümesinin bir  $G$  –dizisel kapanış noktası denir [2].

Bir  $A$  kümesinin bütün  $G$  –dizisel kapanış noktalarının kümesine bu  $A$  kümesinin  $G$  –dizisel kapanışı denir ve  $\overline{A}^G$  ile gösterilir [2].

**Tanım 3.1.2** Bir  $A \subseteq X$  alt kümesi tüm  $G$  –dizisel kapanış noktalarını içeriyorsa, yani  $\overline{A}^G \subseteq A$  ise, bu  $A$  alt kümesine  $G$  –dizisel kapalı küme denir [2].

Açıkça görülüyor ki herhangi bir  $G$  metodu için  $\overline{\emptyset}^G = \emptyset$  ve  $\overline{X}^G = X$  dir. Eğer  $G$  regüler bir metot ise, o zaman  $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A}^G$  dir ve bu durumda  $A$  kümesinin  $G$  –dizisel kapalı olması için gerek ve yeter şart  $\overline{A}^G = A$  olmasıdır. Regüler metotlar için bile  $\overline{(\overline{A}^G)}^G = \overline{A}^G$  ifadesi her zaman doğru değildir. Yine regüler metotlar için bile genelde herhangi iki  $G$  –dizisel kapalı kümenin birleşimi  $G$  –dizisel kapalı olmak zorunda değildir.

**Tanım 3.1.3** Bir  $G$  metodu için  $G(\mathbf{x}) = l$  olacak şekildeki  $G$  –dizisel yakınsak  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisinin  $\lim_k x_{n_k} = l$  olacak şekilde bir  $(x_{n_k})$  alt dizisi varsa bu  $G$  metoduna bir alt dizisel metot denir [2].

**Tanım 3.1.4**  $A \subseteq X$  ve  $l \in X$  olsun. Bu durumda  $G(x) = l$  olacak şekilde  $A \setminus \{l\}$  kümesinin elemanlarından oluşan bir  $x = (x_n)$  bir dizi varsa, o zaman  $l \in X$  elemanına  $A$  kümesinin bir  $G$  –dizisel yığılma noktası denir ve  $A$  kümesinin  $G$  –dizisel yığılma noktalarının kümesi  $(A')^G$  ile gösterilir [2].

**Tanım 3.1.5**  $A \subseteq X$  ve  $l \in X$  olsun. Bu durumda  $l$  hem  $A$  nın  $G$  –dizisel kapanış noktası hem de  $A^c$  nin  $G$  –dizisel kapanış noktası ise bu  $l$  noktasına  $A$  nın  $G$  –dizisel sınır noktası denir ve  $A$  kümesinin  $G$  –dizisel sınır noktalarının kümesi veya  $G$  –dizisel sınırı  $(A^b)^G$  ile gösterilir [2].

**Lemma 3.1.6**  $G$  bir regüler metot olmak üzere her  $A \subseteq X$  için  $\overline{A}^G = \overline{A}$  dir ancak ve ancak  $G$  bir alt dizisel metottur [2].

**Teorem 3.1.7**  $G$  bir regüler metot olmak üzere her  $A \subseteq X$  için  $(A')^G = A'$  dir ancak ve ancak  $G$  bir alt dizisel metottur [2].

**Teorem 3.1.8**  $G$  bir regüler metot olmak üzere her  $A \subseteq X$  için  $(A^b)^G = A^b$  dir ancak ve ancak  $G$  bir alt dizisel metottur [2].

**Teorem 3.1.9**  $G$  regüler bir metot ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [2].

- (i) Eğer  $A \subset B$  ise  $\overline{A}^G \subset \overline{B}^G$ ,
- (ii)  $\overline{A}^G \cup \overline{B}^G \subset \overline{A \cup B}^G$ ,
- (iii)  $\overline{A \cap B}^G \subset \overline{A}^G \cap \overline{B}^G$ ,
- (iv)  $\overline{A}^G + \overline{B}^G \subset \overline{A + B}^G$ ,
- (v)  $\overline{-A}^G = -\overline{A}^G$ ,
- (vi) bir alt grubun  $G$  –dizisel kapanışı da bir alt gruptur,
- (vii) eğer  $A$ ,  $G$  –dizisel kapalı ise  $A + \{\overline{0}\} = A$  dir.

**İspat:** (i) ve (iii) nin ispatları açıktır ve bu yüzden atlanır. (ii) şıkkını ispatlamak için  $\overline{A}^G \cup \overline{B}^G$  de herhangi bir  $l$  elemanı alalım. O zaman  $l$  ya  $\overline{A}^G$  de ya da  $\overline{B}^G$  dedir.  $G(x) = l$  olduğundan  $B$ 'deki bütün noktaların ya da  $A$ 'daki bütün noktaların bir  $x = (x_n)$  dizisi vardır. Böylelikle  $l \in \overline{A \cup B}^G$  bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. (iv) şıkkını

ispatlamak için,  $l \in \overline{A}^G + \overline{B}^G$  olsun. Bu yüzden  $l = l_1 + l_2$  olduğundan  $l_1 \in \overline{A}^G$  ve  $l_2 \in \overline{B}^G$  olur. O halde  $G(\mathbf{x}) = l_1$  ve  $G(\mathbf{y}) = l_2$  olduğundan  $B$  deki noktaların  $\mathbf{y} = (y_n)$  ve  $A$  daki noktaların  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi vardır. Şimdi bir  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  dizisi tanımlayalım.  $G$  nin toplamsallığından,  $G(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}) + G(\mathbf{y}) = l_1 + l_2 \in \overline{A + B}^G$  olduğunu kolayca görülür. (iii) ve (iv) şıklarının ispatları açıktır.

**Örnek 3.1.10**  $G(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + x_{n+1})}{2}$  olarak tanımlayalım.  $X = \mathbb{R}$  üzerinde standart topolojisi ve  $A = \{0\}$ ,  $B = \{1\}$  olsun. Standart kapanış durumuna ters olarak bu örnek (ii) ifadesindeki kapsamanın eşitlik ile değiştirilemeyeceğini göstermektedir. Bu örnek aynı zamanda regüler bir metot için bile,  $A = \{0,1\}$  kümesinin  $G$  -kapanışı  $\overline{A}^G = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  ve onun tekrar  $G$  -dizisel kapanışı  $\overline{(\overline{A}^G)}^G = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  olduğundan  $\overline{(\overline{A}^G)}^G = \overline{A}^G$  ifadesinin her zaman doğru olmadığını açıklar.

**Örnek 3.1.11** Eğer  $G$ ,  $G(x) := x_1$  olarak verilirse o halde  $X$  in herhangi bir alt kümesi  $G$  -dizisel kapalı olur. Bu ise bir elemanın, bir kümenin  $G$  -dizisel kapanışında olmasının genel olarak kümenin dizisel kapanışında olduğu anlamına gelmediğini gösterir.

**Teorem 3.1.12**  $G$  regüler bir metot olsun ve  $\{A_i : i \in I\}$ ,  $X$  in alt kümelerinin herhangi bir koleksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [2].

- (i)  $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}^G \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}^G$ .
- (ii)  $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}^G \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}^G$ .
- (iii)  $\sum_{i \in I} \overline{A_i}^G \subset \overline{\sum_{i \in I} A_i}^G$ .

**İspat:** İspatlar önceki teoremin ispatlarıyla benzerdir.

**Teorem 3.1.13**  $G$  regüler bir method ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [2].

- (i) Eğer  $A \subset B$  ise o zaman  $(A')^G \subset (B')^G$ .
- (ii)  $\overline{A}^G = A \cup (A')^G$ .
- (iii)  $\overline{A}^G = A \cup (A^b)^G$ .

