



GENELLEŞTİRİLMİŞ EXTENDING KOŞULLARI ÜZERİNE

ARAŞTIRMALAR

Yüksek Lisans Tezi

EDANUR TAŞTAN

Eskişehir, 2021

GENELLEŞTİRİLMİŞ EXTENDING KOŞULLARI ÜZERİNE
ARAŞTIRMALAR

Edanur TAŞTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz, 2021

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ EXTENDING KOŞULLARI ÜZERİNE ARAŞTIRMALAR

Edanur TAŞTAN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz, 2021

Danışman : Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Bu tezde extending modüller, extending modüllerin genellemeleri olan Goldie extending modüller ile C_{11} -modüller ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu amaçla, çalışmamızda kullanılan temel kavramlar ve teoremler ilk bölümde ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. İkinci bölümde projektif, injektif ve yarı-injektif modül sınıflarının gerekli olan özellikleri kanıtları ile birlikte verilmiştir. Üçüncü bölümde ise çalışmamıza temel oluşturacak olan sürekli, yarı-sürekli ve CS -modüller incelenmiştir. Dördüncü bölümde Goldie extending ($\mathcal{G}$ -extending) modüller ele alınmıştır. Özellikle dik toplanan ve dik toplamalar özelinde Goldie extending modüller incelenmiştir. Bu modül sınıfının temel özellikleri ile birlikte karakterizasyonları ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Son bölümde ise C_{11} -modül sınıfı üzerinde durulmuştur. Dik toplamaların aksine, bir C_{11} -modülün dik toplananının C_{11} -modül olması gerekmediği gösterilmiştir. Bir C_{11} -modülün dik toplananının ne zaman C_{11} -modül olacağına ilişkin sonuçlar verilmiştir. Son olarak extending, $\mathcal{G}$ -extending, C_{11} ve FI -extending modül sınıfları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Extending modül, $\mathcal{G}$ -extending modül, FI -extending modül, C_{11} -modül

ABSTRACT

RESEARCH ON SOME GENERALIZED EXTENDING CONDITIONS

Edanur TAŞTAN

Mathematics Department

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July, 2021

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Figen TAKIL MUTLU

In this thesis extending modules, Goldie extending modules and C_{11} -modules which are the generalizations of the extending modules are examined in detail. For this purpose, the basic notions and theorems used in our study are given in detail in the first chapter. In the second chapter, the required properties of projective, injective and quasi-injective module classes are given along with their proofs. In the third chapter, continuous, quasi-continuous and CS-modules which are the basis of our study are investigated. In the fourth chapter, Goldie extending modules are discussed. In particular, the direct summand of a Goldie extending module and the direct sum of Goldie extending ($\mathcal{G}$ -extending) modules are researched. The characterization of this module class is given in detail along with its main properties. In the last chapter, the C_{11} -module class is emphasized. Unlike the direct sum of C_{11} -modules, it is shown that the direct summand of a C_{11} -module need not be a C_{11} -module. In addition, the results are given for when the direct summand of a C_{11} -module becomes a C_{11} -module. Finally, the relationships between the extending, $\mathcal{G}$ -extending, C_{11} and FI -extending modules are explained.

Keywords: Extending module, $\mathcal{G}$ -extending module, FI -extending module, C_{11} -module

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmalarım boyunca değerli bilgi ve tecrübelerini her ihtiyacım olduğu anda sabırla ve içtenlikle benimle paylaşan, yapıcı eleştirileriyle beni bir adım daha ileriye taşıyan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU'ya sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında bana güç veren, zor günlerimde beni hiç yalnız bırakmayan başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme ve varlığıyla hayatıma anlam katan canım yeğenim Elisa TAŞTAN'a en içten teşekkür ve sevgilerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte her koşulda desteğini hissettiğim sevgili nişanlım Burak BERBER'e ve üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Edanur TAŞTAN

Temmuz, 2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Edanur TAŞTAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kategoriler ve Funktorlar	1
1.2. Modüller	3
1.3. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri	15
1.4. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar	18
1.5. Serbest (Free) Modüller	23
1.6. Small Alt Modüller	24
1.7. Bir Modülün Radikali ve Jacobson Radikali	25
1.8. Essential Alt Modüller	29
1.9. Düzgün (Uniform) Modüller.....	34
1.10. Komplement Alt Modüller	35
1.11. Yarı-Basit (Semisimple) Modüller ve Socle	39
1.12. Noetherian ve Artinian Modüller.....	46
1.13. Singular ve Nonsingular Modüller	48
1.14. UC-Modüller	51
1.15. Torsion ve Torsion-Free Modüller	52
2. PROJEKTİF, İNJEKTİF VE YARI-İNJEKTİF MODÜLLER	54

3. SÜREKLİ, YARI-SÜREKLİ VE CS-MODÜLLER.....	66
4. GOLDIE EXTENDING MODÜLLER.....	77
5. C_{11} -MODÜLLER.....	115
KAYNAKÇA.....	143
ÖZGEÇMİŞ	



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Elemanı değil
$\forall$	: Her
$\exists$	: En az bir
$\cap$	: Kesişim
$\cup$	: Birleşim
$\subseteq$	: Alt küme
$\subsetneq$	: Öz alt küme
$\triangleleft$	: İdeal
$\leq$	: Alt modül
$\leqneq$	: Öz alt modül
$\langle A \rangle$	: A kümesi ile üretilen alt modül
$\leq_e$	: Essential alt modül
$\ll$	: Small alt modül
$\leq_c$	: Komplement alt modül
$\leq_d$	: Dik toplanan alt modül
$\triangleleft$	: Fully invariant alt modül
$\implies$	: İse
$\iff$	: Ancak ve ancak
$\cong$	: İzomorf
M/N	: M nin N ye göre bölüm modülü
$\text{Obj}(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ kategorisinin objeler sınıfı
$\text{Mor}(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmalar sınıfı
$\text{Hom}_R(M, N)$	: M modülünden N modülüne R -homomorfizmalarının kümesi
$\text{End}_R(M)$	: M modülünün endomorfizma halkası

$\text{Aut}_R(M)$	: M modülünün R -otomorfizmalarının kümesi
$\text{Ker}(f)$	: Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im}(f)$	: Bir f homomorfizmasının görüntüsü
$\prod_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dik çarpım modülü
$\bigoplus_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dik toplam modülü
$r(M)$	: M modülünün sağ sıfırlayıcısı
$l(M)$	: M modülünün sol sıfırlayıcısı
$r(m)$	: m elemanının sağ sıfırlayıcısı
$l(m)$	: m elemanının sol sıfırlayıcısı
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$\text{Rad}(M)$	: M modülünün radikali
$\text{Soc}(M)$	: M modülünün socle'u
$\mathbb{Z}(p^\infty)$	: Prüfer p -grubu
$Z(M)$	: M modülünün singular alt modülü
$Z_2(M)$	: M modülünün ikinci singular alt modülü
$\tau(A)$	: A nın torsion alt grubu
$\tau_p(A)$	: A nın p -torsion alt grubu
$R[x]$	: Polinomlar halkası
$M_n(R)$	: R üzerinde tanımlı $n \times n$ tipindeki matrisler halkası
$\mathcal{I}(R)$	: R nin tüm idempotent elemanlarının kümesi
$\mathcal{I}_l(R)$	: R nin tüm sol yarı-merkezcil idempotentlerin kümesi
$\mathcal{I}_r(R)$	: R nin tüm sağ yarı-merkezcil idempotentlerin kümesi
$\mathcal{B}(R)$	: Tüm merkezcil idempotentlerin kümesi
$\text{CFM}_\Gamma(R)$	: Sütun sonlu matris halkası
$\text{RFM}_\Gamma(R)$	: Satır sonlu matris halkası
$\text{CRFM}_\Gamma(R)$	: Sütun ve satır sonlu matris halkası
$S(R, M)$	: R nin M ile olan aşıkâr genişlemesi
$T_n(R)$	: R üzerinde tanımlı $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası
$\text{Mat}_n(R)$	: R üzerinde tanımlı $n \times n$ tipindeki tam matrisler halkası
$Bkz.$	: Bakınız
$\square$	: Kanıtın bittiğini gösteren simge

1. GİRİŞ

1.1. Kategoriler ve Funktorlar

Tanım 1.1.1. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi $(\text{Obj}(\mathcal{C}), \text{Mor}(\mathcal{C}), \circ)$ üçlüsü olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $\text{Obj}(\mathcal{C})$; elemanlarına “ $\mathcal{C}$ kategorisinin objesi ($\mathcal{C}$ -obje)” denilen sınıftır ve bu sınıfın elemanları $A, B, C, \dots$ ile gösterilir.

(2) Her $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ için $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$; elemanlarına “**A objesinden B objesine bir morfizma**” denilen bir kümedir ve bu kümenin elemanları $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ile gösterilir. Her $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizması $\alpha: A \longrightarrow B$ ya da $A \xrightarrow{\alpha} B$ notasyonları ile ifade edilir. Ayrıca her $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ için

$$(A, B) \neq (C, D) \implies \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset$$

sağlanır. $\text{Mor}(\mathcal{C})$; $\mathcal{C}$ kategorisinin bütün morfizmalarının sınıfı olarak adlandırılır ve tüm $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kümelerinin birleşimi olarak tanımlanır. Bu sınıfın elemanları kısaca **$\mathcal{C}$ -morfizma** ile ifade edilir.

(3) Her $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ için “**A nın birim morfizması**” denilen $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ morfizması vardır.

(4) $\forall \alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \beta\alpha := \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı “**bileşke**” denilen “ $\circ$ ” sembolü ile gösterilen işlem vardır. Ayrıca bu işlem aşağıdaki iki koşulu sağlar.

(i) $\forall \alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), \beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ve $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$

dır. Yani

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha} & D \\
 \alpha \downarrow & \begin{array}{c} \text{dashed } \beta\alpha \text{ and } \gamma\beta \\ \text{crossing} \end{array} & \uparrow \gamma \\
 B & \xrightarrow{\beta} & C
 \end{array}$$

şeklindedir.

(ii) $\forall \alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ için

$$\alpha \text{id}_A = \text{id}_B \alpha = \alpha$$

dır. Yani

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
 \text{id}_A \downarrow & \begin{array}{c} \text{dashed } \alpha \text{ and } \alpha \\ \text{crossing} \end{array} & \downarrow \text{id}_B \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & B
 \end{array}$$

şeklindedir (Bkz., [1]).

Örnek 1.1.2. Aşağıdaki tüm kategorilerde bileşke işlemi olarak, bilinen fonksiyon bileşkesi ve birim morfizmalar olarak, birim fonksiyonlar alınmıştır.

(i) *Kümeler Kategorisi*; $\mathcal{C}_1 = \mathbf{Set}$ ile gösterilen bir kategoridir. $\text{Obj}(\mathcal{C}_1)$; tüm kümelerdir. $\text{Mor}(\mathcal{C}_1)$; kümeler arasındaki tüm fonksiyonlardır.

(ii) *Gruplar Kategorisi*; $\mathcal{C}_2 = \mathbf{Grp}$ ile gösterilen bir kategoridir. $\text{Obj}(\mathcal{C}_2)$; tüm gruplardır. $\text{Mor}(\mathcal{C}_2)$; tüm grup homomorfizmalarıdır.

(iii) *Modüller Kategorisi*; $\mathcal{C}_3 = \mathbf{Mod-R}$ ile gösterilen bir kategoridir. $\text{Obj}(\mathcal{C}_3)$; tüm R -modüllerdir. $\text{Mor}(\mathcal{C}_3)$; tüm R -modül homomorfizmalarıdır (Bkz., [1]).

Tanım 1.1.3. $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ iki kategori olsun.

$$F: \text{Mor}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}_2)$$

$$\alpha \longmapsto F(\alpha)$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise F ye $\mathcal{C}_1$ den $\mathcal{C}_2$ ye bir **funktor** denir.

(i) Her $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}_1)$ ve $A \xrightarrow{\alpha} B$, $\mathcal{C}_1$ de bir morfizma ise $F(A), F(B) \in \text{Obj}(\mathcal{C}_2)$ ve $F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B)$, $\mathcal{C}_2$ de bir morfizmadır.

(ii) F altında birim morfizmalar korunur. Yani her $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}_1)$ için $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ dır.

(iii) F altında bileşke işlemleri korunur. Yani her $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_1}(A, B)$ ve her $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_1}(B, C)$ ise $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ dır.

Bu durumda bir $F: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ fonktoru her $\mathcal{C}_1$ -morfizması $A \xrightarrow{\alpha} B$ için

$$F\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.1.4. $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere; her $\mathcal{C}$ -morfizması $A \xrightarrow{\alpha} B$ için

$$\text{id}_{\mathcal{C}}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = A \xrightarrow{\alpha} B$$

ile tanımlı $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktoru vardır. Bu fonktora **$\mathcal{C}$ kategorisinin birim fonktoru** denir.

1.2. Modüller

Tanım 1.2.1. R bir halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olsun. M nin sağ endomorfizmaları halkasını $\text{End}^r(M)$ ile gösterelim. $\text{End}^r(M)$ halkasındaki her bir endomorfizmayı sağ operatör olarak düşünüyoruz. Yani her $x \in M$ olmak üzere $(x)(f + g) = (x)f + (x)g$ ve $(x)(fg) = ((x)f)g$ dir. Eğer her $r \in R$ için

$$\Phi: R \longrightarrow \text{End}^r(M)$$

$$r \longmapsto (r)\Phi$$

ile tanımlı dönüşüm bir halka homomorfizması ise (M, Φ) çiftine **sağ R -modül** denir ve M_R ile gösterilir. Ayrıca R halkası, birimi 1_R olan bir birimli halka ve $\Phi(1_R) = \text{id}_M$ ise (M, Φ) çiftine **birimli (unital) sağ R -modül** denir. Bu durumda $\forall r \in R$ olmak üzere

$$(r)\Phi: M \longrightarrow M$$

dönüşümü vardır öyle ki her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için

$$(1) (m_1 + m_2)(r)\Phi = (m_1)(r)\Phi + (m_2)(r)\Phi$$

$$(2) (m)(r_1 + r_2)\Phi = (m)(r_1)\Phi + (m)(r_2)\Phi$$

$$(3) (m)(r_1 r_2)\Phi = ((m)(r_1)\Phi)(r_2)\Phi$$

$$(4) (m)(1_R)\Phi = m$$

özellikleri sağlanır.

