

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ

Şükran Duygu SOYLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ

Şükran Duygu SOYLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ

Şükran Duygu SOYLU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2025

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ

Şükran Duygu SOYLU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez/...../2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Dr. Öğretim Üyesi Oğuzhan ÇELİK

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ

Şükran Duygu SOYLU

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Haziran 2025, 80 sayfa

Bu tezde, standart dual sayı sistemine alternatif olarak önerilen genelleştirilmiş dual sayılar, genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar ve genelleştirilmiş vida hareketi incelenmiştir. Çalışmada dual sayıların tarihsel gelişiminden bahsedilerek literatürde yapılan genelleştirme ve genişletme çalışmalarına yer verilmiştir. Literatürde daha önce yapılmayan bir genelleştirme olan genelleştirilmiş dual sayılar, Yaglom ve Catoni gibi matematikçilerin kompleks sayılar üzerine yaptıkları genelleştirmelerden yola çıkılarak, parabolik sayılar üzerinden tanımlanmış bir sayı sistemidir. Bu bağlamda, genelleştirilmiş dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D}_k = \{z = x + y\varepsilon_k : x, y, k \in \mathbb{R} \text{ ve } (\varepsilon_k - k)^2 = 0, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanmış; bu sayıların cebirsel yapısı, genelleştirilmiş Galile düzlemi ve geometrisi incelenmiştir. Genelleştirilmiş dual sayılar için polar form ve dönme matrisi elde edilerek üç boyutlu genelleştirilmiş dual modül yapısı tanıtılmış; genelleştirilmiş Study teoremi ispatlanarak sonuçları belirtilmiştir.

Genelleştirilmiş dual sayıların kuaterniyonlar ile birleştirildiği yeni bir cebirsel yapı oluşturularak genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar tanımı verilmiştir. Bu yapı vasıtasıyla genelleştirilmiş vida hareketi oluşturulmuş ve sonuçları açıklanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Dual kuaterniyonlar, Dual sayılar, Genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar, Genelleştirilmiş dual sayılar, Genelleştirilmiş vida hareketi.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Dr. Öğretim Üyesi Oğuzhan ÇELİK

ABSTRACT

GEOMETRY IN THE SET OF THE GENERALIZED DUAL NUMBERS

Şükran Duygu SOYLU

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa OZDEMİR

June 2025, 80 pages

This thesis investigates the generalized dual numbers, generalized dual quaternions and generalized dual screw motion as an alternative to the standart dual number system. The study begins with a historical overview of dual numbers and explores the generalizations presented in the literature. The generalized dual numbers, introduced here for the first time, are constructed based on the parabolic number framework, inspired by generalizations of complex numbers proposed by mathematicians such as Yaglom and Catoni. In this context, the generalized dual numbers are defined as

$$\mathbb{D}_k = \{z = x + y\varepsilon_k : x, y, k \in \mathbb{R} \text{ ve } (\varepsilon_k - k)^2 = 0, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\},$$

and their algebraic structure, associated generalized Galilean plane and geometric interpretation are examined. The polar form and rotation matrix for these numbers are derived, leading to the introduction of a three-dimensional generalized dual module. Additionally, the generalized Study theorem is proved and its implications are discussed.

A new algebraic system combining generalized dual numbers with quaternions is introduced under the name generalized dual quaternions. Using this framework, a generalized screw motion is formulated and its mathematical properties are presented.

KEYWORDS: Dual numbers, Dual quaternions, Generalized dual numbers, Generalized dual quaternions, Generalized screw motion.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Assoc. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Assoc. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Asst. Prof. Dr. Oğuzhan ÇELİK

ÖNSÖZ

Bu tezde, genelleştirilmiş dual sayılar ve cebirsel özellikleri incelenmiştir. En genel anlamda bir dual sayının kutupsal formu, matris formu, Galile düzlemi ve metriği gibi tanımlamalar yapıp genelleştirilmiş dual modül ve reel vektörlerle olan ilişkisi belirtilmiştir. Genelleştirilmiş dual vektörün Öklid uzayındaki yönlü doğru ile ilişkisi bulunarak genelleştirilmiş Study dönüşümü incelenmiştir. Genelleştirilmiş dual sayı bileşenli genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar incelenmiş, cebirsel özellikleri belirtilmiş ve genelleştirilmiş vida hareketi sunulmuştur.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e, ayrıca bu tez çalışmasında çok değerli fikirleri ile bana destek olan; 'Generalization of dual numbers and dual Euclidean 3-Space' isimli makalemizde kıymetli emeklerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU'na en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, süreç boyunca beni cesaretlendiren, manevi desteklerini esirgemeyen aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	5
2.1. Dual Sayılar	5
2.1.1. D^3 Modülü	14
2.2. Kuaterniyonlar	19
3. MATERYAL VE METOT	32
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	33
4.1. Genelleştirilmiş Dual Sayılar	33
4.2. D_k^3 Genelleştirilmiş Dual Sayılar Modülü	49
4.3. Genelleştirilmiş Dual Kuaterniyonlar	61
4.4. Genelleştirilmiş has dual kuaterniyonlar ve vida hareketi	68
5. SONUÇLAR	71
6. KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora tezi olarak sunduğum “GENELLEŞTİRİLMİŞ DUAL SAYILAR KÜMESİNDE GEOMETRİ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../.....

Şükran Duygu SOYLU

İmzası

.....

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	: 3 boyutlu reel uzay
$\mathbb{D}$	: Standart dual sayılar kümesi
$\mathbb{D}_k$	: Genelleştirilmiş dual sayılar kümesi
$\mathbb{D}_k^3$	: Genelleştirilmiş dual vektör modülü
ε_k	: Genelleştirilmiş dual birim
$\mathbb{M}_{n \times m}$	: $n \times m$ boyutlu matris uzayı
$\mathbb{M}_k$	: k reel sayısına bağlı matrislerin kümesi
$\langle, \rangle$	: İç çarpım
$\langle, \rangle_{\mathbb{D}_k}$	: Genelleştirilmiş dual skaler çarpım
$\langle, \rangle_{\mathbb{D}_k^3}$	: $\mathbb{D}_k^3$ modülü üzerinde Öklid skaler çarpım
$\langle, \rangle_{\mathbb{G}}$	: Genelleştirilmiş Galile skaler çarpımı
$d_{\mathbb{G}}(,)$	: Genelleştirilmiş Galile düzlemi metriği
$\mathbb{D}_k^3$	: Genelleştirilmiş dual modül
$ \cdot _{\mathbb{D}_k}$	: Genelleştirilmiş dual sayı modülü
$\ \cdot\ _{\mathbb{D}_k^3}$	: Genelleştirilmiş dual vektör normu
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	: İki vektörün vektörel çarpımı
$\mathbf{i} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{j}$	: Genelleştirilmiş iki dual vektörün vektörel çarpımı
$\overrightarrow{AB}$	: AB vektörü
$\mathbb{H}$	: Reel kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$	: Genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar kümesi
$\ \cdot\ _{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}$	: Genelleştirilmiş dual kuaterniyon normu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	Genelleştirilmiş Galile düzlemi.....	37
Şekil 4.2	Genelleştirilmiş dual çemberler.....	37
Şekil 4.3	(a) $k > 0$; (b) $k < 0$ ve (c) $k = 0$ için genelleştirilmiş dual birim çemberler	38
Şekil 4.4	$\mathbb{D}_1$ için 4 yarıçaplı genelleştirilmiş dual çemberler.....	38
Şekil.4.5	$\mathbb{D}_{1.5}$ için X noktasının θ açısı altındaki dönmesi.....	48



1. GİRİŞ

Kompleks, hiperbolik ve dual sayılar, reel sayılar üzerine kurulu iki boyutlu birimli cebir sistemleri arasında yer almaktadırlar. Bu sistemlerden dual sayılar, özellikle türev ve diferansiyel gibi kavramlarla bağlantısı kurularak geliştirilmiştir. Tarih boyunca matematikçiler, diferansiyel kavramını açıklamak için çeşitli yöntemler kullanmışlardır. 1684’de G. V. Leibniz’in diferansiyel hesaplamalarında türev ve integral tanımlarını yaparken kullandığı ‘sonsuz küçükler’ yaklaşımı, dual sayıların temellerinin atılmasında önemli bir rol oynamıştır (Struik 1969). Grassmann’ın (1844) dış cebir ve genişletilmiş sayı sistemleri üzerine yaptığı araştırmalar, dual sayıların kuramsal alt yapısının oluşmasına önemli ölçüde katkı sağlamıştır. Grassmann (1844), geometrik yapıları cebirsel yapılarla ilişkilendirmiş ve diferansiyel hesaplamalarla türev konularına yeni bir bakış açısı sunmuştur. Bu teorik gelişmelerin etkisiyle W. Clifford, dual sayıların da dahil olduğu bir genişletilmiş sayı sistemlerini içeren Clifford cebirini ortaya koymuştur (Clifford 1873). İlk kez Clifford tarafından sunulan dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon; \varepsilon^2 = 0, a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \varepsilon \neq 0\}$$

olarak ifade edilmiştir. Buna göre ε bir dual birim olarak, $\varepsilon^2 = 0$ ve $\varepsilon \neq 0$ ifadelerini sağladığı düşünülmüştür; a ve b reel sayıları ise dual sayının sırasıyla reel ve dual kısımları olarak ifadelendirilmiştir. Clifford, bu cebirsel sistemin geometri ve mekaniğe uygulanabilirliğini de göstermiştir (Clifford 1873).

Öte yandan, dual sayılardan oluşan üç boyutlu vektörler kümesi $\mathbb{D}^3$ modülünü oluşturmaktadır. Study (1901), dual sayı kavramını uzay geometri alanında kullanarak, iki yönlü doğru arasındaki açıyı tanımlamak adına ‘dual açı’ kavramını ortaya atmıştır. Study (1901) ve Kotelnikov (1895), dual vektörleri mekanik problemlere uygulayan ilk isimler olmuşlardır. Study (1901), Öklid uzayında yönlü doğrular ile birim dual küre üzerindeki noktalar arasında birebir ilişki kurulduğunu ortaya koymuştur. Bu gelişmeleri takiben Veldkamp (1976), dual vektörler aracılığı ile anlık uzaysal kinematik üzerine çalışmalar yaparak bu sistemin uygulama yelpazesini daha da genişletmiştir.

Dual sayılar, homojen dönüşümler yerine kullanılabilecek alternatif dönüşüm yöntemleri sunarak robot kinematığı, dinamik ve kontrol modellemesinde önemli yer tutan Jacobi matrislerinin elde edilmesine yönelik çalışmalarda da etkili biçimde kullanılmıştır

(Gu ve Luh 1987). Özellikle mekanik ve yazılım alanlarında yaşanan ilerlemeler, dual sayılara olan ilgiyi ciddi ölçüde arttırmıştır (Fischer 1999).

Notasyon açısından kolaylık sağlaması dual sayıları, bazı klasik doğrusal cebir algoritmalarının dual formlarının oluşturulmasında, vida hareketi gibi katı cisimlerin yer değiştirmelerinin modellenmesinde oldukça kullanışlı kılmiştir (Pennestri ve Stefanelli 2007; Brodsky ve Shoham 1999).

Dual sayılarla ilgili literatürde bir takım genelleştirmeler ve genişletmeler yapılmıştır. Türev alma işlemlerinde otomasyon ve hassasiyet olması açısından, özellikle mühendislikteki optimizasyon problemlerine kolaylık getirmesi amacıyla, geleneksel dual sayıların farklı bir uzantısı olarak yapılan genelleştirmelerle oluşan sayı sistemine hiper-dual sayılar veya multi-dual sayılar denilmiştir (Fike 2009; Fike ve Alonso 2011; 2012). Bu genelleştirmelerde, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ olmak üzere bir hiper-dual sayı,

$$P = p_0 + \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_3, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = 0 \text{ ve } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$$

şeklinde tanımlanmış, dört bileşenli bir dual sayı kavramı oluşturulmuştur. Penunuri vd. (2019), n. dereceden hiper-dual sayılar şeklinde bu sayı sistemini genişletmiştir. Meselmi (2015) ise yüksek dereceden hiper-dual sayı olarak oluşturduğu

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon^i : x_i \in \mathbb{R}, \varepsilon^{n+1} = 0, \varepsilon^i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } \varepsilon^0 = 1$$

dual sayı genelleştirmesine multi-dual sayı adını vermiştir.

Bu tez çalışmasında dual sayılar için literatürde olmayan, farklı bir genelleştirme yapısı geliştirilmiş, bu yapının bazı cebirsel özellikleri ve geometrideki yorumu incelenmiştir. Buna göre Yaglom (1968; 1979) ve Catoni vd. (2008) tarafından sunulan genelleştirilmiş kompleks sayı

$$z = x + py; p^2 = \alpha + p\beta; x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ve } p \notin \mathbb{R}$$

tanımlaması baz alınmıştır. Bu sayı sistemi üzerinde bölme işlemi tanımlanabilmesi için

$$\Delta = \beta^2 + 4\alpha$$

ifadesinin işaretlerinin incelenmesi gerektiğinden, genelleştirilmiş kompleks sayılar üç gruba ayrılmıştır. $\Delta = 0$, α ve β 'ya göre bir parabol belirttiğinden bu özellikteki sayılar kümesine parabolik sayılar tanımlaması yapılmıştır (Catoni vd. 2011).

$\beta = 0$ alındığında Δ ifadesinin işaretleri α 'ya bağlı olduğundan $p^2 = -1, 0, 1$ olması halinde sırasıyla standart kompleks, dual ve hiperbolik sayılar şeklinde ifade-
lendirdiğimiz sayı sistemleri karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada ise $\Delta = 0$ olduğu fakat β değerinin 0 olmadığı parabolik sayılar kümesi ele alınmış ve bu sayılardan oluşan kü-
meye de genelleştirilmiş dual sayılar kümesi adı verilmiştir. Genelleştirilmiş dual sayılar
kümesi

$$\mathbb{D}_k = \{x + y\varepsilon_k : x, y \in \mathbb{R} \text{ ve } \varepsilon_k^2 = -k^2 + 2k\varepsilon_k, k \in \mathbb{R}, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\}$$

olarak ifade edilmiştir. Bu doğrultuda bu tezde

1. Genelleştirilmiş dual sayıların cebirsel özellikleri verilmiş; bu sayıların kurduğu genelleştirilmiş Galile düzlemi ve geometrisi oluşturulmuştur. Genelleştirilmiş dual sayıla-
rın üzerinde bulunduğu çemberin durumuna göre bir sınıflandırılması yapılmış; polar
formları ve matris formları belirtilerek genelleştirilmiş Galile düzlemindeki dönme tanım-
lanmış ve örnekler verilmiştir.

2. Genelleştirilmiş dual değişkenli bir fonksiyonun nasıl üretilebileceği gösterilmiştir.

3. Genelleştirilmiş bir dual sayının polar formu sunulmuş, genelleştirilmiş dual de
Moivre formülü verilmiştir.

4. Genelleştirilmiş dual sayılar ile $\mathbb{M}_2$ matrisleri arasında bir izomorfizma kurulmuş;
genelleştirilmiş dual matris form belirtilmiştir ve buna bağlı olarak genelleştirilmiş Galile
düzleminde bir dönme matrisi oluşturularak özellikleri incelenmiştir.

5. Genelleştirilmiş dual vektörlerle kurulan üç boyutlu genelleştirilmiş dual modül
kurulmuş, genelleştirilmiş dual skaler çarpım ve buna bağlı olarak genelleştirilmiş dual
vektör normu ve birim olma şartları incelenmiştir.

6. Genelleştirilmiş dual birim küre tanımı ile birlikte bu kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$
uzayının yönlü doğruları arasındaki ilişkiyi sunan genelleştirilmiş Study teoremi ispat-
lanmıştır, teoremin sonuçları üzerinde durulmuştur.

7. Genelleştirilmiş dual vektörel çarpım ve özellikleri belirtilmiştir.

Tezin bu kısımları makale formatında yayınlanmıştır (Soylu vd. 2025).

Tezin bundan sonraki kısımlarında bileşenleri genelleştirilmiş dual sayılardan oluşan
genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar sistemi tanımlanmış ve cebirsel özelliklerinden bir
kısımına değinilmiştir. Son olarak, bu sistem yardımı ile genelleştirilmiş bir vida hareketi

için matematiksel operatör sunulmuş; özellikleri belirtilmiştir.



2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Dual Sayılar

Dual sayılar ilk defa Clifford (1873) tarafından tanıtılmıştır. Kuaterniyonlar ile literatürde adını duyuran Hamilton'un 1800'li yılların ortalarında yeni sayı sistemleri üzerine yaptığı çalışmalar, dual sayıların arka planında önemli rol oynamıştır. Daha sonra Clifford (1873), günümüzde Clifford cebiri olarak isimlendirilen cebirsel sistemleri tanıttığı çalışmasında dual sayılara özel bir durum olarak yer vermiştir. Clifford (1873)'ün çalışmalarından anlaşılmaktadır ki kompleks sayıların reel düzlemde bir dönme tanımlaması gibi, dual sayılar da öteleme hareketlerine bir model oluşturmuştur.

Reel sayılar üzerinde, iki boyutlu üç ünitel cebir vardır: Kompleks sayılar, split-kompleks sayılar ve dual sayılar. Dual sayılar, Clifford (1873) tarafından, kompleks sayılara benzer bir form olarak $a + \varepsilon b$ şeklinde sunulmuştur. a reel kısım, b dual kısım olmak üzere, $\varepsilon^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ε ise dual operatördür. Hacısalihoğlu (1983; 2010) ve Özdemir (2020) tarafından da belirtildiği üzere, Study (1901), dual sayıları uzay geometride bir dual açı kavramını oluşturabilmek adına kullanmış ve dual açıları da Öklid uzayında iki doğru arasındaki ilişkiyi açıklamak için kullanmıştır. Üç boyutlu uzayda iki doğru arasındaki uzaklık ℓ ve doğrultmanları arasındaki açı α olmak üzere, $\theta = \alpha + \varepsilon \ell$ ifadesi bir dual açı olarak belirtilmiştir (Study 1901). Ayrıca, kullanışlılık ve kolay bir notasyona sahip olmaları sebebiyle, vida hareketi gibi cisimlerin yer değiştirme hareketleri ile ilgili bir takım klasik lineer cebir algoritmaları da dual vektör cebiri adı altında dual sayılardaki versiyonları ile literatürde yerini almıştır. Dual sayıların katı cisim hareketlerinin analizine olduğu kadar, yer değiştirme analizleri, kinematik sentez ve uzaysal mekanizmaların dinamik analizi gibi konularda da katkısı büyük olmuştur (Miller ve Boehning 1968; Rooney 1978; Brodsky ve Shoham 1999; Pennestri ve Stefanelli 2007). Robotik kinematik, robotik dinamik ve kontrol modellemede homojen transformasyonlar yerine dual sayı transformasyonları işlemleri de dual sayıların bir başka önemli katkısıdır (You ve Luh 1987). Özellikle mekanik ve yazılım alanlarındaki gelişmeler, dual sayılar üzerine olan çalışmaların sayısında artışa sebep olmuştur (Cheng 1994; Fischer 1999; Gallier 2011; Herrera vd. 2012).

Tanım 2.1. *Dual sayılar kümesi*

$$\mathbb{D} = \{z : z = x + y\varepsilon : x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Clifford 1873).

Burada ε , dual birim olarak adlandırılırken $\varepsilon^2 \neq 0$ olması, farklı özelliklere sahip bir iki boyutlu sayı cebirinin kurulmasını sağlamıştır.

Tanım 2.2. $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı için $x \in \mathbb{R}$, z dual sayısının reel kısmı ($\text{Re}(z)$) ve $y \in \mathbb{R}$, z dual sayısının dual kısmı ($\text{Du}(z)$) olarak isimlendirilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.3. $z_1 = x_1 + y_1\varepsilon$ ve $z_2 = x_2 + y_2\varepsilon$ dual sayılar olmak üzere dual sayıların eşitliği, toplama ve çarpma işlemleri

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \implies x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\varepsilon \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir 2020).

Teorem 2.4. $x \neq 0$ olmak üzere, $z = x + y\varepsilon$ dual sayısının tersi

$$z^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\varepsilon$$

ile bulunur (Özdemir 2020).

İspat $z = x + y\varepsilon$ dual sayısının tersi $z^{-1} = a + b\varepsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z z^{-1} &= 1 \\ (x + y\varepsilon)(a + b\varepsilon) &= 1 \\ xa + (xb + ay)\varepsilon &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$a = \frac{1}{x} \text{ ve } b = -\frac{y}{x^2}$$

olur. □

Görüldüğü üzere, bir dual sayının tersinin tanımlı olabilmesi için reel kısmının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Bu durumda dual sayılar kümesi, reel sayılarda değişmeli bir halka oluşturmaktadır.

Teorem 2.5. $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı için n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$z^n = x^n + nx^{n-1}y\varepsilon$$

eşitliği, z dual sayısının kuvvetini verir (Özdemir 2020).