**İspat:** (i)'in ispatını görmek açıktır bu yüzden atlanır. (ii)'nin ispatı için  $\overline{A}^G$  nin herhangi bir  $l$  elemanını alalım. O halde  $l$  ya  $A$  da ya da  $A$  nın tümleyenindedir. Eğer  $l, A$  da ise o halde  $A \cup (A')^G$  dir. Eğer  $l, A$  nın tümleyeninde ise  $G(x) = l$  olduğundan  $A \setminus \{l\}$  de bir  $x = (x_n)$  dizisi vardır. Bu nedenle  $l \in (A')^G$ . Öte yandan, biz  $(A')^G \subset \overline{A}^G$  ve  $A \subset \overline{A}^G$  olduğu için  $A \cup (A')^G \subset \overline{A}^G$  elde ederiz. (iii)'nin ispatı için  $l \in A \cup (A^b)^G$  olsun. O halde  $l$  ya  $A$  dadır ya da  $(A^b)^G$  dedir. Eğer  $l \in A$  ise, regüler bir  $G$  metoti için  $A \subset \overline{A}^G$  olduğu için ispat açıktır. Eğer  $l \in (A^b)^G$  ise o halde  $A^c, A$  nın tümleyeni olmak üzere  $l \in \overline{A}^G \cap \overline{A^c}^G$  olur. Bu yüzden  $l \in \overline{A}^G$ . Tersine,  $\overline{A}^G$  nin herhangi bir  $l$  elemanını alalım. Bu nedenle  $l$  ya  $A$  dadır ya da  $A^c$  dedir. Eğer  $l \in A$  ise ispat tamamdır. Eğer  $l, A^c$  de ise o zaman  $G$  regüler olduğu için  $l \in \overline{A^c}^G$  dir.

**Sonuç 3.1.14**  $G$  regüler bir metot olsun.  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı alt kümelerinin herhangi bir kesişimi yine  $X$  in bir  $G$  –dizisel kapalı alt kümesidir [2].

**İspat:** İspat kolaylıkla elde edilebilir.

Regüler metotlar için bile  $X$  in herhangi iki  $G$  –dizisel kapalı alt kümesinin birleşiminin yine  $X$  de  $G$  –dizisel kapalı olmasına gerek yoktur.

**Teorem 3.1.15**  $G_1$  ve  $G_2, c_{G_1}(X) = c_{G_2}(X)$  olacak şekilde  $X$  üzerinde iki metot olsun. Bu durumda  $\overline{A}^{G_1+G_2} \subset \overline{A}^{G_1} + \overline{A}^{G_2}$  dir [2].

**İspat:**  $l \in \overline{A}^{G_1+G_2}$  olsun. O halde  $(G_1 + G_2)(x) = l$  olacak şekilde bir dizi  $x = (x_n)$  dizisi vardır. Buradan  $G_1(x) + G_2(x) = l$  dir.  $G_1(x) = l_1$  ve  $G_2(x) = l_2$  diyelim. Böylece  $l_1 \in \overline{A}^{G_1}$  ve  $l_2 \in \overline{A}^{G_2}$  olur. Buradan  $l = l_1 + l_2 \in \overline{A}^{G_1} + \overline{A}^{G_2}$  dir.

**Sonuç 3.1.16**  $G_1$  ve  $G_2, c_{G_1}(X) = c_{G_2}(X)$  olacak şekilde  $X$  üzerinde iki alt dizisel metot olsun. Bu durumda  $(A')^{G_1+G_2} \subset (A')^{G_1} + (A')^{G_2}$  dir [2].

**İspat:** İspat Teorem 3.1.15 den elde edilir.

**Sonuç 3.1.17**  $G_1$  ve  $G_2, c_{G_1}(X) = c_{G_2}(X)$  olacak şekilde  $X$  üzerinde iki metot olsun. Bu durumda  $(A^b)^{G_1+G_2} \subset (A^b)^{G_1} + (A^b)^{G_2}$  dir.

**İspat:** İspat Teorem 3.1.15 den elde edilir.

### 3.2 $G$ –Dizisel Açık Kümeler

**Tanım 3.2.1**  $A \subseteq X$  olmak üzere  $A$  kümesinin tümleyeni  $G$  –dizisel kapalıysa, yani  $\overline{X \setminus A}^G \subseteq X \setminus A$  ise, bu  $A$  kümesine  $G$  –dizisel açık küme denir [33].

Regüler bir  $G$  metodu için,  $X$  in bir alt kümesinin  $G$  –dizisel kapanışı kümenin kendisini içerdiğinden, bir  $A \subseteq X$  alt kümesi  $G$  –dizisel açıktır ancak ve ancak  $\overline{X \setminus A}^G = X \setminus A$  dır [33].

**Teorem 3.2.2**  $G$ ,  $X$  de bir metot olsun.  $\{F_i: i \in I\}$ ,  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı alt kümelerinin bir koleksiyonu olmak üzere  $\bigcap_{i \in I} F_i$  kesişimi de  $G$  –dizisel kapalıdır [33].

**İspat:** Teorem 3.1.12 (ii) ve varsayıma göre

$$\overline{\bigcap_{i \in I} F_i}^G \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{F_i}^G \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i. \quad (3.1)$$

**Teorem 3.2.3**  $G$ ,  $X$  de bir metot olsun.  $X$  in herhangi  $G$  –dizisel açık alt kümelerinin birleşimi yine  $G$  –dizisel açıktır [33].

**İspat:** İspat, Teorem 3.2.2 den kolayca elde edilir.

Bir önceki kısımda belirttiğimiz gibi,  $G$  –dizisel kapalı alt kümelerinin birleşimi  $G$  –dizisel kapalı olmadığından,  $X$  in  $G$  –dizisel açık alt kümelerinin kesişiminin  $G$  –dizisel açık olması gerekmez. Bu nedenle,  $X$  in  $G$  –dizisel açık alt kümelerinin sınıfı her zaman  $X$  üzerinde bir topoloji belirtmez [33].

Şimdi, bir noktanın komşuluğu kavramını  $G$  –dizisel durum için modifiye ediyoruz.

**Tanım 3.2.4**  $G$ ,  $X$  üzerinde bir method,  $U$ ,  $X$  in bir alt kümesi ve  $a \in U$  olsun.  $a \in A$  ve  $A \subseteq U$  olacak şekilde  $X$  in bir  $G$  –dizisel açık alt kümesi  $A$  varsa  $U$  ya  $a$  nın bir  $G$  –dizisel komşuluğu denir [33].

Teorem 3.2.3 ve Tanım 3.2.4 den,  $X$  in bir alt kümesi  $A$  nın  $G$  –dizisel açık olması için gerek ve yeter şartın  $A$  nın her noktasının  $G$  –dizisel komşuluğu olması ortaya çıkar.

**Teorem 3.2.5**  $G, X$  üzerinde bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A, G$  –dizisel açıktır ancak ve ancak her  $a \in A$  nın  $U_a \subseteq A$  olacak şekilde bir  $G$  –dizisel açık komşuluğu  $U_a$  vardır [33].

**İspat:** İspat, Teorem 3.2.3 den kolayca elde edilir.

**Tanım 3.2.6**  $G, X$  üzerinde bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda

$$\bigcup \{U \subseteq A \mid U \text{ kümesi } G - \text{ dizisel açıktır} \} \quad (3.2)$$

kümesi  $A$  nın  $G$  –dizisel içi olarak adlandırılır ve  $A^{0G}$  ile gösterilir [33].

Burada açıkça görülüyor ki  $a \in A^{0G}$  dır ancak ve ancak  $a$  elemanının  $U \subseteq A$  olacak şekilde bir  $G$  –dizisel açık komşuluğu  $U$  vardır.

**Teorem 3.2.7**  $G, X$  üzerinde bir metot ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır [33].

- (i)  $A^{0G}, G$  –dizisel açıktır.
- (ii)  $A^{0G} \subseteq A$  dır.
- (iii)  $A, G$  –dizisel açıktır ancak ve ancak  $A = A^{0G}$  dır.
- (iv) Eğer  $A \subseteq B$  ise  $A^{0G} \subseteq B^{0G}$  dır.
- (v)  $(A \cap B)^{0G} \subseteq A^{0G} \cap B^{0G}$  dır.
- (vi)  $A^{0G} \cup B^{0G} \subseteq (A \cup B)^{0G}$  dır.

**İspat:** (i)  $A^{0G}$ ,  $A$  da bulunan  $G$  –dizisel açık alt kümelerinin birleşimi olduğundan  $G$  –dizisel açıktır. (ii), (iii) ve (iv) Tanım 3.2.6 dan açıkça elde edilir. (v) ve (vi) ise (iv) den elde edilir.

**Teorem 3.2.8**  $G, X$  üzerinde bir metot ve  $\{A_i: i \in I\}$ ,  $X$  in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda

- (i)  $(\bigcap_{i \in I} A_i)^{0G} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^{0G}$  ve
- (ii)  $\bigcup_{i \in I} A_i^{0G} \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^{0G}$  dır [33].