Burada Φ ve parentezler ihmal edilerek $(m)(r)\Phi$ yerine mr yazılır. Bu durumda

$$M \times R \longrightarrow M$$

$$(m, r) \longmapsto mr$$

ile tanımlı dönüşümü elde ederiz. $\forall m, m_1, m_2 \in M$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in R$ için

$$(1) (m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$$

$$(2) m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$$

$$(3) m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$$

$$(4) m1_R = m$$

özellikleri sağlanır. Bu durumda M ye birimli (unital) sağ R -modül denir ve M_R ile gösterilir (Bkz., [2]).

Benzer şekilde,

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto rm$$

tanımlanan dönüşümle sol R -modüller de tanımlanabilir ve ${}_R M$ ile gösterilir.

Tanımdan da görüldüğü üzere modüller vektör uzaylarının genellemesidir. Eğer V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir F -modül olur. Dolayısıyla her vektör uzayı modüldür fakat her modül vektör uzayı değildir.

R ve S iki halka olsun. Eğer M hem sol R -modül hem de sağ R -modül ve her $r \in R, m \in M, s \in S$ olmak üzere

$$r(ms) = (rm)s$$

oluyorsa M ye **(R, S) -bimodül** denir ve ${}_R M_S$ ile gösterilir. Örneğin; R halkasının kendisi bir (R, R) -bimodüldür. Çünkü her R halkası kendisi üzerinde hem sağ R -modül hem de sol R -modüldür. Ayrıca halka tanımı gereği her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ özelliği de sağlanır.

Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe R değişmeli olması gerekmeyen bir birimli halka ve M de birimli sağ R -modül olarak ele alınacaktır.

Örnek 1.2.2. (i) Her R halkası, R üzerinde var olan çarpma işlemi ile birlikte hem sağ R -modül hem de sol R -modüldür.

(ii) R bir halka ve $R[x]$, R üzerinde polinomlar halkası olmak üzere $R[x]$ bir R -modüldür.

(iii) I , R halkasının bir sağ ideali ise I bir R -modül olur.

(iv) R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $\forall a, r \in R$ olmak üzere

$$R/I \times R \longrightarrow R/I$$

$$(a + I, r) \longmapsto (a + I)r = ar + I$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ile R/I bir R -modüldür.

(v) M bir toplamsal değişmeli grup ve $\text{End}^r(M)$, M nin sağ endomorfizmaları halkası olsun. Bu durumda M bir $\text{End}^r(M)$ -modül olur. Gerçekten,

$$M \times \text{End}^r(M) \longrightarrow M$$

$$(x, f) \longmapsto xf := (x)f$$

ile tanımlı dönüşüm $\forall x, y \in M$ ve $\forall f, g \in \text{End}^r(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(1) (x + y)f = (x)f + (y)f = xf + yf$$

$$(2) x(f + g) = (x)(f + g) = (x)f + (x)g = xf + xg$$

$$(3) \quad x(fg) = (x)(fg) = ((x)f)g = (xf)g$$

$$(4) \quad x \operatorname{id}_M = (x) \operatorname{id}_M = x$$

Örnek 1.2.3. Her toplamsal değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Kanıt. A bir toplamsal değişmeli grup olsun. $\forall a \in A$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$(a, n) \mapsto an = \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-tane}} & , \quad n > 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad n = 0 \text{ ise} \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{-n\text{-tane}} & , \quad n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A \times \mathbb{Z} \longrightarrow A$ dönüşümü ile A bir $\mathbb{Z}$ -modül olur. $\square$

Örnek 1.2.4. R bir halka ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$M_n(R) = \{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in R \}$$

$n \times n$ tipindeki matrisler halkası olsun. Bu durumda $M_n(R)$ halka olduğundan $M_n(R)$ kendi üzerinde hem sağ hem de sol modüldür. Eğer her $[a_{ij}] \in M_n(R)$ ve $r \in R$ için $[a_{ij}]r = [a_{ij}r]$ şeklinde tanımlanırsa $M_n(R)$ bir R -modül olur.

Tanım 1.2.5. R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer N , M deki işlemlere göre bir R -modül oluyorsa N ye M nin bir **alt modülü** ya da **R -alt modülü** denir ve $N \leq M$ (veya $N_R \leq M_R$) ile gösterilir.

Örneğin; $\{0_M\}$ ve M nin kendisi, M nin birer alt modülüdür. Bu alt modüllere **aşıkâr alt modüller** denir. M modülünün kendisinden farklı alt modüllerine M nin **öz alt modülleri** denir. Eğer N , M nin bir öz alt modülü ise $N \subsetneq M$ ile gösterilir. Ayrıca bundan sonra $\{0_M\}$ aşıkâr alt modülü kısaca “0” ile ifade edilecektir.

Teorem 1.2.6. M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. $N \leq M$ olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in N$ ve her $r \in R$ için $a + br \in N$ olmasıdır.

R halkası bir sağ R -modül R_R , bir sol R -modül ${}_R R$ ve bir (R, R) -bimodül ${}_R R_R$ olarak düşünüldüğü zaman R_R , ${}_R R$ ve ${}_R R_R$ nin alt modülleri; sırasıyla R halkasının sağ, sol ve iki yönlü idealleri olur.

Örnek 1.2.7. M bir R -modül, $N \leq M$ ve A, R nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda

$$NA = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i a_i \mid n_i \in N_i, a_i \in I, k \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi M nin bir alt modülüdür.

Teorem 1.2.8. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} N_i$, M nin bir alt modülüdür.

Kanıt. $\forall i \in I$ için $0_M \in N_i$ olduğundan $0_M \in \bigcap_{i \in I} N_i$ dir. Yani $\bigcap_{i \in I} N_i \neq \emptyset$ dir.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i \text{ ve } \forall r \in R &\implies \forall i \in I \text{ için } x, y \in N_i \\ &\implies \forall i \in I \text{ için } x - y, xr \in N_i \\ &\implies x - y, xr \in \bigcap_{i \in I} N_i \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\bigcap_{i \in I} N_i \leq M$ bulunur. □

$\bigcap_{i \in I} N_i$, N_i alt modüllerinin tümünü kapsayan M nin en büyük alt modülüdür.

Tanım 1.2.9. M bir R -modül ve $N_1, N_2 \leq M$ olsun. $N_1 \cup N_2$ ile üretilen alt modüle **N_1 ve N_2 alt modüllerinin toplamı** denir ve $\langle N_1 \cup N_2 \rangle = N_1 + N_2$ ile gösterilir. Bu durumda

$$N_1 + N_2 = \{ n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2 \}$$

şeklindedir. Ayrıca $N_1 + N_2$ nin, N_1 ve N_2 alt modüllerini kapsayan M nin en küçük alt modülü olduğu kolaylıkla görülebilir.

Genel olarak, $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\bigcup_{i \in I} N_i$ ile üretilen alt modüle **$\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin toplamı** denir ve $\langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\sum_{i \in I} N_i = \left\{ \sum_{\lambda=1}^k n_{i_\lambda} \mid n_{i_\lambda} \in N_{i_\lambda}, i_\lambda \in I, k \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklindedir. Ayrıca $\sum_{i \in I} N_i$, N_i alt modüllerinin tümünü kapsayan M nin en küçük alt modülüdür. Eğer $I = \{1, 2, \dots, t\}$ şeklinde sonlu bir küme ise $N_1, N_2, \dots, N_k$ alt

modüllerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^t N_i = \{ n_1 + n_2 + \dots + n_t \mid n_i \in N_i, i = 1, 2, \dots, t \}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 1.2.10. M bir R -modül ve $A, B, C \leq M$ olsun. Bu durumda

$$(A \cap B) + (A \cap C) \leq A \cap (B + C)$$

dir. Eğer $B \leq A$ ise

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

eşitliği sağlanır. Bu kurala **Modüler Kuralı** denir.

Kanıt. Herhangi bir $x \in A \cap (B + C)$ alalım. Bu durumda $x \in A$ ve $x \in B + C$ olup $x = b + c$ olacak şekilde $b \in B$ ve $c \in C$ vardır. $B \leq A$ olduğundan $c = x - b \in A \cap C$ olur. Buradan $x = b + c \in B + (A \cap C)$ dir. O halde

$$A \cap (B + C) \subseteq B + (A \cap C) \tag{1.1}$$

bulunur. Tersine, $B + (A \cap C) \leq B + C$ ve $B + (A \cap C) \leq B + A \leq A$ olduğundan

$$B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C) \tag{1.2}$$

bulunur. Böylece (1.1) ve (1.2) den

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

eşitliği elde edilir. □

Tanım 1.2.11. M bir R -modül ve $A, B, C \leq M$ olsun. Eğer

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

sağlanıyor ise M ye **dağılmalı (distributive) modül** denir.

Tanım 1.2.12. M bir R -modül olsun. Eğer her $N \leq M$ için $N = MA$ olacak şekilde bir $A_R \leq R_R$ alt modülü var ise M ye **çarpımsal (multiplication) modül** denir.

Tanım 1.2.13. M bir R -modül ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ olsun. A alt kümesini kapsayan tüm alt modüllerin arakesitine A nın ürettiği alt modül denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle A \rangle = \bigcap \{ K \mid K \leq M \text{ ve } A \subseteq K \}$$

dır. A nın elemanlarına ise $\langle A \rangle$ nın üreteçleri denir. Ayrıca $\langle A \rangle$, A alt kümesini kapsayan M nin en küçük alt modülüdür.

Eğer $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ olacak şekilde sonlu bir küme ise $\langle A \rangle$ ya **sonlu üretilmiş (finitely generated) alt modül** denir ve $\langle A \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ ile gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise $\langle A \rangle$ ya a ile üretilen **devirli (cyclic) alt modül** denir ve $\langle A \rangle = \langle a \rangle$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.14. M bir R -modül ve $A \subseteq M$ olsun. Bu durumda $A \neq \emptyset$ ise

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i r_i \mid a_i \in A, r_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklindedir. Eğer $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ şeklinde sonlu bir küme ise

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle &= \{ a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_k r_k \mid r_i \in R, i = 1, 2, \dots, k \} \\ &= a_1 R + a_2 R + \dots + a_k R \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer $A = \{a\}$ ise

$$\langle a \rangle = \{ ar \mid r \in R \} = aR$$

şeklindedir. Eğer $A = \emptyset$ ise A sıfır modülünü üretir ve $\langle A \rangle = 0$ dır.

Tanım 1.2.15. M bir R -modül ve $A \subseteq M$ olsun. Eğer $M = \langle A \rangle$ ise A , M yi üretir ya da A ya M nin üreteç kümesi denir. A nın elemanlarına ise M nin üreteçleri denir. Eğer $M = \langle A \rangle$ ve A sonlu ise M ye **sonlu üretilmiş (finitely generated) modül** denir. Eğer $M = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in M$ varsa M ye **devirli (cyclic) modül** denir.

$\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere $M = \sum_{i \in I} N_i$ ise $\{N_i\}_{i \in I}$, M modülünü üretir denir.

Örnek 1.2.16. $\langle 1_R \rangle = 1_R R = R_R$ olduğundan R halkası, R -modül olarak devirlidir.

Tanım 1.2.17. M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. M nin N yi kapsayan N den başka hiçbir öz alt modülü yoksa (denk bir ifadeyle, $N \leq K \leq M$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ alt modülü için $K = N$ ya da $K = M$ ise) N ye M nin bir **maksimal alt modülü** denir.

Önerme 1.2.18. A , M nin bir öz alt modülü olsun. A nın M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M \setminus A$ için $M = mR + A$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ A , M nin bir maksimal alt modülü ve $m \in M \setminus A$ olsun. Bu durumda $m \in M$, $m \notin A$ olur. M de m nin ürettiği alt modül $\langle m \rangle = mR$ dir. mR ve A alt modüllerinin toplamı $mR + A$ da M nin bir alt modülüdür. Üstelik $m = m1_R + 0_M \in mR + A$ olduğundan $A \subsetneq mR + A$ dir. A , M de maksimal olduğundan $M = mR + A$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ Her $m \in M$, $m \notin A$ için $M = mR + A$ olsun. Şimdi M nin bir K alt modülü için $A \subsetneq K \leq M$ olsun. $A \subsetneq K$ olduğundan bir $m \in K \setminus A$ vardır. Buradan $m \in M$, $m \notin A$ dır. Kabulden $M = mR + A$ yazılabilir. $m \in K$ olduğundan $\langle m \rangle = mR \leq K$ dir. Bu durumda $M = mR + A \leq K$ olur. Böylece $K = M$ elde edilir. $\square$

Örnek 1.2.19. $6\mathbb{Z} \subsetneq 3\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ olduğundan $6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ nin bir maksimal alt modülü değildir.

Örnek 1.2.20. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ nin maksimal alt modülleri p asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ şeklindedir.

Kanıt. Kabul edelim ki, $\mathbb{Z}$ nin bir K alt modülü için $p\mathbb{Z} \subsetneq K \leq \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $K = \langle a \rangle = a\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. $p\mathbb{Z} \subsetneq a\mathbb{Z}$ olduğundan $a \mid p$ olmalıdır. $a \neq p$ ve p asal olduğundan $a = 1$ olmalıdır. Böylece $K = \mathbb{Z}$ bulunur. $\square$

Sonuç olarak, bir modülün birden fazla maksimal alt modülü olabilir. Diğer yandan, hiçbir maksimal alt modülü olmayan modüller de vardır. Örneğin; $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün hiçbir maksimal alt modülü yoktur. Bunu göstermek için öncesinde bir önermeye yer verelim.