İspat $z = x + y\varepsilon \in \mathbb{D}$ olsun

$$\begin{aligned} z^n &= (x + y\varepsilon)^n \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y\varepsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}(y\varepsilon)^2 + \dots + (y\varepsilon)^n \\ &= x^n + nx^{n-1}y\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 2.6. $z = x + y\varepsilon \in \mathbb{D}$ için

$$\bar{z} = x - y\varepsilon$$

ifadesine z dual sayısının eşleniği adı verilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.7. $z = x + y\varepsilon$ dual sayısının modülü

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= |x| \end{aligned}$$

ile ifadelendirilir. Bu durumda, reel kısmı 1 veya -1 olan dual sayılar; $1 + y\varepsilon$ ve $-1 + y\varepsilon$ birim dual sayılar olur (Özdemir 2020).

Tanım 2.8. Dual sayılar kümesi, reel sayılar cismi üzerinde bir modül belirtir. Bu modüldeki skaler çarpım, $z = x_1 + y_1\varepsilon, w = x_2 + y_2\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}} &: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle z, w \rangle_{\mathbb{D}} &= \frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2} \\ &= x_1x_2 \end{aligned}$$

ile tanımlıdır (Özdemir 2020).

Tanım 2.9. $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı için

$$\begin{aligned} |z|_{\mathbb{D}} &= \sqrt{\langle z, z \rangle_{\mathbb{D}}} \\ &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= |x| \end{aligned}$$

değerine z dual sayısının modülü (normu) adı verilir (Özdemir 2020).

Bir $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı, apsis eksenini $\text{Re}(z)$ ve ordinat eksenini $\text{Du}(z)$ olacak şekilde belirtilen bir koordinat düzleminde $Z = (x, y)$ noktası şeklinde belirtilebilir. Bu durumda $z = x + y\varepsilon$ dual sayısının normunu ifade eden $|x|$ sayısı, Z 'nin orijinden uzaklığını gösterir ki bu düzleme Galile düzlemi denir. Galile düzleminde normu r olan dual sayıların geometrik yeri de $|x| = r$ olan birbirine paralel iki doğru belirtir; bu doğrular Galile düzleminin çemberi olarak belirtilir.

Galile düzleminde $z = x_1 + y_1\varepsilon$ ve $w = x_2 + y_2\varepsilon$ dual sayılarına karşılık gelen noktalar sırasıyla $Z = (x_1, y_1)$ ve $W = (x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$\langle Z, W \rangle_{\mathbb{G}} = x_1 x_2$$

ifadesi bu düzlemin skaler çarpımını,

$$d_{\mathbb{G}}(Z, W) = |x_1 - x_2|$$

ifadesi de bu düzlemin metriğini gösterir (Özdemir 2020).

Teorem 2.10. $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı $r = x$ ve $\theta = \frac{y}{x}$ olmak üzere,

$$z = r(1 + \theta\varepsilon)$$

ile belirtilebilir. Bu gösterim şekline z dual sayısının kutupsal formu, θ açısına da z dual sayısının argümenti denir (Özdemir 2020).

İspat $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı

$$z = x \left(1 + \frac{y}{x} \varepsilon \right)$$

şeklinde yazıldığında $r = x$ ve $\theta = \frac{y}{x}$ denilirse

$$z = r(1 + \theta\varepsilon)$$

elde edilir. □

Kutupsal form kullanılarak dual sayıların kuvvetleri daha kolay bir şekilde alınabilir, böylece bir dual sayı için De Moivre formülü yazılabilir.

Teorem 2.11. $z = r(1 + \theta\varepsilon)$ dual sayısı için $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z^n = r^n (1 + n\theta\varepsilon)$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2020).

İspat Tümevarımla, $n = k$ için

$$z^k = r^k (1 + k\theta\varepsilon)$$

eşitliğinin doğru olduğu kabul edilirse, $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= r^k (1 + k\theta\varepsilon) r(1 + \theta\varepsilon) \\ &= r^{k+1} (1 + (k+1)\theta\varepsilon) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bunun yanısıra,

$$z^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\varepsilon$$

olduğundan

$$z^{-1} = r^{-1}(1 - \theta\varepsilon)$$

yazılabileceğinden, gösterimin negatif n tam sayıları için de geçerli olduğu aşıkardır. □

Teorem 2.12. $z = r(1 + \theta\varepsilon)$ dual sayısının n . dereceden kökü

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{\theta}{n}\varepsilon \right)$$

ile belirlidir (Özdemir 2020).

İspat $z = r(1 + \theta\varepsilon)$ dual sayısının n . dereceden kökü $w = r_0(1 + \theta_0\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$z^{\frac{1}{n}} = w = r_0(1 + \theta_0\varepsilon)$$

ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} z &= w^n \\ r(1 + \theta\varepsilon) &= (r_0)^n (1 + (\theta_0)^n \varepsilon) \end{aligned}$$

olacağından $r_0 = \frac{1}{r^n}$ ve $\theta_0 = \frac{\theta}{n}$ bulunur. $\square$

Teorem 2.13. *Kutupsal gösterimi $z = r(1 + \theta\varepsilon)$ ile belli olan bir dual sayısı için eksponansiyel form*

$$z = re^{\theta\varepsilon}$$

ile belirtilir (Özdemir 2020).

İspat Taylor açılımından

$$\begin{aligned} e^{\theta\varepsilon} &= 1 + \frac{\theta\varepsilon}{1!} + \frac{(\theta\varepsilon)^2}{2!} + \frac{(\theta\varepsilon)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \theta\varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan

$$z = re^{\theta\varepsilon}$$

yazılımı, z dual sayısı için eksponansiyel form olur. $\square$

Tanım 2.14. $\mathbf{t} = t + t^*\varepsilon$ ifadesi bir dual değişken olarak alınır

$$F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$F(\mathbf{t}) = F(t + t^*\varepsilon)$$

ile tanımlanan fonksiyona dual değişkenli fonksiyon adı verilir ki bu fonksiyon iki değişkenli f ve g fonksiyonları ile

$$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(\mathbf{t}) = f(t, t^*) + g(t, t^*)\varepsilon$$

şeklinde de yazılabilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.15. $f(\mathbf{t}) = f(t + t^*\varepsilon)$ diferansiyellenebilir, dual değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(\mathbf{t}) = f(t) + t^* f'(t)\varepsilon$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2020).

İspat $f(\mathbf{t})$ diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $f(\mathbf{t}) = f(t + t^*\varepsilon)$ fonksiyonu için $\mathbf{t} = t$ noktasındaki Taylor açılımından

$$f(\mathbf{t}) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(\mathbf{t}-t) + \frac{f''(t)}{2!}(\mathbf{t}-t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(\mathbf{t}-t)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(\mathbf{t}-t)^n + \dots$$

yazılırsa, $\mathbf{t} - t = t^*\varepsilon$ olduğundan

$$f(\mathbf{t}) = f(t) + t^* f'(t)\varepsilon$$

elde edilir. □

Teorem 2.16. Dual sayılar halkası ile

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

halkası birbirine izomorftur (Özdemir 2020).

İspat

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{M} \\ f(x + y\varepsilon) &= \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın.

i. Eğer

$$f(x + y\varepsilon) = f(p + s\varepsilon)$$

ise

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & s \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

olur ki buradan $x = p$ ve $y = s$, dolayısıyla $x + y\varepsilon = p + s\varepsilon$ elde edilir, Böylece f fonksiyonu birebir olur.

ii. Her

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$$

matrisi için bir $z = x + y\varepsilon$ dual sayısı oluşturulabilir; buradan f fonksiyonu örtendir sonucu çıkar.

iii. $z = x_1 + y_1\varepsilon$ ve $w = x_2 + y_2\varepsilon \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f((x_1+x_2) + (y_1+y_2)\varepsilon) \\ &= \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ 0 & x_1+x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= f(z) + f(w) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f(zw) &= f((x_1x_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\varepsilon) \\ &= \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= f(z)f(w) \end{aligned}$$

olur. Böylece işlemlerin korunması da sağlandığından f bir halka izomorfizması olur. $\square$

Dual sayılar ve onların yüksek boyutlara genişletilmesi, otomatik türevleme, nümerik hesaplamalar ve sonlu diferansiyel kalkülüs alanlarında önemli bir araç olmuştur (Fike 2009; Fike ve Alonso 2011; 2012; Cohen ve Shoham 2015; Cohen ve Shoham 2017; Cohen ve Shoham 2018; Behr vd. 2019; Penunuri vd. 2019; Imoto vd. 2020; Rehner ve Bauer 2021; Szirmay 2021; Yüce 2021; Peon vd. 2024). Hiper-dual sayıların ve kuaterniyonlarının kinematikteki uygulama alanları da pek çok çalışmada görülebilir (Aslan vd. 2020; Aslan 2021; Gürses vd 2021; Ramis vd. 2022; Peon vd. 2024).

Dual sayıların kinematik, mekanik, robotik ve Galile dönüşümleri gibi pek çok alanda geniş uygulama alanına sahip olması ve türevleme işlemlerindeki avantajları, bu sayıların

genelleştirilmesi yönünde de önemli çalışmalara ön ayak olmuştur. Bu çalışmaların bir kısmı boyut arttırılması yönünde olmuş (Majernik 1995; Fike 2009; Fike ve Alonso 2011; 2012; Messelmi 2015), bir kısmı ise bu sayıların iki boyutlu olarak genelleştirilmesi şeklinde olmuştur (Yaglom 1968; Fjelstad ve Gal Sorin 2001; Harkin ve Harkin 2004; Catoni vd. 2008). Bu genelleştirmelerin kısa bir özeti aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Reel sayılar üzerinde genelleştirilmiş iki boyutlu ünitel cebirler

$$\mathbb{G}\mathbb{C} = \{z = x + ky : k^2 = a + bk; a, b, x, y \in \mathbb{R}, k \notin \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Çarpma işlemine göre bu küme bir grup oluşturmaktadır. Bu küme kompleks, hiperbolik ve dual sayılar olarak üç kısımda incelenebilir (Yaglom 1968; Harkin ve Harkin 2004; Catoni vd. 2008).

$\Delta = b^2 - 4a$ için $\Delta > 0$ ifadesini sağlayan sayılar kompleks sayılar, $\Delta < 0$ eşitsizliğinin ifade ettiği sayılar genelleştirilmiş hiperbolik sayılar ve $y = -x^2/4$ eşitliği ile belirli parabol üzerinde bulunan, $\Delta = 0$ eşitliğini sağlayan sayılara da parabolik sayılar denilmiştir (Catoni vd. 2008).

Dual sayıların daha büyük boyutlu sayılar olarak genelleştirilmesi ise hiper-dual sayılar veya multi dual sayılar olarak isimlendirilmiştir. Fike (2009) tarafından, yüksek türevleme tekniğinde kullanılmak üzere sunulan hiper-dual sayılar, özellikle katı cisim kinematiğini kullanışlı bir şekilde ifade etmiştir (Fike 2009; Fike ve Alonso 2011; 2012). Bir başka deyişle, hiper-dual sayıların üç imajiner kısmı vardır. Fike (2009), **hiper-dual sayıları**

$$\mathbb{D} = \{P = p_0 + \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_3, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1, p_i \in \mathbb{R}\}.$$

şeklinde tanımlamıştır. Cohen ve Shoham (2015; 2017; 2018), hiper-dual sayıları kinematik ve dinamikte çok cisimli sistemlerin hareketlerinde karşılaşılan türev denklemlerini basitleştirme amacıyla kullanmışlardır. Bu çalışmalarda hiper dual sayılar, Study (1901) ve Kotelnikov (1895) gibi türev alma işlemlerine yönelik olarak kullanılmıştır (Cohen ve Shoham 2018). Cohen ve Shoham (2015), ayrıca bir hiper-dual sayının sadece iki dual sayı ile ifade edilebileceğini belirtmişlerdir.

Penunuri vd.(2019)'ne göre, n . dereceden türevleme işlemlerinde dual sayıların genelleştirilmesi,

$$\mathbb{D}_n = \{a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

kümesi, n . derece hiper-dual sayılar kümesi olmak üzere,

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \begin{cases} 0 & i + j > n \\ \varepsilon_{i+j} & \text{diğer} \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, \dots, n$. şeklinde tanımlanmıştır. Yüksek dereceden hiper-dual sayılar, dual operatörün kuvvetleri olarak tanımlanabilirler. Messelmi, (2015) yüksek dereceden hiper-dual sayıları "**multidual sayılar**" adı ile

$$\mathbb{MD} = \left\{ z = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon^i : x_i \in \mathbb{R}, \varepsilon^{n+1} = 0, \varepsilon^i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } \varepsilon^0 = 1 \right\}.$$

şeklinde tanımlamıştır.

2.1.1. D^3 Modülü

Bileşenleri dual sayılardan oluşan dual sayı vektör kümesi $\mathbb{D}^3$ modülünü oluşturur. Study (1901) ve Kotelnikov (1895), dual sayı vektörlerini mekanik alanında kullanan ilk kişiler olmuştur. Study (1901), Öklid uzayındaki yönlü doğrular ile dual birim küre üzerindeki noktalar olarak tanımladığı birim dual vektörler arasında birebir ilişki olduğunu göstermiştir. Dual vektörler, anlık uzaysal kinematik alanında Veldkamp (1976) tarafından da çalışılan bir konu olmuştur.

Tanım 2.17. $\forall i = 1, 2, 3$ için $\mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon$ ve $\mathbf{v}_i = v_i + v_i^* \varepsilon$ olmak üzere,

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ kümesi üzerinde alınan $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ vektörleri ve $\lambda = \lambda + \lambda^* \varepsilon$ dual sayısı için

i. Toplama İşlemi:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 + \mathbf{v}_3)$$

ii. Skalerle çarpma İşlemi:

$$\lambda \mathbf{U} = (\lambda \mathbf{u}_1, \lambda \mathbf{u}_2, \lambda \mathbf{u}_3)$$

işlemleri tanımlansın. Bu işlemlere göre $\mathbb{D}^3$ kümesine $\mathbb{D}$ halkası üzerinde tanımlı bir modül ve bu modülün her bir elemanına da bir dual vektör adı verilir.

$$\forall \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \in \mathbb{D}^3 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \\ &= (u_1 + u_1^* \varepsilon, u_2 + u_2^* \varepsilon, u_3 + u_3^* \varepsilon) \end{aligned}$$

olacağından

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3) + (u_1^*, u_2^*, u_3^*)\varepsilon$$

yazılabileceği aşıkardır. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ denilirse her dual vektörün

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon$$

şeklinde reel vektörler ile ifade edilebileceği de görülmektedir (Özdemir 2020).

Tanım 2.18. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon$ dual vektörleri için

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}^3} &: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D} \\ \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3} &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon, \mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^* \rangle + \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle)\varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{D}^3$ modülü üzerinde tanımlı skaler çarpım adı verilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.19. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon \in \mathbb{D}^3$ için

$$\sqrt{\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}^3}} = \|\mathbf{u}\| + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u}\|}\varepsilon$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2020).

İspat $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}^3}} &= \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle\varepsilon} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}}\varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. $\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \|\mathbf{u}\|$ olduğundan

$$\sqrt{\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}^3}} = \|\mathbf{u}\| + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u}\|}\varepsilon$$

elde edilir. □

Tanım 2.20. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon$ dual vektörünün uzunluğu veya normu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{D}^3} &= \sqrt{\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}^3}} \\ &= \|\mathbf{u}\| + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u}\|}\varepsilon \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan bir dual sayıdır. Normu 1 olan dual vektöre birim dual vektör denir (Özdemir 2020).

Sonuç 2.21. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon \in \mathbb{D}^3$ için birim vektör olma şartı, (2.2) ifadesinden de görüleceği üzere

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Birim dual vektörlerin oluşturduğu küme

$$\mathbb{DS}^2 = \{\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon : \|\mathbf{u}\| = 1, \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle = 0, \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^3\}$$

dual birim küre adını alır.

Tanım 2.22. $\mathbb{R}^3$ 'de bir yönlü doğru d olmak üzere d doğrusunun doğrultman vektörü

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

olsun. Bir P noktasından doğrultman vektörün başlangıç ve bitiş noktaları A ve B 'ye çizilen vektörlere sırasıyla $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ isimleri verilirse bir $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ vektörü için

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

alınırsa, $\mathbf{m}$ vektörünün $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektörüne de dik olduğu görülür.

$\mathbf{m}$ vektörüne, P noktasının d doğrusuna göre moment vektörü adı verilir. Birbirine dik olan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{m}$ vektör bileşenlerinin yanyana yazılmasıyla elde edilen altı bileşenli

$$(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = (u_1, u_2, u_3, m_1, m_2, m_3)$$

koordinatlarına da d doğrusunun Plücker koordinatları denir (Plücker 1846; Özdemir 2020).

Teorem 2.23. (E-Study Dönüşümü) Her birim dual vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yönlü doğruya karşılık gelir; bir başka ifadeyle dual birim kürenin elemanları ile $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlü doğrular arasında birebir eşleşme vardır (Study 1901; Özdemir 2020).

İspat O başlangıç noktası olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ uzayında, bir P noktasından geçen yönlü doğru d ve d doğrusunun birim doğrultman vektörü $\mathbf{u}$ olsun.

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$$

olacak şekilde tanımlanan $\mathbf{u}^*$ ve $\mathbf{u}$ vektörlerinin, $\mathbf{u}$ ve $\overrightarrow{OP}$ ile tek şekilde belirlendiği açıktır. Bu durumda yönlü doğru d 'nin normalleştirilmiş Plücker koordinatları $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ olarak elde edilir.

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle = 0$$

olduğundan birim dual vektör

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon$$

vektörüne karşılık gelir.

Benzer şekilde,

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon$$

birim dual vektör olsun. Bu durumda $\mathbf{U}$ vektörü, $\mathbf{u} \times \mathbf{u}^*$ noktasından geçen ve $\mathbf{u}$ doğrultman vektörüne sahip olan, tek şekilde belirli olan $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ şeklindeki Plücker koordinatlarına karşılık gelir. $\square$

Sonuç 2.24. Birim dual küre üzerindeki her bir $\mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon$ dual vektörü, $\mathbb{R}^3$ 'de doğrultusu $\mathbf{u}$ olan ve bir P noktasına uzaklığı $\|\mathbf{u}^*\|$ ile belirlenen, P 'den geçen ve aynı zamanda $\mathbf{u}^*$ vektörüne dik olan bir düzlemde yer alan bir yönlü doğruya karşılık gelmektedir.

Teorem 2.25. $\mathbb{D}^3$ modülünde verilen $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon$ birim dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular sırasıyla $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ olmak üzere, bu doğrular arasında ki açı θ ve aralarındaki uzaklık θ^* ile belirtilirse

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3} = \cos(\theta + \theta^* \varepsilon)$$

eşitliği sağlanır

$$\boldsymbol{\theta} = \theta + \theta^* \varepsilon$$

dual sayısına dual açı adı verilir (Özdemir 2020).

İspat $\mathbb{R}^3$ 'de verilen $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ yönlü doğrularına karşılık gelen normalleştirilmiş Plücker koordinatları sırasıyla $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ ve $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*)$ olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos \theta$$

olur. Bu doğrular bir $\overrightarrow{OP'_U}$ boyunca ötelenirse elde edilen d'_U ve d'_V doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları sırasıyla $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ ve $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^{**})$ olur ki burada $\mathbf{v}^{**} = \overrightarrow{OP'_V} \times \mathbf{v}$ temsili geçerlidir. Karşılık gelen birim dual vektörler de sırasıyla

$$\mathbf{U}' = \mathbf{u} \text{ ve } \mathbf{V}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{**}\varepsilon$$

elde edilir. $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3} = \langle \mathbf{U}', \mathbf{V}' \rangle_{\mathbb{D}^3}$ ve $\|\mathbf{v}^{**}\| = \left\| \overrightarrow{OP'_V} \right\| = \theta^*$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \varepsilon (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{**} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \cos \theta + \varepsilon \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{**} \rangle \\ &= \cos \theta + \varepsilon \theta^* \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \cos \theta - \varepsilon \theta^* \sin(\theta) \\ &= \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Doğrular $-\overrightarrow{OP'_V}$ vektörü boyunca ötelenirse aynı sonuç elde edilir. $\mathbf{u}^{**} = \overrightarrow{OP'_U} \times \mathbf{u}$ olmak üzere, ötelenmiş d'_U ve d'_V doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları sırasıyla $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{**})$ ve $(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ bulunur ve karşılık gelen birim dual vektörler de sırasıyla $\mathbf{U}' = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}^{**}$ ile $\mathbf{V}' = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{0}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \varepsilon (\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{u}^{**}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \cos \theta + \varepsilon \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{**} \rangle \\ &= \cos \theta + \varepsilon \theta^* \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \cos \theta - \varepsilon \theta^* \sin(\theta) \\ &= \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) \end{aligned}$$

olur. □

Tanım 2.26. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \times_{\mathbb{D}^3} &: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3 \\ \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}^3} \mathbf{V} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}^* + \mathbf{u}^* \times \mathbf{v})\varepsilon \end{aligned}$$

ile tanımlanan vektörel çarpıma $\mathbb{D}^3$ modülü üzerinde vektörel çarpım adı verilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.27. $\mathbb{D}^3$ modülü üzerinde alınan $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon$ birim dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular sırasıyla $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$, doğrular arasındaki açı θ ve aralarındaki uzaklık θ^* olmak üzere

$$\|\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}^3} \mathbf{V}\|_{\mathbb{D}^3} = \sin(\theta + \varepsilon \theta^*)$$

eşitliği geçerlidir (Özdemir 2020).