**İspat:** İspat, Teorem 3.2.7 (iv) den kolayca elde edilir.

**Teorem 3.2.9**  $G, X$  üzerinde bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun. O halde

$$\overline{A}^G \subseteq \bigcap \{K \mid A \subseteq K \text{ ve } K \text{ kümesi } G - \text{dizisel kapalıdır}\} \quad (3.3)$$

dır [33].

**İspat:** Eğer  $A \subseteq K$  ve  $K$  kümesi  $G$  –dizisel kapalı ise  $\overline{A}^G \subseteq \overline{K}^G \subseteq K$  olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.10**  $G, X$  üzerinde regüler bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun. Eğer  $x \in \overline{A}^G$  ise  $x$  in her  $G$  –dizisel açık komşuluğu  $U$  için  $A \cap U \neq \emptyset$  dır [33].

**İspat:**  $x \in \overline{A}^G$  olsun. Teorem 3.2.9 a göre,  $A$  kümesini içeren her  $G$  –dizisel kapalı  $K$  alt kümesi için  $x \in K$  dır.  $U$ ,  $x$  in bir  $G$  –dizisel açık komşuluğu ise o zaman  $U \cap A$  boş değildir. Aksi takdirde  $U \cap A$  boş olsaydı  $A \subseteq X \setminus U$  ve  $X \setminus U$  ise  $G$  –dizisel kapalı bir alt küme olup  $x \notin X \setminus U$  olur. Bu ise bir çelişkidir.

**Tanım 3.2.11**  $G, X$  üzerinde regüler bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun. Eğer  $\overline{A}^G = X$  ise bu  $A$  kümesine  $X$  de  $G$  –dizisel yoğun küme denir [2].

**Sonuç 3.2.12** Eğer  $A, X$  de  $G$  –dizisel yoğun ise bu durumda  $X$  in her  $G$  –dizisel açık alt kümesi için  $A \cap U$  kümesi boş değildir [33].

**Teorem 3.2.13**  $X$  in bir  $A$  alt kümesi için  $\overline{X \setminus A}^G \subseteq X \setminus A^{0G}$  dır [33].

**İspat:**  $x \in \overline{X \setminus A}^{0G}$  ise o zaman  $x \in U \subseteq A$  olacak şekilde  $x$  in bir  $G$  –dizisel açık komşuluğu  $U$  vardır. Yani  $X \setminus U, X \setminus A$  kümesini içeren  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı bir alt kümesidir fakat  $x \notin X \setminus U$  dır. Bu nedenle Teorem 3.2.3 den  $x \notin \overline{X \setminus A}^G$  olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Bir  $A$  alt kümesinin  $G$  –dizisel sınırı, hem  $A$  nın  $G$  –dizisel kapanışında hem de  $A$  nın tümleyeninin  $G$  –dizisel kapanışında bulunan noktaların kümesi olarak tanımlanmış ve  $(A^b)^G$  ile gösterilmişti. Teorem 3.2.13 den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

**Sonuç 3.2.14**  $G$ ,  $X$  üzerinde bir metot ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda  $(A^b)^G \subseteq \overline{A}^G \setminus A^{0G}$  dır [33].

$G$  nin regüler ve alt dizisel bir metot olduğu durumlarda,  $G$  –dizisel açık alt kümelerin ve açık alt kümelerin aynı olduğu gösterilebilir.

**Lemma 3.2.15**  $G$  regüler ve alt dizisel bir metot olsun. Bu durumda  $X$  in herhangi bir  $A$  alt kümesi için  $A^{0G} = A^0$  dır [33].

**İspat:**  $G$  regüler ve alt dizisel bir metot ise, Lemma 3.2.15 den  $X$  in bir  $A$  alt kümesi için  $\overline{A}^G = \overline{A}$  dır. Böylece eğer  $A$ ,  $G$  –dizisel açıksa  $X \setminus A$  kümesi  $G$  –dizisel kapalıdır ve  $G$  nin regüler olmasından  $X \setminus A = \overline{X \setminus A}^G = \overline{X \setminus A}$  dır. Dolayısıyla  $A$  açıktır. Tersine olarak,  $A$  bir açık alt küme ise  $X \setminus A = \overline{X \setminus A} = \overline{X \setminus A}^G$  ve böylece  $A$ ,  $G$  –dizisel açıktır. Dolayısıyla  $A^{0G}$ ,  $A^{0G} \subseteq A$  olacak şekilde bir açık kümedir ve buradan  $A^{0G} \subseteq A^0$  dır. Benzer şekilde  $A^0$ ,  $A$  kümesi tarafından kapsanan bir  $G$  –dizisel açık alt kümedir ve böylece  $A^0 \subseteq A^{0G}$  dır. Bu nedenle  $A^{0G} = A^0$  dır.

### 3.3 $G$ –Dizisel Süreklilik

**Tanım 3.3.1** Bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu ve bir  $u \in X$  elemanı verilsin. Eğer  $X$  de bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi verildiğinde  $G(\mathbf{x}) = u$  iken  $G(f(\mathbf{x})) = f(u)$  oluyorsa, bu  $f$  fonksiyonu  $u$  noktasında  $G$  –dizisel süreklidir denir [2].

Eğer  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu her  $u \in X$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli ise bu  $f$  fonksiyonuna kısaca  $G$  –dizisel süreklidir denir.

**Teorem 3.3.2**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer bir  $f$  fonksiyonu bir  $u$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli ise  $u \in \overline{A}^G$  iken  $f(u) \in \overline{f(A)}^G$  dır [2].

**İspat:**  $f$  in bir  $u$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli olduğunu varsayalım.  $A$ ,  $X$  in herhangi bir alt kümesi ve  $u \in \overline{A}^G$  olsun. O halde  $G(\mathbf{x}) = u$  olacak şekilde  $A$  da bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi vardır.  $f$  fonksiyonu  $u$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli olduğu için  $G(f(\mathbf{x})) = f(u)$  olur. Buradan  $f(u) \in \overline{f(A)}^G$  bulunur.

**Sonuç 3.3.3**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer bir  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel sürekli ise  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(\overline{A}^G) \subset \overline{(f(A))^G}$  dır [2].

Regüler alt dizisel metotlar için Teorem 3.2.2 nin ve böylece Sonuç 3.3.3 ün tersi de doğrudur. Yani bir  $f$  fonksiyonu bir  $u$  noktasında  $G$  –dizisel süreklidir ancak ve ancak  $u \in \overline{A}^G$  iken  $f(u) \in \overline{(f(A))^G}$  dır. Buradan, bir  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $G$  –dizisel süreklidir ancak ve ancak  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(\overline{A}^G) \subset \overline{(f(A))^G}$  dır.

**Sonuç 3.3.4**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer birebir ve örten bir  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $G$  –dizisel sürekli ise bu durumda  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f((A')^G) \subset ((f(A))')^G$  dır [2].

**Sonuç 3.3.5**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer birebir ve örten bir  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $G$  –dizisel sürekli ise bu durumda  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(((A)^b)^G) \subset ((f(A))^b)^G$  dır [2].

Regüler alt dizisel metotlar için Sonuç 3.3.4 ve 3.3.5 deki ifadelerin tersi doğrudur. Yani birebir ve örten bir  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $G$  –dizisel süreklidir ancak ve ancak  $f((A')^G) \subset ((f(A))')^G$  dır [2].

**Teorem 3.3.6**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer  $X$  de bir  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel sürekli ise o halde  $X$  in herhangi bir  $G$  –dizisel kapalı alt kümesinin ters görüntüsü  $G$  –dizisel kapalıdır. Yani,  $X$  in her  $G$  –dizisel kapalı  $K$  alt kümesi için  $f^{-1}(K)$  ters görüntü kümesi  $G$  –dizisel kapalıdır [2].

**İspat:** [19] da Lemma 2 de olduğu gibi aynı teknikleri kullanarak bu teoremlerin ispatı elde edilebilir.

Yukarıdaki Teorem  $G$  –dizisel açık kümeler yardımı ile aşağıdaki şekilde de verilebilir.

**Teorem 3.3.7**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer  $X$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel sürekli ise o halde  $X$  in her  $G$  –dizisel açık alt kümesinin ters

görüntüsü  $G$  –dizisel açıktır. Yani,  $X$  in her  $G$  –dizisel açık  $U$  alt kümesi için  $f^{-1}(U)$  ters görüntü kümesi  $G$  –dizisel açıktır [33].