Önerme 1.2.21. *$X, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün herhangi bir üreteç kümesi olsun. Eğer X den sonlu sayıda keyfi elemanlar çıkarılırsa, bu durumda bu elemanların çıkarıldığı küme yine $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir üreteç kümesi olur.*

Kanıt. Herhangi bir $x_0 \in X$ elemanının X kümesinden çıkarılması durumunda $X \setminus \{x_0\}$ kümesinin $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünü ürettiğini göstermek yeterli olacaktır. Daha sonra tümevarım yöntemiyle genel durum elde edilebilir. $X, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir üreteç kümesi olduğundan $\frac{x_0}{2} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ elemanı

$$\frac{x_0}{2} = x_0 z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i z_i, \quad x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$x_0 = x_0 2z_0 + \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i \implies x_0(1 - 2z_0) = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i$$

dir. Buradan

$$x_0 n = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i, \quad n = 1 - 2z_0 \in \mathbb{Z} \text{ ve } n \neq 0$$

yazılabilir. Şimdi

$$\frac{x_0}{n} = x_0 z'_0 + \sum_{x_j \neq x_0} x_j z'_j, \quad x_j \in X, z'_j \in \mathbb{Z}$$

alalım. Böylece

$$x_0 = x_0 n z'_0 + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z'_j$$

dir. Eğer $x_0 n = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i$ yazılırsa

$$x_0 = \sum_{x_i \neq x_0} x_i 2z_i z'_0 + \sum_{x_j \neq x_0} x_j n z'_j = \sum_{x_k \neq x_0} x_k z''_k, \quad x_k \in X, z''_k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece $x_0, X \setminus \{x_0\}$ ile üretilen alt modülün bir elemanı olur. $X, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir üreteç kümesi olduğundan $X \setminus \{x_0\}$ da $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir üreteç kümesi olur. $\square$

Bu sonuç göz önüne alınırsa $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin sonlu bir üreteç kümesi yoktur. Aksi takdirde, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ boş küme tarafından üretilirdi ve dolayısı ile $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = 0$ olurdu. Sonuç olarak, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir sonlu üretilmiş modül değildir.

Sonuç 1.2.22. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün maksimal alt modülü yoktur.

Kanıt. Kabul edelim ki, $A \subsetneq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olmak üzere A , $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir maksimal alt modülü olsun. Bu durumda $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, $q \notin A$ vardır.

$$A + q\mathbb{Z} = \{a + qz \mid a \in A, z \in \mathbb{Z}\} = \langle A \cup \{q\} \rangle$$

olup $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir alt modülüdür. Üstelik, $A \subsetneq \langle A \cup \{q\} \rangle$ dir. A , $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ de maksimal olduğundan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = \langle A \cup \{q\} \rangle$ olmalıdır. Önerme 1.2.21 den $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = A$ dır, bu ise çelişkidir. Sonuç olarak, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin maksimal alt modülü yoktur. $\square$

Teorem 1.2.23. M bir sonlu üretilmiş R -modül ise M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır.

Kanıt. M bir sonlu üretilmiş modül olduğundan $k \in \mathbb{N}$ ve $\lambda = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle$ olacak şekilde $m_\lambda \in M$ elemanları vardır. $N \subsetneq M$ olsun. Ω , M nin N yi kapsayan tüm öz alt modüllerinin kümesi olsun. Yani

$$\Omega := \{X \mid X \subsetneq M \text{ ve } N \leq X\}$$

dir. $N \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. Ω , “ $\subseteq$ ” bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. Γ , Ω nın bir zinciri ve $\Lambda := \bigcup_{X \in \Gamma} X$ olsun. Bu durumda Γ tam sıralı olduğundan $\Lambda \leq M$ dir. Ayrıca her $X \in \Gamma$ için $N \leq X$ olduğundan $N \leq \Lambda = \bigcup_{X \in \Gamma} X$ bulunur. Böylece Λ , M nin N yi kapsayan bir alt modülüdür. Üstelik $\Lambda \neq M$ dir. Eğer $\Lambda = M$ olsaydı her $\lambda = 1, 2, \dots, k$ için $m_\lambda \in \Lambda = \bigcup_{X \in \Gamma} X$ olurdu. O halde Γ tam sıralı olduğundan bir $X \in \Gamma$ vardır öyle ki her $\lambda = 1, 2, \dots, k$ için $m_\lambda \in X$ dir. Buradan $X = M$ olmalıdır. Bu ise $X \in \Omega$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\Lambda \in \Omega$ bulunur. Λ , Γ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece *Zorn Lemma*’dan Ω nın bir maksimal elemanı vardır ve buna K diyelim. Ω nın tanımından $K \subsetneq M$ ve $N \leq K$ dır. K nın M nin bir maksimal alt modülü olduğunu göstermek için $K \leq L \subsetneq M$ olsun. Buradan $L \in \Omega$ ve K maksimal olduğundan $K = L$ olmalıdır.

Yani Ω nın maksimal elemanları M nin N öz alt modülünü kapsayan maksimal alt modülleridir. $\square$

Sonuç 1.2.24. *Her sıfırdan farklı sonlu üretilmiş R -modülün bir maksimal alt modülü vardır.*

Kanıt. M sıfırdan farklı bir sonlu üretilmiş R -modül olsun. Teorem 1.2.23 te $N = 0$ alınırsa M nin bir maksimal alt modülü vardır. $\square$

Tanım 1.2.25. M bir R -modül ve N , M nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. M nin N de kapsanan 0 dan başka hiçbir alt modülü yoksa (denk bir ifadeyle, $K \not\leq N$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ alt modülü için $K = 0$ ise) N ye M nin bir **minimal alt modülü** denir. Ayrıca minimal alt modüller basit alt modüllerdir.

Örnek 1.2.26. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün minimal alt modülü yoktur.

Kanıt. $0 \neq A \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olsun. $0 \neq a \in A$ alalım. $0 \neq 2a\mathbb{Z} \subsetneq a\mathbb{Z} \leq A \leq \mathbb{Q}$ olduğundan $A, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin bir minimal alt modülü değildir. $\square$

Tanım 1.2.27. M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Eğer M nin sıfır ve kendisinden başka hiçbir alt modülü yoksa M ye **basit (simple) modül** denir.

Örnek 1.2.28. (i) $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ basit modül değildir.

(ii) p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak bir basit modüldür.

(iii) F bir cisim olmak üzere F_F nin alt modülleri sadece 0 ve F olduğundan F_F basittir.

Teorem 1.2.29. M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. M modülünün basit olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $M = mR$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $0 \neq m \in M$ alalım. Bu durumda $m = m1_R \in mR$ olup $mR \neq 0$ dır. M basit olduğundan $M = mR$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $0 \neq A \leq M$ olsun. $0 \neq a \in A$ alalım. Hipotezden $aR = M$ dir. Ayrıca $a \in A$ olduğundan $aR \leq A$ dır. Böylece $M = A$ elde edilir. $\square$

Tanım 1.2.30. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. M modülünün N alt modülüne göre sol kosetlerinin oluşturduğu küme

$$M/N = \{a + N \mid a \in M\}$$

olsun. Bu durumda $\forall a, b \in M$ ve $\forall r \in R$ için

$$(i) (a + N) + (b + N) = (a + b) + N$$

$$(ii) (a + N)r = ar + N$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle M/N bir R -modül olur. Bu modüle M nin N ye göre **bölüm modülü** denir. M/N nin toplama işlemine göre birimi $N = 0_M + N$ ve toplama işlemine göre tersi $-(a + N) = (-a) + N$ şeklindedir.

Tanım 1.2.31. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda

$$\pi: M \longrightarrow M/N$$

$$m \longmapsto \pi(m) = m + N$$

ile tanımlı dönüşümü bir epimorfizmadır ve $\text{Ker}(\pi) = N$ dir. Bu epimorfizmaya **doğal (kanonik) homomorfizma** denir.

Tanım 1.2.32. (a) M bir sağ R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun.

$$r(X) = \{ s \in R \mid \forall x \in X \text{ için } xs = 0 \}$$

kümesine **X kümesinin sağ sıfırlayıcısı (right annihilator)** denir. $r(X)$, R nin bir sağ idealidir. Eğer X , M nin bir alt modülü ise $r(X)$, R nin bir ideali olur.

Özel olarak, $X = M$ alınırsa $r(M) = \{ s \in R \mid \forall m \in M \text{ için } ms = 0 \}$ idealine **M modülünün sağ sıfırlayıcısı** denir. Eğer $m \in M$ olmak üzere $X = \{m\}$ alınırsa $r(m) = \{ s \in R \mid ms = 0 \}$ sağ idealine **m elemanının sağ sıfırlayıcısı** denir.

(b) M bir sol R -modül ve $\emptyset \neq Y \subseteq M$ olsun.

$$l(Y) = \{ s \in R \mid \forall y \in Y \text{ için } sy = 0 \}$$

kümesine **Y kümesinin sol sıfırlayıcısı (left annihilator)** denir. $l(Y)$, R nin bir sol idealidir. Eğer Y , M nin bir alt modülü ise $l(Y)$, R nin bir ideali olur.

Özel olarak, $Y = M$ alınırsa $l(M) = \{ s \in R \mid \forall m \in M \text{ için } sm = 0 \}$ idealine **M modülünün sol sıfırlayıcısı** denir. Eğer $m \in M$ olmak üzere $Y = \{m\}$

alınırsa $l(m) = \{s \in R \mid sm = 0\}$ sol idealine **m elemanın sol sıfırlayıcısı** denir.

Tanım 1.2.33. M bir R -modül olsun. Eğer $r(M) = 0$ ise M ye **faithful modül** denir.

1.3. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 1.3.1. M ve N iki R -modül olsun. $f: M \rightarrow N$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f dönüşümüne M den N ye bir **R -modül homomorfizması** veya kısaca **R -homomorfizma** denir.

$$(i) \quad \forall m_1, m_2 \in M \text{ için } f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$$

$$(ii) \quad \forall m \in M \text{ ve } \forall r \in R \text{ için } f(mr) = f(m)r$$

M den N ye bütün R -homomorfizmalarının kümesi $\text{Hom}_R(M, N)$ ile gösterilir. Her $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$ ve $m \in M$ için $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ ile tanımlı işlemle $\text{Hom}_R(M, N)$ bir abelyen gruptur. Ayrıca R bir değişmeli halka ise $\text{Hom}_R(M, N)$ bir R -modül yapısına sahip olur.

$f: M \rightarrow M$ bir R -homomorfizma ise f ye **R -endomorfizma** denir. Bütün R -endomorfizmalarının kümesi $\text{End}_R(M)$ ile gösterilir. Her $f, g \in \text{End}_R(M)$ ve $m \in M$ için $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ ve $(fg)(m) := (f \circ g)(m) = f(g(m))$ ile tanımlanan işlemlerle $\text{End}_R(M)$ bir birimli halkadır.

Tanım 1.3.2. $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun.

(1) Eğer f bire-bir ise f ye **R -monomorfizma** denir.

(2) Eğer f örten ise f ye **R -epimorfizma** denir.

(3) Eğer f bire-bir ve örten ise f ye **R -izomorfizma** denir. Eğer f bir izomorfizma ise M ile N izomorftur denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

(4) $f: M \rightarrow M$ bir R -izomorfizma ise f ye **R -otomorfizma** denir. Bütün R -otomorfizmalarının kümesi $\text{Aut}_R(M)$ ile gösterilir.

- (5) $K \leq M$ olsun. $\forall k \in K$ için $i(k) = k$ ile tanımlı $i: K \longrightarrow M$ homomorfizması bir monomorfizmadır. Bu monomorfizmaya **içerme dönüşümü** (*inclusion map*) denir.

Örnek 1.3.3. (i) Her $x \in M$ için $f(x) = 0_N$ ile tanımlanan $f: M \longrightarrow N$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **sıfır homomorfizması** denir ve genellikle 0 ile gösterilir.

(ii) Her $x \in M$ için $f(x) = x$ ile tanımlanan $f: M \longrightarrow M$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **birim homomorfizması** denir ve id_M ya da 1_M ile gösterilir.

Tanım 1.3.4. $\alpha: A \longrightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun.

- (i) $\alpha(A) = \{ \alpha(a) \mid a \in A \}$ kümesi B nin bir alt modülüdür. Bu alt modüle **α nın görüntüsü** ya da **A nın α altındaki homomorfik görüntüsü** denir ve $\text{Im}(\alpha)$ ile gösterilir.
- (ii) $\alpha^{-1}(0) = \{ a \in A \mid \alpha(a) = 0_B \}$ kümesi A nın bir alt modülüdür. Bu alt modüle **α nın çekirdeği** denir ve $\text{Ker}(\alpha)$ ile gösterilir.

Önerme 1.3.5. $\alpha: A \longrightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun.

- (i) Eğer $U \leq A$ ise $\alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \text{Ker}(\alpha)$ dır. Üstelik, $\text{Ker}(\alpha) \subseteq U$ ise $\alpha^{-1}(\alpha(U)) = U$ olur.
- (ii) Eğer $V \leq B$ ise $\alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap \text{Im}(\alpha)$ dır. Üstelik, $V \subseteq \text{Im}(\alpha)$ ise $\alpha(\alpha^{-1}(V)) = V$ olur.
- (iii) $\beta: B \longrightarrow C$ de bir R -homomorfizma ise $\text{Ker}(\beta \circ \alpha) = \alpha^{-1}(\text{Ker}(\beta))$ dır.

Kanıt. (i) $a \in \alpha^{-1}(\alpha(U))$ alalım. Böylece $\alpha(a) \in \alpha(U)$ olup $\alpha(a) = \alpha(u)$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Buradan $\alpha(a) - \alpha(u) = \alpha(a - u) = 0$ olduğundan $a - u \in \text{Ker}(\alpha)$ dır. O halde $a \in U + \text{Ker}(\alpha)$ dır. Tersine, $a' \in U + \text{Ker}(\alpha)$ alalım. Bu durumda $a' = u + k$ olacak şekilde $\exists u \in U, k \in \text{Ker}(\alpha)$ vardır. $\alpha(a) = \alpha(u + k) = \alpha(u) + \alpha(k) = \alpha(u) + 0_B = \alpha(u) \in \alpha(U)$ olduğundan $a \in \alpha^{-1}(\alpha(U))$ bulunur. Sonuç olarak, $\alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \text{Ker}(\alpha)$ elde edilir.