İspat Lagrange özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}^3} \mathbf{V}\|_{\mathbb{D}^3} &= \sqrt{\langle \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}^3} \mathbf{V}, \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}^3} \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3}} \\ &= \sqrt{1 - \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}^3}} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\theta + \theta^* \varepsilon)} \\ &= \sin(\theta + \theta^* \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.2. Kuaterniyonlar

İlk kez Hamilton (1844) tarafından literatüre sunulan kuaterniyon kavramı, kompleks sayıların bir genelleştirmesi olarak düşünülmüş, daha sonra kuaterniyon adı ile dört boyutlu yeni bir sayı sistemi olarak tanımlanmıştır. Kuaterniyonların Euclid uzayında dönme hareketini tanımlaması, vektörle ilgili çalışmalarda kolaylık sağlaması, küresel geometri-deki hareketlerin ve fizik alanında bazı denklemlerin yorumlanmasında kullanılması, bu dörtlü sayı sistemine olan ilginin artmasına neden olmuştur. Geometri alanındaki öneminin yanı sıra, robot teknolojisi, bilgisayar, animasyon, fizik, vektörel analiz, mekanik, kinematik gibi alanlarda da sıkça kullanılan bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Kuaterniyonlar sayı sistemi, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ reel birim vektörler olmak üzere

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1\} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanmış, bir dönme eksenini ve açısı belirleyerek rotasyon hareketlerini açık bir geometri ile belirleyen etkin bir sistem haline gelmiştir.

(2.3) reel kuaterniyonlarına ek olarak literatürde tanımlanmış farklı kuaterniyon çeşitleri de sunulmuştur (Özdemir 2020).

Dual Kuaterniyonlar:

$$\mathbb{H}(\mathbb{D}) = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{D} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1\}$$

şeklinde tanımlanan, katsayıları dual sayılardan seçilmiş kuaterniyonlardır.

Split Kuaterniyonlar: Birim vektörlerin karelerinden bazıları 1, bazıları -1 kabul edilerek oluşturulan, örnek olarak

$$\hat{\mathbb{H}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = 1, \mathbf{j}^2 = -1, \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1\}$$

şeklindeki kuaterniyonlardır.

Kompleks Kuaterniyonlar (Bikuaterniyonlar): Katsayıları kompleks sayılardan oluşturulan,

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1\}$$

Clifford (1873) tarafından tanımlanan kuaterniyon çeşididir. Elektromanyetik teori ve diferansiyel denklemler alanında kullanılır.

Hiperbolik Kuaterniyonlar:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{H}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1\}$$

olarak tanımlanan, birleşme özelliği olmayan kuaterniyonlar kümesidir.

Segre Kuaterniyonları: Çarpma işleminin değişmeli olduğu reel kuterniyonlara denir. Lineer cebirsel yapıların modellenmesi için kullanışlıdır.

$$\mathbb{H}_{\mathbb{S}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = 1, \mathbf{ijk} = -1\}$$

şeklinde tanımlanan bu kuaterniyonlar, değişmeli kuaterniyonlar olarak da bilinir.

Elipsoidal Kuaterniyonlar: Reel kuaterniyonlar aracılığı ile küresel dönmeler tanımlanırken, elipsoid üzerinde gerçekleşen dönme hareketlerini tanımlarken kullanılan, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı $\forall p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$

$$\xi = p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 = 1$$

elipsoidi için $\sqrt{p_1p_2p_3} = \Delta$ olmak üzere

$$\mathbb{H}(\xi) = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = -p_1, \mathbf{j}^2 = -p_2, \mathbf{k}^2 = -p_3, \mathbf{ijk} = \Delta\}$$

kümesine elipsoidal kuaterniyonlar denir.

Hiperboloidik Split Kuaterniyonlar: Split kuaterniyonlarda yapılan genelleştirme sonucu elde edilen, $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlı $\forall p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$

$$\zeta = -p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 = \pm 1$$

hiperboloidi için $\sqrt{|p_1p_2p_3|} = \Delta$ olmak üzere

$$\mathbb{H}(\zeta) = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = -p_1, \mathbf{j}^2 = p_2, \mathbf{k}^2 = p_3, \mathbf{ijk} = \Delta\}$$

olarak tanımlanan ve hiperboloidik dönmeler için kullanılan kuaterniyonlar kümesidir.

Perpleks Kuaterniyonlar (Split Kompleks Kuaterniyonlar): Bileşenleri perpleks sayılardan oluşan

$$\mathbb{H}(\mathbb{P}) = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{P} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1\}$$

kuaterniyonlar kümesidir.

Dejenere Kuaterniyonlar: Yaglom (1963) tarafından sunulan

$$\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 0\}$$

kuaterniyonlar kümesine dejenere kuaterniyonlar denir.

Yarı Dejenere Kuaterniyonlar:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{YD}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = 1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Tam Dejenere Kuaterniyonlar:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{TD}} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 0\}$$

şeklindeki kuaterniyonlar kümesidir.

Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar: Literatürde kuaterniyonların farklı genelleştirilmeleri, bazı matematikçiler tarafından yapılmıştır. Temel yapıya farklı cebirsel özellikler eklenerek oluşturulan kuaterniyonlardır. Bir örnek olarak H. Pottman ve J. Wallner tarafından tanımlanan bir genelleştirme

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = -\alpha, \mathbf{j}^2 = -\beta, \mathbf{k}^2 = -\alpha\beta, \mathbf{ijk} = -\alpha\beta\}$$

şeklinde yapılmıştır (Özdemir 2020).

Hibrit Kuaterniyonlar: Özdemir (2018) tarafından tanımlanan hibrit sayıların cebirsel özellikleri ile oluşturulan kuaterniyonlardır. Buna göre

$$\mathbb{K} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{h} + d\varepsilon : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{h}^2 = 1, \varepsilon^2 = 0, \mathbf{i}\mathbf{h} = -\mathbf{h}\mathbf{i} = \varepsilon + \mathbf{i}\}$$

kümesi, hibrit sayılar veya hibrit kuaterniyonlar adını alır.

Clifford (1873), kuaterniyonların bileşenlerini dual sayılarla oluşturduğu dual-kuaterniyonları literatüre kazandırmıştır. Birim bir kuaterniyon dönmeyi tanımlayabilirken, birim bir dual-kuaterniyonun hem dönme hem öteleme hareketine karşılık geldiğine dair, geometri alanında çalışmalar sunulmuştur (McAulay 1898; Agrawal 1987; Özdemir 2020).

Clifford'un hem Öklidiyen, hem de Öklidiyen olmayan uzaylarda geometrik cebirler üzerine yaptığı çalışmalar, onu Hamilton (1844; 1853)'ün kuaterniyonlar üzerine yaptığı çalışmaları vektör analizine genişletmeye yönlendirmiştir. Kuaterniyonlardaki dört reel bileşenli sistemi, 'bikuaterniyon' adını verdiği, en genel hali ile bugün Clifford cebiri olarak adlandırılan sistemin bir alt alanı olarak kurmuştur. Dual kuaterniyonlar olarak, bileşenlerini $q + \mathbf{w}r$ şeklinde, $q, r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{w}^2 = 0$ koşulundaki sanal bir cebirsel birim $\mathbf{w}$ içeren yapılardan oluşturduğu kuaterniyonlar, bu cebirin bir örneğini oluşturmuş, bu sistemin oluşturduğu geometrik senaryolar üzerinde yoğunlaşmıştır. Bir takım mekanik niceliklerin ve hareketlerin sadece skaler ve vektör kavramlarıyla ifade edilememesi nedeniyle Clifford, bikuaterniyonlar sistemine ihtiyaç duymuş; 'rotor' (dönme + vektör) terimini kullanarak skaler, vektör ve rotor büyüklüklerini birleştiren bir cebir ortaya atmıştır (Clifford 1882).

McAulay (1898), $\Omega^2 = 0$ olduğu bir Ω birimi ile Clifford cebirin bir alt örneği olan dual kuaterniyonları oktonyonlar adı ile genişletme çalışmaları yapmıştır; daha sonra bu alan farklı bir cebir yapısına doğru gelişmiştir. Study (1901)'in bir grup üç boyutlu uzay hareketlerini incelemek için bu sistemi uygun bulması; ardından Kotelnikov (1895)'in dual vektörler ve dual kuaterniyonları mekanik alanındaki çalışmalarda kullanması, dual kuaterniyonlara olan ilgiyi arttırmıştır. Clifford cebiri ile gelişen dual kuaterniyonlar, üç boyutlu uzay tanımlamalarında güçlü bir yapı ortaya koymuştur.

Vida hareketi, hem dönme, hem öteleme bileşenlerine sahip, katı cisim hareketlerini tanımlayan temel bir kavramdır. Kuaterniyonlar ve dual sayıların birleşimi olan dual ku-

aterniyonların mühendislik ve robotikte vida hareketi tanımını kullanılmasında temeller ilk kez Chasles tarafından ortaya konmuştur. Chasles, uzayda, katı cisimlerin yer değiştirmesinin bir eksenle dönme ve o eksen boyunca ötelenme olarak ifade edilebileceğini ilk kez matematiksel olarak ispatladı (Mason 2001). Buna göre uzaydaki herhangi bir yer değiştirme, bir vida hareketi olarak tanımlanır. Ball da rijit bir cismin uzaydaki hareketinin bir eksen etrafında dönme ve o eksen boyunca öteleme bileşenlerinden oluştuğunu ifade etmiştir; ancak bu hareketi cebirsel değil geometrik olarak tanımlamış; henüz kuaterniyon ya da dual sayı gibi yapılara yer vermemiştir; Chasles'in teoremini daha çok mekanik ve fiziksel alanda uygulamıştır (Ball 1990).

Kuaterniyonların dönme hareketlerini ifade etmedeki gücü, 20. yüzyıl başlarında fark edilse de dual kuaterniyonların vida hareketini tanımlamak amacıyla sistematik olarak ilk kullanımı Brown ve Wampler tarafından gerçekleştirilmiştir. Brown ve Wampler (1990), dual kuaterniyonların hem dönme, hem de öteleme bileşenlerini aynı cebirsel yapı içinde temsil etme yeteneğini sunmuşlar; bu yaklaşım, hem matematiksel hem de uygulamalı robotikte yeni bir temsil biçimi olarak kabul edilmiştir.

Robotikte, robot kollarında eklemde çıkan ucun uzaydaki pozisyonu genellikle vida hareketi ile modellenir ve dual kuaterniyonlar sayesinde pozisyon ve yönelim aynı anda, tek yapıda kodlanır; ileri ve ters kinematik hesaplamalar sadeleşir; hareketler arasındaki geçişler daha yumuşak hale gelir (Selig 2005).

Dual kuaterniyonların çözüme giden yolda matrislere göre daha kolay ve daha kullanışlı olması sebebiyle rijit-transform (dönme ve öteleme) hareket sistemlerinde tercih edilen bir metod haline gelmiştir. Dual kuaterniyonlar, cebirsel işlemleri minimize etmeleri sebebiyle çözümü daha doğrudan ve güvenilir bir şekilde sunarlar; ayrı vektörler tanımlamak yerine, yer değiştirme içeren öteleme ve dönme hareketlerinde bu iki tip hareketi tek durumda birleştirmeye olanak tanır. Animasyon gibi, özellikle hareket içeren ve her karede rijit dönüşümlerin birleştirildiği ve karşılaştırıldığı alanlarda, matris bazlı yöntemlerin önce kuaterniyona dönüştürülmesi gerekirken, dual kuaterniyonlar ile tüm bunlar doğrudan yapılabilir (Kenwright t.y.).

Hem akademik, hem de endüstriyel uygulamalarda rotasyon ve translasyonun birlikte yönetilmesi gereken sistemlerde verimli bir matematiksel araç olarak öne çıkan dual kuaterniyonlar, geleneksel yöntemlere kıyasla, sunduğu avantajlar sayesinde robotikte, bil-

gisayar tabanlı grafiklemelerde avantajlar ortaya koymuştur. Pham vd. (2010), bağlantılı zincir ters kinematik problemlerini, dual kuaterniyon uzayında Jacobiyen matrisi kullanılarak çözmüştür. Schilling (2011), dual kuaterniyonları kullanarak çoklu hesaplamalı ortalama model ile gövde hesaplamaları yapmıştır. Ge vd. (1998), üç boyutlu hareketlerin interpolasyonunda, dual kuaterniyonların etkili ve pratik bir yöntem olduğunu göstermiştir. Lin vd. (2010), görelî yönelimi dual kuaterniyon kullanarak hesaplamıştır. Perez ve McCarthy (2004), eklemli robotik sistemler için dinamik kısıtları dual kuaterniyonlar ile formülize etmiştir. Kavan vd. (2008), karakterin cilt kaplama ve karışım işlemlerinde dual kuaterniyon kullanmanın avantajlarından bahsetmiştir. Selig (2011) ise bilgisayar oyunlarındaki temel problem olan gerçek zamanlı hareket denklemlerinin çözülmesinde dual kuaterniyonların düzenli ve kısa bir yol sunduğunu belirtmiştir.

Bunun yanı sıra dual kuaterniyonlar, havacılık alanında bir uzay aracının ya da insansız hava aracının konum ve yönelim bilgisinin birleştirilmiş temsili için de kullanılır. Özellikle düşük gecikmeli, yüksek hassasiyetli kontrol sistemleri için önemlidir.

İnsan vücudu eklemlerinin üç boyutlu uzaydaki hareketleri, hem rotasyon hem de pozisyon bileşenleri içerdiği için dual kuaterniyonlar ile etkin şekilde analiz edilebilir. Dolayısıyla bu alan spor bilimleri, tıp ve rehabilitasyon teknolojileri ile de yakından ilgilidir.

Kamera kalibrasyonu, el-göz koordinasyonu ve obje takibi gibi uygulamalarda dual kuaterniyonlar, karmaşadan uzak ve doğrusal olmayan yapılarıyla da öne çıkmaktadır (Daniilidis 1999).

Fourier dönüşümleri ve gelişmekte olan kuantum hesaplamaları alanlarında da bu sistemin kullanım alanı giderek genişlemektedir (Girard 2007; Rooney 2007; Garling 2011; Chappell vd. 2016).

Tanım 2.28.

$$\mathbb{H} = \{ \mathbf{q} : \mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}, q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R} \text{ ve } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \}$$

olarak tanımlanan dörtlü sayı kümesine kuaterniyonlar kümesi denir (Hamilton 1844).

$\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ için q_1 reel sayısına $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun skaler kısmı denir ve $S(\mathbf{q})$ ile gösterilir. $q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ ifadesine ise $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun vektörel kısmı denir ve $V(\mathbf{q})$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$ ifadesi de $\mathbf{q}$ kuaterniyonu

için bir başka gösterim şekli olur.

$q_1 = 0$ ise $\mathbf{q} = q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonu has kuaterniyon adını alır ve has kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_0$ ile ifade edilir. Has kuaterniyonlar kümesinin $\mathbb{R}^3$ ile özdeş olduğu açıkça bellidir.

$\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ ve $\mathbf{p} = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ kuaterniyonları için

i. Kuaterniyonların eşitliği: $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ise $q_i = p_i \forall i = 1, 2, 3, 4$

ii. Toplama: $\mathbf{q} + \mathbf{p} = (q_1 + p_1) + (q_2 + p_2)\mathbf{i} + (q_3 + p_3)\mathbf{j} + (q_4 + p_4)\mathbf{k}$

iii. Skalerle çarpma: $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lambda\mathbf{q} = \lambda q_1 + \lambda q_2\mathbf{i} + \lambda q_3\mathbf{j} + \lambda q_4\mathbf{k}$ olacak şekilde tanımlıdır.

iv. Çarpma: $\mathbb{R}^3$ üniter vektörleri için değişme özelliği olmadığından, iki kuaterniyonun çarpma işleminin de değişmeli olmadığı açıktır. Bu sebeple kuaterniyonlarda çarpma işleminde kullanılmak üzere

$\cdot$	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
1	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	-1	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-1

şeklinde bir çarpım tablosu kullanmak, çarpma işlemini kolaylaştırmaktadır.

Dolayısıyla $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonları düşünüldüğünde iki kuaterniyon arasındaki çarpma işlemi,

$$\mathbf{qp} = S(\mathbf{q})S(\mathbf{p}) - \langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{p}) \rangle + S(\mathbf{q})V(\mathbf{p}) + S(\mathbf{p})V(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \times V(\mathbf{p})$$

eşitliği ile Euclid iç çarpımı ve vektörel çarpımı kullanılarak daha basit bir şekilde ifade edilebilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.29. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{r} \in \mathbb{H}$ için

$$\mathbf{p}(\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{pq} + \mathbf{pr}$$

$$(\mathbf{q} + \mathbf{r})\mathbf{p} = \mathbf{qp} + \mathbf{rp}$$

eşitlikleri sağlanır; bir başka ifade ile kuaterniyonlar kümesinde çarpma işleminin toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır (Özdemir 2020).

İspat $\mathbf{p} = S(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p})$, $\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$ ve $\mathbf{r} = S(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})$ kuaterniyonları için

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(\mathbf{q} + \mathbf{r}) &= S(\mathbf{p})S(\mathbf{q} + \mathbf{r}) - \langle V(\mathbf{p}), V(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \rangle + S(\mathbf{p})V(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \\
 &\quad + S(\mathbf{p} + \mathbf{r})V(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p}) \times V(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \\
 &= S(\mathbf{p})(S(\mathbf{q}) + S(\mathbf{r})) - \langle V(\mathbf{p}), V(\mathbf{q}) + V(\mathbf{r}) \rangle + S(\mathbf{p})(V(\mathbf{q}) + V(\mathbf{r})) \\
 &\quad + (S(\mathbf{q}) + S(\mathbf{r}))V(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p}) \times (V(\mathbf{q}) + V(\mathbf{r})) \\
 &= S(\mathbf{p})S(\mathbf{q}) - \langle V(\mathbf{p}), V(\mathbf{q}) \rangle + S(\mathbf{p})V(\mathbf{q}) + S(\mathbf{q})V(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p}) \times V(\mathbf{q}) \\
 &\quad + S(\mathbf{p})S(\mathbf{r}) - \langle V(\mathbf{p}), V(\mathbf{r}) \rangle + S(\mathbf{p})V(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r})V(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p}) \times V(\mathbf{r}) \\
 &= \mathbf{pq} + \mathbf{pr}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde sağdan dağılma da gösterilebilir. $\square$

Tanım 2.30. Bir $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonu için

$$L_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad R_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

matrislerine sırasıyla sol ve sağ çarpım matrisleri denir. Dolayısıyla bir

$$\mathbf{p} = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$$

kuaterniyonu için $L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{qp}$ ve $R_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{pq}$ eşitliklerini sağlarlar (Özdemir 2020).

Teorem 2.31. Kuaterniyonlar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır (Özdemir 2020).

İspat $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ ve $\mathbf{r} = r_1 + r_2\mathbf{i} + r_3\mathbf{j} + r_4\mathbf{k}$ kuaterniyonları için

$$L_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad R_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ r_2 & r_1 & r_4 & -r_3 \\ r_3 & -r_4 & r_1 & r_2 \\ r_4 & r_3 & -r_2 & r_1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$(\mathbf{q}\mathbf{p})\mathbf{r} = R_{\mathbf{r}}(L_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) \text{ ve } \mathbf{q}(\mathbf{p}\mathbf{r}) = L_{\mathbf{q}}(R_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}))$$

yazıldığında

$$L_{\mathbf{q}}R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}}L_{\mathbf{q}}$$

olduğundan

$$(\mathbf{q}\mathbf{p})\mathbf{r} = \mathbf{q}(\mathbf{p}\mathbf{r})$$

elde edilir. □

Tanım 2.32. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}} &= q_1 - q_2\mathbf{i} - q_3\mathbf{j} - q_4\mathbf{k} \\ &= S(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q})\end{aligned}$$

kuaterniyonuna $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun eşleniği denir ve

$$a) \overline{(\bar{\mathbf{q}})} = \mathbf{q}$$

$$b) \overline{\mathbf{q} + \mathbf{p}} = \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{p}}$$

$$c) \overline{\mathbf{q}\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}$$

d) $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = (S(\mathbf{q}))^2 + \langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{q}) \rangle$ özelliklerinin sağlandığı görülür (Özdemir 2020).

Tanım 2.33. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ için

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

reel sayısına $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun normu adı verilir. Normu 1 olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir (Özdemir 2020).

Teorem 2.34. $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}$ için

$$I) \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} = \|\bar{\mathbf{q}}\|_{\mathbb{H}} \text{ ve}$$

$$II) \|\mathbf{q}\mathbf{p}\|_{\mathbb{H}} = \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{p}\|_{\mathbb{H}}$$

eşitlikleri sağlanır (Özdemir 2020).

İspat I) $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \|\bar{\mathbf{q}}\|_{\mathbb{H}}$

II) $\|\mathbf{qp}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\mathbf{qp}\overline{\mathbf{qp}}} = \sqrt{\mathbf{qp}\overline{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\mathbf{q}(\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}})\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\mathbf{q}\|\mathbf{p}\|_{\mathbb{H}}^2\bar{\mathbf{q}}} = \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{p}\|_{\mathbb{H}}$ $\square$

Tanım 2.35. Kuaterniyonlar kümesinde bir $\mathbf{q}$ kuaterniyonu için

$$\mathbf{qp} = \mathbf{pq} = 1$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{p}$ kuaterniyonuna $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun tersi adı verilir ve $\mathbf{q}^{-1}$ ile gösterilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.36. Bir $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ için $\mathbf{q}^{-1}$ tektir ve

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2}$$

ile belirlidir (Özdemir 2020).