**İspat:**  $f: X \rightarrow X$ , herhangi bir  $G$  –dizisel sürekli fonksiyon ve  $X$  in herhangi bir  $G$  –dizisel açık alt kümesi  $A$  olsun. O zaman  $X \setminus A$  kümesi  $G$  –dizisel kapalıdır. Yardımcı teorem 2.23 den  $f^{-1}(X \setminus A)$  da  $G$  –dizisel kapalıdır. Öte yandan

$$f^{-1}(X \setminus A) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A) \quad (3.4)$$

ve böylece  $f^{-1}(A)$  ters görüntü kümesi  $G$  –dizisel açıktır.

**Teorem 3.3.8**  $G$  regüler bir alt dizisel metot olsun. O halde her  $G$  –dizisel sürekli fonksiyon sıradan anlamda süreklidir [2].

**İspat:** İspat kolaylıkla görülür bu yüzden atlanır.

**Teorem 3.3.9**  $G$  regüler bir metot olsun. Eğer her sürekli fonksiyon  $G$  –dizisel sürekli ise o zaman  $G$  bir alt dizisel metottur [2].

**İspat:** Kabul edelim ki  $G$  bir alt dizisel metot olmasın. Sürekli ama  $G$  –dizisel sürekli olmayan bir fonksiyon bulacağız.  $G$  alt dizisel olmadığından, kapanışı  $G$  –dizisel kapanışının bir özalt kümesi olan  $X$  de bir  $F$  alt kümesi vardır. Birer  $l \in \overline{F}^G \setminus \overline{F}$  ve  $l_1 \in \overline{F}$  alalım.  $x \notin \overline{F}$  için  $f(x) = l$  ve her  $x \in \overline{F}$  için  $f(x) = l_1$  olacak şekilde bir  $f$  fonksiyonu tanımlayalım.  $f$  nin  $G$  –dizisel olarak sürekli olmadığı ve sıradan anlamda sürekli olduğu açıktır. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi standart topoloji teorisinde bulunan kapalı fonksiyon tanımını  $G$  –dizisel kapalı fonksiyon versiyonunu veriyoruz.

**Tanım 3.3.10** Bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her  $G$  –dizisel kapalı alt kümesi  $K$  için  $f(K)$  görüntü kümesi  $G$  –dizisel kapalıysa bu  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel kapalı fonksiyon olarak adlandırılır [2].

**Teorem 3.3.11**  $G$  regüler bir metot olsun. Bir  $f$  fonksiyonu  $G$ -dizisel kapalıdır ancak ve ancak  $X$  in her  $A$  altkümesi için  $\overline{(f(A))}^G \subset f(\overline{A}^G)$  dır [2].

**İspat:**  $G$  regüler olduğundan  $A \subset \overline{A}^G$  dir.  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel olarak kapalı olduğundan,  $\overline{(f(A))}^G \subset (\overline{A}^G)$ . Şimdi farz edelim ki  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $\overline{(f(A))}^G \subset (\overline{A}^G)$  olsun.  $F, X$  in herhangi bir  $G$  –dizisel kapalı altkütmesi olmak üzere  $\overline{(f(F))}^G \subset (\overline{F}^G) = f(F)$  dir. Bundan dolayı  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel kapalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.12**  $X$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonu toplamsaldır ancak ve ancak  $c_{G_1}(X) = c_{G_2}(X)$  olacak şekildeki her  $G_1$  ve  $G_2$  dizisel yakınsama metodu için  $f$  fonksiyonu  $G_1$ -dizisel sürekli ve  $G_2$ -dizisel sürekli iken  $(G_1 + G_2)$  –dizisel sürekli dir [2].

**İspat:**  $(G_1 + G_2)(x) = u$  olsun.  $G_1(x) = u_1$  ve  $G_2(x) = u_2$  diyelim.  $f, G_1$  –sürekli ve  $G_2$  –sürekli olduğundan  $G_1(f(x)) = f(u_1)$  ve  $G_2(f(x)) = f(u_2)$  olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)(f(x)) &= G_1(f(x)) + G_2(f(x)) \\ &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= f(u_1 + u_2) \\ &= f(u). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Şimdi  $f$  nin toplamsal olmadığını varsayalım, böylece  $f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$  olacak şekilde  $u_1$  ve  $u_2$  elemanları vardır.  $G_1(x) = x_1$  ve  $G_2(x) = x_2$ , şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)(u_1, u_2, 0, 0, \dots) &= G_1(u_1, u_2, 0, 0, \dots) + G_2(u_1, u_2, 0, 0, \dots) \\ &= u_1 + u_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ama  $(G_1 + G_2)(f(u_1), f(u_2), 0, 0, \dots) = f(u_1) + f(u_2)$  olup bu ise  $f(u_1 + u_2)$  den farklıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi standart topoloji teorisinde bulunan açık fonksiyon tanımını  $G$  –dizisel açık fonksiyon versiyonunu veriyoruz.

**Tanım 3.3.13** Bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her  $G$  –dizisel açık alt kümesi  $U$  için  $f(U)$  görüntü kümesi  $G$  –dizisel açık ise bu  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel açık fonksiyon olarak adlandırılır [33].

**Teorem 3.3.14**  $G$ ,  $X$  de bir metot olsun. Bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $G$  –dizisel açıktır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  alt kümesi için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0G}$  dır [33].

**İspat:**  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $G$  –dizisel açık ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A^{0G} \subseteq X$  olduğu için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)$  ve bu yüzden  $f(A^{0G})^{0G} \subseteq f(A)^{0G}$  olur. Burada  $f(A^{0G})$ ,  $G$  –dizisel açık olduğundan dolayı  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0G}$  olur. Tersine, herhangi bir  $A \subseteq X$  alt kümesi için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0G}$  olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, herhangi bir  $G$  –dizisel açık alt küme  $U$  için,  $f(U) \subseteq f(U)^{0G}$  olur ve bu nedenle  $f(U)$ ,  $G$  –dizisel açıktır.

**Teorem 3.3.15**  $G$  regüler bir metot ve  $f: X \rightarrow X$  birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel sürekliyse bu durumda  $X$  kümesinin herhangi bir  $A$  alt kümesi için  $f(A)^{0G} \subseteq f(A^{0G})$  dır [33].

**İspat:** Teorem 3.3.7 den  $f^{-1}$  fonksiyonu  $G$  –dizisel açıktır. Dolayısıyla Teorem 3.3.14 den,  $X$  in herhangi bir alt kümesi için  $f^{-1}(B^{0G}) \subseteq f^{-1}(B)^{0G}$ .  $B$  yi  $f(A)$  ile değiştirirsek, iddia edildiği gibi  $f(A)^{0G} \subseteq f(A^{0G})$  olur.

Şimdi toplamsal bir fonksiyonun birim elemanda  $G$  –dizisel sürekli olmasının herhangi bir elemanda  $G$  –dizisel sürekli olmasını gerektirdiğini göstereceğiz.

**Teorem 3.3.16**  $G$  regüler bir metot ve  $f: X \rightarrow X$  toplamsal bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  birim elemanda  $G$  –dizisel sürekli değildir ancak ve ancak  $f$  herhangi bir  $a \in X$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli değildir [33].

**İspat:**  $f: X \rightarrow X$  toplamsal fonksiyon birim elemanda (0)  $G$  –dizisel sürekli olsun. Böylece  $G(x) = 0$  olduğunda  $G(f(x)) = 0$  olur.  $x$ ,  $G(x) = a$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi ve  $\mathbf{a}$  ise  $\mathbf{a} = (a, a, a, \dots)$  sabit dizisi olsun.  $G$  regüler bir metot olduğundan  $G(\mathbf{a}) = a$  dır. Bu yüzden,  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$  dizisi 0 orjinine  $G$  –yakınsaktır. Böylece varsayımdan  $G(f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = 0$  dır.  $f$  ve  $G$  toplamsal olduğundan  $G(f(\mathbf{x})) - G(f(\mathbf{a})) = 0$  bulunur. Burada  $f(\mathbf{a})$  sabit dizisi  $f(a)$  noktasına yakınsak olduğundan

ve  $G$  regüler olduğundan  $G(f(\mathbf{a})) = f(a)$  olur. Bu nedenle  $G(f(\mathbf{x})) = f(a)$  bulunur. Yani  $f$  herhangi bir  $a \in X$  noktasında  $G$  –dizisel süreklidir.

**Sonuç 3.3.17**  $G$  regüler bir metot olsun. Bu durumda herhangi bir  $a \in X$  için  $x \mapsto a + x$  ile tanımlı  $f_a: X \rightarrow X$  fonksiyonu,  $G$  –dizisel sürekli,  $G$  –dizisel kapalı ve  $G$  –dizisel açıktır [33].