(ii) Şimdi $x \in \alpha(\alpha^{-1}(V))$ alalım. Bu durumda $x = \alpha(a)$ olacak şekilde $\exists a \in$

$\alpha^{-1}(V)$ vardır. Buradan $\alpha(a) \in V$ dir. $\alpha(a) \in V$ ve $\alpha(a) \in \text{Im}(\alpha)$ olduğundan $\alpha(a) \in V \cap \text{Im}(\alpha)$ bulunur. Tersine, $b \in V \cap \text{Im}(\alpha)$ alalım. Bu durumda $b = \alpha(a)$ olacak şekilde $\exists a \in A$ vardır. Buradan $a \in \alpha^{-1}(V)$ dir. O halde $b \in \alpha(\alpha^{-1}(V))$ bulunur. Böylece $\alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap \text{Im}(\alpha)$ elde edilir.

(iii) $a \in \text{Ker}(\beta \circ \alpha) \iff (\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a)) = 0 \iff \alpha(a) \in \text{Ker}(\beta) \iff a \in \alpha^{-1}(\text{Ker}(\beta))$ dir. $\square$

Önerme 1.3.6. $\alpha: A \longrightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun. $\text{Ker}(\alpha)$ yı kapsayan A nın alt modülleri ile $\text{Im}(\alpha)$ da kapsanan B nin alt modülleri arasında bire-bir eşleme vardır. Bu durumda $\text{Ker}(\alpha) \subseteq U$ şartını sağlayan $U \leq A$ alt modülü ile $V \subseteq \text{Im}(\alpha)$ şartını sağlayan $V \leq B$ için $V = \alpha(U)$ ve $U = \alpha^{-1}(V)$ şeklindedir.

Teorem 1.3.7 (1. İzomorfizma Teoremi). $\alpha: A \longrightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda

$$A/\text{Ker}(\alpha) \cong \text{Im}(\alpha)$$

dir.

Teorem 1.3.8 (2. İzomorfizma Teoremi). A bir R -modül olmak üzere $B \leq A$ ve $C \leq A$ ise

$$B/(B \cap C) \cong (B + C)/C$$

dir.

Teorem 1.3.9 (3. İzomorfizma Teoremi). A bir R -modül olmak üzere $C \leq B \leq A$ ise

$$(A/C)/(B/C) \cong A/B$$

dir.

Önerme 1.3.10. M bir R -modül olsun. M nin devirli olması için gerek ve yeter şart I , R nin bir sağ ideali olmak üzere $M \cong R/I$ olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) M bir devirli modül ise $M = mR$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. $f: R \longrightarrow M$ dönüşümü her $r \in R$ için $f(r) = mr$ şeklinde tanımlı olsun. Eğer her $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 = r_2$ ise $mr_1 = mr_2$ dir. O halde $f(r_1) = f(r_2)$ olup f iyi tanımlıdır. $\forall r_1, r_2, s \in R$ için $f(r_1 + r_2) = m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2 = f(r_1) + f(r_2)$ ve

$f(r_1s) = m(r_1s) = (mr_1)s = f(r_1)s$ olduğundan f bir R -homomorfizmadır. Ayrıca her $y \in M$ için $y = f(r') = mr'$ olacak şekilde bir $r' \in R$ vardır. Yani f örtendir. Böylece 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $R/\text{Ker}(f) \cong M$ dir. $\text{Ker}(f)$, R nin bir sağ idealidir. $I = \text{Ker}(f)$ alınırsa $M \cong R/I$ elde edilir.

($\Leftarrow$) I , R nin bir sağ ideali olmak üzere $M \cong R/I$ olsun. $\phi(1_R + I) = m$ ile tanımlı $\phi: R/I \rightarrow M$ R -izomorfizmayı göz önüne alalım. Bu durumda her $r + I \in R/I$ için $\phi(r + I) = \phi((1_R + I)r) = \phi(1_R + I)r = mr$ dir. Yani $\text{Im}(\phi) = \{mr \mid r \in R\} = mR$ dir. $\text{Im}(\phi) = M$ olduğundan $M = mR$ bulunur. Böylece M devirlidir. $\square$

1.4. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar

Tanım 1.4.1. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer $M = \sum_{i \in I} N_i$ ise, yani $I' \subset I$ ve I' sonlu olmak üzere her $m \in M$ elemanı

$$m = \sum_{i \in I'} n_i, \quad n_i \in N_i$$

şeklinde yazılabiliyorsa, üstelik bu yazılış tek türlü ise M ye $\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin (iç) direkt toplamı denir ve $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ile gösterilir. Aynı zamanda $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ yazılışına M nin bir **direkt ayrışımı** (direct decomposition) denir. Ayrıca $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ yazılışındaki her bir N_i alt modülüne M nin **direkt (dik) toplananı** denir. Eğer $I = \{1, 2, \dots, k\}$ şeklinde sonlu bir küme ise $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ olur.

Teorem 1.4.2. M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(1) \quad M = \sum_{i \in I} N_i \text{ ve}$$

$$(2) \quad \forall j \in I \text{ için } N_j \cap \left(\sum_{i \in I, i \neq j} N_i \right) = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olsun. Bu durumda $I' \subset I$ ve I' sonlu olmak üzere $\forall m \in M$ elemanı

$$m = \sum_{i \in I'} a_i, \quad a_i \in N_i$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Böylece $m \in \sum_{i \in I'} N_i \subseteq \sum_{i \in I} N_i$ olur. Yani $M \subseteq \sum_{i \in I} N_i$ dir. Ayrıca $\sum_{i \in I} N_i \subseteq M$ olduğundan $M = \sum_{i \in I} N_i$ elde edilir. Diğer yandan $\forall j \in I$ için $x \in N_j \cap \left(\sum_{i \in I, i \neq j} N_i \right)$ ise

$$x = a_j \in N_j \text{ ve } x \in \sum_{i \in I, i \neq j} N_i$$

yazılır. Buradan

$$x = a_j = \sum_{i \in I', i \neq j} a_i, \quad a_i \in N_i$$

olacak şekilde bir sonlu $I' \subset I$ alt kümesi vardır. Eğer yukarıdaki eşitliğin sol tarafına $i \in I'$ olmak üzere $0_M \in N_i$ elemanlarını ve sağ tarafına $0_M \in N_j$ elemanı eklenirse eşitliğin her iki tarafının sonlu indeks kümesi $I' \cup \{j\}$ olur. Yani

$$a_j + \sum_{i \in I', i \neq j} 0_M = \sum_{i \in I', i \neq j} a_i + 0_M$$

dir. Bu yazılış tek türlü olduğundan her $j \in I$ için $x = a_j = 0_M$ bulunur. Böylece $\forall j \in I$ için $N_j \cap \left(\sum_{i \in I, i \neq j} N_i \right) = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $M = \sum_{i \in I} N_i$ olduğundan her $m \in M$ elemanı, $I' \subset I$ ve I' sonlu olmak üzere $m = \sum_{i \in I'} a_i, \quad a_i \in N_i$ şeklinde yazılabilir. Bu yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için m elemanının

$$m = \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I'} b_i, \quad a_i, b_i \in N_i$$

şeklinde iki farklı yazılışının olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\sum_{i \in I'} a_i - \sum_{i \in I'} b_i = 0$$

dır. Böylece $\forall j \in I'$ için

$$a_j + \sum_{i \in I', i \neq j} a_i - \left(b_j + \sum_{i \in I', i \neq j} b_i \right) = 0$$

dır. O halde

$$a_j - b_j = \sum_{i \in I', i \neq j} (b_i - a_i) \in N_j \cap \left(\sum_{i \in I', i \neq j} N_i \right)$$

bulunur. Bu durumda

$$N_j \cap \left(\sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} N_i \right) \subseteq N_j \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} N_i \right) = 0$$

olduğundan $N_j \cap \left(\sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} N_i \right) = 0$ olup $a_j - b_j = 0$ dır. $\forall j \in I'$ için $a_j = b_j$ elde edilir. Dolayısıyla söz konusu yazılış tek türdür. Böylece $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ elde edilir. $\square$

Her $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} N_i$ olmak üzere $\pi((a_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i$, $a_i \in N_i$ ile tanımlı $\pi: \prod_{i \in I} N_i \longrightarrow \sum_{i \in I} N_i$ dönüşümünün bir izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i \in I} N_i$ toplamının iç direkt toplam olmasıdır.

Tanım 1.4.3. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ alt modülü var ise N ye M nin **dik toplananı** denir ve $N \leq_d M$ ile gösterilir. $M = 0 \oplus M$ olduğundan M ve 0 alt modüllerine M nin **aşıkâr dik toplananları** denir.

Tanım 1.4.4. M bir R -modül olsun. Eğer M nin sıfır ve kendisinden başka hiçbir dik toplananı yoksa M ye **ayrıştırılmaz (indecomposable) modül** denir.

Tanım 1.4.5. R bir halka ve $\emptyset \neq I$ bir indis kümesi olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$, R -modüllerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için $\alpha(i) \in A_i$ ile tanımlı

$$\alpha: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

dönüşümlerinin kümesine $\{A_i\}_{i \in I}$ **modüller ailesinin çarpımı** denir ve $\prod_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. Yani

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ \alpha \mid \alpha: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in A_i \right\}$$

şeklindedir. Her $i \in I$ için $a_i := \alpha(i)$ ve $(a_i)_{i \in I} := \alpha$ ile göstereyim. Burada a_i ye α nın i -inci bileşeni denir. Ayrıca her $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ olmak üzere

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \iff \forall i \in I \text{ için } a_i = b_i$$

olduğu açıktır. Eğer $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ şeklinde sayılabilir bir küme ise $\alpha = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots)$ şeklindedir. Eğer $I = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde sonlu bir küme

ise $\alpha = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ şeklindedir. Bu durumda $\forall i \in I$ için A_i ler birer R -modül olmak üzere

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ (a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i \}$$

ile ifade edilebilir. $\forall (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ ve $\forall r \in R$ için

$$(1) \quad (a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$$

$$(2) \quad (a_i)_{i \in I} r = (a_i r)_{i \in I}$$

ile tanımlanan işlemlerle $\prod_{i \in I} A_i$ bir R -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{A_i\}_{i \in I}$ **modüller ailesinin dış direkt çarpım modülü** denir.

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i \in A_i, \text{ en çok sonlu sayıda } i \in I \text{ için } a_i \neq 0_R \right\}$$

kümesi, $\prod_{i \in I} A_i$ modülünün bir alt modülüdür. Bu alt modüle $\{A_i\}_{i \in I}$ **modüller ailesinin dış direkt toplam modülü** denir. Eğer I kümesi sonlu ise

$$\prod_{i \in I} A_i = \coprod_{i \in I} A_i$$

olduğu açıktır.

$\forall j \in I$ için $a_j \in A_j$ olmak üzere $\eta_j(a_j) = (a_i)_{i \in I} = \begin{cases} a_j & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases}$ ile tanımlı $\eta_j: A_j \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ dönüşümü bir monomorfizmadır. $A'_j := \eta_j(A_j)$ ile gösterelim. Bu durumda A'_j , $\prod_{i \in I} A_i$ nin bir alt modülüdür. Ayrıca A'_j , A_j lere izomorftur.

Teorem 1.4.6. $\{A_i\}_{i \in I}$ bir R -modüller ailesi olsun. Bu durumda

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A'_i \quad \text{ve} \quad A_i \cong A'_i$$

dir. Diğer bir ifadeyle, $\{A_i\}_{i \in I}$ modüllerinin dış direkt toplamı, A_i lere izomorf olan $A'_i \leq \prod_{i \in I} A_i$ alt modüllerinin iç direkt toplamına eşittir.

Kanıt. A'_i nin tanımından $\sum_{i \in I} A'_i \leq \prod_{i \in I} A_i$ dir. Şimdi $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ alalım. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(a_i)_{i \in I} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, 0, 0, \dots)$ olacak şekilde

$\exists 0 \neq a_{i_\lambda} \in A_{i_\lambda}, i_\lambda \in I, \lambda = 1, 2, \dots, n$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}(a_i)_{i \in I} &= (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, 0, 0, \dots) \\ &= (a_{i_1}, 0, \dots) + (0, a_{i_2}, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, a_{i_n}, 0, \dots)\end{aligned}$$

dir. O halde $(a_i)_{i \in I} \in A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_n}$ dir. Dolayısıyla $\prod_{i \in I} A_i \leq \sum_{i \in I} A'_i$ bulunur. Böylece $\prod_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} A'_i$ elde edilir. Diğer yandan $\forall j \in I$ için

$$(a_i)_{i \in I} \in A'_j \cap \left(\sum_{i \neq j} A'_i \right) \implies (a_i)_{i \in I} \in A'_j \text{ ve } (a_i)_{i \in I} \in \sum_{i \neq j} A'_i$$

yazılır. $(a_i)_{i \in I} \in A'_j$ olduğundan her $i \neq j$ için $a_i = 0$ dir. $(a_i)_{i \in I} \in \sum_{i \neq j} A'_i$ olduğundan $a_j = 0$ dir. Buradan $(a_i)_{i \in I} = 0$ dir. Böylece $A'_j \cap \left(\sum_{i \neq j} A'_i \right) = 0$ elde edilir. O halde $\prod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A'_i$ dir.

Ayrıca her $a_i \in A_i$ için $a_i \mapsto \eta_i(a_i)$ ile tanımlı $f_i: A_i \rightarrow A'_i$ dönüşümünün bir izomorfizma olduğu açıktır. Yani $A_i \cong A'_i$ dir. $\square$

Uyarı 1.4.7. Teorem 1.4.6 da birbirine izomorf olan A_i ve A'_i modülleri için A'_i yerine A_i yazılır. Bundan sonra dış direkt toplam ve iç direkt toplam arasındaki yapısal farklılıklar ihmal edilerek bu iki toplam aynı kabul edilir. Her iki toplam için de $\bigoplus_{i \in I} A_i$ notasyonu kullanılır ve sadece direkt toplam olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.8. $\{A_i\}_{i \in I}$ bir R -modüller ailesi olsun. $j \in I$ olmak üzere her $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ için $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$ ile tanımlanan $\pi_j: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Bu epimorfizmaya **j-inci projeksiyon homomorfizması** ya da **kanonik projeksiyon** denir. Diğer yandan, her $j \in I$ için $a_j \in A_j$ olmak üzere $\eta_j(a_j) = (a_i)_{i \in I} = \begin{cases} a_j & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases}$ ile tanımlanan $\eta_j: A_j \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ dönüşümü bir monomorfizmadır. Bu monomorfizmaya **j-inci gömme homomorfizması** ya da **kanonik injeksiyon** denir.