İspat $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ kuaterniyonunun iki farklı tersi olsun. O zaman

$$\mathbf{qp} = \mathbf{pq} = \mathbf{qr} = \mathbf{rq} = 1$$

olur. Bu durumda

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{qr}) = (\mathbf{pq})\mathbf{r} = \mathbf{r}$$

elde edilir ki tersin tekliğini ifade eder. Ayrıca

$$\mathbf{q} \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2} = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2} = \frac{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2} = 1$$

olduğundan $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2}$ kuaterniyonu, $\mathbf{q}$ 'nin tersini ifade eder. $\square$

Teorem 2.37. Herhangi bir $\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$ kuaterniyonu,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{V(\mathbf{q})}{\|V(\mathbf{q})\|} \\ \cos \theta &= \frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \\ \sin \theta &= \frac{\|V(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \end{aligned}$$

belirtmek üzere,

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} (\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$$

şeklinde yazılabilir; ayrıca

$$\mathbf{n}^2 = -1$$

olur (Özdemir 2020).

İspat $\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} \left(\frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} + \frac{V(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \right) \\ &= \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} \left(\frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} + \frac{\|V(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \frac{V(\mathbf{q})}{\|V(\mathbf{q})\|} \right) \end{aligned}$$

yazılırsa, $\frac{V(\mathbf{q})}{\|V(\mathbf{q})\|} := \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ birim vektörünün bir has kuaterniyon olduğu görülür.

$$\mathbf{n}^2 = \frac{V^2(\mathbf{q})}{\|V(\mathbf{q})\|^2} = \frac{-\langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{q}) \rangle + V(\mathbf{q}) \times V(\mathbf{q})}{\langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{q}) \rangle} = -\frac{\langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{q}) \rangle}{\langle V(\mathbf{q}), V(\mathbf{q}) \rangle} = -1$$

Bu arada

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

olduğundan

$$\left(\frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \right)^2 + \left(\frac{\|V(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \right)^2 = \frac{S^2(\mathbf{q}) + \|V(\mathbf{q})\|^2}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2} = \frac{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}^2} = 1$$

eşitliğine göre,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{S(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \\ \sin \theta &= \frac{\|V(\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}}} \end{aligned}$$

sağlayan bir $\theta \in [0, 2\pi)$ açısı bulunabilir. Böylece her $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} (\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$$

formu ile yazılabilir. □

Tanım 2.38. $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ için

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{H}} (\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$$

gösterimine $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun kutupsal formu adı verilir. θ açısına $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun argümenti denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.39. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonları için

$$g_{\mathbb{H}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}{2}$$

reel sayısına $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonlarının iç çarpımı denir (Özdemir 2020).

$g_{\mathbb{H}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}{2}$ değeri hesaplandığında kolayca görülebilir ki

$$\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} \text{ ve } \mathbf{p} = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$$

kuaterniyonları için

$$g_{\mathbb{H}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 + q_4p_4$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda, iki kuaterniyonun iç çarpımı, aslında dört boyutlu Öklid uzayında bir iç çarpım olarak düşünülebilir. Yani

$$g_{\mathbb{H}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

olur.

Tanım 2.40. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonları için

$$\mathbf{q} \times_{\mathbb{H}} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}{2}$$

olarak elde edilen kuaterniyona $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonlarının vektörel çarpımı denir (Özdemir 2020).

$\mathbf{q} \times_{\mathbb{H}} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}{2}$ ifadesi hesaplandığında

$$\mathbf{q} \times_{\mathbb{H}} \mathbf{p} = -S(\mathbf{q})V(\mathbf{p}) + S(\mathbf{p})V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q}) \times V(\mathbf{p})$$

elde edilir. $\mathbf{q} = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ ve $\mathbf{p} = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ olarak düşünülürse

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \mathbf{p} &= (p_1q_2 - q_1p_2 + p_3q_4 - q_3p_4)\mathbf{i} \\ &+ (p_1q_3 - q_1p_3 + q_2p_4 - p_2q_4)\mathbf{j} \\ &+ (p_1q_4 - q_1p_4 - q_2p_3 + p_2q_3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

olarak da yazılabilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.41. q ve $p \in \mathbb{H}$ için

$$I) q \times_{\mathbb{H}} p = -p \times_{\mathbb{H}} q$$

$$II) q \times_{\mathbb{H}} q = 0$$

$$III) q\bar{p} = \langle q, p \rangle + q \times_{\mathbb{H}} p$$

$$IV) qp = \langle q, \bar{p} \rangle + q \times_{\mathbb{H}} \bar{p} \text{ özellikleri sağlanır.}$$

İspat I) ve II), $q \times_{\mathbb{H}} p = -S(q)V(p) + S(p)V(q) - V(q) \times V(p)$ eşitliği ile açıktır.

$$III) \langle q, p \rangle = \frac{q\bar{p} + p\bar{q}}{2} \text{ ve } q \times_{\mathbb{H}} p = \frac{q\bar{p} - p\bar{q}}{2} \text{ kullanılırsa, } q\bar{p} = \langle q, p \rangle + q \times_{\mathbb{H}} p \text{ bulunur.}$$

$$IV) III)'te p yerine \bar{p} yazılırsa qp = \langle q, \bar{p} \rangle + q \times_{\mathbb{H}} \bar{p} olur. \quad \square$$

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve ispatlar yardımı ile geliştirilmiş dual sayıların tanımı yapılmış, cebirsel ve geometrik özellikleri sunulmuştur. Geliştirilmiş dual sayılar için matris formu belirlenirken izomorfizma kurulmuştur. Galile düzleminin yapısı grafiklerle açıklanmıştır.

Geliştirilmiş dual kuaterniyonların tanımı verilmiş ve özellikleri incelenirken standart dual kuaterniyonların incelenmesi baz alınmıştır.

Tezdeki grafiklerin bir kısmı için Python 3.10 programından yardım alınmıştır.

Tez çalışmasının ana kaynağı Özdemir (2020); diğer kaynakların başlıcaları Soylu vd. (2025) ve Catoni vd. (2011) olmuştur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Genelleştirilmiş Dual Sayılar

Tanım 4.42. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z = x + y\varepsilon$ ifadesine, p reel sayı olmak üzere $\varepsilon^2 = -\frac{p^2}{4} + p\varepsilon$ için bir genelleştirilmiş dual sayı denir.

$$\mathbb{GD} = \left\{ z : z = x + y\varepsilon, \varepsilon^2 = -\frac{p^2}{4} + p\varepsilon, x, y, p \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine de genelleştirilmiş dual sayılar kümesi adı verilir (Yaglom 1968).

Bu durumda p reel sayısına verilen her bir değer, farklı bir $\mathbb{GD}$ kümesi oluşturmaktadır. $\varepsilon^2 = -\frac{p^2}{4} + p\varepsilon$ ifadesinde $\frac{p}{2} = k$ denilirse $(\varepsilon - k)^2 = 0$ şeklinde yazılabildiği görülür. ε birimi de k reel sayısına bağlı olduğundan tezin bundan sonraki kısımlarında ε dual birimi, ε_k olarak kullanılmış ve $\mathbb{GD}$ olarak ifade edilen genelleştirilmiş dual sayılar kümesi de $\mathbb{D}_k$ şeklinde ifade edilmiştir.

Tanım 4.43.

$$\mathbb{D}_k = \{x + y\varepsilon_k : x, y \in \mathbb{R} \text{ ve } \varepsilon_k^2 = -k^2 + 2k\varepsilon_k, k \in \mathbb{R}, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\} \quad (4.1)$$

$z_i = x_i + y_i\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ ($i = 1, 2$) ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{D}_k$ kümesi üzerinde tanımlanmış

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\varepsilon_k \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2 k^2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2y_1 y_2 k)\varepsilon_k \\ \lambda z_1 &= \lambda x_1 + \lambda y_1 \varepsilon_k \end{aligned}$$

işlemler ile birlikte, $\mathbb{D}_k$ kümesine genelleştirilmiş dual sayılar kümesi adı verilir. $z \in \mathbb{D}_k$ sayısına da genelleştirilmiş dual sayı denir. $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısı için ε_k , genelleştirilmiş dual birim; x reel sayısı, z 'nin reel kısmı; y sayısı ise z 'nin dual kısmı olarak ifade edilir ve $Re(z) = x$; $Du(z) = y$ şeklinde gösterilir (Soylu vd. 2025).

Görüldüğü üzere, standart dual sayılar kümesi olarak $\mathbb{D}$, (4.1) kümesinde $k = 0$ olarak alınan bir alt küme olarak da tanımlanabilir. Bu durumda, genelleştirilmiş dual sayılarla ilgili tüm cebirsel ve geometrik özellikler, standart dual sayılara da uyarlanabilmektedir.

$(\varepsilon_k - k)^2 = 0$ olduğundan (4.1) kümesi

$$\mathbb{D}_k = \{z = x + y\varepsilon_k : x, y, k \in \mathbb{R} \text{ ve } (\varepsilon_k - k)^2 = 0, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\}$$

olarak da ifade edilebilir.

(4.1) kümesinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri incelendiğinde, $z_1 = x_1 + y_1\varepsilon_k$ ve $z_2 = x_2 + y_2\varepsilon_k$ olmak üzere,

i) Kapalılık özelliği:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\varepsilon_k$$

toplamının yine bir genelleştirilmiş dual sayı olduğu;

ii) Değişme özelliği:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2 k^2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2y_1 y_2 k)\varepsilon_k \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1 k^2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2y_2 y_1 k)\varepsilon_k \\ &= z_2 z_1 \end{aligned}$$

elde edildiğinden değişme özelliğinin olduğu;

iii) Birleşme özelliği: Gerekli işlemler yapıldığında

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

eşitliğinin sağlandığı, dolayısıyla birleşme özelliğinin olduğu;

iv) Birim elemanlar: Toplamsal birim elemanın $0 + 0\varepsilon_k = 0$ ve çarpımsal birim elemanın $1 + 0\varepsilon_k = 1$ olduğu;

v) Ters elemanlar: $z = x + y\varepsilon_k$ sayısının toplamsal ters elemanının $-z = -x - y\varepsilon_k$ ve çarpımsal ters elemanının her zaman bulunamayabileceği görülmektedir.

Buna göre genelleştirilmiş dual sayılar kümesi $\mathbb{D}_k$, toplama ve çarpma işlemleri ile birimli bir değişmeli halkadır fakat her elemanın çarpma işlemine göre tersi bulunamadığından bir cisim belirtmez.

Teorem 4.44. $n \geq 2$ için

$$\varepsilon_k^n = -\frac{n-1}{2^n} k^n + \varepsilon_k \frac{2n}{2^n} k^{n-1}$$

İspat Tümevarımla ispatlanırsa, $t \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_k^t = -\frac{t-1}{2^t}k^t + \varepsilon_k \frac{2t}{2^t}k^{t-1}$ olsun.

$$t = 2 \text{ için } \varepsilon_k^2 = -\frac{k^2}{4} + \varepsilon_k k$$

eşitliği aşıkardır. $t = n$ için

$$\varepsilon_k^n = -\frac{n-1}{2^n}k^n + \varepsilon_k \frac{2n}{2^n}k^{n-1}$$

doğru olsun. Bu durumda $t = n + 1$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{n+1} &= -\frac{n-1}{2^n}k^n \varepsilon_k + \frac{2n}{2^n}k^{n-1} \left(-\frac{k^2}{4} + \varepsilon_k k \right) \\ &= -\frac{2n}{2^{n+2}}k^{n+1} + \varepsilon_k \left(\frac{n+1}{2^n}k^n \right) \\ &= -\frac{n}{2^{n+1}}k^{n+1} + \varepsilon_k \left(\frac{2n+2}{2^{n+1}}k^n \right) \end{aligned}$$

doğru olur. □

Tanım 4.45. $z = x + y\varepsilon_k$ *genelleştirilmiş dual sayısının eşleniği*

$$\bar{z} = x + 2ky - \varepsilon_k y$$

olarak tanımlanır (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.46. $z = x + y\varepsilon_k$ *genelleştirilmiş dual sayısı için*

$$|z|_{\mathbb{D}_k} = \sqrt{z\bar{z}}$$

ifadesine z *genelleştirilmiş dual sayısının modülü* adı verilir (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.47. $z = x + y\varepsilon_k$ *genelleştirilmiş dual sayısının modülü*

$$|z|_{\mathbb{D}_k} = |x + ky|$$

olarak ifade edilir (Soylu vd. 2025).

İspat $z = x + y\varepsilon_k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} |z|_{\mathbb{D}_k} &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{(x + y\varepsilon_k)(x + 2ky - \varepsilon_k y)} \\ &= \sqrt{x^2 + 2ky + k^2 y^2} \\ &= |x + ky| \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.48. $|z|_{\mathbb{D}_k} \neq 0$ olmak koşulu ile $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısının tersi

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2}$$

şeklindedir (Soylu vd. 2025).

İspat $z^{-1} = a + b\varepsilon_k$ şeklinde bir genelleştirilmiş dual sayı olsun. $zz^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (xa - ybk^2) + (xb + ay + 2kyb)\varepsilon_k &= 1 \\ \implies xa - ybk^2 &= 1 \text{ ve } xb + ay + 2kyb = 0 \end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa çözülerek

$$a = \frac{x + 2ky}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2} \text{ ve } b = -\frac{y}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2}$$

elde edilir ki

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{x + 2ky}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2} - \frac{y}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2}\varepsilon_k \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{D}_k}^2} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. □

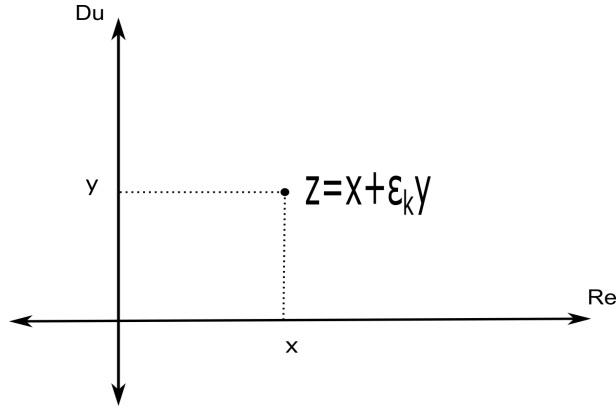
Tanım 4.49. $z, w \in \mathbb{D}_k$ için

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= zw^{-1} \\ &= z \frac{\bar{w}}{|w|_{\mathbb{D}_k}^2} \end{aligned}$$

ifadesi $\mathbb{D}_k$ için bölme işlemi tanımlar (Soylu vd. 2025).

$\mathbb{D}_k = \{z : z = x + y\varepsilon, \varepsilon_k^2 = -k^2 + 2k\varepsilon_k, x, y, k \in \mathbb{R}, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\}$ genelleştirilmiş dual sayılar kümesi, $z = x + y\varepsilon$ genelleştirilmiş dual sayısı için yatay eksen reel kısmı (x), düşey eksen dual kısmı (y) göstermek üzere Şekil 4.1'deki gibi gösterilebilir. Bu düzleme

genelleştirilmiş Galile düzlemi de denir (Soylu vd. 2025).



Şekil 4.1. Genelleştirilmiş Galile düzlemi

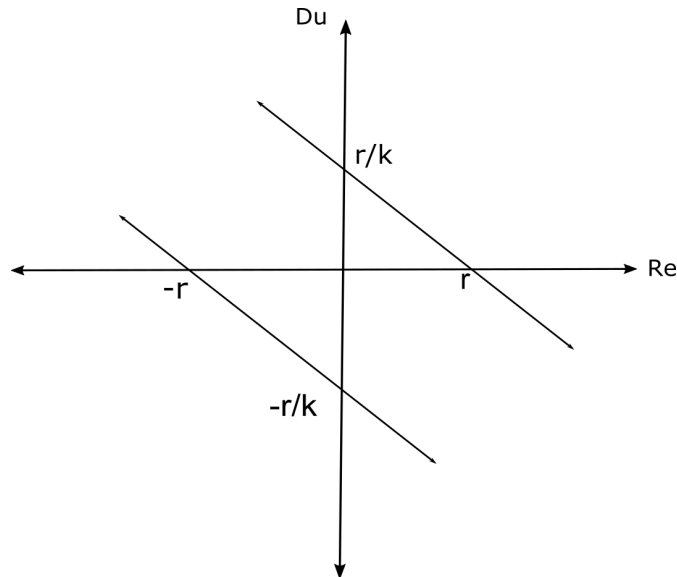
Normu r olan genelleştirilmiş dual sayılar $z = x + y\varepsilon \in \mathbb{D}_k$ için

$$|z|_{\mathbb{D}_k} = |x + ky| = r$$

ifadesi, genelleştirilmiş dual sayılar kümesinde bir çember belirtir. Bu çemberler $\mathbb{D}_k$ düzleminde çizilirse, büyüklüğü r olan genelleştirilmiş dual sayıların geometrik yeri,

$$x + ky = \mp r$$

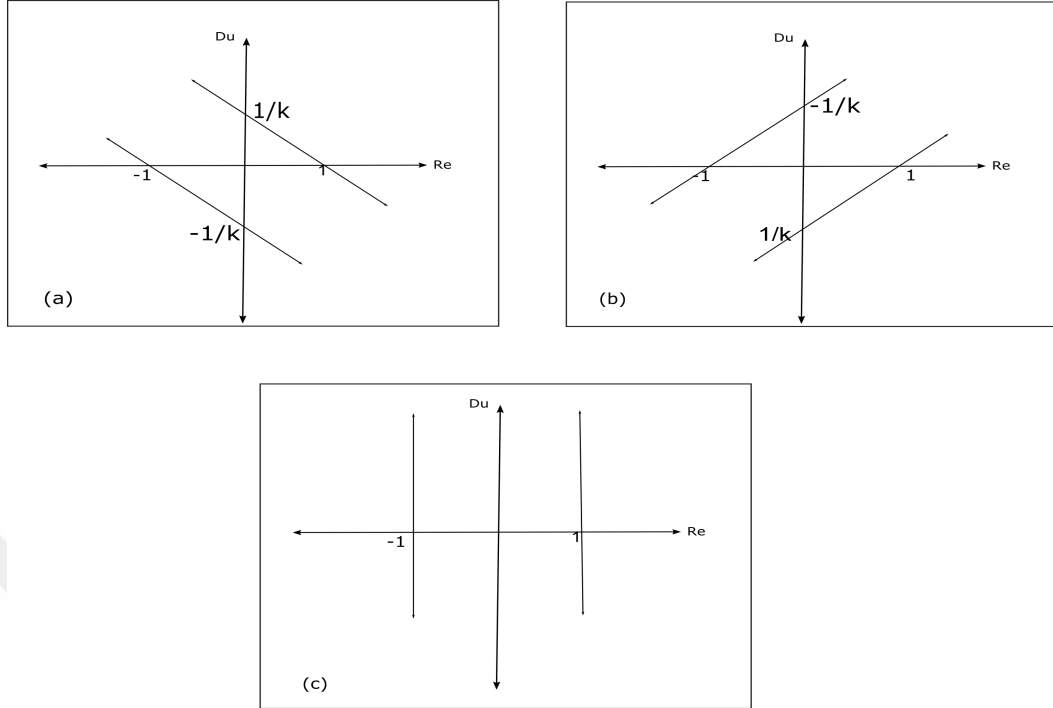
şeklinde, birbirine paralel iki doğru belirtir (Şekil 4.2) (Soylu vd. 2025).



Şekil 4.2. Genelleştirilmiş dual çemberler

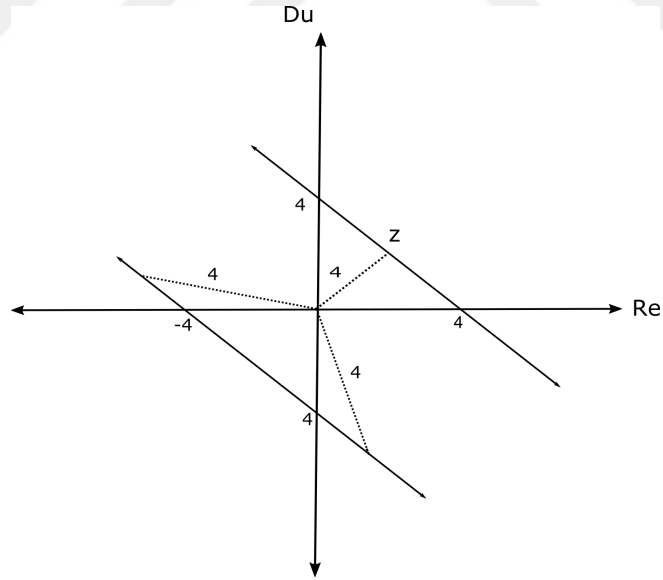
$k \in \mathbb{R}$ için genelleştirilmiş dual sayılar kümesinin birim çemberleri Şekil 4.3'de görülmek-

tedir.