**İspat:**  $x, G(x) = u \in X$  ile  $G$  –dizisel yakınsak bir dizi ve  $\mathbf{a}, \mathbf{a} = (a, a, a \dots)$  sabit dizi olsun. Daha sonra  $\mathbf{a} + \mathbf{x}$  dizisi  $a + u$  ya  $G$  –dizisel yakınsak olur çünkü  $\mathbf{a} = (a, a, a \dots)$  sabit dizisi  $a$  ya  $G$  –dizisel yakınsaktır. Burada  $G$  toplamsal ve regüler olup bundan dolayı  $G(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = a + u$  dır. Bu nedenle  $G(f_a(\mathbf{x})) = G(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = a + u = f_a(u)$  ve  $f_a$  fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.  $f_a$  nın tersi  $f_{-a}$  olduğundan ve Lemma 3.3.6 den  $f_a$  fonksiyonu  $G$  –dizisel kapalı ve Teorem 3.3.7 den  $f_a$  fonksiyonu  $G$  –dizisel açıktır.

**Teorem 3.3.18**  $G$  regüler bir metot olsun.  $A$  ve  $B$  kümelerinden biri  $G$  –dizisel açıksa bu durumda  $A + B$  toplamıda aynı şekilde  $G$  –dizisel açıktır [33].

**İspat:**  $B$  kümesi  $X$  in  $G$  –dizisel açık bir alt kümesi ve  $A$  ise  $X$  in herhangi bir alt kümesi olsun. Sonuç 2.28 den  $a + B$ , herhangi bir  $a \in A$  için  $G$  –dizisel açıktır. Teorem 2.3 den  $A + B = \bigcup_{a \in A} a + B$  olduğundan  $A + B$  kümesi  $G$  –dizisel açıktır.

**Teorem 3.3.19**  $G$  regüler bir metot ve  $f, g: X \rightarrow X$  birer fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [33].

- (i)  $f$  ve  $g$ ,  $G$  –dizisel sürekli ise o zaman  $gf$  de  $G$  –dizisel süreklidir.
- (ii)  $f$  ve  $g$ ,  $G$  –dizisel açık (kapalı) ise o zaman  $gf$  de  $G$  –dizisel açıktır (kapalıdır).
- (iii)  $f$  ve  $g$ ,  $G$  –dizisel sürekli ise o zaman  $f + g$  de  $G$  –dizisel süreklidir.
- (iv)  $gf$ ,  $G$  –dizisel açık (kapalı) ve  $f$  örten ise o zaman  $g$ ,  $G$  –dizisel açıktır (kapalıdır).
- (v)  $gf$ ,  $G$  –dizisel açık (kapalı) ve  $g$  birebir ise o zaman  $f$ ,  $G$ -dizisel açıktır (kapalıdır).

**İspat:** (i)  $x, G(x) = u \in X$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun.  $f$  fonksiyonu  $u$  noktasında  $G$  –dizisel sürekli olduğundan  $G(f(\mathbf{x})) = f(u)$  ve  $g, f(u)$  da  $G$  –dizisel

sürekli olduğundan  $G(g(f(x))) = g(f(u))$  olur. Bu nedenle  $gf$  bileşke fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.

(ii) Aşıkardır.

(iii)  $x, G(x) = u \in X$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun.  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $G$  –dizisel sürekli olduğundan,  $G(f(x)) = f(u)$  ve  $G(g(x)) = g(u)$  olur. Bu nedenle  $G$  nin toplanabilirliğinden

$$G((f + g)(x)) = G(f(x)) + G(g(x)) = f(u) + g(u) = (f + g)(u)$$

Yani  $f + g, G$  –dizisel süreklidir.

(iv)  $A, X$ 'in bir  $G$  –dizisel açık alt kümesi olsun.  $f, G$  –dizisel sürekli olduğundan  $f^{-1}(A)$  da  $G$  –dizisel açıktır.  $gf, G$  –dizisel açık ve  $f$  örten olduğu için  $(gf)(f^{-1}(A)) = g(A)$   $G$  –dizisel açıktır.  $A$  nın kapalı olduğu durum için ispat benzerdir.

(v)  $A, X$ 'in bir  $G$  –dizisel açık alt kümesi olsun.  $gf, G$  –dizisel açık olduğundan  $(gf)^{-1}(A)$  da  $G$  –dizisel açıktır.  $g, G$  –dizisel sürekli ve bire bir olduğu için  $g^{-1}gf(A) = f(A)$   $G$  –dizisel açıktır.  $A$ 'nın kapalı olduğu durumda ispat benzerdir.

Aşağıdakilerin ispatları açıktır ancak şartları kontrol etmek için ayrıntıları yazıyoruz.

**Teorem 3.3.20**  $G$  bir metot olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [33].

- (i) Eğer  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $G$  –dizisel sürekliyse o zaman aynı zamanda bir  $A$  alt kümesi için  $f: A \rightarrow X$  kısıtlaması da  $G$  –dizisel süreklidir.
- (ii) Özdeşlik dönüşümü  $f: X \rightarrow X, G$  –dizisel süreklidir.
- (iii)  $A \subseteq X$  alt kümesi için  $f: A \rightarrow X$  içine dönüşümü  $G$  –dizisel süreklidir.
- (iv)  $G$  regüler ise, sabit bir  $f: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.
- (v)  $f, G$  –dizisel sürekliyse o zaman  $-f$  de  $G$  –dizisel süreklidir.
- (vi)  $f: X \rightarrow X, f(x) = -x$  ters eleman fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.
- (vii)  $f: X \rightarrow X, f(x) = -x$  ters eleman fonksiyonu  $G$  –dizisel kapalıdır.

**İspat:** (i)  $x, G(x) = u$  olacak şekilde  $A$  daki terimlerin bir dizisi olsun.  $f, G$  –dizisel sürekli olduğu için  $G(f(x)) = f(u)$  olur.

(ii)  $X$  deki bir  $x$  dizisi için  $G(x) = u$  olsun.  $G(f(x)) = G(x) = u = f(u)$  ve böylece  $f$  özdeşlik fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.

(iii) (i) ve (ii) den elde edilir.

- (iv)  $f: X \rightarrow X, f(x) = x_0$  sabit bir fonksiyon ve  $x, G(x) = u$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun. O zaman  $f(x) = (x_0, x_0, \dots, x_0, \dots)$  dizisi  $x_0$  noktasına yakınsar.  $G$  regüler ve  $G(f(x)) = x_0 = f(u)$  olup  $f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.
- (v)  $x, G(x) = u$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun.  $f, G$  –dizisel sürekli olduğu için  $G(f(x)) = f(u)$  olur. Bu nedenle  $G(-f(x)) = -G(f(x)) = -f(u)$  ve dolayısıyla  $-f$  fonksiyonu  $G$  –dizisel süreklidir.
- (vi) (ii) ve (v) den elde edilir.
- (vii) (vi) ve Lemma 3.3.6 dan elde edilir.

Teorem 3.3.19 ve Teorem 3.3.20 den, aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

**Sonuç 3.3.21**  $G$  regüler bir metot ve  $C^G(X)$  ise  $G$  –dizisel sürekli fonksiyonların sınıfı olsun. Bu durumda  $C^G(X)$  sınıfı fonksiyonların toplamı işlemi ile bir grup yapısı oluşturur [33].

**Teorem 3.3.22**  $G$  regüler bir metot ve  $f: X \rightarrow X$  ise  $G$  –dizisel sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $A = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$  kümesi, yani  $f$  fonksiyonunun çekirdeği,  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı bir alt kümesidir [33].

**İspat:**  $A = f^{-1}(\{0\})$  ve  $\{0\}$   $G$  –dizisel kapalı olduğundan istenilen Lemma 3.3.6 dan elde edilir.

**Teorem 3.3.23**  $G$  regüler bir metot ve  $f, g: X \rightarrow X$  ise  $G$  –dizisel sürekli birer fonksiyon olsunlar. Bu durumda  $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  kümesi  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı bir alt kümesidir [33].