Tanım 1.4.9. $\emptyset \neq I$ bir indis kümesi ve M_R , R -modüllerin bir ailesi olsun. $\forall i \in I$ için $A_i \in M_R$ ve $A \in M_R$ olmak üzere

- (1) Her $i \in I$ için $A_i = A$ alınırsa $\prod_{i \in I} A_i$ dış direkt çarpımına, **A nın I kopyalarının direkt çarpımı** denir ve A^I ile gösterilir.

- (2) Her $i \in I$ için $A_i = A$ alınırsa $\coprod_{i \in I} A_i$ dış direkt toplamına, **A** nın **I** kopyalarının direkt toplamı denir ve $A^{(I)}$ ile gösterilir.

1.5. Serbest (Free) Modüller

Teorem 1.5.1. F bir R -modül ve $X = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda $r_\lambda \in R$ sıfırdan farklı (ya da hepsi sıfır) olmak üzere $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda r_\lambda$ şeklinde tek türlü olarak yazılır.
- (ii) Her $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda(r) = x_\lambda r$ şeklinde tanımlanan $f_\lambda: R \rightarrow x_\lambda R$ fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda R$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) f_λ fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Eğer $r, s \in R$ için $f_\lambda(r) = f_\lambda(s)$ ise $x_\lambda r = x_\lambda s$ dir. Bu yazılış tek türlü olduğundan $r = s$ dir. Yani f_λ bire-bir fonksiyondur. Şimdi $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere f_λ nın bir R -modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} f_\lambda(r + s) &= x_\lambda(r + s) = x_\lambda r + x_\lambda s = f_\lambda(r) + f_\lambda(s) \\ f_\lambda(rs) &= x_\lambda(rs) = (x_\lambda r)s = f_\lambda(r)s \end{aligned}$$

olduğundan f_λ bir izomorfizmadır. Dolayısıyla her $\lambda \in \Lambda$ için $R \cong x_\lambda R$ dir. Her $a \in F$ elemanı $x_\lambda R$ modüllerinin $x_\lambda r_\lambda$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde tek türlü olarak yazılabildiğinden $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda R$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda R$ olduğundan her $a \in F$ elemanı, $r_\lambda \in R$ olmak üzere $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda r_\lambda$ şeklinde sonlu toplam olarak yazılabilir. Şimdi

$$a = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda r_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda r'_\lambda$$

olsun. O halde her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\lambda r_\lambda = x_\lambda r'_\lambda$ dir. O halde $f_\lambda(r_\lambda) = f_\lambda(r'_\lambda)$ dir. $f_\lambda: R \rightarrow x_\lambda R$ bir monomorfizma olduğundan $r_\lambda = r'_\lambda$ bulunur. Böylece her $a \in F$ elemanı, $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda r_\lambda$ şeklinde tek türlü olarak yazılır. $\square$

Tanım 1.5.2. F bir R -modül olsun. Teorem 1.5.1 deki denk koşullardan birini sağlayan F modülüne **serbest (free) modül** ve $X = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümesine de **F**

nin bazı denir. Örneğin; her R halkası, bazı $X = \{1_R\}$ olan bir serbest R -modüldür. Ayrıca her vektör uzayı bir serbest modüldür. Çünkü her vektör uzayının bir bazı vardır.

Sonuç 1.5.3. F bir R -modül ve $X = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (i) F , bazı X olan bir serbest modüldür.
- (ii) Her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ve $F \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = R^{(\Lambda)}$ dir.

Örnek 1.5.4. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modüldür. Fakat $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir serbest modül değildir. Çünkü Önerme 1.2.21 den, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin sonlu bir üreteç kümesi yoktur.

1.6. Small Alt Modüller

Tanım 1.6.1. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N+K = M$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ için $K = M$ ise (denk bir ifadeyle, her $L \not\leq M$ için $N+L \not\leq M$ ise) N ye M nin **small (superflous) alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 1.6.2. $\theta: M \longrightarrow N$ bir R -epimorfizma olsun. Eğer $\text{Ker}(\theta) \ll M$ ise θ ya bir **small epimorfizma** denir.

Teorem 1.6.3. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $A \leq B \leq N \leq M$ olsun. Eğer $B \ll N$ ise $A \ll M$ dir.
- (ii) Sonlu sayıda small alt modülün toplamı da small olur.
- (iii) Her small alt modülün homomorfizma altındaki görüntüsü de small olur.
- (iv) İki small epimorfizmanın bileşkesi de small olur.

Kanıt. (i) $U \leq M$ için $A+U = M$ olsun. $M = A+U \leq B+U \leq M$ olduğundan $M = B+U$ elde edilir. Modüler kuralından $N = N \cap M = N \cap (B+U) = B+(N \cap U)$ olur. $B \ll N$ olduğundan $N \cap U = N$ olmalıdır. Buradan $A \leq N \leq U$ olduğundan $U = A+U = M$ bulunur. O halde $A \ll M$ elde edilir.

(ii) Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $A_i \ll M$ olsun. $\sum_{i=1}^n A_i \ll M$ olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. $n = 1$ için $A_1 \ll M$ dir. $n = k$ için iddia doğru olsun.

Şimdi $n = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $N + \sum_{i=1}^{k+1} A_i = M$ olacak şekilde bir $N \leq M$ alalım. O halde $N + A_{k+1} + \sum_{i=1}^k A_i = M$ dir. Kabulden $\sum_{i=1}^k A_i \ll M$ olduğundan $N + A_{k+1} = M$ bulunur. $A_{k+1} \ll M$ olduğundan $N = M$ bulunur. Sonuç olarak, $\sum_{i=1}^{k+1} A_i \ll M$ elde edilir.

(iii) $f: M \longrightarrow N$ bir R -homomorfizma ve $A \ll M$ olsun. $f(A) \ll N$ olduğunu gösterelim. $U \leq N$ için $f(A) + U = N$ olsun. Keyfi $m \in M$ için $a \in A$, $u \in U$ olmak üzere $f(m) = f(a) + u$ yazılabilir. $f(m) - f(a) = f(m - a) = u \in U$ olur. O halde $m - a \in f^{-1}(U)$ bulunur. Dolayısıyla $m \in A + f^{-1}(U)$ olur. Yani $M \leq A + f^{-1}(U)$ olur. Diğer yandan, $A + f^{-1}(U) \leq M$ dir. Dolayısıyla $M = A + f^{-1}(U)$ bulunur. $A \ll M$ olduğundan $f^{-1}(U) = M$ elde edilir. O halde $f(M) = f(f^{-1}(U)) = U \cap \text{Im}(f) \leq U$ ve $f(A) \leq f(M)$ olduğundan $f(A) \leq f(M) \leq U$ bulunur. O halde $U = f(A) + U = N$ dir. Yani $f(A) \ll N$ elde edilir.

(iv) $\alpha: A \longrightarrow B$ ve $\beta: B \longrightarrow C$ small epimorfizmalar olsun. Bu durumda α ve β birer R -epimorfizma olduğundan $\beta \circ \alpha$ da bir R -epimorfizmadır. Şimdi $\beta \circ \alpha$ nın small epimorfizma olduğunu gösterelim. $\text{Ker}(\beta \circ \alpha) + U = A$ olacak şekilde bir $U \leq A$ alalım. Önerme 1.3.5 (iii) den, $\text{Ker}(\beta \circ \alpha) = \alpha^{-1}(\text{Ker}(\beta))$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \alpha(\text{Ker}(\beta \circ \alpha)) + \alpha(U) &= (\alpha\alpha^{-1})(\text{Ker}(\beta)) + \alpha(U) \\ &= \text{Ker}(\beta) + \alpha(U) = \alpha(A) = B \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\text{Ker}(\beta) \ll B$ olduğundan $\alpha(U) = B$ olmalıdır. Böylece $A = \alpha^{-1}(B) = \alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \text{Ker}(\alpha)$ ve $\text{Ker}(\alpha) \ll A$ olduğundan $A = U$ bulunur. Dolayısıyla $\text{Ker}(\beta \circ \alpha) \ll A$ dır. Yani $\beta \circ \alpha: A \longrightarrow C$ bir small epimorfizmadır. $\square$

1.7. Bir Modülün Radikali ve Jacobson Radikali

Tanım 1.7.1. M bir R -modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine **M modülünün radikali** denir ve $\text{Rad}(M)$ ile gösterilir. Yani

$$\text{Rad}(M) = \bigcap \{ K \mid K \leq M \text{ maksimal alt modül} \}$$

dir. Eğer M nin maksimal alt modülü yoksa $\text{Rad}(M) = M$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.7.2. $\text{Rad}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Çünkü Sonuç 1.2.22 den $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün maksi-

mal alt modülü yoktur.

Teorem 1.7.3. M bir R -modül olsun. Bu durumda

$$\text{Rad}(M) = \sum \{ L \mid L \ll M \}$$

dir.

Kanıt. $L \ll M$ ve K, M nin bir maksimal alt modülü olsun. Eğer $L \not\leq K$ ise Önerme 1.2.18 den, $K + L = M$ bulunur. O halde $L \ll M$ olduğundan $K = M$ dir. Bu ise K nin maksimal alt modül oluşuyla çelişir. Dolayısıyla her $K \leq M$ maksimal alt modülü için $L \leq K$ olmalıdır. Yani $L \leq \text{Rad}(M)$ dir. Böylece $\sum \{ L \mid L \ll M \} \leq \text{Rad}(M)$ bulunur. Diğer yandan, $m \in \text{Rad}(M)$ olsun. Şimdi $mR \ll M$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki mR, M nin small alt modülü olmasın. O halde bir $U \neq M$ alt modülü vardır öyle ki $mR + U = M$ dir.

$$\Omega := \{ X \mid X \subsetneq M \text{ ve } mR + X = M \}$$

kümesini tanımlayalım. $U \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. Ω , “ $\subseteq$ ” bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. Γ, Ω kümesinin bir zinciri ve $\Lambda := \bigcup_{X \in \Gamma} X$ olsun. Γ , tam sıralı olduğundan $\Lambda \leq M$ elde edilir. Üstelik $\Lambda \neq M$ dir. Eğer $\Lambda = M$ olsaydı her $m \in \Lambda$ için $m \in X$ olacak şekilde $\exists X \in \Gamma$ vardır. Buradan $X = mR + X = M$ olur. Bu ise $X \in \Omega$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\Lambda \neq M$ dir. $mR + \Lambda = M$ olduğu açıktır. O halde $\Lambda \in \Omega$ dir. Ayrıca Λ, Γ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece *Zorn Lemma*’dan Ω nin bir maksimal elemanı vardır ve buna K diyelim. K, M nin bir maksimal alt modülüdür. Bu durumda $m \in \text{Rad}(M) \leq K$ bulunur. $K \in \Omega$ olduğundan $K = mR + K = M$ dir. Bu ise K nin maksimal alt modül oluşuyla çelişir. O halde $mR \ll M$ olmalıdır. Sonuç olarak, $\text{Rad}(M) = \sum \{ L \mid L \ll M \}$ elde edilir. $\square$

Sonuç 1.7.4. M bir R -modül ve $m \in M$ olsun. $mR \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in \text{Rad}(M)$ olmasıdır.

Kanıt. $m \in M$ ve $mR \ll M$ olsun. $m \notin \text{Rad}(M)$ olacak şekilde M nin bir K maksimal alt modülü olduğunu kabul edelim. Bu durumda Önerme 1.2.18 den,

$K + mR = M$ dir. O halde mR , M nin small alt modülü değildir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $m \in \text{Rad}(M)$ olmalıdır. Ters Teorem 1.7.3 ün ispatından görülür. $\square$

Teorem 1.7.5. *M bir R -modül olsun. Eğer M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyor ise $\text{Rad}(M) \ll M$ dir.*

Kanıt. $U \leq M$ ve $\text{Rad}(M) + U = M$ olsun. Kabul edelim ki $U \neq M$ olsun. Hipotezden U , M nin bir K maksimal alt modülünde kapsanır. Bu durumda $U \leq K$ ve $\text{Rad}(M) \leq K$ olduğundan $M = \text{Rad}(M) + U \leq K$ bulunur. Böylece $M = K$ olur. Bu ise K nin maksimal alt modül oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $U = M$ olmalıdır. Yani $\text{Rad}(M) \ll M$ dir. $\square$

Sonuç 1.7.6. *M bir sonlu üretilmiş R -modül ise $\text{Rad}(M) \ll M$ dir.*

Kanıt. Teorem 1.2.23 ve Teorem 1.7.5 den açıktır. $\square$

Teorem 1.7.7. *$\varphi: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda $\varphi(\text{Rad}(M)) \leq \text{Rad}(N)$ dir.*

Kanıt. $\text{Rad}(M) = \sum_{L \ll M} L$ olduğundan $\varphi(\text{Rad}(M)) = \sum_{L \ll M} \varphi(L)$ dir. Teorem 1.6.3 (iii) den, $\varphi(L) \ll N$ dir. Sonuç olarak, $\varphi(\text{Rad}(M)) \leq \text{Rad}(N)$ elde edilir. $\square$

Sonuç 1.7.8. *M bir R -modül olsun. Eğer $K \leq M$ ise $\text{Rad}(K) \leq \text{Rad}(M)$ dir.*

Kanıt. $i: K \rightarrow M$ bir içirme dönüşümü olsun. Teorem 1.7.7 gereği $\text{Rad}(K) = i(\text{Rad}(K)) \leq \text{Rad}(M)$ bulunur. $\square$

Önerme 1.7.9. *M bir R -modül olsun. Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise*

$$\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i)$$

dir.