Şekil 4.3. (a) $k > 0$; (b) $k < 0$ ve (c) $k = 0$ için genelleştirilmiş dual birim çemberler

Örnek 4.50. Normu 4 olan genelleştirilmiş dual sayılar (Şekil 4.4),



Şekil 4.4. D_1 için 4 yarıçaplı genelleştirilmiş dual çemberler

$$\mathbb{D}_1 = \{z : z = x + y\varepsilon_1, \varepsilon_1^2 = -1 + 2\varepsilon_1\}$$

kümesinden seçilirse $|z|_{\mathbb{D}_k} = 4$ sağlayan genelleştirilmiş Galile çemberleri olan $x + y = 4$ ve $x + y = -4$ doğruları Şekil 4.4'deki gibi olur.

Çemberlerin yarıçapları 4 olmak üzere, orijinden paralel doğrulara çizilen tüm doğru parçalarının uzunlukları 4 olur.

Buna göre, geliştirilmiş Galile düzlemindeki birim çemberler de $x + y = 1$ ve $x + y = -1$ paralel doğrularıdır.

$z = x_1 + y_1\varepsilon_k$ ve $w = x_2 + y_2\varepsilon_k$ geliştirilmiş dual sayıları için,

$$\begin{aligned} |z - w|_{\mathbb{D}_k} &= \sqrt{(z - w)(\overline{z - w})} \\ &= \sqrt{((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\varepsilon_k)((x_1 - x_2) + 2k(y_1 - y_2) - \varepsilon_k(y_1 - y_2))} \\ &= |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)k| \end{aligned}$$

olduğundan, geliştirilmiş Galile düzleminde bu sayılara sırasıyla karşılık gelen noktalar $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ için bir metrik de ifade edilmiş olur (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.51. Geliştirilmiş Galile düzleminde verilen $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları için

$$d_{\mathbb{G}}(A, B) = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)k|$$

ifadesine geliştirilmiş Galile düzleminin metriği denir (Soylu vd. 2025).

$z = x + y\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ geliştirilmiş dual sayısının geliştirilmiş Galile düzleminde karşılık geldiği nokta A olarak ifade edilirse $A(x, y)$ noktasının bu düzlemdeki apsis değeri, z geliştirilmiş dual sayısının reel kısmına; benzer şekilde, $A(x, y)$ noktasının bu düzlemdeki ordinat değeri de z geliştirilmiş dual sayısının dual kısmına karşılık gelir. Bu durumda, geliştirilmiş Galile düzleminde A noktasına karşılık gelen vektör de $\overrightarrow{OA}$ olur. Geliştirilmiş Galile düzleminde bu şekilde oluşturulan vektörler, belirttiği noktanın koyu, küçük harfi ile yazılırsa, $\overrightarrow{OA}$ vektörü de $\mathbf{a}$ gösterimi ile belli olur. Böylece

$$d_{\mathbb{G}}(O, A) = |x + ky| = \|\mathbf{a}\|$$

yazılabilir.

Tanım 4.52. $u = u_1 + u_2\varepsilon_k$ ve $v = v_1 + v_2\varepsilon_k$ geliştirilmiş dual sayıları, sırasıyla $U(u_1, u_2)$ ve $V(v_1, v_2)$ olarak, geliştirilmiş Galile düzleminde birer nokta olarak gösterilirse bu noktalara karşılık gelen vektörler $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ için

$$\langle, \rangle_{\mathbb{G}} : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{G}} &= \frac{\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{v}}{2} \\ &= u_1v_1 + k^2u_2v_2 + k(u_1v_2 + u_2v_1)\end{aligned}$$

skaler çarpımına genelleştirilmiş Galile düzleminin skaler çarpımı denir.

Teorem 4.53. *Genelleştirilmiş dual sayılar kümesi $\mathbb{D}_k$, reel sayılar cismi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri ile bir vektör uzayıdır.*

İspat $z = z_1 + z_2\varepsilon_k$ ve $w = w_1 + w_2\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayıları ve $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için Galile düzleminde karşılık gelen vektörler sırasıyla $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ olsun. Buna göre

- $\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$ vektörü bir genelleştirilmiş dual sayıya karşılık gelir.
- $\mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ toplamada değişme özelliği vardır.
- $\mathbb{D}_k$ üzerinden seçilen bir başka v genelleştirilmiş dual sayısına karşılık gelen vektör $\mathbf{v}$ ile gösterilirse $(\mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{v} = \mathbf{z} + (\mathbf{w} + \mathbf{v})$ toplamının birleşme özelliği vardır.
- $\mathbf{0} = 0 + 0\varepsilon_k$ olmak üzere $\mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$ olur.
- z genelleştirilmiş dual sayısı için $\mathbf{z} + (-\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $-z \in \mathbb{D}_k$ toplama göre ters eleman vardır.
- $\lambda\mathbf{z} = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ yine bir genelleştirilmiş dual sayı belirtir; skaler ile çarpıldığında elde edilen vektör bir dual sayıya karşılık gelir.
- $\lambda(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{z} + \lambda\mathbf{w}$; skalerin dağılma özelliği vardır.
- $(\lambda + \beta)\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} + \beta\mathbf{z}$ sağlanır.
- $(\lambda\beta)\mathbf{z} = \lambda(\beta\mathbf{z})$ sağlanır.
- $\mathbf{1} = 1 + 0\varepsilon_k$ olmak üzere, $\mathbf{1}\mathbf{z} = \mathbf{z}$ sağlanır.

Böylece, $\mathbb{D}_k$ kümesinin elemanları olan genelleştirilmiş dual sayıların karşılık geldiği iki boyutlu genelleştirilmiş Galile düzlemi, standart toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre, reel sayılar üzerinde bir vektör uzayı tanımlar. $\square$

Lorentziyen geometrideki gibi, modülü r olan genelleştirilmiş dual sayıların Galile düzleminde belirttiği çemberler olan $x + ky = r$ ve $x + ky = -r$ paralel doğrularını, sırasıyla dual-spacelike ve dual-timelike olarak tanımlayabiliriz. Böylece $x + ky = 0$ doğrusu olarak belirtilen orijin merkezli dual çember de dual-lightlike (null) şeklinde isimlendirilebilir. Bu durumda, genelleştirilmiş Galile düzlemine ait vektörleri de orijin merkezli genelleştirilmiş dual çembere göre sınıflandırmak mümkündür (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.54. Modülü r olan bir $z = x + y\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayısı

- (a) $x + ky = r$ dual çemberi üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-spacelike,
- (b) $x + ky = -r$ dual çemberi üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-timelike,
- (c) $x + ky = 0$ orijin merkezli dual çember üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-lightlike (null) adı verilir (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.55. $z = x + y\varepsilon_k$ bir genelleştirilmiş dual sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{D}_k \rightarrow \mathbb{D}_k \\ f(z) &= f(x + y\varepsilon_k) \end{aligned}$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş dual sayı değişkenli fonksiyon denir.

f fonksiyonuna, bir $z_0 \in \mathbb{D}_k$ için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

eşitliğini sağlıyorsa sürekli fonksiyon denir.

f fonksiyonu, $z_0 \in \mathbb{D}_k$ noktası için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limit değerine sahipse $z = z_0$ noktasında türevli fonksiyon adını alır ve

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olur (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.56. $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayı olmak üzere f , türevlenebilir bir genelleştirilmiş dual sayı değişkenli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x + y\varepsilon_k) = f(x + ky) + (\varepsilon_k - k) y f'(x + ky) \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır (Soylu vd. 2025).

İspat $z = x + y\varepsilon_k$ için

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{D}_k \rightarrow \mathbb{D}_k \\ f(z) &= f(x + y\varepsilon_k) \end{aligned}$$

fonksiyonunun $z = x + ky$ noktasındaki Taylor açılımı yazılırsa

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + ky) + \frac{f'(x + ky)}{1!} (z - (x + ky)) + \frac{f''(x + ky)}{2!} (z - (x + ky))^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x + ky)}{n!} (z - (x + ky))^n + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $z = x + y\varepsilon_k$ yazılarak

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + ky) \\ &= f(x + ky) + \frac{f'(x + ky)}{1!} (\varepsilon_k - k)y + \frac{f''(x + ky)}{2!} (\varepsilon_k - k)^2 y^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x + ky)}{n!} (\varepsilon_k - k)^n y^n + \dots \\ &= f(x + ky) + (\varepsilon_k - k)y f'(x + ky) \end{aligned}$$

elde edilir. □

(4.2) ile genelleştirilmiş dual değişkenli fonksiyonları elde etmek kolaydır.

Örnek 4.57. $f(z) = \frac{1}{z}$ genelleştirilmiş dual sayı değişkenli f fonksiyonu için $z = x + y\varepsilon_k$ yazıldığında

$$f\left(\frac{1}{x + y\varepsilon_k}\right) = f(x + ky) - \frac{(\varepsilon_k - k)y}{(x + y\varepsilon_k)^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.58. $|z|_{\mathbb{D}_k} = r \neq 0$ sağlayan bir $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısı,

$$\theta = \begin{cases} \frac{y}{r}, & z \text{ dual-spacelike ise} \\ -\frac{y}{r}, & z \text{ dual-timelike ise} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$z = \begin{cases} r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta), & z \text{ dual-spacelike ise} \\ -r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta), & z \text{ dual-timelike ise} \end{cases} \quad (4.3)$$

formunda yazılabilir. Bu gösterim şekline z genelleştirilmiş dual sayısının polar formu denir (Soylu vd. 2025).

İspat $|z|_{\mathbb{D}_k} \neq 0$ için bir $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual-spacelike sayısı, $x + ky = r$ dual çemberi üzerinde olsun. Bu durumda, $|z|_{\mathbb{D}_k} = r$ olmak üzere,

$$z = x + y\varepsilon_k = r \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\varepsilon_k \right)$$

yazılabilir. $\theta = \frac{y}{r}$ olsun; böylece $\frac{x}{r} = 1 - k\theta$ elde edilir ve

$$z = r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta)$$

yazılabilir. z 'nin dual-timelike olduğu durum da benzer şekilde belirtilir. $\square$

Tanım 4.59. Genelleştirilmiş bir dual sayının polar formu ile ifadesindeki (4.3) θ değerine z genelleştirilmiş dual sayısının argümenti denir ve $Arg(z) = \theta$ olarak gösterilir.

$-\infty < \theta < \infty$ olduğuna göre, θ , genelleştirilmiş Galile düzlemi için bir dual açı tanımlar. Genelleştirilmiş $r > 0$ yarıçaplı dual çembersel kesitin yönelenmiş alanı, $\frac{r^2\theta}{2}$ ile elde edilir. Bu durumda, $z = x_1 + y_1\varepsilon_k$ ve $w = x_2 + y_2\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayılarına karşılık gelen vektörlere sırasıyla $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ denirse, bu vektörler arasında kalan açının yönlü genelleştirilmiş dual ölçüsü, aynı genelleştirilmiş dual çember üzerinde, $\mathbf{z}$ 'den $\mathbf{w}$ 'ye yönelenmiş şekilde,

$$m(\widehat{\mathbf{z}, \mathbf{w}}) = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{r} & , \quad z \text{ ve } w \text{ aynı dual space-like çember üzerinde ise} \\ \frac{y_1 - y_2}{r} & , \quad z \text{ ve } w \text{ aynı dual time-like çember üzerinde ise} \end{cases}.$$

olarak ifade edilmiş olur (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.60. $z \in \mathbb{D}_k$ için $|z|_{\mathbb{D}_k} = r$ olmak üzere, z 'nin eksponansiyel formu

$$z = re^{\theta(\varepsilon_k - k)}$$

olarak yazılabilir (Soylu vd. 2025).

İspat $f(z) = e^z$ olsun. $z = x + y\varepsilon_k$ için (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + ky) + (\varepsilon_k - k) y f'(x + ky) \\ e^{x+y\varepsilon_k} &= e^{x+ky} + (\varepsilon_k - k) y e^{x+ky} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^{x+y\varepsilon_k} &= e^{x+ky} (1 + (\varepsilon_k - k) y) \\ e^{y(\varepsilon_k - k)} &= 1 + (\varepsilon_k - k) y \end{aligned}$$

olur. $y = \theta$ denirse

$$e^{\theta(\varepsilon_k - k)} = 1 + (\varepsilon_k - k) \theta$$

yazılabilir. (4.3) eşitliği kullanılırsa

$$z = r e^{\theta(\varepsilon_k - k)}$$

elde edilir. □

Teorem 4.61. (*Genelleştirilmiş dual sayılar için de Moivre formülü*)

$$z = r (1 + (\varepsilon_k - k) \theta)$$

genelleştirilmiş dual sayısı için $|z|_{\mathbb{D}_k} \neq 0$ olsun. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z^n = \begin{cases} r^n (1 + (\varepsilon_k - k) \theta n) = r^n e^{\theta n (\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual space-like ise} \\ -r^n (1 + (\varepsilon_k - k) \theta n) = -r^n e^{\theta n (\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual time-like ise} \end{cases} \quad (4.4)$$

olur (Soylu vd. 2025).

İspat Tümevarımla yöntemiyle yapılır. □

Teorem 4.62. Genelleştirilmiş $z = r (1 + (\varepsilon_k - k) \theta)$ dual sayısı için $|z|_{\mathbb{D}_k} \neq 0$ olsun.

$n \neq 0$ tam sayısı için

$$z^{1/n} = \begin{cases} r^{1/n} (1 + (\varepsilon_k - k) \frac{\theta}{n}) = r^{1/n} e^{\frac{\theta}{n} (\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual space-like} \\ -r^{1/n} (1 + (\varepsilon_k - k) \frac{\theta}{n}) = -r^{1/n} e^{\frac{\theta}{n} (\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual time-like} \end{cases} .$$

ifadesi, z genelleştirilmiş dual sayısının n . dereceden köklerini verir (Soylu vd. 2025).

İspat (4.4) ifadesinde n yerine $\frac{1}{n}$ yazıldığında elde edilir. □

Genelleştirilmiş dual sayıların polar gösterimi, genelleştirilmiş Galile düzlemi üzerinde anlamlı bir geometrik yorum yapılmasına olanak tanır.

$z = r_z e^{\theta_z(\varepsilon_k - k)}$ ve $w = r_w e^{\theta_w(\varepsilon_k - k)}$ genelleştirilmiş dual sayıları için çarpma işlemi incelendiğinde

$$r_z e^{\theta_z(\varepsilon_k - k)} r_w e^{\theta_w(\varepsilon_k - k)} = r_z r_w e^{(\theta_z + \theta_w)(\varepsilon_k - k)}.$$

olduğu aşikardır.

Bu durumda bir v genelleştirilmiş dual sayısı, birim $z = 1 + (\varepsilon_k - k)\theta$ genelleştirilmiş dual sayısı ile çarpıldığında, v sayısı, orijin etrafında θ açısı kadar dönmüş olur. Bu dönme işlemi, $|v|_{\mathbb{D}_k}$ yarıçaplı bir genelleştirilmiş dual çember üzerinde gerçekleşir ve genelleştirilmiş dual rotasyon adını alır.

Genelleştirilmiş dual sayılar 2×2 reel matrislerle ifade edilirse, bu durumda genelleştirilmiş dual sayı dönme matrisini de elde etmek mümkündür. Böylece genelleştirilmiş Galile düzleminde dönme hareketine karşılık gelen işlemler de kolaylaşmış olur.

Tanım 4.63. Genelleştirilmiş $z = x + y\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ dual sayısı için

$$M_z = \begin{bmatrix} x & -k^2 y \\ y & x + 2ky \end{bmatrix}$$

matrisine z sayısının matris temsili adı verilir.

$$\mathbb{M}_k = \{M_z : z \in \mathbb{D}_k\}.$$

kümesine de genelleştirilmiş dual sayıların matris gösterimlerinin kümesi denir (Soylu vd. 2005).

Teorem 4.64. $z = x + \varepsilon_k y$ genelleştirilmiş bir dual sayı olmak üzere

$$\Omega : \mathbb{D}_k \longrightarrow \mathbb{M}_k \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \Omega(x + \varepsilon_k y) \\ &= M_z \\ &= \begin{bmatrix} x & -k^2 y \\ y & x + 2ky \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanan Ω dönüşümü bir izomorfizm belirtir (Soylu vd. 2015).

İspat $z = x_1 + \varepsilon_k y_1$ ve $w = x_2 + \varepsilon_k y_2 \in \mathbb{D}_k$ için

(i) Ω birebirdir:

$$\Omega(z) = \Omega(w)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} x_1 & -k^2 y_1 \\ y_1 & x_1 + 2k y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -k^2 y_2 \\ y_2 & x_2 + 2k y_2 \end{bmatrix}$$

olacağından $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$, dolayısıyla da

$$z = w$$

olur ki bu durum Ω dönüşümünün birebir olduğunu gösterir.

(ii) Ω örtendir: Herhangi bir $c \neq 0$

$$M_z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2×2 matrisi için $x = a$ ve $y = c$ denilirse,

$$k = \frac{\mp \sqrt{\det(M_z) - a}}{c}$$

reel sayısına karşılık olan z genelleştirilmiş dual sayısı

$$z = a + \varepsilon_k c$$

olarak elde edilir; böylece verilen bir M_z matrisi için k reel sayısının oluşturduğu $\mathbb{D}_k$ kümesinden bir eleman elde edilmiş olur.

$c = 0$ olduğu durumda z bir reel sayı belirtir, $z = a$ elde edilir.

(iii) Ω dönüşümü, toplama ve çarpma işlemlerini korur: Gerekli işlemler yapılırsa Ω dönüşümünün

$$\Omega(z + w) = \Omega(z) + \Omega(w)$$

$$\Omega(zw) = \Omega(z)\Omega(w)$$

eşitliklerini sağladığı görülür.

Böylece Ω dönüşümü, her $k \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{D}_k$ ile $\mathbb{M}_k$ arasında bir izomorfizm kurar. $\square$

(4.6) ifadesinden de görüldüğü gibi $1 = 1 + \varepsilon_k 0$ sayısına karşılık gelen matris

$$1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ve $\varepsilon_k = 0 + \varepsilon_k 1$ sayısına karşılık gelen matris de

$$\varepsilon_k \sim \begin{bmatrix} 0 & -k^2 \\ 1 & 2k \end{bmatrix}$$

olur, ayrıca

$$(\varepsilon_k - kI_2)^2 = [0]_2$$

eşitliğinin de sağlandığı açıktır.

Teorem 4.65.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 - k\theta & -k^2\theta \\ \theta & 1 + k\theta \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

matrisi, *genelleştirilmiş dual sayılar için bir dual-dönme matrisidir* (Soylu vd. 2025).

İspat Genelleştirilmiş birim dual

$$z = 1 + (\varepsilon_k - k)\theta$$

sayısı düşünüldüğünde herhangi bir v genelleştirilmiş dual sayısı ile çarpıldığında dönme hareketi uygulayacağı bellidir. Buna göre z 'nin matris formu yazıldığında

$$\begin{aligned} R_\theta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & -k^2 \\ 1 & 2k \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \theta \\ &= \begin{bmatrix} 1 - k\theta & -k^2\theta \\ \theta & 1 + k\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Dikkat edilirse (4.7) matrisinin determinantı 1'dir fakat

$$R_\theta R_\theta^T \neq I$$

olduğundan ortogonal bir matris belirtmemektedir. Bu sebeple klasik geometri anlamında (4.7) matrisine dönme matrisi diyemeyiz. Çünkü genelleştirilmiş dual sayılarda dönme hareketi, reel düzlemdeki gibi çembersel bir dönme tanımlamaz; bu düzlemdeki dönme hareketi, dual çember üzerinde dediğimiz fakat aslında bir doğru boyunca öteleme harekettir. Dolayısıyla, bu harekette hem açısal bir dönüş, hem de ölçekleme ve kayma etkisi de söz konusudur. Hareket, bir birim eleman civarında sonsuz küçük dönüşüm gibi

düşünülebilir. Soylu vd. (2025)'de (4.7), dönme matrisi olarak isimlendirilmişti, fakat bu tezde geliştirilmiş dual sayılardaki hareket, deforme bir dönme olduğundan matrise dual-dönme matrisi adının verilmesinin daha uygun olduğu düşünülmüştür.

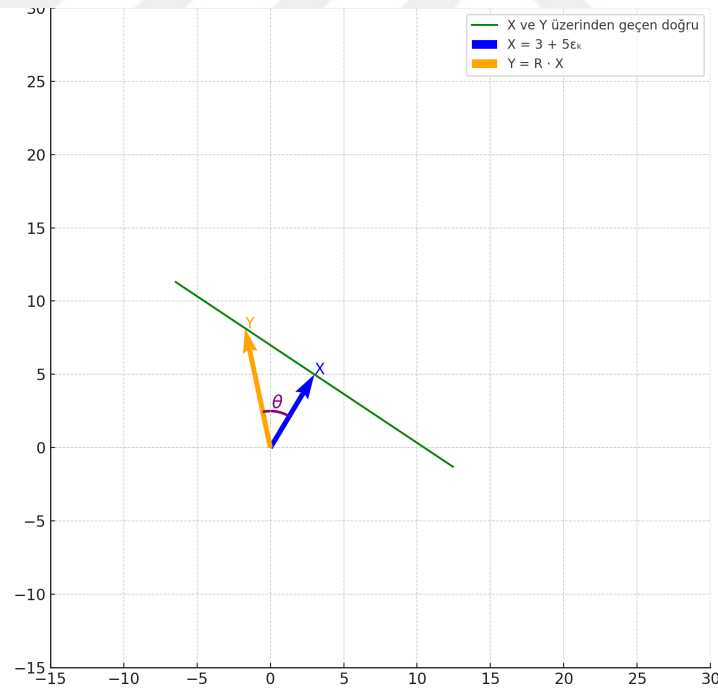
Örnek 4.66. $\mathbb{D}_{1.5}$ geliştirilmiş Galile düzleminde verilen $X = (3, 5)$ noktasının orijin etrafında, dual açısı $\theta = 0.3$ ile oluşturulan dual-dönme sonucu

$$R_{0.3}(X) = \begin{bmatrix} 1 - 1.5(0.3) & -2.25(0.3) \\ 0.3 & 1 + 1.5(0.3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.725 \\ 8.15 \end{bmatrix} = Y$$

noktası elde edilir ve X ile Y noktalarının aynı dual space-like çemberi üzerinde olduğu görülür. Ayrıca, $\|x\| = \|y\| = 10.5$ olur. x ile y dual-spacelike olduğundan x ve y arasındaki dual açının da

$$m(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{8.15 - 5}{10.5} = 0.3$$

olduğu görülür (Şekil 4.5).