**İspat:** İstenilen,  $f - g: X \rightarrow X$  fonksiyonuna Teorem 3.3.22 nin uygulanması ile elde edilir.

#### 4. $G - H$ –DİZİSEL SÜREKLİLİK

Bu bölümde  $X$  ve  $Y$  birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan toplamsal olarak gösterilen birer topolojik Hausdorff grubunu belirtecektir.  $G$  ve  $H$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  üzerinde birer dizisel yakınsaklık metodu, yani

$$G: c_G(X) \rightarrow X \quad (4.1)$$

ve

$$H: c_H(Y) \rightarrow Y \quad (4.2)$$

birer toplamsal fonksiyon olsunlar. Ayrıca bu bölümde bahsi geçen  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonları için  $f(c_G(X)) \subseteq c_H(Y)$  olduğu varsayılacaktır.

##### 4.1 $G - H$ –Dizisel Sürekli Fonksiyonlar

**Tanım 4.1.1**  $G$  ve  $H$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  üzerinde birer metot olsun ve bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  de bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi verildiğinde  $G(\mathbf{x}) = u$  iken  $H(f(\mathbf{x})) = f(u)$  oluyorsa, bu  $f$  fonksiyonuna  $u$  noktasında  $G - H$  –dizisel süreklidır denir.

Eğer  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $u \in X$  noktasında  $G - H$  –dizisel sürekli ise bu  $f$  fonksiyonuna kısaca  $G - H$  –dizisel süreklidır denir.

**Teorem 4.1.2**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu bir  $u \in X$  noktasında  $G - H$  –dizisel sürekli ise bir  $A \subseteq X$  için  $u \in \overline{A}^G$  iken  $f(u) \in \overline{f(A)}^H$  dir.

**İspat:**  $f$  fonksiyonunun bir  $u \in X$  noktasında  $G - H$  –dizisel sürekli olduğunu varsayalım.  $A$ ,  $X$  in herhangi bir alt kümesi ve  $u \in \overline{A}^G$  olsun. O halde  $G(\mathbf{x}) = u$  olacak şekilde  $A$  da bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi vardır.  $f$  fonksiyonu  $u \in X$  noktasında  $G - H$  –dizisel sürekli olduğu için  $H(f(\mathbf{x})) = f(u)$  olur. Buradan  $f(u) \in \overline{f(A)}^H$  bulunur.

**Sonuç 4.1.3**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli ise  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(\overline{A}^G) \subseteq \overline{f(A)}^H$  dir.

Regüler alt dizisel metotlar için Teorem 4.1.2 nin ve böylece Sonuç 4.1.3 ün tersi de doğrudur. Yani bir  $f$  fonksiyonu bir  $u$  noktasında  $G - H$  -dizisel süreklidir ancak ve ancak  $u \in \overline{A}^G$  iken  $f(u) \in \overline{f(A)}^H$  dir. Buradan, bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  -dizisel süreklidir ancak ve ancak  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(\overline{A}^G) \subset \overline{f(A)}^H$  dir.

**Sonuç 4.1.4**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer birebir ve örten bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  -dizisel sürekli ise bu durumda  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f((A')^G) \subset ((f(A))')^H$  dir.

**Sonuç 4.1.5**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer birebir ve örten bir  $f$  fonksiyonu  $X$  de  $G - H$  -dizisel sürekli ise bu durumda  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $f(((A)^b)^G) \subset ((f(A))^b)^H$  dir.

Regüler alt dizisel metotlar için Sonuç 4.1.4 ve 4.1.5 deki ifadelerin tersi doğrudur. Yani birebir ve örten bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  -dizisel süreklidir ancak ve ancak  $f((A')^G) \subset ((f(A))')^H$  dir.

**Teorem 4.1.6**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  -dizisel sürekli ise o halde  $Y$  in herhangi bir  $H$  -dizisel kapalı alt kümesinin ters görüntüsü  $G$  -dizisel kapalıdır. Yani,  $Y$  in her  $H$  -dizisel kapalı  $K$  alt kümesi için  $f^{-1}(K)$  ters görüntü kümesi  $G$  -dizisel kapalıdır.

**İspat:**  $K$ ,  $Y$  nin bir  $H$  -dizisel kapalı alt kümesi olsun.  $f^{-1}(K)$  kümesinde bir  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizisi alalım. Buradan  $f(\mathbf{x})$  ise  $K$  kümesinde bir dizi olur.  $K$  kümesi  $H$  -dizisel kapalı olduğundan  $H(f(\mathbf{x})) = f(G(\mathbf{x})) \in K$  olup  $G(\mathbf{x}) \in f^{-1}(K)$  bulunur. Böylece  $f^{-1}(K)$  ters görüntü kümesi  $G$  -dizisel kapalıdır.

Yukarıdaki Teorem  $G$  -dizisel açık ve  $H$  -dizisel açık kümeler yardımı ile aşağıdaki şekilde de verilebilir.

**Teorem 4.1.7**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  -dizisel sürekli ise o halde  $Y$  nin her  $H$  -dizisel açık alt kümesinin ters görüntüsü

$G$  –dizisel açıktır. Yani,  $Y$  nin her  $H$  –dizisel açık  $U$  alt kümesi için  $f^{-1}(U)$  ters görüntü kümesi  $G$  –dizisel açıktır.

**İspat:**  $f: X \rightarrow Y$ , herhangi bir  $G - H$  –dizisel sürekli fonksiyon ve  $Y$  in herhangi bir  $H$  –dizisel açık alt kümesi  $A$  olsun. O zaman  $Y \setminus A$  kümesi  $H$  –dizisel kapalıdır. Teorem 4.1.7 den  $f^{-1}(Y \setminus A)$  da  $G$  –dizisel kapalıdır. Diğer taraftan

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A) \quad (4.3)$$

bulunur ve böylece  $f^{-1}(A)$  ters görüntü kümesi  $G$  –dizisel açıktır.

**Teorem 4.1.8**  $G$  ve  $H$  birer regüler ve alt dizisel metot olsunlar. O halde her  $G - H$  –dizisel sürekli fonksiyon sıradan anlamda süreklidir.

**İspat:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli bir fonksiyon olsun.  $X$  –değerli bir  $x = (x_n)$  dizisi ve bir  $x_0 \in X$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  olsun.  $G$  regüler bir metot olduğundan  $G(x) = x_0$  olur.  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli ve  $H$  regüler bir metot olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = H(f(x)) = f(G(x)) = f(x_0) \quad (4.4)$$

olup  $f$  dizisel sürekli yani süreklidir.

**Teorem 4.1.9**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Eğer her sürekli fonksiyon  $G - H$  –dizisel sürekli ise o zaman  $G$  ve  $H$  birer alt dizisel metotdurlar.

**İspat:** Kabul edelim ki  $G$  ve  $H$  alt dizisel birer metot olmasınlar. Bu durumda sürekli fakat  $G - H$  –dizisel sürekli olmayan bir fonksiyon bulmalıyız.  $G$  ve  $H$  alt dizisel olmadıklarından  $X$  ve  $Y$  kümelerinde sırasıyla kapanışı  $G$  –dizisel kapanışının özalt kümesi olan bir  $F \subseteq X$  ve kapanışı  $H$  –dizisel kapanışının özalt kümesi olan bir  $K \subseteq Y$  kümeleri vardır. Birer  $l \in \overline{F}^G \setminus \overline{F}$ ,  $l_1 \in \overline{F}$ ,  $k \in \overline{K}^G \setminus \overline{K}$  ve  $k_1 \in \overline{K}$  alalım. Şimdi  $X$  den  $Y$  ye bir  $f$  fonksiyonu tanımlayalım.  $x \in X$  için  $x \in \overline{F}$  ise  $f(x) = k_1$  ve  $x \notin \overline{F}$  ise  $f(x) = k$  olarak tanımlansın. Bu şekilde verilen  $f$  fonksiyonunun  $G - H$  –dizisel sürekli olmadığı fakat sıradan anlamda sürekli olduğu açıkça görülmektedir.

#### 4.2 $G - H$ –Dizisel Kapalı Fonksiyonlar

Şimdi standart topoloji teorisinde bulunan kapalı fonksiyon tanımını  $G - H$  –dizisel kapalı fonksiyon versiyonunu veriyoruz.

**Tanım 4.2.1** Bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her  $G$  –dizisel kapalı alt kümesi  $K$  için  $f(K)$  görüntü kümesi  $H$  –dizisel kapalıysa bu  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel kapalı fonksiyon olarak adlandırılır.

**Teorem 4.2.2**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Bir  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel kapalıdır ancak ve ancak  $X$  in her  $A$  altkümesi için  $\overline{(f(A))}^H \subset f(\overline{A}^G)$  dır.