Teorem 1.7.10. *M bir R -modül olsun.*

- (i) *M bir yarı-basit modül ise $\text{Rad}(M) = 0$ dır.*
- (ii) *$M \text{Rad}(R_R) \leq \text{Rad}(M)$ dir.*
- (iii) *$\text{Rad}(R_R)$, R nin bir idealidir.*

Kanıt. (i) $A \leq M$ olsun. M yarı-basit olduğundan $A \leq_d M$ dir. O halde $A \oplus B = M$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. Eğer $A \ll M$ ise $B = M$ dir. O halde $A = 0$ dir. Yani M nin small alt modülü sadece 0 alt modülüdür. Dolayısıyla $\text{Rad}(M) = 0$ bulunur.

(ii) Her $r \in R$ için $\varphi_m(r) = mr$ ile tanımlı $\varphi_m: R \rightarrow M$ dönüşümü bir R -modül homomorfizmasıdır. Bu durumda $\varphi_m(\text{Rad}(R_R)) = m \text{Rad}(R_R)$ dir. Böylece Teorem 1.7.7 den $m \text{Rad}(R_R) = \varphi_m(\text{Rad}(R_R)) \leq \text{Rad}(M)$ bulunur. Her $m \in M$ için $m \text{Rad}(R_R) \leq \text{Rad}(M)$ olduğundan $M \text{Rad}(R_R) \leq \text{Rad}(M)$ elde edilir.

(iii) (ii) seçeneğinde $M_R = R_R$ alınırsa $\text{Rad}(R_R)$, R nin bir ideali olur. Benzer şekilde, $\text{Rad}({}_R R)$ de R nin bir idealidir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.7.11. R bir halka ve A , R nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $A \ll R_R$ dir.
- (2) $A \leq \text{Rad}(R_R)$
- (3) Her $a \in A$ için $1_R - a$ sağ tersinirdir.
- (4) Her $a \in A$ için $1_R - a$ tersinirdir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $\text{Rad}(R_R)$, small alt modüllerin toplamı olduğundan açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $A \leq \text{Rad}(R_R)$ olsun. Sonuç 1.7.6 dan, $\text{Rad}(R_R) \ll R$ dir. Teorem 1.6.3 (i) den $A \ll R_R$ bulunur.

(1) $\Rightarrow$ (3) $A \leq R_R$ olsun. Her $r \in R$ ve her $a \in A$ için $ar + (1_R - a)r = r$ yazılabilir. O halde $A + (1_R - a)R = R$ dir. $A \ll R_R$ olduğundan $(1_R - a)R = R$ dir. Böylece $1_R - a$ sağ tersinirdir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Keyfi $a \in A$ için $(1_R - a)r = 1_R$ olsun. Bu durumda $r = 1_R + ar = 1_R - (-ar)$ dir. $-ar \in A$ olduğundan hipotezden $rs = (1_R - (-ar))s = 1_R$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Böylece $((1_R - (-ar)))s = s + a(rs) = s + a = 1_R$ bulunur. Buradan $s = 1_R - a$ dir. O halde $rs = r(1_R - a) = 1_R$ olduğundan $1_R - a$ tersinirdir.

(4) $\Rightarrow$ (1) $A + B = R_R$ olacak şekilde bir $B \leq R_R$ alalım. $1_R \in R$ için $1_R = a + b$ olacak şekilde $\exists a \in A, b \in B$ vardır. Buradan $b = 1_R - a$ dir. O halde hipotezden $br = (1_R - a)r$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $B = R$ dir. Yani $A \ll R_R$ dir. $\square$

Teorem 1.7.12. R bir halka olmak üzere $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ dir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 1.7.11 de $A = \text{Rad}(R_R)$ alınırsa $\text{Rad}(R_R) \leq \text{Rad}({}_R R)$ bulunur. Benzer şekilde, Yardımcı Teorem 1.7.11 deki denklikler R sol R -modüller için yapılırsa $\text{Rad}({}_R R) \leq \text{Rad}(R_R)$ bulunur. Sonuç olarak, $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ elde edilir. $\square$

Tanım 1.7.13. R bir halka olsun.

$$J(R) := \text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$$

şeklinde tanımlanan R nin idealine **Jacobson Radikali** denir. Yani $J(R)$, R nin tüm sağ (sol) maksimal ideallerinin arakesitidir.

1.8. Essential Alt Modüller

Tanım 1.8.1. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \cap K = 0$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ için $K = 0$ ise (denk bir ifadeyle, her $0 \neq L \leq M$ alt modülü için $N \cap L \neq 0$ ise) N ye M nin **essential alt modülü** ya da M ye N nin **essential genişlemesi (essential extension)** denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre her M modülü kendisinin bir essential alt modülüdür. M modülünün kendisinden farklı essential alt modülüne **öz (proper) essential alt modül** denir.

Örnek 1.8.2. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün sıfırdan farklı her alt modülü $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ de essential olarak kapsanır.

Tanım 1.8.3. $\phi: M \longrightarrow N$ bir R -monomorfizma olsun. Eğer $\text{Im}(\phi) \leq_e N$ ise ϕ ye bir **essential monomorfizma** denir.

Teorem 1.8.4. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N \leq_e M$ olmasıdır.
- (ii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dır.
- (iii) $K \leq N \leq M$ olmak üzere $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ ise $N \leq_e M$ dir.

(iv) Her $i = 1, 2, \dots, t$ için $N_i \leq_e K_i \leq M$ ise $\bigcap_{i=1}^t N_i \leq_e \bigcap_{i=1}^t K_i$ dir.

(v) Her essential alt modülün homomorfizma altındaki ters görüntüsü de essentialdir.

(vi) İki essential monomorfizmanın bileşkesi de essentialdir.

(vii) Sonlu sayıda essential alt modülün kesişimi de essentialdir.

Kanıt. (i) $(\Rightarrow)$ $K \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq N$ olsun. Böylece $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dir. Her $0 \neq X \leq N$ için $K \cap X \neq 0$ olduğundan $K \leq_e N$ dir. Şimdi $0 \neq Y \leq M$ olsun. O halde $0 \neq K \cap Y \leq N \cap Y$ dir. Her $0 \neq Y \leq M$ için $N \cap Y \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $K \leq_e N \leq_e M$ olsun. Her $0 \neq S \leq M$ için $0 \neq N \cap S \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap S) \leq K \cap S$ dir. Her $0 \neq S \leq M$ için $K \cap S \neq 0$ olduğundan $K \leq_e M$ bulunur.

(ii) $N \leq_e M$, $K \leq M$ ve $0 \neq L \leq K$ olsun. $(N \cap K) \cap L = N \cap L \neq 0$ dir. Her $0 \neq L \leq K$ için $(N \cap K) \cap L \neq 0$ olduğundan $N \cap K \leq_e K$ dir.

(iii) $U \leq M$ ve $N \cap U = 0$ olsun. Eğer $U \leq K$ ise $U = N \cap U = 0$ dir. Eğer $K \not\leq U$ ise $0 \neq \frac{U}{K} \leq \frac{M}{K}$ dir. $\frac{N}{K} \cap \frac{U}{K} = 0$ olsun. $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{U}{K} = 0$ bulunur. Yani $U = K$ dir. Bu ise $K \not\leq U$ olmasıyla çelişir. Böylece $N \leq_e M$ elde edilir.

(iv) $t = 2$ için doğru olduğunu gösterelim. $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2$ olsun. $(N_1 \cap N_2) \cap L = 0$ olacak şekilde bir $L \leq K_1 \cap K_2$ alalım. Bu durumda $(N_1 \cap N_2) \cap L = N_1 \cap (N_2 \cap L) = 0$ dir. $N_2 \cap L \leq L \leq K_1 \cap K_2 \leq K_1$ ve $N_1 \leq_e K_1$ olduğundan $N_2 \cap L = 0$ dir. $L \leq K_1 \cap K_2 \leq K_2$ ve $N_2 \leq_e K_2$ olduğundan $L = 0$ dir. Yani $N_1 \cap N_2 \leq_e K_1 \cap K_2$ dir. Tümevarım yöntemiyle genel durum elde edilir.

(v) $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması ve $B \leq_e N$ olsun. Şimdi $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak şekilde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in f^{-1}(B) \cap U = 0$ bulunur. O halde $x = f(u) = f(0) = 0$ dir. Yani $B \cap f(U) = 0$ dir. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$ bulunur. Böylece $U \leq \text{Ker}(f) = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$ olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dir. Dolayısıyla $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

(vi) $\alpha: A \rightarrow B$ ve $\beta: B \rightarrow C$ essential monomorfizmalar olsun. Bu durumda α ve β birer R -monomorfizma olduğundan $\beta \circ \alpha$ da bir R -monomorfizmadır. Şimdi

$\beta \circ \alpha$ nın essential monomorfizma olduğunu gösterelim. $\text{Im}(\beta \circ \alpha) \cap U = 0$ olacak şekilde bir $U \leq C$ alalım. $\text{Im}(\beta \circ \alpha) = \beta(\text{Im}(\alpha))$ ve β bire-bir olduğundan $0 = \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}(\text{Im}(\beta \circ \alpha)) \cap \beta^{-1}(U) = \text{Im}(\alpha) \cap \beta^{-1}(U)$ bulunur. $\text{Im}(\alpha) \leq_e B$ olduğundan $\beta^{-1}(U) = 0$ dir. Buradan $\text{Im}(\beta) \cap U = 0$ dir. $\text{Im}(\beta) \leq_e C$ olduğundan $U = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\text{Im}(\beta \circ \alpha) \leq_e C$ dir. Yani $\beta \circ \alpha: A \rightarrow C$ bir essential monomorfizmadır.

(vii) Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $A_i \leq_e M$ olsun. $\bigcap_{i=1}^n A_i \leq_e M$ olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim. $n = 1$ için $A_1 \leq_e M$ dir. $n = k$ için iddia doğru olsun. Şimdi $n = k + 1$ için iddiamın doğru olduğunu gösterelim. $(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) \cap L = 0$ olacak şekilde bir $L \leq M$ alalım. O halde $(\bigcap_{i=1}^k A_i) \cap (A_{k+1} \cap L) = 0$ dir. Kabulden $\bigcap_{i=1}^k A_i \leq_e M$ olduğundan $A_{k+1} \cap L = 0$ bulunur. Hipotezden $A_{k+1} \leq_e M$ olduğundan $L = 0$ bulunur. Sonuç olarak, $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \leq_e M$ elde edilir. $\square$

Bu özellik sonlu olmayan bir index kümesi için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünde her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $0 \neq n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \not\leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

Uyarı 1.8.5. Bir essential alt modülün homomorfizma altındaki görüntüsü essential olmayabilir. Bu durum için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 1.8.6. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $f(n) = (n, 0)$ $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizması için $2\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat $f(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \oplus 0 \not\leq_e \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir. Çünkü $0 \neq (0 \oplus \mathbb{Z}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ için $(2\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (0 \oplus \mathbb{Z}) = 0$ dir.

Önerme 1.8.7. M ve N , R -modüller ve $f: M \rightarrow N$ bir monomorfizma olsun. Eğer $A \leq_e B \leq M$ ise $f(A) \leq_e f(B) \leq N$ dir.

Kanıt. $f(A) \cap f(K) = 0$ olsun. Bu durumda $f(A \cap K) \subseteq f(A) \cap f(K) = 0$ olduğundan $f(A \cap K) = 0$ dir. f bire-bir olduğundan $A \cap K = 0$ dir. $A \leq_e B$ olduğundan $K = 0$ dir. O halde $f(K) = 0$ dir. Böylece $f(A) \leq_e f(B)$ bulunur. $\square$

Önerme 1.8.8. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $N \leq_e M$ olsun. Her $0 \neq m \in M$ için $0 \neq mR \leq M$ dir. $N \leq_e M$ olduğundan $N \cap mR \neq 0$ dir. O halde $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. $(\Leftarrow)$ $0 \neq L \leq M$ olsun. Bu durumda $\exists 0 \neq m \in L$ vardır. Hipotezden $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Ayrıca $L \leq M$ olduğundan $mr \in L$ dir. O halde $0 \neq mr \in N \cap L$ dir. Her $0 \neq L \leq M$ için $N \cap L \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ bulunur. $\square$

Önerme 1.8.9. M bir R -modül ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Her $i \in I$ olmak üzere $A_i \leq_e M_i \leq M$ olması için gerek ve yeter koşul $\bigoplus_{i \in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Keyfi $0 \neq m \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ alalım. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$ olacak şekilde $\exists m_{i_j} \in M_{i_j}, i_j \in I, j = 1, 2, \dots, n$ vardır. Şimdi n ye göre tümevarım uygulayarak $0 \neq mr \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ olacak şekilde bir $r \in R$ var olduğunu gösterelim. $n = 1$ için iddia doğrudur. $n = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $m' := m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}$ olsun. Böylece $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k} + m_{i_{k+1}} = m' + m_{i_{k+1}}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $m' = 0$ ise $0 \neq m = m1_R = m_{i_{k+1}} \in A_{i_{k+1}} \leq \bigoplus_{i \in I} A_i$ dir. Yani $r = 1_R$ alınabilir. Şimdi $m' \neq 0$ olsun. Bu durumda $\bigoplus_{n=1}^k A_{i_n} \leq_e \bigoplus_{n=1}^k M_{i_n}$ olduğundan Önerme 1.8.8 den, $0 \neq m's \in \bigoplus_{n=1}^k A_{i_n}$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Eğer $m_{i_{k+1}}s \in A_{i_{k+1}}$ ise $ms = m's + m_{i_{k+1}}s \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ ve $ms \neq 0$ dir. Eğer $ms = 0$ olsaydı $-m_{i_{k+1}}s = m's \in A_{i_{k+1}} \cap (A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \dots \oplus A_{i_k}) = 0$ olup $m's = 0$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla $ms \neq 0$ dir. Eğer $m_{i_{k+1}}s \notin A_{i_{k+1}}$ ise $A_{i_{k+1}} \leq_e M_{i_{k+1}}$ olduğundan Önerme 1.8.8 den, $0 \neq (m_{i_{k+1}}s)t \in A_{i_{k+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$ için $mr = m'r + m_{i_{k+1}}r \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ ve $mr \neq 0$ dir. Eğer $mr = 0$ olsaydı $-m_{i_{k+1}}r = m'r \in A_{i_{k+1}} \cap (A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \dots \oplus A_{i_k}) = 0$ olup $m_{i_{k+1}}r = (m_{i_{k+1}}s)t = 0$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla $mr \neq 0$ olmalıdır. Sonuç olarak, her $0 \neq m \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ için $0 \neq mr \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ olacak şekilde bir $r \in R$ var olduğundan $\bigoplus_{i \in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\bigoplus_{i \in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$ olsun. Kabul edelim ki, $A_1 \not\leq_e M_1$ olsun. O halde bir $0 \neq K_1 \leq M_1$ vardır öyle ki $A_1 \cap K_1 = 0$ dir. Şimdi $x \in (\bigoplus_{i \in I} A_i) \cap K_1$ alalım. Bu durumda $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ olacak şekilde $\exists a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$ vardır. $x - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n \in M_1 \cap (M_2 \oplus M_3 \oplus \dots \oplus M_n) = 0$ olduğundan $x = a_1 \in K_1 \cap A_1 = 0$ dir. Dolayısıyla $(\bigoplus_{i \in I} A_i) \cap K_1 = 0$ dir. $\bigoplus_{i \in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$

ve $K_1 \leq M_1 \leq M$ olduğundan $K_1 = 0$ bulunur. Bu ise $A_1 \not\leq_e M_1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $i \in I$ için $A_i \leq_e M_i$ dir. $\square$

Önerme 1.8.10. $m \in M$ ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda

$$m^{-1}N = \{r \in R \mid mr \in N\}$$

kümesi R nin bir sağ idealidir. Ayrıca $N \leq_e M$ ise $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.