Şekil 4.5. $\mathbb{D}_{1.5}$ için X noktasının θ açısı altındaki dönmesi.

Genelleştirilmiş dual sayılar için bir matris form belirlenmesi, genelleştirilmiş dual sayılara ait çoğu karmaşık işlemin de daha kolay yollardan yapılabilmesine olanak sağlar.

Örnek 4.67. $\mathbb{D}_k$ geliştirilmiş dual sayılar kümesinde $k = -2$ olarak alındığında bir

$z = 3 - \varepsilon_{-2}$ genelleştirilmiş dual sayısının matris formuna A denilirse

$$\varepsilon_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} A &= 3I_2 - \varepsilon_{-2} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. z 'nin modülü $|z| = r = 5$ ve argümenti $\text{Arg}(z) = \theta = -\frac{1}{5}$ olduğundan z için polar form

$$z = 5 \left(1 - (\varepsilon_{-2} + 2) \frac{1}{5} \right)$$

yazıldığında A matrisinin polar formu da

$$A = 5 \left(I_2 - (\varepsilon_{-2} + 2I_2) \frac{1}{5} \right)$$

olur. Bu durumda A^{10} hesaplandığında

$$\begin{aligned} A^{10} &= 5^{10} (I_2 - (\varepsilon_{-2} + 2I_2) \frac{1}{5})^{10} \\ &= 5^{10} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve $\sqrt{A}$ hesaplanırsa

$$\sqrt{A} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

matrisleri kolaylıkla elde edilir.

4.2. D_k^3 Genelleştirilmiş Dual Sayılar Modülü

Tanım 4.68. $\mathbb{D}_k^3 = \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k$ kümesinden alınan $\mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k$ ve $\mathbf{v}_i = v_i + v_i^* \varepsilon_k$, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ ve } \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in \mathbb{D}_k^3$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda + \lambda^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$$

için

i. Toplama İşlemi:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 + \mathbf{v}_3) \in \mathbb{D}_k^3$$

ii. Skalerle Çarpma İşlemi:

$$\lambda \mathbf{U} = (\lambda \mathbf{u}_1, \lambda \mathbf{u}_2, \lambda \mathbf{u}_3) \in \mathbb{D}_k^3$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte $\mathbb{D}_k^3$ kümesine $\mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayılar halkası üzerinde genelleştirilmiş dual sayı modülü denir. $\mathbb{D}_k^3$ modülünün her bir elemanına da genelleştirilmiş dual sayı vektörü adı verilir (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.69. $\mathbf{U} \in \mathbb{D}_k^3$ bir genelleştirilmiş dual sayı vektörü, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^3$ reel vektörler olmak üzere,

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$$

şeklinde yazılabilir (Soylu vd. 2025).

İspat $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ genelleştirilmiş dual sayı vektörü, $\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ olarak yazılsın. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ reel vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \\ &= (u_1 + u_1^* \varepsilon_k, u_2 + u_2^* \varepsilon_k, u_3 + u_3^* \varepsilon_k) \\ &= (u_1, u_2, u_3) + (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \varepsilon_k \\ &= \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. □

Tanım 4.70. $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ genelleştirilmiş dual sayı vektörleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}_k^3} : \mathbb{D}_k^3 \times \mathbb{D}_k^3 &\rightarrow \mathbb{D}_k \\ \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde, Öklid iç çarpımına benzer bir şekilde tanımlanan skaler çarpıma, $\mathbb{D}_k^3$ modülü üzerinde skaler çarpım adı verilir (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.71. $\mathbb{D}_k^3$ modülü üzerinde tanımlanan skaler çarpım (4.8) ile birlikte $\mathbb{D}_k^3$ modülünün oluşturduğu sisteme genelleştirilmiş dual uzay adı verilir ve $(\mathbb{D}_k^3, \langle, \rangle_{\mathbb{D}_k^3})$ ile gösterilir. Bu uzayın her bir elemanı da genelleştirilmiş dual vektör adını alır (Soylu 2025).

Teorem 4.72. $\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{D}_k$ olmak üzere, $\mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k$, $\mathbf{v}_i = v_i + v_i^* \varepsilon_k$ denilirse, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ genelleştirilmiş dual vektörler için skaler çarpım, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ ve $\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ reel vektörleri ile

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - k^2 \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \rangle + \varepsilon_k (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^* \rangle + \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle + 2k \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \rangle) \quad (4.9)$$

olarak ifade edilir.

İspat $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ genelleştirilmiş dual vektörleri için $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{D}_k$, $(i = 1, 2, 3)$ olmak üzere, $\mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k$, $\mathbf{v}_i = v_i + v_i^* \varepsilon_k$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 \\ &= (u_1 + u_1^* \varepsilon_k) (v_1 + v_1^* \varepsilon_k) + (u_2 + u_2^* \varepsilon_k) (v_2 + v_2^* \varepsilon_k) + (u_3 + u_3^* \varepsilon_k) (v_3 + v_3^* \varepsilon_k) \\ &= \sum_{i=1}^3 (u_i v_i + \varepsilon_k (u_i v_i^* + v_i u_i^*) + \varepsilon_k^2 u_i^* v_i^*) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon_k^2 = -k^2 + 2k\varepsilon_k$ olduğundan, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ ve $\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ denilirse

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \sum_{i=1}^3 (u_i v_i - k^2 (u_i^* v_i^*) + \varepsilon_k (u_i v_i^* + v_i u_i^* + 2k u_i^* v_i^*)) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - k^2 \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \rangle + \varepsilon_k (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^* \rangle + \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle + 2k \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \rangle) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.73. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$, $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k^3$ ve $\mathbf{W} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual vektörler, λ_1 ve $\lambda_2 \in \mathbb{D}_k$ için

- (i) $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}$
 - (ii) $\langle \lambda_1 \mathbf{U}, \lambda_2 \mathbf{V} + \mathbf{W} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \lambda_1 \lambda_2 \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} + \lambda_1 \langle \mathbf{U}, \mathbf{W} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}$
- eşitlikleri sağlanır.

İspat Skaler çarpım özelliklerinden açıkça görülmektedir. □

Tanım 4.74. $\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ olmak üzere, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ genelleştirilmiş dual vektör için

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3}$$

ifadesine $\mathbf{U}$ genelleştirilmiş dual vektörün normu adı verilir.

Teorem 4.75. $\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{u}_i = u_i + u_i^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ olmak üzere, $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k^3$ için $\mathbf{U}$ genelleştirilmiş dual vektörün normu

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 - k^2 \|\mathbf{u}^*\|^2 + 2\varepsilon_k (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k \|\mathbf{u}^*\|^2)} \quad (4.10)$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat (4.9) ifadesinde $\mathbf{V}$ yerine $\mathbf{U}$ yazılarak elde edilir. □

Buna göre $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k \in \mathbb{D}_k^3$ için

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - k^2 \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle + 2\varepsilon_k (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle)$$

ifadesi incelenirse elde edilen dual sayı için pozitif tanımlılığın anlamlı olmadığı görülmektedir; bu sebeple bu fonksiyona bir iç çarpım demek doğru değildir.

Teorem 4.76. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^* \in \mathbb{D}_k^3$ genelleştirilmiş dual vektörü için

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k) \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}$$

ifadesi $\mathbf{U}$ 'nın normunu verir.

İspat $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^*$ genelleştirilmiş dual vektör için (4.10) ifadesinde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 - k^2 \|\mathbf{u}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k) (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k \|\mathbf{u}^*\|^2) + 2k (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k \|\mathbf{u}^*\|^2)} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + 2k \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k^2 \|\mathbf{u}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k) (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle + k \|\mathbf{u}^*\|^2)} \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k) \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}$$

elde edilmiş olur. □

Teorem 4.77. $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^* \in \mathbb{D}_k^3$ vektörünün normu

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|} \quad (4.11)$$

eşitliği ile belirlidir.

İspat $\mathbf{U} = \mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k) \mathbf{u}^* \in \mathbb{D}_k^3$ vektörünün normu

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k) \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2 \left(1 + 2(\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2} + (\varepsilon_k - k)^2 \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle^2}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^4} \right)} \\ &= \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| \sqrt{\left(1 + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|^2} \right)^2} \\ &= \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.78. Bir $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^* \in \mathbb{D}_k^3$ genelleştirilmiş dual vektörü

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k) \mathbf{u}^*$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{U}$ genelleştirilmiş dual vektörünün normu

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|}$$

olarak ifade edilebilmektedir. Bu durumda $(\varepsilon_k - k)^2 = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa, genelleştirilmiş dual vektörler, standart dual sayılardaki $k = 0$ durumuna karşılık gelen $\varepsilon^2 = 0$ durumunna benzer bir davranış sergileyip, genelleştirilmiş dual üniteri $(\varepsilon_k - k)$ olarak kabul etmemize olanak sağlarlar.

(4.11) eşitliğine göre de $\mathbf{U}$ 'nin birim vektör olması için gerek ve yeter koşul

$$\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0 \quad (4.12)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Tanım 4.79. $\mathbb{DS}_k^3$ üzerinde tanımlanan ve birim genelleştirilmiş dual sayı vektörlerinden oluşan

$$\mathbb{DS}_k^3 = \{ \mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^* : \| \mathbf{u} + k \mathbf{u}^* \| = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{u} + k \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0, \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^3 \}$$

kümeye genelleştirilmiş dual birim küre adı verilir. Bu durumda $\mathbb{DS}_k^3$ üzerindeki her bir nokta, birim genelleştirilmiş bir dual vektör ile ifade edilebilir (Soylu vd. 2025).

Tanım 4.80. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir d yönlü doğrusu, üzerinde alınan bir P noktası ve doğrultusu $\mathbf{u}$ vektörü ile temsil edilmek üzere,

$$\mathbf{u}^* = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{u}$$

ile oluşturulan vektöre d yönlü doğrusunun orijine göre moment vektörü denir.

d yönlü doğrusunun $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ şeklindeki, altı bileşenli bir sıralı ikili ile temsiline de d 'nin Plücker koordinatları adı verilir (Plücker 1846).

$\mathbf{u}^*$ moment vektörünün belirlenmesinde d yönlü doğrusu üzerinde alınan P noktasının belirli bir nokta olmasının önemi yoktur. d üzerinde alınan farklı bir Q noktası için de $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ olacağından $\overrightarrow{OP} \times \mathbf{u} = \overrightarrow{OQ} \times \mathbf{u}$ elde edilir ki buradan $\mathbf{u}^*$ moment vektörü olarak $(\overrightarrow{OQ} \times \mathbf{u})$ ifadesinin de belirlenebileceği aşıkardır.

Bu durumda d üzerindeki noktanın belirlenmesinde, d yönlü doğrusunun orijine en yakın olduğu nokta da düşünülebilir. Bu nokta D olmak üzere

$$\mathbf{u}^* = \overrightarrow{OD} \times \mathbf{u}$$

olacak şekilde oluşturulan moment vektörü için

$$\| \mathbf{u}^* \| = \| \overrightarrow{OD} \| \cdot \| \mathbf{u} \|^2$$

olur.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u}^* = \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \overrightarrow{OD}$$

olarak alınabilir. Bu durumda $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ şartını sağlayan $(\mathbf{u} \neq \mathbf{0})$ Plücker koordinatları $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ için

$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{u}^*}{\| \mathbf{u} \|^2} + t \mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$$

olarak ifadelendirilen tek bir d yönlü doğrusu vardır.

Özel bir durum olarak $\|\mathbf{u}\| = 1$ alınırsa, $\|\mathbf{u}^*\|$, orijinden d doğrusuna olan mesafeyi belirtir ve d yönlü doğrusu da

$$D + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$$

şeklinde belirtilir. Bu yönlü doğru, normalleştirilmiş tek bir $(\mathbf{u}, \overrightarrow{OD} \times \mathbf{u})$ şeklindeki Plücker koordinatlarına karşılık gelir.

$\|\mathbf{u}\| \neq 1$ durumunda da normalleştirme işlemi yapılabilir. Bu durumda $\|\mathbf{u}\| = 1$ ve $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ olmak üzere, normalleştirilmiş Plücker koordinatları $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u}^* + t\mathbf{u}$$

şeklindeki tek bir doğruya karşılık gelir ve $D + t\mathbf{u}$ yönlü doğrusu da $\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \overrightarrow{OD} \times \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right)$ şeklinde tek bir normalleştirilmiş Plücker koordinatlarına karşılık gelir. Açıkthat ki bu eşleşme birebirdir (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.81. (Genelleştirilmiş Study Dönüşümü) $\mathbb{R}^3$ uzayında her yönlü doğru, genelleştirilmiş dual birim küre üzerinde bir noktaya karşılık gelir (Soylu vd. 2025).

İspat Uzayda yönlü bir doğru d 'nin birim doğrultu vektörü $\mathbf{v}$ ve üzerindeki bir nokta D ile belli olsun. $\mathbf{u}^* = \overrightarrow{OD} \times \mathbf{v}$ ve $\mathbf{u} = \mathbf{v} - k\mathbf{u}^*$ vektörleri tanımlandığında, $\mathbf{u}^*$ ve $\mathbf{u}$ vektörlerinin $\mathbf{v}$ ve $\overrightarrow{OD}$ vektörleri ile tek bir şekilde belirlendiği görölmektedir. Bu durumda, d yönlü doğrusunun normalleştirilmiş Plücker koordinatları

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}^*) = (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$$

şeklinde elde edilir. Bu koordinatlar, $\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ ve $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ olduğundan birim genelleştirilmiş dual vektör $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ olarak tek şekilde karşılığını bulur.

Tersi düşünölürse, $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual vektörü, $\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| = 1$ ve $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ sağlayan birim genelleştirilmiş dual vektörü olsun. Bu durumda $\mathbf{U}$ vektörü, $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{u}^*$ noktasından geçen ve $\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*$ doğrultman vektörüne sahip olan, tek bir yönlü doğruya karşılık gelen ve tek bir haliyle belli olan $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$ şeklindeki Plücker koordinatlarına karşılık gelir.

Genelleştirilmiş birim dual vektörleri ile normalleştirilmiş Plücker koordinatları ile ifade edilen $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlü doğrular arasındaki bu eşleşme birebirdir. $\square$

Sonuç 4.82. Genelleştirilmiş birim dual vektörler ve $\mathbb{R}^3$ yönlü uzay doğruları arasındaki eşleşmede, $\|\overrightarrow{OD} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}^*\|$ değeri, orijinden d yönlü doğrusuna olan mesafeyi göstermek üzere, normalleştirilmiş $(\mathbf{v}, \overrightarrow{OD} \times \mathbf{v})$ Plücker koordinatlı bir $d : D + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}$ yönlü doğrusuna karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektör

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{v} + (\varepsilon_k - k) (\overrightarrow{OD} \times \mathbf{v})$$

olur.

$\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| = 1$ ve $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ eşitliklerini sağlayan, genelleştirilmiş birim dual vektör $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ 'ya karşılık gelen, normalleştirilmiş $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$ Plücker koordinatlı yönlü doğru ise

$$d_{\mathbf{U}} : ((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{u}^*) + t(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*), t \in \mathbb{R}$$

olarak belirlidir.

Teorem 4.83. $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ sırasıyla, genelleştirilmiş Study dönüşümüne göre, genelleştirilmiş birim dual vektörler $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon_k$ 'ye karşılık gelen yönlü doğrular olsunlar. $P_{\mathbf{U}}$ ve $P_{\mathbf{V}}$, sırasıyla $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ doğrularının ortak dikmelerinin dikme ayakları olmak üzere $|P_{\mathbf{U}} P_{\mathbf{V}}| = \theta^*$ eşitliği sağlansın. $\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*$ ile $\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*$ vektörleri arasındaki açı $\theta \in [0, \pi]$, ve $\mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ ile $(\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) \times \overrightarrow{P_{\mathbf{U}} P_{\mathbf{V}}}$ arasındaki açı (ya da $\mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon_k$ ile $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \overrightarrow{P_{\mathbf{V}} P_{\mathbf{U}}}$ arasındaki açı) $\frac{\pi}{2} + \theta$ ise bu durumda

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \quad (4.13)$$

sağlanır (Soylu vd. 2025).

İspat Teoremden verilen şartlar sağlanmak üzere, $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ yönlü doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları sırasıyla $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$ ve $(\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^*)$ şeklindedir. $\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*$ ile $\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*$ arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle = \cos \theta$$

elde edilir. $\mathbb{R}^3$ 'de Öklidiyen hareketler, iki vektör arasındaki Öklid iç çarpımını değiştirmediklerinden, $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$ doğruları, bu hareketlere maruz bırakıldığında, bunlara karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektörler arasındaki skaler çarpım aynı kalmasına rağmen, bu

vektörler değişecektir. O halde, doğruları bir $\overrightarrow{OP_U}$ vektörü boyunca ötelersek, ötelenmiş d'_U ve d'_V doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları, $\mathbf{v}^{**} = (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) \times \overrightarrow{OP'_V}$ temsil edecek şekilde, sırasıyla

$$(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{0}) \text{ ve } (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^{**})$$

olarak elde edilir ve karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektörler de

$$\mathbf{U}' = \mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{0} \text{ ile } \mathbf{V}' = \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{v}^{**}$$

olur. $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \langle \mathbf{U}', \mathbf{V}' \rangle_{\mathbb{D}_k^3}$ ve $\|\mathbf{v}^{**}\| = \|\overrightarrow{OP'_V}\| = \theta^*$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle + (\varepsilon_k - k) (\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^{**} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle) \\ &= \cos \theta + (\varepsilon_k - k) \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^{**} \rangle \\ &= \cos \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^* \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \cos \theta - (\varepsilon_k - k) \theta^* \sin \theta \\ &= \cos (\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \end{aligned}$$

yazılabilir. Doğrular $-\overrightarrow{OP_V}$ vektörü boyunca ötelenirse, aynı sonuç elde edilir:

$$\mathbf{u}^{**} = (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \overrightarrow{OP'_U}$$

olmak üzere, ötelenmiş d'_U ve d'_V doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları sırasıyla

$$(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{**}) \text{ ve } (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*, \mathbf{0})$$

olarak elde edilir ve karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektörler de

$$\mathbf{U}' = \mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{u}^{**} \text{ ile } \mathbf{V}' = \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{0}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle + (\varepsilon_k - k) (\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{u}^{**}, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle) \\ &= \cos \theta + (\varepsilon_k - k) \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^{**} \rangle \\ &= \cos \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^* \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \cos \theta - (\varepsilon_k - k) \theta^* \sin \theta \\ &= \cos (\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ ile $(\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) \times \overrightarrow{P_U P_V}$ vektörleri arasındaki açı ya da $\mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon_k$ ile $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \overrightarrow{P_V P_U}$ arasındaki açı aynıdır, çünkü

$$\left\langle \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k, (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) \times \overrightarrow{P_U P_V} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v} + k\mathbf{v}^*, (\mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k) \times \overrightarrow{P_V P_U} \right\rangle$$

sağlanmaktadır. □

Tanım 4.84. $\theta = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*$ genelleştirilmiş dual sayısına (4.13), $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ genelleştirilmiş dual vektörleri arasındaki genelleştirilmiş dual açısı adı verilir (Soylu vd. 2025).

Sonuç 4.85. Reel uzayda, iki yönlü doğru arasındaki açı θ ve aralarındaki uzaklık da θ^* olmak üzere, $\theta = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*$ bir dual açı belirtsin. Bu durumda, yönlü doğrulara karşılık gelen birim dual küre üzerindeki iki noktanın skaler çarpımı, $\cos \theta$ ile ifade edilir.

Tanım 4.86. $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ genelleştirilmiş dual vektörleri için

$$\times_{\mathbb{D}_k^3} : \mathbb{D}_k^3 \times \mathbb{D}_k^3 \rightarrow \mathbb{D}_k^3$$

$$\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş dual vektörel çarpım adı verilir (Soylu vd. 2025).

Teorem 4.87. Genelleştirilmiş dual vektörler $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ ve $\lambda \in \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayısı için

i) $\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{U} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = -(\mathbf{V} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{U})$

iii) $\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} (\mathbf{V} + \mathbf{Z}) = (\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{Z})$

iv) $\lambda \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \lambda \mathbf{V} = \lambda (\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V})$

v) $\langle \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V}, \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{Z} \rangle = \det(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{Z})$

vi) $\langle \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V}, \mathbf{Z} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{W} \rangle = (\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{Z}) (\mathbf{V} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{W}) - (\mathbf{V} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{Z}) (\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{W})$

eşitlikleri sağlanır (Soylu vd. 2025).