**İspat:** Bir  $A \subseteq X$  alalım.  $G$  regüler olduğundan  $A \subset \overline{A}^G$  dır.  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel kapalı olduğundan,  $\overline{(f(A))}^H \subset f(\overline{A}^G)$  olduğu elde edilir. Tersine olarak, kabul edelim ki  $X$  in her  $A$  alt kümesi için  $\overline{(f(A))}^H \subset f(\overline{A}^G)$  olsun.  $F$ ,  $X$  in herhangi bir  $G$  –dizisel kapalı altkümesi olmak üzere kabulden  $\overline{(f(F))}^H \subset f(\overline{F}^G) = f(F)$ . Bundan dolayı  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel kapalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.3** Bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu toplamsaldır ancak ve ancak  $c_{G_1}(X) = c_{G_2}(X)$  olacak şekilde her  $G_1$  ve  $G_2$  dizisel yakınsama metodu ve  $c_{H_1}(Y) = c_{H_2}(Y)$  olacak şekilde her  $H_1$  ve  $H_2$  dizisel yakınsama metodu için  $f$  fonksiyonu  $G_1 - H_1$  –dizisel sürekli ve  $G_2 - H_2$  –dizisel sürekli iken  $(G_1 + G_2) - (H_1 + H_2)$  –dizisel sürekli dir.

**İspat:**  $(G_1 + G_2)(x) = u$  olsun.  $G_1(x) = u_1$  ve  $G_2(x) = u_2$  diyelim.  $f$ ,  $G_1 - H_1$  –sürekli ve  $G_2 - H_2$  –sürekli olduğundan  $H_1(f(x)) = f(u_1)$  ve  $H_2(f(x)) = f(u_2)$  olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2)(f(x)) &= H_1(f(x)) + H_2(f(x)) \\ &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= f(u_1 + u_2) \\ &= f(u). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Şimdi  $f$  nin toplamsal olmadığını varsayalım, böylece  $f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$  olacak şekilde  $u_1$  ve  $u_2$  elemanları vardır.  $\mathbf{x} = (x_n)$  olmak üzere  $G_1(\mathbf{x}) = x_1$  ve  $G_2(\mathbf{x}) = x_2$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)(u_1, u_2, 0, 0, \dots) &= G_1(u_1, u_2, 0, 0, \dots) + G_2(u_1, u_2, 0, 0, \dots) \\ &= u_1 + u_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur fakat  $(G_1 + G_2)(f(u_1), f(u_2), 0, 0, \dots) = f(u_1) + f(u_2)$  olup bu ise  $f(u_1 + u_2)$  den farklıdır. Böylece ispat tamamlanır.

### 4.3 $G - H$ –Dizisel Açık Fonksiyonlar

Şimdi standart topoloji teorisinde bulunan açık fonksiyon tanımını  $G - H$  –dizisel açık fonksiyon versiyonunu veriyoruz.

**Tanım 4.3.1** Bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her  $G$  –dizisel açık alt kümesi  $U$  için  $f(U)$  görüntü kümesi  $H$  –dizisel açık ise bu  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel açık fonksiyon olarak adlandırılır.

**Teorem 4.3.2** Bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel açıktır ancak ve ancak her  $A \subseteq X$  alt kümesi için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0H}$  dir.

**İspat:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel açık ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A^{0G} \subseteq X$  olduğu için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)$  ve bu yüzden  $(f(A^{0G}))^{0H} \subseteq f(A)^{0H}$  olur. Burada  $f(A^{0G})$ ,  $G$  –dizisel açık olduğundan dolayı  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0H}$  olur. Tersine, herhangi bir  $A \subseteq X$  alt kümesi için  $f(A^{0G}) \subseteq f(A)^{0H}$  olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, herhangi bir  $G$  –dizisel açık alt küme  $U$  için,  $f(U) \subseteq f(U)^{0H}$  olur ve bu nedenle  $f(U)$ ,  $H$  –dizisel açıktır.

**Teorem 4.3.3**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot ve  $f: X \rightarrow Y$  birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel süreklirse bu durumda  $X$  kümesinin herhangi bir  $A$  alt kümesi için  $f(A)^{0H} \subseteq f(A^{0G})$  dir.

**İspat:** Teorem 4.1.7 den  $f^{-1}$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel açıktır. Dolayısıyla Teorem 4.1.14 den,  $Y$  nin herhangi bir alt kümesi  $B$  için  $f^{-1}(B^{0H}) \subseteq f^{-1}(B)^{0G}$  olur.  $B$  yi  $f(A)$  ile değiştirirsek, iddia edildiği gibi  $f(A)^{0H} \subseteq f(A^{0G})$  olduğu bulunur.

Şimdi toplamsal bir fonksiyonun birim elemanda  $G - H$  -dizisel sürekli olmasının herhangi bir elemanda  $G - H$  -dizisel sürekli olmasını gerektirdiğini göstereceğiz.

**Teorem 4.3.4**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot ve  $f: X \rightarrow Y$  toplamsal bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  birim elemanda  $G - H$  -dizisel sürekli ancak ve ancak  $f$  herhangi bir  $a \in X$  noktasında  $G - H$  -dizisel sürekli.

**İspat:**  $f: X \rightarrow Y$  toplamsal fonksiyon birim elemanda (0)  $G - H$  -dizisel sürekli olsun. Böylece  $G(x) = 0$  olduğunda  $H(f(x)) = 0$  olur.  $x, G(x) = a$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi ve  $a$  ise  $a = (a, a, a, \dots)$  sabit dizisi olsun.  $G$  regüler bir metot olduğundan  $G(a) = a$  dır. Bu yüzden,  $x - a$  dizisi 0 birim elemanına  $G$  -yakınsaktır. Böylece varsayımdan  $H(f(x - a)) = 0$  dır.  $f$  ve  $H$  toplamsal olduğundan  $H(f(x)) - H(f(a)) = 0$  bulunur. Burada  $f(a)$  sabit dizisi  $f(a)$  noktasına yakınsak olduğundan ve  $H$  regüler olduğundan  $H(f(a)) = f(a)$  olur. Bu nedenle  $H(f(x)) = f(a)$  bulunur. Yani  $f$  herhangi bir  $a \in X$  noktasında  $G - H$  -dizisel sürekli.

**Teorem 4.3.5**  $G, H$  ve  $K$  sırasıyla  $X, Y$  ve  $Z$  üzerinde regüler birer metot ve  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  birer fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i)  $f$  ve  $g$  sırasıyla  $G - H$  -dizisel sürekli ve  $H - K$  -dizisel sürekli ise o zaman  $gf$  de  $G - K$  -dizisel sürekli.
- (ii)  $f$  ve  $g$  sırasıyla  $G - H$  -dizisel açık (kapalı) ve  $H - K$  -dizisel açık (kapalı) ise o zaman  $gf$  de  $G - K$  -dizisel açıktır (kapalıdır).
- (iii)  $gf$ ,  $G - K$  -dizisel açık (kapalı) ve  $f$  örten ise o zaman  $g$ ,  $H - K$  -dizisel açıktır (kapalıdır).
- (iv)  $gf$ ,  $G - K$  -dizisel açık (kapalı) ve  $g$  birebir ise o zaman  $f$ ,  $G - H$  -dizisel açıktır (kapalıdır).

**İspat:** (i)  $x, G(x) = u \in X$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun.  $f$  fonksiyonu  $u$  noktasında  $G - H$  -dizisel sürekli olduğundan  $H(f(x)) = f(u)$  ve  $g, f(u)$  da  $H - K$  -dizisel sürekli olduğundan  $K(g(f(x))) = g(f(u))$  olur. Bu nedenle  $gf$  bileşke fonksiyonu  $G - K$  -dizisel sürekli.

- (ii) Aşıkardır.
- (iii)  $B, Y$  nin bir  $H - K$  -dizisel açık alt kümesi olsun.  $f, G - H$  -dizisel sürekli olduğundan  $f^{-1}(B)$  kümesi  $G - H$  -dizisel açıktır.  $gf, G - K$  -dizisel açık ve  $f$

örten olduğu için  $(gf)(f^{-1}(B)) = g(B)$  kümesi  $K$  –dizisel açıktır.  $B$  nin  $H$  –dizisel kapalı olduğu durum için ispat benzerdir.