Kanıt. Öncelikle $m^{-1}N \leq R_R$ olduğunu gösterelim. $0 \in R$ ve $m0 = 0 \in N$ olduğundan $0 \in m^{-1}N$ dir. Yani $m^{-1}N \neq \emptyset$ dir. Her $r_1, r_2 \in m^{-1}N$ ve $s \in R$ için $m(r_1 - r_2) = mr_1 - mr_2 \in N$ ve $m(r_1s) = (mr_1)s \in N$ olduğundan $m(r_1 - r_2), m(r_1s) \in m^{-1}N$ bulunur. Böylece $m^{-1}N \leq R_R$ elde edilir. Şimdi $m \in M$, $N \leq_e M$ ve $0 \neq L \leq R_R$ olsun. Eğer $mL = 0$ ise $L \subseteq m^{-1}N$ olduğundan $L \cap m^{-1}N = L \neq 0$ dir. Eğer $mL \neq 0$ ise $N \leq_e M$ olduğundan $mL \cap N \neq 0$ dir. Bu durumda $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde bir $r \in L$ vardır. O halde $r \in m^{-1}N$ dir. Sonuç olarak, $L \cap m^{-1}N \neq 0$ olduğundan $m^{-1}N \leq_e R_R$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.8.11. M bir R -modül, $0 \neq m \in M$ ve $N \leq_e M$ olsun. Bu durumda $mI \neq 0$ ve $mI \subseteq N$ olacak şekilde bir $I \leq_e R_R$ vardır.

Kanıt. $I := \{r \in R \mid mr \in N\}$ olsun. Bu durumda $I \leq R_R$ ve $mI \subseteq N$ dir. $N \leq_e M$ olduğundan $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Yani $r \in I$ için $mI \neq 0$ dir. Şimdi $0 \neq J \leq R_R$ olsun. Eğer $mJ = 0$ ise $J \subseteq I$ olduğundan $J \cap I = J \neq 0$ dir. Eğer $mJ \neq 0$ ise $N \leq_e M$ olduğundan $mJ \cap N \neq 0$ dir. Böylece $0 \neq mx \in N$ olacak şekilde bir $x \in J$ vardır. O halde $x \in I$ dir. Sonuç olarak, $J \cap I \neq 0$ olduğundan $I \leq_e R_R$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.8.12. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $K \leq_e M$

(ii) $i: K \longrightarrow M$ içermeye dönüşümü bir essential monomorfizmadır.

(iii) Her R -modül N ve $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $\text{Ker}(f) \cap K = 0$ ise $\text{Ker}(f) = 0$ dir.

Kanıt. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $i(K) = K \leq_e M$ olduğundan açıktır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Her R -modül N ve $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $\text{Ker}(f) \cap K = 0$ olsun. O halde $K \leq_e M$ olduğundan $\text{Ker}(f) = 0$ dır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $L \cap K = 0$ olacak şekilde bir $L \leq M$ alalım. $\pi: M \rightarrow M/L$ doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. $\text{Ker}(\pi) = L$ dir. O halde hipotezden $\text{Ker}(\pi) = L = 0$ dır. Dolayısıyla $K \leq_e M$ dir. $\square$

Teorem 1.8.13. M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) M bir yarı-basit modüldür.

(ii) M nin öz essential alt modülü yoktur.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) M bir yarı-basit modül ve $A \subsetneq M$ olsun. Kabul edelim ki, $A \leq_e M$ olsun. M yarı-basit olduğundan $A \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $A \oplus U = M$ olacak şekilde bir $U \leq M$ vardır. Buradan $A \cap U = 0$ ve $A \leq_e M$ olduğundan $U = 0$ olmalıdır. O halde $A = M$ dir. Bu ise çelişkidir. Yani M nin essential alt modülü sadece kendisidir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Kabul edelim ki M nin öz essential alt modülü olmasın. $A \leq M$ olsun. O halde A nın bir C komplementi vardır öyle ki $A \cap C = 0$ ve $A \oplus C \leq_e M$ dir. Kabulden $A \oplus C = M$ olmalıdır. Böylece $A \leq_d M$ olduğundan M bir yarı-basit modüldür. $\square$

1.9. Düzgün (Uniform) Modüller

Tanım 1.9.1. M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Eğer her $0 \neq U \leq M$ için $U \leq_e M$ oluyorsa M ye **düzgün (uniform) modül** denir.

Örnek 1.9.2. (i) Her $0 \neq U \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ için $U \leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir düzgün modüldür.

(ii) $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak düzgün modül değildir. Çünkü $\mathbb{Z}_6$ nın $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$ alt modülleri için $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{0\}$ dır.

(iii) Her cisim kendi üzerinde bir düzgün modüldür.

1.10. Komplement Alt Modüller

Tanım 1.10.1. M bir R -modül ve $A \leq M$ olsun. $A \cap C = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir $C \leq M$ alt modülüne **A nın (M deki) komplementi** denir. C alt modülü tek olmak zorunda değildir.

Örnek 1.10.2. F bir cisim, $x \in F$ ve $M_R = (F \oplus F)_F$ olsun.

$$A = (1, 0)F = \{ (u, 0) \mid u \in F \} \leq M_R$$

alalım.

$$C = (x, 1)F = \{ (xv, v) \mid v \in F \} \leq M_R$$

olmak üzere C ler, A nın M_R deki komplementleridir. Eğer F cismi sonlu ise A nın sonlu tane komplementi vardır. Eğer F cismi sonsuz ise A nın sonsuz tane komplementi vardır.

Önerme 1.10.3. M bir R -modül ve $A, B \leq M$ olmak üzere $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda $B \leq C$ olacak şekilde A nın M de bir C komplementi vardır.

Kanıt. İspatı *Zorn Lemma*'yı kullanarak yapalım.

$$\Omega := \{ X \leq M \mid A \cap X = 0 \text{ ve } B \leq X \}$$

kümesini tanımlayalım. $B \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. $\Gamma := \{X_i\}_{i \in I}$, Ω nın bir zinciri ve $\Lambda := \bigcup_{i \in I} X_i$ olsun. Bu durumda Γ tam sıralı olduğundan her $X_i, X_j \in \Gamma$ için $X_i \subseteq X_j$ ya da $X_j \subseteq X_i$ dir. O halde Λ , M nin bir alt modülüdür. Her $i \in I$ için $B \leq X_i$ olduğundan $B \leq \bigcup_{i \in I} X_i = \Lambda$ dir. Her $i \in I$ için $A \cap X_i = 0$ olduğundan $A \cap (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i) = 0$ dir. Yani $\Lambda \in \Omega$ dir. Λ , Γ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece *Zorn Lemma* ile Ω nın bir maksimal elemanı ve bunu C ile gösterelim. $A \cap C = 0$ olduğundan C , A nın M deki bir komplementidir. Ω nın tanımından $B \leq C$ dir. $\square$

Sonuç 1.10.4. M R -modülünün her alt modülünün M de bir komplementi vardır.

Kanıt. $A, B \leq M$ olmak üzere $A \cap B = 0$ olsun. Önerme 1.10.3 te $B = 0$ alınırsa $A \cap 0 = 0$ dir. O halde $0 \leq C$ olacak şekilde A nın M de bir C komplementi vardır. $\square$

Önerme 1.10.5. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $K \leq M$, N nin M deki bir komplementi ise $N \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. $N \cap K = 0$ olduğundan $N + K = N \oplus K \leq M$ dir. $L \leq M$ ve $(N \oplus K) \cap L = 0$ olsun. Bu durumda $(N \oplus K) + L = (N \oplus K) \oplus L$ dir. Böylece $N \cap (K \oplus L) = 0$ olur. K, N ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K \oplus L = K$ olmalıdır. $K \cap L = 0$ olduğundan $L = 0$ bulunur. O halde $N \oplus K \leq_e M$ dir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.10.6. M bir R -modül, $N \leq M$ ve $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda K nın, M de N nin bir komplementi olması için gerek ve yeter koşul $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ K, N nin M de bir komplementi olsun. Bu durumda $N \cap K = 0$ dir. $0 \neq x \in M$ olsun. Eğer $x \in K$ ise $0 \neq xR = K \cap xR \subseteq (N \oplus K) \cap xR$ dir. Böylece $(N \oplus K) \cap xR \neq 0$ dir. Şimdi $x \notin K$ olsun. Bu durumda K, N ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $N \cap (xR + K) \neq 0$ dir. O halde $0 \neq n = xr + k$ olacak şekilde $\exists n \in N, k \in K, r \in R$ vardır. Buradan $n - k = xr \in (N \oplus K) \cap xR$ dir. Eğer $n - k = 0$ olsaydı $n = k \in N \cap K = 0$ olup $n = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $(N \oplus K) \cap xR \neq 0$ dir. Böylece her $0 \neq x \in M$ için $(N \oplus K) \cap xR \neq 0$ olduğundan $N \oplus K \leq_e M$ dir.

$(\Leftarrow)$ $K \leq_d M$ olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. Kabul edelim ki, $K \subseteq K_1$ ve $N \cap K_1 = 0$ olacak şekilde bir $K_1 \leq M$ olsun. Buradan $K_1 = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$ bulunur. $K_1 \cap K' = 0$ dir. Gerçekten, $0 \neq y \in (K_1 \cap K') \leq M$ olsun. $N \oplus K \leq_e M$ olduğundan $(N \oplus K) \cap yR \neq 0$ olur. O halde $0 \neq yr = n + k$ olacak şekilde $\exists n \in N, k \in K, r \in R$ vardır. Böylece $n = yr - k \in N \cap K_1 = 0$ dir. O halde $k = yr \in K \cap K' = 0$ dir. Bu ise $yr \neq 0$ olduğundan bir çelişkidir. Dolayısıyla $K_1 \cap K' = 0$ olup $K = K_1$ elde edilir. Yani K, N nin M deki bir komplementidir. $\square$

Teorem 1.10.7. M bir R -modül olmak üzere $N, K \leq M$ ve $N \cap K = 0$ olsun. K nın, M de N nin bir komplementi olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{N \oplus K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$$

olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ K, N nin M deki bir komplementi olsun. $K \leq L \leq M$ için $\frac{N \oplus K}{K} \cap \frac{L}{K} = 0$ olsun. Bu durumda $(N \oplus K) \cap L = K$ dir. Modüler kuralından $(N \cap L) \oplus K = K$ bulunur. Dolayısıyla $N \cap L \leq K$ dir. Buradan $N \cap L \leq K \cap N = 0$ olduğundan $N \cap L = 0$ bulunur. K, N ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $L = K$ olmalıdır. O halde $\frac{L}{K} = 0$ dir. Sonuç olarak, $\frac{N \oplus K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $N \cap L = 0$ ve $K \leq L$ olacak şekilde bir $L \leq M$ alalım. $x \in (N \oplus K) \cap L$ olsun. Bu durumda $x = n + k$ olacak şekilde $\exists n \in N, k \in K$ vardır. Buradan $n = x - k \in N \cap L = 0$ olduğundan $n = 0$ bulunur. O halde $x = k \in K$ olduğundan $(N \oplus K) \cap L = K$ dir. Böylece $\frac{N \oplus K}{K} \cap \frac{L}{K} = 0$ dir. $\frac{N \oplus K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{L}{K} = 0$ olmalıdır. Yani $K = L$ dir. Dolayısıyla K, N nin M de bir komplementidir. $\square$

Tanım 1.10.8. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. K nın, M de komplementi olduğu bir $L \leq M$ var ise K ya M de bir **komplement alt modül** denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir. Ayrıca $0 \leq_c M$ ve $M \leq_c M$ olduğu açıktır.

Uyarı 1.10.9. M bir R -modül olmak üzere M nin her dik toplananı M nin bir komplement alt modülüdür. Gerçekten, $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda $\exists N \leq M$ için $M = K \oplus N$ dir. Şimdi $N \cap L = 0$ ve $K \leq L$ olacak şekilde bir $L \leq M$ alalım. $L = L \cap M = L \cap (K \oplus N) = K \oplus (N \cap L) = K$ dir. Yani K, N nin bir komplementidir.

Fakat bu sonucun tersi genel olarak doğru olmayabilir. Yani bir modülün komplement alt modülü bir dik toplanan olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 1.10.10. F bir cisim ve V, F üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V = v_1 F \oplus v_2 F$ alalım. Bu durumda

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} \mid f \in F, v \in V \right\}$$

bilinen matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılmaz bir halkadır.

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_1 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid f \in F, v_1 \in V \right\} \leq R_R$$

alalım.