İspat $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ olsun. Bu durumda

i) $\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{U} = (\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1)$

$= (-(\mathbf{u}_3\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2\mathbf{v}_3), -(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_3\mathbf{v}_1), -(\mathbf{u}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2)) = -(\mathbf{V} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{U})$
elde edilir; diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir. $\square$

Teorem 4.88. *Genelleştirilmiş dual vektörler $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon_k$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon_k$ arasında tanımlanan genelleştirilmiş dual vektörel çarpım*

$$\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) + (\varepsilon_k - k)((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{v}^* + \mathbf{u}^* \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*))$$

ile belirlidir (Soylu vd. 2025).

İspat $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ genelleştirilmiş dual vektörleri

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{u}^*$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{v}^*$$

şeklinde yazılabileceğinden, $(\varepsilon_k - k)^2 = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} &= (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^* + (\varepsilon_k - k)\mathbf{v}^*) \\ &= (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) + (\varepsilon_k - k)((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{v}^* + \mathbf{u}^* \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*)) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.89. $d_{\mathbf{U}}$ ve $d_{\mathbf{V}}$, genelleştirilmiş Study dönüşümüne göre, sırasıyla $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon_k$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon_k$ birim genelleştirilmiş dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular olsunlar. $P_{\mathbf{U}}$ ve $P_{\mathbf{V}}$, sırasıyla $d_{\mathbf{U}}$ ile $d_{\mathbf{V}}$ yönlü doğrularının ortak diklerinin dikme ayakları olmak üzere, $|P_{\mathbf{U}}P_{\mathbf{V}}| = \theta^*$ eşitliği sağlansın. $\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*$ ve $\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*$ vektörleri arasındaki açı $\theta \in [0, \pi]$ ve $\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\varepsilon_k$ ile $(\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) \times \overrightarrow{P_{\mathbf{U}}P_{\mathbf{V}}}$ arasındaki açı (ya da $\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\varepsilon_k$ ile $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^* \times \overrightarrow{P_{\mathbf{V}}P_{\mathbf{U}}})$ arasındaki açı) $\frac{\pi}{2} + \theta$ ise bu durumda

$$\left\| \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} \right\|_{\mathbb{D}_k^3} = \sin(\theta + (\varepsilon_k - k)\theta^*)$$

olur.

İspat Lagrange kuralı ile

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} \right\|_{\mathbb{D}_k^3} &= \sqrt{\left\langle \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V}, \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} \right\rangle_{\mathbb{D}_k^3}} \\ &= \sqrt{\left\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \right\rangle_{\mathbb{D}_k^3} \left\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \right\rangle_{\mathbb{D}_k^3} - \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \right\rangle_{\mathbb{D}_k^3}^2} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\theta + (\varepsilon_k - k)\theta^*)} \end{aligned}$$

$\sin^2 \mathbf{U} + \cos^2 \mathbf{U} = 1$ kullanılarak

$$\left\| \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} \right\|_{\mathbb{D}_k^3} = \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*)$$

elde edilir.

$\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ birim değilse

$$\frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|_{\mathbb{D}_k^3}} \text{ ve } \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|_{\mathbb{D}_k^3}}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} &= \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{D}_k^3} \|\mathbf{V}\|_{\mathbb{D}_k^3} \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \\ \|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\|_{\mathbb{D}_k^3} &= \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{D}_k^3} \|\mathbf{V}\|_{\mathbb{D}_k^3} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 4.90. *Yönlü doğrular olan*

$$\alpha(P, \mathbf{u}) = (3, 0, -4) + t \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

ve

$$\beta(Q, \mathbf{v}) = (1, -4, -3) + t \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

arasındaki genelleştirilmiş dual açı $\theta = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*$ hesaplanırsa; α ve β doğrularının normalleştirilmiş Plücker koordinatları

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -2 \right) \right)$$

ve

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) = \left(\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(-\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right) \right)$$

olur. Karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektörler de sırasıyla

$$\mathbf{U} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) + (\varepsilon_k - k) \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -2 \right)$$

ve

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) + (\varepsilon_k - k) \left(-\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle = \frac{4}{9}$ ve $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* \rangle + \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle = -\frac{10}{3}$ olduğundan,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \frac{4}{9} - (\varepsilon_k - k) \frac{10}{3}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\theta^* = \frac{|\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \frac{30}{\sqrt{65}},$$

ve $\cos \theta = \langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{v} + k\mathbf{v}^* \rangle = \frac{4}{9}$ şeklinde hesaplanabilir. Böylece, $\theta = \arccos \frac{4}{9}$, dolayısıyla

$$\theta = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^* = \arccos \frac{4}{9} + (\varepsilon_k - k) \frac{30}{\sqrt{65}}$$

elde edilir.

Gerçekten de

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta - (\varepsilon_k - k) \theta^* \sin \theta \\ &= \cos \left(\arccos \frac{4}{9} \right) - (\varepsilon_k - k) \frac{30}{\sqrt{65}} \frac{\sqrt{65}}{9} \\ &= \frac{4}{9} - (\varepsilon_k - k) \frac{10}{3} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bunun yanında,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} &= \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \\ &= \sin \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^* \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{65}}{9} + (\varepsilon_k - k) \frac{40}{3\sqrt{65}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} &= (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) + (\varepsilon_k - k) ((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{v}^* + \mathbf{u}^* \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*)) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}\right) + (\varepsilon_k - k) \left(-\frac{31}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{17}{9}\right) \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V}} &= \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|} \\ &= \frac{\sqrt{65}}{9} + (\varepsilon_k - k) \frac{40}{3\sqrt{65}}. \end{aligned}$$

elde edilir (Soylu vd. 2025).

4.3. Genelleştirilmiş Dual Kuaterniyonlar

Tanım 4.91. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayıları ve $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ eşitliklerini sağlayan temel birim vektörler olmak üzere, $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$ ifade-sine genelleştirilmiş dual kuaterniyon adı verilir. Genelleştirilmiş dual sayılardan oluşan

küme $\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$ ile gösterilir. $\mathbf{a} = 0$ olması durumunda $\mathbf{Q}$ 'ya genelleştirilmiş has dual kuaterniyon adı verilir ve genelleştirilmiş has dual kuaterniyonlardan oluşan küme de $\mathbb{H}_0(\mathbb{D}_k)$ ile gösterilir.

$\mathbb{H}_0(\mathbb{D}_k)$ kümesinin genelleştirilmiş dual vektör modülü $\mathbb{D}_k^3$ ile izomorf olduğu aşikardır. Dolayısıyla genelleştirilmiş has kuaterniyonlar, $\mathbb{D}_k^3$ kümesinin bir vektörü olarak da düşünülebilir.

Tanım 4.92. $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{i} + \mathbf{c}_1\mathbf{j} + \mathbf{d}_1\mathbf{k}$ ve $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2\mathbf{i} + \mathbf{c}_2\mathbf{j} + \mathbf{d}_2\mathbf{k}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonları için toplama işlemi

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{i} + (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)\mathbf{j} + (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)\mathbf{k}$$

çarpma işlemi

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{i} + \mathbf{c}_1\mathbf{j} + \mathbf{d}_1\mathbf{k})(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2\mathbf{i} + \mathbf{c}_2\mathbf{j} + \mathbf{d}_2\mathbf{k})$$

ve bir genelleştirilmiş dual kuaterniyonun genelleştirilmiş dual sayı $\lambda \in \mathbb{D}_k$ ile çarpılması

$$\lambda\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\mathbf{i} + \lambda\mathbf{c}\mathbf{j} + \lambda\mathbf{d}\mathbf{k}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

Teorem 4.93. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{q}^* \in \mathbb{H}$ birer reel kuaterniyon olmak üzere, her genelleştirilmiş dual kuaterniyon $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^*\varepsilon_k$$

olarak, bir ve yalnız bir şekilde ifade edilebilir.

İspat Genelleştirilmiş dual kuaterniyon $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k} \in \mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$ için $\mathbf{a} = a + a^*\varepsilon_k$, $\mathbf{b} = b + b^*\varepsilon_k$, $\mathbf{c} = c + c^*\varepsilon_k$ ve $\mathbf{d} = d + d^*\varepsilon_k$ olmak üzere, $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonu

$$\mathbf{Q} = (a + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}) + (a^* + b^*\mathbf{i} + c^*\mathbf{j} + d^*\mathbf{k})\varepsilon_k$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{q} = a + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ ve $\mathbf{q}^* = a^* + b^*\mathbf{i} + c^*\mathbf{j} + d^*\mathbf{k}$ denilirse

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^*\varepsilon_k$$

elde edilir ve bu ifadenin tek bir şekilde yazılabilmesi ise aşikar bir durumdur. $\square$

Tanım 4.94. $\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}(\mathbb{D}_k) = \{\mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k : \mathbf{q}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{H} \text{ ve } \varepsilon_k = -k^2 + 2k\varepsilon_k\}$$

ile ifade edilebilir. Bu durumda $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1^* \varepsilon_k$ ve $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonları için toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + (\mathbf{q}_1^* + \mathbf{q}_2^*) \varepsilon_k \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 - k^2 \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2^* + \varepsilon_k (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^* + \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2 + 2k \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2^*) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

$\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$ kümesi, bu işlemlere göre birleşmeli, değişmeli olmayan bir halkadır. Standart dual kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}(\mathbb{D})$ ile $k = 0$ olduğu $\mathbb{H}(\mathbb{D}_0)$ kümesi eşittir. Toplamsal birim 0, $\mathbf{Q}$ 'nun toplamsal tersi $-\mathbf{Q}$ 'dur.

Dual kuaterniyonlardaki gibi genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar için de üç tip eşlenik vardır.

Tanım 4.95. Genelleştirilmiş dual kuaterniyon $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ için

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{i} - \mathbf{c}\mathbf{j} - \mathbf{d}\mathbf{k}$$

ifadesine genelleştirilmiş dual kuaterniyonik eşlenik,

$$\mathbf{Q}^- = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}\mathbf{i} + \overline{\mathbf{c}}\mathbf{j} + \overline{\mathbf{d}}\mathbf{k}$$

ifadesine genelleştirilmiş dual eşlenik ve

$$\mathbf{Q}^o = \overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}\mathbf{i} - \overline{\mathbf{c}}\mathbf{j} - \overline{\mathbf{d}}\mathbf{k}$$

ifadesine de genelleştirilmiş dual toplam eşlenik denir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k \text{ için}$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{q}^*} \varepsilon_k$$

$$\mathbf{Q}^- = \mathbf{q} - \varepsilon_k \mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{Q}^o = \overline{\mathbf{q}} - \overline{\mathbf{q}^*} \varepsilon_k$$

olur. Ayrıca

$$\overline{\overline{Q}} = (Q^-)^- = (Q^o)^o = Q$$

eşitlikleri de geçerli olur. Buradan

$$\overline{Q_1 + Q_2} = \overline{Q_1} + \overline{Q_2}$$

$$(Q_1 + Q_2)^- = Q_1^- + Q_2^-$$

$$(Q_1 + Q_2)^o = Q_1^o + Q_2^o$$

ve

$$\overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_2 Q_1}$$

$$(Q_1 Q_2)^- = Q_1^- Q_2^-$$

$$(Q_1 Q_2)^o = Q_2^o Q_1^o$$

eşitlikleri de yazılabilir.

Genelleştirilmiş dual kuaterniyonun normu, bir dual kuaterniyonun normu ile benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 4.96. Genelleştirilmiş bir dual kuaterniyonun normu, $Q = a + bi + cj + dk$ olmak üzere

$$\|Q\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = \sqrt{Q\overline{Q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $Q=0$ ise $\|Q\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = 0$ olarak tanımlıdır.

$\|Q\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = 1$ ise Q genelleştirilmiş birim dual kuaterniyon adını alır.

Teorem 4.97. $Q = q + q^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonun normu

$$\|Q\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = \|q + kq^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle q + kq^*, q^* \rangle}{\|q + kq^*\|}$$

eşitliği ile bellidir.

İspat $(\varepsilon_k - k)^2 = 0$ olmak üzere, $Q = q + q^* \varepsilon_k = q + kq^* + (\varepsilon_k - k) q^*$ olarak yazılırsa

$$\|Q\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = \sqrt{Q\overline{Q}} = \sqrt{(q + kq^* + (\varepsilon_k - k) q^*) (\overline{q} + k\overline{q^*} + (\varepsilon_k - k) \overline{q^*})}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)(\bar{\mathbf{q}} + k\bar{\mathbf{q}}^*) + (\varepsilon_k - k)((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)\bar{\mathbf{q}}^* + \mathbf{q}^*(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*))} \\
&= \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} + k\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}^* + k\mathbf{q}^*\bar{\mathbf{q}} + k^2\mathbf{q}^*\bar{\mathbf{q}}^* + (\varepsilon_k - k)(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}^* + k\mathbf{q}^*\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^*\bar{\mathbf{q}} + k\mathbf{q}^*\bar{\mathbf{q}}^*)} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{q}\|^2 + 2k\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}^* \rangle + k^2\|\mathbf{q}^*\|^2 + 2(\varepsilon_k - k)(\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}^* \rangle + k\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle)} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2 + 2k\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle} \\
&= \|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| \sqrt{1 + \frac{2(\varepsilon_k - k)\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2}}
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} &= \|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| \left(1 + \frac{(\varepsilon_k - k)\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} \right) \\
&= \|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| + \frac{(\varepsilon_k - k)\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|}
\end{aligned}$$

□

Bu durumda bir genelleştirilmiş dual kuaterniyonun birim olabilmesi için gerek ve yeter koşul verilebilir.

Sonuç 4.98. $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^*\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonun birim olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| &= 1 \\
\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle &= 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.99. Norm kavramının tanımı gereği, $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonları için

$$\|\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = \|\mathbf{Q}_1\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} \|\mathbf{Q}_2\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}$$

eşitliği sağlanır.

Genelleştirilmiş birim dual vektörlerle genelleştirilmiş birim has kuaterniyonlar arasında birebir karşılık olduğundan, genelleştirilmiş Study dönüşümü gereği, uzayda yönlü doğru parçaları ile genelleştirilmiş birim has kuaterniyonlar arasında da birebir eşleşme

vardır. Bunun yanı sıra, $\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| = 1$ ve $\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle = 0$ koşullarını sağlayan genelleştirilmiş birim kuaterniyon $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k$,

$$l_{\mathbf{Q}} : ((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*) \times \mathbf{q}^*) + t(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*), t \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlı, $(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^*)$ normleştirilmiş Plücker koordinatlı, $\mathbf{q}^*$ 'a ortogonal olan ve orijinden $\|\mathbf{q}^*\|$ mesafesindeki yönlü doğru ile eşleşir.

Genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar için $1 + 0\varepsilon_k$ çarpımsal birimdir. Bu kümenin her elemanı için çarpımsal tersinin olmadığı aşıkardır. Fakat genelleştirilmiş dual kuaterniyonun tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul vardır ve bu ters eleman, kuaterniyonik eşlenik ve norm kavramları ile ifade edilebilir. Normu sıfır olmayan genelleştirilmiş dual kuaterniyon $\mathbf{Q}$ için

$$\mathbf{Q} \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}^2} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}^2} \mathbf{Q} = 1$$

olduğundan, $\mathbf{q} + k\mathbf{q}^* \neq 0$ sağlanırsa dolayısıyla $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} \neq 0$ olur ve genelleştirilmiş dual kuaterniyon $\mathbf{Q}$ ' nun tersi

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}^2}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonun tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mathbf{q} + k\mathbf{q}^* \neq 0$ durumunun sağlanmasıdır. Sıfırdan farklı olup da normu sıfırlanan genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar da vardır. Örneğin $\mathbf{q} + k\mathbf{q}^* = 0$ ve $\mathbf{q}^* \neq 0$ olsun, bu durumda $\mathbf{Q} \neq 0$ fakat $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = 0$ olmaktadır.

Teorem 4.100. *Normu sıfır olmayan $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonunun tersi*

$$\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1} (1 - (\varepsilon_k - k) \mathbf{q}^* (\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1})$$

ile belirlidir.

İspat $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{-1} &= \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}^2} \\
&= \frac{(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}) + (\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*}}{((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*) + (\varepsilon_k - k)\mathbf{q}^*)((\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}) + (\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*})} \\
&= \frac{(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}) + (\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*}}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2 + (\varepsilon_k - k)((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)\overline{\mathbf{q}^*} + \mathbf{q}^*(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}))} \\
&= \frac{((\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}) + (\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*})(\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2 - (\varepsilon_k - k)((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)\overline{\mathbf{q}^*} + \mathbf{q}^*(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*})))}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^4} \\
&= (\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1} + \frac{(\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*}}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} - \frac{(\varepsilon_k - k)(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1}((\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)\overline{\mathbf{q}^*} + \mathbf{q}^*(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*}))}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} \\
&= (\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1} + \frac{(\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*}}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} - \frac{(\varepsilon_k - k)\overline{\mathbf{q}^*}}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} - \frac{(\varepsilon_k - k)(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1}\mathbf{q}^*(\overline{\mathbf{q}} + k\overline{\mathbf{q}^*})}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|^2} \\
&= (\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1} - (\varepsilon_k - k)(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1}\mathbf{q}^*(\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*)^{-1}
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.101. $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar olmak üzere

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^{-1} = \mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonu için $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} \neq 0$ ve $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}} + \frac{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}} \frac{\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}} \right)$$

ifadesi yazılabilir. genelleştirilmiş dual açı θ için $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ sağlandığından,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}}$$

eşitlikleri geçerlidir. $\theta = \theta + \theta^* \varepsilon_k$ ifadesine $\mathbf{Q}$ 'nun genelleştirilmiş dual argümenti adı verilir.

$$\frac{\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}}$$

genelleştirilmiş dual kuaterniyonuna $\mathbf{N}$ denirse, $\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonu için

$$\mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} (\cos \theta + \mathbf{N} \sin \theta)$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\mathbf{N}^2 = -\frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2} = -1$$

olmak üzere, gerekli şartları sağlayan her genelleştirilmiş dual kuaterniyon bu formda yazılabilir.

Tanım 4.102. $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{bi}+\mathbf{cj}+\mathbf{dk}}{\sqrt{\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2}}$ ve $\theta = \theta + \theta^* \varepsilon_k$ olmak üzere, $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonu için

$$\mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} (\cos \theta + \mathbf{N} \sin \theta)$$

ifadesine $\mathbf{Q}'$ nun polar formu denir.

4.4. Genelleştirilmiş has dual kuaterniyonlar ve vida hareketi

Genelleştirilmiş Study dönüşümünde belirtildiği üzere, bir genelleştirilmiş birim dual vektör $\mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^*$, $\mathbb{R}^3$ 'de normali $\mathbf{u}^*$ olarak tanımlanabilen bir düzlem üzerinde olan ve doğrultmanı $\mathbf{u} + \varepsilon_k \mathbf{u}^*$ genelleştirilmiş dual vektörü ile belirlenen bir yönlü doğru parçası tanımlar. Bu durumda $\mathbf{Q} = \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonu da $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*$ şeklinde yazılabildiğinden aslında her birim has dual kuaterniyon bir yönlü doğru parçası temsil eder. Böylece, genelleştirilmiş has dual kuaterniyonlar ile $\mathbb{R}^3$ 'de bir vida hareketi nasıl tanımlanabilir?

Tanım 4.103. Bir eksen etrafında dönme ve yine aynı eksen doğrultusunda öteleme belirten tüm hareketlere vida hareketi adı verilir.

Teorem 4.104. $\mathbf{V} = \cos \theta + \mathbf{N} \sin \theta$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyon ve $\theta = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*$ bir dual açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{V}} &: \mathbb{H}_0(\mathbb{D}_k) \longrightarrow \mathbb{H}_0(\mathbb{D}_k) \\ \mathbf{Q} &\longrightarrow L_{\mathbf{V}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{VQ} \end{aligned}$$

dönüşümü, uzaydaki bir doğrultuyu, genelleştirilmiş birim has $\mathbf{V}$ dual kuaterniyonuna karşılık gelen $l_{\mathbf{N}}$ doğru parçası etrafında pozitif yönde, bir θ açısı kadar hem döndürüp hem de aynı $l_{\mathbf{N}}$ doğrultusunda θ^* mesafesinde öteleyen bir vida operatörüdür.