- (iv)  $A$ ,  $X$ 'in bir  $G$  –dizisel açık alt kümesi olsun.  $gf$ ,  $G - K$  –dizisel açık olduğundan  $(gf)^{-1}(A)$  kümesi  $G$  –dizisel açıktır.  $g$ ,  $H - K$  –dizisel sürekli ve bire bir olduğu için  $g^{-1}gf(A) = f(A)$  kümesi  $H$  –dizisel açıktır.  $A$ 'nın kapalı olduğu durumda ispat benzerdir.

**Teorem 4.3.6**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) Eğer  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekliyse o zaman aynı zamanda bir  $A$  alt kümesi için  $f: A \rightarrow X$  kısıtlaması da  $G - H$  –dizisel sürekli.
- (ii)  $G$  ve  $H$  regüler ise, sabit bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli.
- (iii)  $f$ ,  $G - H$  –dizisel sürekliyse o zaman  $-f$  de  $G - H$  –dizisel sürekli.

**İspat:** (i)  $x$ ,  $G(x) = u$  olacak şekilde  $A$  daki terimlerin bir dizisi olsun.  $f$ ,  $G - H$  –dizisel sürekli olduğu için  $H(f(x)) = f(u)$  olur. Yani  $f: A \rightarrow X$  kısıtlaması da  $G - H$  –dizisel sürekli.

- (ii)  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = y_0$  sabit bir fonksiyon ve  $x$ ,  $G(x) = u$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun. O zaman  $f(x) = (y_0, y_0, \dots)$  dizisi  $y_0$  noktasına yakınsar.  $H$  regüler ve  $H(f(x)) = y_0 = f(u)$  olup  $f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli.

- (iii)  $x$ ,  $G(x) = u$  olacak şekilde  $X$  de bir dizi olsun.  $f$ ,  $G - H$  –dizisel sürekli olduğu için  $H(f(x)) = f(u)$  olur. Bu nedenle  $H(-f(x)) = -H(f(x)) = -f(u)$  ve dolayısıyla  $-f$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli.

**Teorem 4.3.7**  $G$  ve  $H$  regüler birer metot ve  $f: X \rightarrow Y$  ise  $G - H$  –dizisel sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $A = \{x \in X | f(x) = 0\}$  kümesi, yani  $f$  fonksiyonunun çekirdeği,  $X$  in  $G$  –dizisel kapalı bir alt kümesidir.

**İspat:**  $A = f^{-1}(\{0\})$ ,  $\{0\}$  kümesi  $H$  –dizisel kapalı ve  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $G - H$  –dizisel sürekli bir fonksiyon olduğundan istenilen elde edilir.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Mevcut çalışma, daha genel bir ortamda sunduğumuz gibi Connor ve Grosse-Erdmann'ın çalışmalarının [19] sadece iyileştirilmesini ve genelleştirilmesini içermemektedir. Yani gerçek uzaydan daha genel olan bir topolojik grupta, aynı zamanda tamamen yeni olan gerçek fonksiyonlar için  $G - H$  -dizisel sürekliliğin araştırılması, bilgisayar bilimi, bilgi teorisi ve biyoloji bilimi gibi birçok bilim alanlarında ortaya çıkan çeşitli problemlerin modellenmesinde topoloji alanının daha yararlı bir araç olması beklenebilir. Görünüşe göre bu çalışmanın bir sonraki aşamasında, diziler yerine ağları alan mevcut çalışmanın incelenmesi, dizilerin özelliklerini kullanmak yerine ağların özelliklerini kullanarak yapılabilir.

İleride yapılabilecek çalışmalar için, mevcut çalışmayı sadece dizilerle değil, süzgeçler yoluyla daha genel bir yaklaşım için araştırmayı da öneriyoruz, çünkü süzgeçler topolojik gruplarda süreklilik kavramını ve çeşitli karakterizasyonları formüle etmede çok önemli bir rol oynarlar. Ancak, ispatların tanımları ve metotları her zaman bu çalışmanınkilerle aynı olmayacaktır.

## KAYNAKLAR

1. Connor, J. ve Grosse-Erdmann, K.-G., 2003. Sequential definitions of continuity for real functions, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 33, 1, 93-121.
2. Çakallı, H., 2011. On  $G$  –continuity, Computers and Mathematics with Applications, 61, 313-318.
3. Çakallı, H. ve Mucuk, O., 2013. On connectedness via a sequential method, Revista de la Unión Matemática Argentina, 54, 2, 101-109.
4. Çakallı, H., 2012. Sequential definitions of connectedness, Applied Mathematics Letters, 25, 461-465.
5. Buck, R. C., 1948. Solution of problem 4216, The American Mathematical Monthly, 55, 36.
6. Posner, E. C., 1961. Summability preserving functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 12, 73-76.
7. Iwinski, T.B., 1972. Some remarks on Toeplitz methods and continuity, Commentationes Mathematicae, 17, 37-43.
8. Srinivasan, V. K., 1980. An equivalent condition for the continuity of a function, Texas Journal of Science, 32, 176-177.
9. Antoni, J., 1986. On the  $A$  –continuity of real functions II, Mathematica Slovaca, 36, 3, 283-287.
10. Antoni, J. ve Salat, T., 1980. On the  $A$  –continuity of real functions, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 39, 159-164.
11. On almost-continuity and almost  $A$ -continuity of real functions, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics, 32, 25-30.
12. Savaş, E. ve Das, G., 1994. On the  $A$  –continuity of real functions, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi, 53, 61-66.
13. Savaş, E., 1984. On invariant continuity and invariant  $A$  –continuity of real functions, Journal of Orissa Mathematical Society, 3, 83-88.
14. Borsik, J. ve Salat, T., 1993. On  $F$  –continuity of real functions, Tatra Mountains Mathematical Publications, 2, 37-42.
15. Boos, J., 2000. Classical and modern methods in summability, Oxford Univ. Press, Oxford.
16. Çakallı, H. ve Thorpe, B., 1990. On summability in topological groups and a theorem of D. L. Prullage, Commentationes Mathematicae, 29, 139-148.

17. Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.
18. Fridy, J. A., 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313.
19. Zygmund, A., 1959. *Trigonometric series*, 2nd ed., vol.II, Cambridge Univ. Press. London and New York.
20. Çakallı, H., 2009. A study on statistical convergence, *Functional Analysis, Approximation and Computation*, 1, 2, 19-24.
21. Çakallı, H. ve Khan, M. K., 2011. Summability in Topological Spaces, *Applied Mathematics Letters*, 24, 348-352.
22. Çakallı, H., 1996. On statistical convergence in topological groups, *Pure and Applied Mathematika Sciences*, 43, 1-2, 27-31.
23. Maio, G. D. ve Kocinac, L. D. R., 2008. Statistical convergence in topology, *Topology and its Applications*, 156, 28-45.
24. Çakallı, H., 1995. Lacunary statistical convergence in topological groups, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 26, 2, 113-119.
25. Fridy, J. A. ve Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, *Pacific Journal of Mathematics*, 160, 1, 43-51.
26. Fridy, J. A. ve Orhan, C., 1993. Lacunary statistical summability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 173, 497-504.
27. Çakallı, H., 2008. Sequential definitions of compactness, *Applied Mathematics Letters*, 21, 6, 594-598.
28. Çakallı, H., 2011. New kinds of continuities, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 960-965.
29. Çakallı, H., 2011. Forward continuity, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 13, 2, 225-230.
30. Çakallı, H., 2011.  $\alpha$ -quasi-Cauchy sequences, *Mathematical and Computer Modelling*, 53, 397-401.
31. Çakallı, H., 2008. Slowly oscillating continuity, *Abstract and Applied Analysis*, 2008, Article ID 485706.
32. Dik, M. ve Canak, I., 2010. New types of continuities, *Abstract and Applied Analysis*, 2010, Article ID 258980.
33. Mucuk, O. ve Şahan, T., 2014. On  $G$  –sequential continuity, *Filomat*, 28, 1181-1189.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı ve Soyadı** : Zeynep NAVRUZ  
**Adres** : Selimiye Mah. 3014. Sok. Burak Apt. C-Blok No:11 İç  
Kapı No:15 Melikgazi / KAYSERİ  
**E-posta adresi** : zeynep\_navruz@hotmail.com

### EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

**Lisans** : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011-2015  
**Yüksek Lisans** : Aksaray Üniversitesi, Matematik A.B.D., 2016-2019

### TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Sahan,T. ve Navruz, Z., **Generalized  $G$  –sequential continuity**, III.International Scientific and Vocational Studies Congress (BILMES SH 2019), 27-30 June 2019, Ürgüp, Nevşehir, TURKEY. (Tam Metin)