İspat $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ birer genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyon olsunlar. Bu durumda, her ikisi de $\mathbb{R}^3$ uzayında birer doğruya karşılık gelirler. Bu doğrulara sırasıyla $l_{\mathbf{P}}$ ve $l_{\mathbf{Q}}$ adı verilmiş olsun. $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonları ile temsil edilen $l_{\mathbf{P}}$ ve $l_{\mathbf{Q}}$ doğruları arasındaki açıya θ , aralarındaki mesafeye de θ^* isimleri verilsin. Buna göre dual açı $\boldsymbol{\theta} = \theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*$ şeklinde olur. $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonlarının çarpımları

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= -\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle + \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \\ &= -\cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\|} \|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\| \\ &= -\cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\|} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\frac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\|} = \mathbf{N}$$

denilirse, $\mathbf{N}$ bir genelleştirilmiş birim has dual quaterniyon olur ve böylece bir yönlü doğru parçası ile eşleşir. Dolayısıyla

$$\mathbf{PQ} = -\cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\mathbf{QP} = -\langle \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle + \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$$

çarpımı incelenirse

$$\begin{aligned} \mathbf{QP} &= -\langle \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle - \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \\ &= -\cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) - \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \end{aligned}$$

olur. $\mathbf{Q}^{-1} = \overline{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q}$ ve benzer şekilde $\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{P}$ olduğundan

$$\mathbf{PQ}^{-1} = -\mathbf{PQ}$$

ve

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = -\mathbf{PQ}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\mathbf{PQ}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*)$$

olur. $\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$ ifadesine $\mathbf{V}$ denilirse

$$L_{\mathbf{V}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{V}\mathbf{Q}$$

ve aynı zamanda

$$R_{\mathbf{V}}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Sonuç olarak, $\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonunun

$$\mathbf{V} = \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*)$$

ile çarpılması, genelleştirilmiş $\mathbf{P}$ birim has dual kuaterniyonu ile sonuçlanmıştır. Bir başka deyişle $\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonuna karşılık gelen $l_{\mathbf{Q}}$ doğru parçası, θ açısı kadar döndürülüp θ^* mesafesi boyunca ötelenmiştir. Bu dönme ve öteleme hareketi $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\|}$ genelleştirilmiş birim has dual kuaterniyonuna karşılık gelen $l_{\mathbf{N}}$ doğrusu etrafında ve doğrultusunda gerçekleşmiştir. Bu durumda genelleştirilmiş birim has

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) \\ &= \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \end{aligned}$$

dual kuaterniyonu, $\mathbb{R}^3$ 'de bulunan bir yönlü doğruyu $l_{\mathbf{N}}$ etrafında θ açısı kadar döndüren ve aynı zamanda onu $l_{\mathbf{N}}$ doğrultusunda θ^* mesafesinde öteleyen bir vida hareketi tanımlar.

□

5. SONUÇLAR

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Genelleştirilmiş dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D}_k = \{z = x + y\varepsilon_k : x, y, k \in \mathbb{R} \text{ ve } (\varepsilon_k - k)^2 = 0, \varepsilon_k \notin \mathbb{R}\}$$

tanımlanmış ve bu sayılara ait cebirsel özellikler sunulmuştur. Buna göre genelleştirilmiş bir dual sayının eşleniği, normu, tersi belirtilmiştir.

Bu sayıların belirlediği düzlem geometrisi, genelleştirilmiş Galile düzlemi olarak isimlendirilmiş ve bu düzlemde alınan herhangi iki $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları için

$$d_G(A, B) = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)k|$$

şeklinde, genelleştirilmiş Galile metriği kurulmuş; düzlemin Galile skaler çarpımı tanımlanarak $\mathbb{D}_k$ kümesinin reel sayılar üzerinde bir vektör uzayı olduğu gösterilmiştir. Bu düzlemdeki birim çemberler de $x + ky = \mp 1$ olarak, paralel doğru çiftleri şeklinde belirlenmiştir.

Modülü r olan bir $z = x + y\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayısı, üzerinde bulunduğu çemberin durumuna göre

- (a) $x + ky = r$ dual çemberi üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-spacelike,
- (b) $x + ky = -r$ dual çemberi üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-timelike,
- (c) $x + ky = 0$ orijin merkezli dual çember üzerinde ise z 'ye ve temsil ettiği vektöre dual-lightlike (null) adı verilerek bir sınıflandırmaya tabi tutulmuştur.

2. $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısı için f , türevlenebilir bir genelleştirilmiş dual sayı değişkenli fonksiyon iken

$$f(x + y\varepsilon_k) = f(x + ky) + (\varepsilon_k - k) y f'(x + ky)$$

eşitliği ispatlanarak, genelleştirilmiş dual değişkenli farklı fonksiyonların üretilmesi sağlanmıştır.

3. $|z|_{\mathbb{D}_k} = r \neq 0$ sağlayan bir $z = x + y\varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısı için

$$\theta = \begin{cases} \frac{y}{r}, & z \text{ dual-spacelike ise} \\ -\frac{y}{r}, & z \text{ dual-timelike ise} \end{cases}$$

olmak üzere, z 'nin polar formu

$$z = \begin{cases} r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta), & z \text{ dual-spacelike ise} \\ -r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta), & z \text{ dual-timelike ise} \end{cases}$$

şeklinde belirlenmiş, genelleştirilmiş dual de Moivre formülü ispatlanmıştır. Buna göre $|z|_{\mathbb{D}_k} \neq 0$ genelleştirilmiş dual sayısı için polar form

$$z = r(1 + (\varepsilon_k - k)\theta)$$

ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z^n = \begin{cases} r^n(1 + (\varepsilon_k - k)\theta n) = r^n e^{\theta n(\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual space-like ise} \\ -r^n(1 + (\varepsilon_k - k)\theta n) = -r^n e^{\theta n(\varepsilon_k - k)} & ; \quad z \text{ dual time-like ise} \end{cases}$$

formülü ile genelleştirilmiş dual sayıların kuvvetlerini alma işlemi kolaylaştırılmıştır.

4. Genelleştirilmiş dual sayılar kümesi ile $\mathbb{M}_2$ matris uzayı arasındaki izomorfizma kurulmuş; $z = x + y\varepsilon_k \in \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual sayısı için

$$M_z = \begin{bmatrix} x & -k^2 y \\ y & x + 2ky \end{bmatrix}$$

olacak şekilde matris formu tanımlanmıştır. Buna göre

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 - k\theta & -k^2\theta \\ \theta & 1 + k\theta \end{bmatrix}$$

matrisi, bir dönme matrisi olarak belirlenmiştir. Dönme matrisinin özellikleri belirtilirken ortogonal olmadığına değinilmiş, gerçek anlamda çembersel bir dönme yapmayıp dual çember etrafında bir dönme ve dolayısıyla bir öteleme hareketi belirttiği bir örnek üzerinde gösterilmiştir; dolayısıyla yapılan harekete dual dönme adı verilmiştir.

5. $\mathbb{D}_k^3 = \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k$ genelleştirilmiş dual vektör modülü kurulmuş, bu kümeden alınan 3 boyutlu bir genelleştirilmiş dual vektör $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ 'nun

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$$

olarak, reel üç boyutlu $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{u}^*$ vektörlerle temsili gösterilmiştir. Bu modül üzerindeki genelleştirilmiş dual vektörün normu

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathbb{D}_k^3}^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle}{\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\|}$$

olarak ispatlanmış, birim vektör belirtebilme şartları verilmiştir.

6. Genelleştirilmiş Study teoremi ispatlanmış; genelleştirilmiş dual birim kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ 'deki yönlü doğrular arasındaki birebir eşleşme gösterilmiştir. İspat, yönlü doğruların Plücker koordinatlarının belirlenmesi vasıtasıyla yapılmıştır. Buna göre

$$\left\| \overrightarrow{OD} \times \mathbf{v} \right\| = \|\mathbf{u}^*\|$$

değeri, orijinden bir d yönlü doğrusuna olan mesafeyi göstermek üzere, normalleştirilmiş $(\mathbf{v}, \overrightarrow{OD} \times \mathbf{v})$ Plücker koordinatlı bir $d : D + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}$ yönlü doğrusuna karşılık gelen genelleştirilmiş birim dual vektör

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{v} + (\varepsilon_k - k) (\overrightarrow{OD} \times \mathbf{v})$$

olarak belirlenmiştir.

$\|\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*\| = 1$ ve $\langle \mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle = 0$ eşitliklerini sağlayan, genelleştirilmiş birim dual vektör $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ 'ya karşılık gelen, normalleştirilmiş $(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)$ Plücker koordinatlı yönlü doğru ise

$$d_{\mathbf{U}} : ((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{u}^*) + t(\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*), t \in \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilmiştir.

Teoremin sonuçlarından biri olarak reel uzayda verilen yönlü iki doğru arasındaki açı θ , doğrular arası uzaklık θ^* için bu doğrulara karşılık gelen genelleştirilmiş dual vektörler $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ arasında

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{D}_k^3} = \cos(\theta + (\varepsilon_k - k)\theta^*)$$

ilişkisi ispatlanmıştır. $\theta = \theta + (\varepsilon_k - k)\theta^*$ genelleştirilmiş dual sayısına $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ genelleştirilmiş dual vektörleri arasındaki genelleştirilmiş dual açısı adı verilmiştir.

7. Genelleştirilmiş dual vektörler $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^* \varepsilon_k$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \varepsilon_k$ arasında genelleştirilmiş dual vektörel çarpım

$$\mathbf{U} \times_{\mathbb{D}_k^3} \mathbf{V} = (\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*) + (\varepsilon - k) ((\mathbf{u} + k\mathbf{u}^*) \times \mathbf{v}^* + \mathbf{u}^* \times (\mathbf{v} + k\mathbf{v}^*))$$

olarak verilmiş; özellikleri belirtilmiştir.

Buna göre ayrıca

$$\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\|_{\mathbb{D}_k^3} = \sin(\theta + (\varepsilon_k - k)\theta^*)$$

bağıntısı ispatlanmış ve örnek verilmiştir.

8. $\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}(\mathbb{D}_k) = \{\mathbf{q} + \mathbf{q}^* \varepsilon_k : \mathbf{q}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{H} \text{ ve } \varepsilon_k = -k^2 + 2k\varepsilon_k\}$$

tanımı yapılmış ve cebirsel özellikler belirtilmiştir.

$\mathbf{Q}$ genelleştirilmiş dual kuaterniyonunun normu

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} = \|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\| + (\varepsilon_k - k) \frac{\langle \mathbf{q} + k\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^* \rangle}{\|\mathbf{q} + k\mathbf{q}^*\|}$$

olarak belirlenmiş, birim olma şartları sunulmuştur.

Bir genelleştirilmiş $\mathbf{Q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$ dual kuaterniyonu için $\theta = \theta + \theta^* \varepsilon_k$ genelleştirilmiş dual sayısı, $\mathbf{Q}$ 'nun genelleştirilmiş dual argümenti olarak tanımlanmış,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}}{\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)}}, \frac{\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2}} = \mathbf{N}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{H}(\mathbb{D}_k)} (\cos \theta + \mathbf{N} \sin \theta)$$

şeklindeki gösterime $\mathbf{Q}$ 'nun polar formu denilmiştir.

9. Genelleştirilmiş birim has

$$\mathbf{V} = \cos(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*) + \mathbf{N} \sin(\theta + (\varepsilon_k - k) \theta^*)$$

dual kuaterniyonunun, $\mathbb{R}^3$ 'de bulunan ve $\mathbf{V}$ 'ye karşılık gelen yönlü doğru $l_{\mathbf{N}}$ etrafında θ açısı kadar döndüren ve aynı zamanda $l_{\mathbf{N}}$ doğrultusunda θ^* mesafesinde öteleyen bir vida hareketi tanımladığı gösterilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Agrawal, O. M. P. 1987. Hamilton operators and dual number-quaternions in spatial kinematics. *J.Mech. Mach.Theory*, 22(6), 569-575.
- Aslan, S., Bekar, M., Yaylı, Y. 2020. Hyper-dual split quaternions and rigid body motion. *Journal of Geometry and Physics*, 158: 103876. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.103876>
- Aslan, S. 2021. Kinematic applications of hyper-dual Numbers. *International Electronic Journal Of Geometry*. 14(2), 292-304.
- Ball, R. S. 1900. A Trestise On The Theory Of Screws. Cambridge University Press.
- Behr, N., Dattoli, G., Lattanzi, A., Licciardi, S. 2019. Dual numbers and operational umbral methods. *Axioms*, 8(3): 77.
- Brodsky, V., Shoham M. 1999. Dual numbers representation of rigid body dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 34, 693-718.
- Brown, C. M. and Wampler, C. W. 1990. A unified representation for displacements in 3D using dual quaternions. ASME Design Technical Conferences.
- Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E. and Zampetti, P. 2008. The Mathematics of Minkowski Space-Time. Birkhauser Verlag AG, Berlin, 256 p.
- Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. 2011. Geometry Of Minkowsky Space-Time. Springer, Berlin, 116 p.
- Chappel, J. M., Iqbal A., Hartnett, J. G., Abbott D. 2016. The vector algebra war: a historical perspective. *Physics.hist-ph*. 1(1).
- Cheng, H. H. 1994. Programming with dual numbers and its applications in mechanisms design. *Engineering with Computers*, 10, 212-229.
- Clifford, W. K., Preliminary Sketch of Biquaternions. 1873. *Proc London Mathematical Society*, 4(64), 381-395.

- Clifford, W. K. 1882. *Mathematical Papers* (ed. R. Tucker), Macmillan, London.
- Cohen, A., Shoham, M. 2015. Application of hyper-dual numbers to multi-body kinematics. *J. Mech. Rob.* 8(1).
- Cohen, A., Shoham, M. 2017. Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion. *J. Mech. Mach Theory.* 111, 76-84.
- Cohen, A., Shoham, M. 2018. Principles of transference-an extension to hyper-dual numbers. *J. Mech. Mach Theory.* 125, 101-110.
- Daniilidis, K. 1999. Hand-eye calibration using dual quaternions. *International Journal Of Robotics Research*, 18(3): 286-298.
- Fike, J. A. 2009. Numerically exact derivative calculations using hyper-dual numbers. 3rd Annual Student Joint Workshop in Simulation-Based Engineering and Design.
- Fike, J. A., Alonso, J. J. 2011. The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 4-7.
- Fike, J. A., Alonso, J. J. 2012. Automatic differentiation through the use of hyper-dual numbers for second derivatives. in: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 87(201), 163-173.
- Fischer, I. S. 1999. *Dual Number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*. CRC Press, Boca Raton.
- Fjelstad, P. and Gal Sorin, G. 2001. Two dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances In Applied Clifford Algebras*, 11: 81.
- Gallier, J. H. 2011. *Geometric Methods and Applications, for Computer Science and Engineering*. Texts In: Applied Mathematics, 38: 680. Springer, New York.
- Garling, D. J. 2011. *Clifford algebras: An introduction*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press. Vol. 78.

- Ge, Q., Varshney, A., Menon, J. P. and Chang, C. F. 1998. Double quaternions for motion interpolation. *Proceedings Of The ASME Design Engineering Technical Conference*.
- Girard, P. R. 2007. *Quaternions, Clifford Algebras And Relativistic Physics*. Basel: Birkhauser, Boston.
- Grassmann, H., 1844. *Die Lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, Otto Wigand.
- Gu, Y. L., Luh, J. 1987. Dual-number transformation and its applications to robotics. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 3 (6): 615-623.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2010. *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere*, 3. Baskı, Bilecik.
- Hamilton, W. R. 1844. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, 25 (3): 489-495.
- Hamilton, W. R. 1853. *Lectures on Quaternions*. Hodges and Smith, Dublin, 736 p.
- Harkin, A. A. and Harkin, J. B. 2004. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics Magazine*, 77(2), 118-12.
- Herrera, R. T., Alcántara, S. M., Meda-Campaña, J. A., & Velázquez, A. S. 2012. Kinematic and Dynamic Modelling of Serial Robotic Manipulators Using Dual Number Algebra. *Serial and Parallel Robot Manipulators: Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*, IntechOpen, 67
- Imoto, Y., Yamanaka, N., Uramoto, T., Tanaka, M., Fujikawa, M., & Mitsume, N. 2020. Fundamental theorem of matrix representations of hyper-dual numbers for computing higher-order derivatives. *JSIAM Letters*, 12, 29-32.
- Kavan, L., Collins, S., Zara, J., O'Sullivan, C. 2008. Geometric skinning with approximate dual quaternion blending. *ACM Transactions On Graphics (TOG)*, 27(4): 105.

- Kenwright, B. A (t.y.) Beginners guide to dual-quaternions what they are, how they work and how to use them for 3D character hierarchies. Retrieved from <https://cs.gmu.edu/~jmlie/teaching/cs451/uploads/Main/dual-quaternion.pdf> [Son erişim tarihi: 26.05. 2025].
- Kotelnikov, A. P. 1895. Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics. Annal Imp. Univ. Kazan, Russia.
- Lin, Y., Hang, W. and Chiang, Y. 2010. Estimation of relative orientation using dual quaternion. *System Science*, 2: 413-416.
- Majernik, V. 1995. Galilean transformation expressed by the dual four-component numbers. *Acta Physica Polonica A.*, 87(6), 919-923.
- Mason, M. T. 2001. Mechanics of Robotic Manipulation. The MIT Press.
- McAulay, A. 1898. Octonions - A Development of Clifford's Bi-quaternions. Cambridge University Press.
- Messelmi, F. 2015. Multidual numbers and their multidual functions. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3(2), 154-172.
- Miller, W. and Boehning, R. 1968. Gaussian, parabolic and hyperbolic numbers. *The Mathematics Teacher*, 61 (4): 377-82.
- Özdemir, M. 2018. Introduction to hybrid numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28:11.
- Özdemir, M. 2020. Kuaterniyonlar ve Geometri-Kuaterniyonlar Teorisi ve Hareket Geometrisi. Altın Nokta, İzmir, 304 s.
- Pennestri, E. and Stefanelli, R. 2007. Linear algebra and numerical algorithms using dual numbers. *Multybody Syst. Dyn.*, 18: 323-344.
- Penunuri, F., Carvente, O., Zambrano-Arjona, M. A., Peon, R., Cruz-Villar, C. A. 2019. Dual numbers for algorithmic differentiation. *Ingenieria Universidad Autonoma de Yucatan*, 23(3), 71-81.

- Peon-Escalante, R., Cantun-Avila, K. B., Carvente, O., Espinosa-Romero, A., Penunuri, F. A. 2024. Dual Number Formulation To Efficiently Compute Higher Order Directional Derivatives. *Journal Of Computational Science*, 76: 102217.
- Perez, A. and McCarthy, J. M. 2004. Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems. *Journal Of Mechanical Design*, 126: 425.
- Pham, H. L., Perdereau V., Adorno, B. V., Fraisse P. 2010. Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback. *Intelligent Robots and Systems IEEE/RSJ International Conference*, pp. 658-663.
- Plücker, J. 1846. *Neue Geometrie Des Raumes Gegründet Auf Die Betrachtung Der Geraden Linie Als Raumelement*. Vieweg, Verlag.
- Ramis, Ç., Yaylı, Y., & Zengin, I. 2022. The application of Euler-Rodrigues formula over hyper-dual matrices. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 266-276.
- Rehner, P. and Bauer, G. 2021. Application of generalized (hyper-)dual numbers in equation of state modelling. *Front. Chem. Eng.*, 3:758090.
- Rooney, J. 2007. William Kingdon Clifford (1845-1879). In: Ceccarelli, Marco ed. *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies. Hystory Of Mechanism And Machine Science*. Springer, Dordrecht, Netherlands, pp. 79-116.
- Rooney, J. 1978. On the three types of complex number and planar transformations. *Environment And Planning B*, 5: 89-99.
- Schilling M. 2011. Universally manipulable body models-dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs. *Autonomous Robots*.
- Selig, J. 2005. *Geometric Fundamentals Of Robotics*. Springer, New York, 398 p.
- Selig, J. 2011. Rational interpolation of rigid-body motions. *Advances in the Theory of Control, Signals and Systems with Physical Modeling*, 213-224.

- Soylu, Ş. D., Çolakoğlu, H. B. and Özdemir M. 2025. Generalization of dual numbers and dual Euclidean 3-space. *Turkish Journal Of Mathematics*, 49(1): 4.
- Struik, D. J. (Ed.) 1969. A New Method for Maxima and Minima In: A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Harvard University Press, pp. 272-280.
- Study, E. 1901. Geometrie der Dynamen. *Teubner, Leipzig*.
- Szirmay, L. K. 2021. Higher order automatic differentiation with dual numbers. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering And Computer Science*, 65(1): 1-10.
- Veldkamp G. R. 1976. On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics. *J. Mech. Mach. Theory*. 11(2), 141-156.
- Yaglom, I. M. 1968. Complex Numbers In Geometry. Academic Press, New York and London.
- Yaglom, I. M. 1979. A Simple Non-Eucidean Geometry and Its Physical Basis: An Elementary Account Of Galilean Geometry And The Galilean Principle Of Relativity. Springer-Verlag, New York.
- You-Liang, G. and Luh, J. Y. S. 1987. Dual-number transformation and its applications to robotics. *IEEE Journal of Robotics and Automation*. 3(6).
- Yüce, S. 2021. On the E. Study maps for the dual quaternions. *Applied Mathematics E-Notes*. 21, 365-374.
- Gürses, N., Şentürk, G. Y., Yüce, S. 2021. A study on dual-generalized complex and hyperbolic generalized complex numbers. *GU J Sci* 34(1): 180-194.

ÖZGEÇMİŞ

Şükran Duygu SOYLU

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora	Akdeniz Üniversitesi
2019-2025	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2016-2019	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Ortadoğu Teknik Üniversitesi
1993-1998	Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen	Özel Antalya Lara Bahçeşehir Anadolu Lisesi
2021-Devam Ediyor	

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Soylu, Ş. D., Çolakoğlu, H. B. and Özdemir M. 2025. Generalization of dual numbers and dual Euclidean 3-space. *Turkish Journal Of Mathematics*, 49(1): 4.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Özdemir, M. and Soylu, D. 2018. Householder Transformation with Hyperbolic Numbers. 16th International Geometry Symposium, ss. 228-229, July 4-7, Celal Bayar University, Manisa-Turkey.