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_2 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid f \in F, v_2 \in V \right\} \leq R_R$$

olmak üzere I, J nin R_R deki bir komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Fakat $I \not\leq_d R_R$ dir. Çünkü R_R nin, 0 ve kendisinden başka dik toplananı yoktur.

Tanım 1.10.11. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. K nın öz essential genişlemesi yoksa (yani $K \leq_e N \leq M$ ise $K = N$) K ya M de **kapalı (closed) alt modül** denir.

Önerme 1.10.12. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K \leq_c M$ olacak şekilde bir $K \leq M$ alt modülü vardır.

Kanıt. N' , N nin M deki bir komplementi olsun. Bu durumda $N' \cap N = 0$ dir. Önerme 1.10.3 ten, $N \leq K$ olacak şekilde N' nün bir K komplementi vardır. Şimdi $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \leq L + N'$ ve N' , N nin bir komplementi olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ dir. Böylece $n = l + n'$ olacak şekilde $\exists 0 \neq n \in N, l \in L, n' \in N'$ vardır. Buradan $n' = n - l \in N' \cap K = 0$ olduğundan $0 \neq n = l \in N \cap L$ dir. Yani $N \cap L \neq 0$ dir. Sonuç olarak, $N \leq_e L \leq_c M$ bulunur. $\square$

Tanım 1.10.13. M bir R -modül ve $N \leq K \leq M$ olsun. Eğer $N \leq_e K \leq_c M$ ise, K ya N nin M deki **kapanışı (closure)** denir.

Önerme 1.10.14. M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. $K \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e L \leq M$ ise $K = L$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. O halde K, K' nün M deki bir komplementi olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. $0 = K \cap K' \leq_e L \cap K'$ olduğundan $L \cap K' = 0$ dir. Fakat K, K' ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K = L$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $K \leq M$ olduğundan Önerme 1.10.12 den, $K \leq_e L \leq_c M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ vardır. Hipotezden, $K = L$ dir. Yani $K \leq_c M$ dir. $\square$

Önerme 1.10.15. M bir R -modül olsun. Eğer $K \leq_c N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.

Kanıt. $K \leq_c N \leq_c M$ olduğundan K, K' nün N deki bir komplementi ve N, N' nün M deki bir komplementi olacak şekilde $\exists K' \leq N, N' \leq M$ vardır. $K' + N' \leq M$ ve $K \cap (K' + N') = 0$ dir. Gerçekten, $x \in K \cap (K' + N')$ olsun. Bu durumda $x = k' + n'$ olacak şekilde $\exists k' \in K', n' \in N'$ vardır. Buradan $x - k' = n' \in N \cap N' = 0$ dir. O

halde $x = k' \in K \cap K' = 0$ dir. Yani $x = 0$ dir. Şimdi $K \leq_e L \leq M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ alalım. Bu durumda $0 = K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$ olduğundan $L \cap (K' + N') = 0$ dir. Böylece

$$[N \cap (L + N')] \cap K' = (N \cap K') \cap (L + N') = K' \cap (L + N') = 0$$

bulunur. $K \leq N \cap (L + N')$ ve K, K' nün N deki bir komplementi olduğundan $K = N \cap (L + N')$ olmalıdır. $0 = [N \cap (L + N')] \cap N' \leq_e L \cap N'$ olduğundan $L \cap N' = 0$ dir. O halde $(N + L) \cap N' = L \cap N' = 0$ dir. $N \leq N + L$ ve N, N' nün M deki komplementi olduğundan $N = N + L$ olmalıdır. Yani $L \leq N$ dir. $L = L \cap (L + N') \leq N \cap (L + N') = K$ olduğundan $K = L$ dir. Böylece Önerme 1.10.14 ten $K \leq_e M$ bulunur. $\square$

1.11. Yarı-Basit (Semisimple) Modüller ve Socle

Tanım 1.11.1. M bir R -modül olsun. M nin her alt modülü bir dik toplanan ise M modülüne **yarı-basit (semisimple) modül** denir.

Eğer M bir basit modül ise M nin alt modülleri 0 ve kendisidir. $M = 0 \oplus M$ olduğundan M yarı-basit modül olur. Böylece basit modüller aynı zamanda yarı-basit modüllerdir. Diğer yandan, bu tanıma göre 0 modülü yarı-basittir fakat basit modül tanım gereği 0 modülü basit değildir.

Tanım 1.11.2. R bir halka olsun. Eğer R_R (${}_R R$) yarı-basit ise R halkasına **sağ (sol) yarı-basit halka** denir.

Yardımcı Teorem 1.11.3. M_R bir yarı-basit modül olsun. Bu durumda M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül kapsar.

Kanıt. $0 \neq U \leq M$ ve U sonlu üretilmiş olsun. Sonuç 1.2.24 ten, bir $C \leq U$ maksimal alt modülü vardır. Kabulden, $M = C \oplus D$ olacak şekilde bir $D \leq M$ vardır. Böylece modüler kuralından $U = U \cap M = U \cap (C \oplus D) = C \oplus (U \cap D)$ bulunur. Buradan $U/C \cong U \cap D$ dir. C, U da maksimal olduğundan U/C basittir. Dolayısıyla $U \cap D$ de basittir. O halde $U \cap D, U$ nun bir basit alt modülüdür. $\square$

Yardımcı Teorem 1.11.4. M bir R -modül olsun. $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin basit alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve $U \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(a) $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt kümesi vardır.

(b) $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$ olacak şekilde bir $K \subseteq I$ alt kümesi vardır.

Kanıt. (a) $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve $U \leq M$ olsun.

$$\Gamma := \left\{ L \mid L \subseteq I \text{ ve } U + \left(\sum_{i \in L} M_i \right) = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in L} M_i \right) \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $\bigoplus_{i \in \emptyset} M_i = 0$ olduğundan $\emptyset \in \Gamma$ dir. Yani $\Gamma \neq \emptyset$ dir. Γ , “ $\subseteq$ ” bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. Λ, Γ da bir zincir olsun. $L' := \bigcup_{L \in \Lambda} L$ olsun. Şimdi $L' \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. E sonlu olmak üzere $E \subseteq L'$ alalım. O halde Λ tam sıralı olduğundan $\exists L \in \Lambda$ için $E \subseteq L$ dir. Şimdi $u \in U$ ve $m_i \in M_i$ olmak üzere $0 = u + \sum_{i \in E} m_i$ olsun. $E \subseteq L$ olduğundan her $i \in E$ için $u = m_i = 0$ dir. Buradan

$$U + \left(\sum_{i \in L'} M_i \right) = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in L'} M_i \right)$$

elde edilir. Yani $L' \in \Gamma$ dir. L', Λ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece *Zorn Lemma* ile Γ nın bir maksimal elemanı vardır ve buna J diyelim.

$$N := U + \left(\sum_{i \in J} M_i \right) = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$$

olsun. Şimdi herhangi bir $i_0 \in I$ için $N + M_{i_0}$ alt modülünü göz önüne alalım. $J \subsetneq J \cup \{i_0\}$ ve J, Γ nın maksimal elemanı olduğundan $N + M_{i_0} \neq N \oplus M_{i_0}$ olmalıdır. Dolayısıyla $N \cap M_{i_0} \neq 0$ dir. $N \cap M_{i_0} \leq M_{i_0}$ ve M_{i_0} basit modül olduğundan $N \cap M_{i_0} = M_{i_0}$ olur. Buradan $M_{i_0} \leq N$ dir. Yani N, M nin tüm basit alt modüllerini kapsar. Böylece $M = \sum_{i \in I} M_i \leq N \leq M$ bulunur. Yani $M = N$ dir.

(b) (a) seçeneğinden dolayı $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt kümesi vardır. Şimdi $U \leq M$ alt modülü yerine $\bigoplus_{i \in J} M_i \leq M$ alt modülüne (a) uygulanırsa $M = \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in K} M_i \right)$ olacak şekilde bir $K \subseteq I$ vardır. O halde 1. İzomorfizma Teoremi'nden,

$$U \cong M / \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right) \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$$

elde edilir. □

Teorem 1.11.5. *M bir R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

- (1) *M nin her alt modülü, basit alt modüllerinin bir toplamıdır.*
- (2) *M, basit alt modüllerinin bir toplamıdır.*
- (3) *M, basit alt modüllerinin bir dik toplamıdır.*
- (4) *M bir yarı-basit modüldür.*

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her $\lambda \in \Lambda$ için $M_\lambda \leq M$ basit alt modüller için $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. Yardımcı Teorem 1.11.4 (a) da $U = 0$ alınırsa $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$ olacak şekilde bir $\Lambda' \subseteq \Lambda$ vardır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Hipotezden, $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olacak şekilde M_λ basit alt modülleri vardır. Varsayalım ki, $U \leq M$ olsun. $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olduğundan Yardımcı Teorem 1.11.4 (a) dan, $M = U \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda \right)$ olacak şekilde bir $\Lambda' \subseteq \Lambda$ vardır. Böylece $U \leq_d M$ dir.

(4) $\Rightarrow$ (1) Her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar birer basit alt modül ve $M_\lambda \leq U \leq M$ olmak üzere $U_0 := \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. Bu durumda U_0, M nin bir alt modülüdür. Hipotezden, $U_0 \leq_d M$ dir. Böylece $M = U_0 \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ vardır. $U = M \cap U = (U_0 \oplus N) \cap U = U_0 \oplus (N \cap U)$ bulunur. Eğer $N \cap U = 0$ ise (1) sağlanır. Şimdi $N \cap U \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $0 \neq N \cap U \leq M$ olduğundan Yardımcı Teorem 1.11.3 ten, $B \leq N \cap U$ olacak şekilde M nin bir B basit alt modülü vardır. O halde $B \leq U_0$ dir. Diğer yandan, $B \leq N \cap U$ olduğundan $B \leq U_0 \cap (N \cap U) = 0$, bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $N \cap U = 0$ olup $U = U_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ elde edilir. Yani M nin her alt modülü, basit alt modüllerinin bir toplamıdır. □

Tanım 1.11.6. *M bir R-modül olsun. M nin bütün basit (minimal) alt modüllerinin toplamına **M nin socle'ı** denir ve $\text{Soc}(M)$ ile gösterilir. Yani*

$$\text{Soc}(M) = \sum \{ N \mid N \leq M \text{ basit alt modül} \}$$

şeklindedir. Eğer M nin basit alt modülü yoksa $\text{Soc}(M) = 0$ dır. $\text{Soc}(M)$ nin tanım gereği yarı-basit olduğu söylenebilir. K, M nin bir yarı-basit alt modülü ve $i: K \longrightarrow M$ içermeye dönüşümü olsun. O halde $K = i(K) \leq \text{Soc}(M)$ dir. Yani $\text{Soc}(M)$, M nin en büyük yarı-basit alt modülüdür.

Örnek 1.11.7. (i) $\text{Soc}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

(ii) F bir cisim olmak üzere $\text{Soc}(F_F) = 0$ dır.

(iii) $\text{Soc}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ ve $\text{Soc}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = 0$ dır. Çünkü $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modüllerinin minimal alt modülleri yoktur.

Sonuç 1.11.8. M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) Her $N \leq M$ için $\text{Soc}(N) = N$ dir.
- (2) $M = \text{Soc}(M)$ dir.
- (3) M , basit alt modüllerinin bir dik toplamıdır.
- (4) M bir yarı-basit modüldür.

Örnek 1.11.9. (i) $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ yarı-basit modül değildir.

(ii) p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ basit modüldür. $\text{Soc}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bir yarı-basit modüldür.

(iii) $\text{Soc}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak yarı-basit modüldür.

(iv) $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak bir yarı-basit modüldür. Gerçekten, $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{0} \rangle \oplus \mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle \oplus \langle \bar{3} \rangle$ dir. Yani $\mathbb{Z}_6$ nın bütün alt modülleri $\mathbb{Z}_6$ nın bir dik toplananıdır.

Sonuç 1.11.10. (i) Bir yarı-basit modülün her alt modülü de yarı-basittir.

(ii) Bir yarı-basit modülün her bölüm modülü de yarı-basittir.

(iii) Bir yarı-basit modülün homomorfik görüntüsü de yarı-basittir.

(iv) Yarı-basit modüllerin toplamları da yarı-basittir.

Kanıt. (i) M_R bir yarı-basit modül ve $N \leq M$ olsun. $K \leq N$ alalım. Buradan $K \leq N \leq M$ dir. Kabulden $K \leq_d M$ dir. Yani $M = K \oplus L$ olacak şekilde bir $L \leq M$ vardır. Modüler kuralından $N = N \cap M = N \cap (K \oplus L) = K \oplus (N \cap L)$ bulunur. Yani $K \leq_d N$ dir. Sonuç olarak, N bir yarı-basit modüldür.

(ii) M_R bir yarı-basit modül ve $N \leq M$ olsun. Kabulden $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. 1. İzomorfizma Teoremi'nden $M/N \cong K$ bulunur. (i) den K yarı-basittir. Dolayısıyla K ya izomorf olan M/N de yarı-basittir.

(iii) A_R bir yarı-basit modül ve $\alpha: A \rightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun. $\text{Ker}(\alpha) \leq A$ ve A yarı-basit modül olduğundan $A = \text{Ker}(\alpha) \oplus C$ olacak şekilde bir $C \leq A$ vardır. Böylece 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $\alpha(A) \cong A/\text{Ker}(\alpha) \cong C$ dir. (i) den C yarı-basittir. Dolayısıyla $\alpha(A)$ da yarı-basittir.

(iv) A_R , yarı-basit modüllerin toplamı olsun. Teorem 1.11.5 den her yarı-basit modül basit modüllerin toplamı olduğundan A basit modüllerin toplamıdır. O halde yine Teorem 1.11.5 den A bir yarı-basit modüldür. $\square$

Önerme 1.11.11. $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(N)$ dir.

Kanıt. Her $i \in I$ için $M_i \leq M$ basit alt modüller için $\text{Soc}(M) = \sum_{i \in I} M_i$ şeklinde yazılabilir. Şimdi $f' := f|_{M_i}: M_i \rightarrow N$ olsun. $\text{Ker}(f') \leq M_i$ ve M_i basit olduğundan $\text{Ker}(f') = 0$ ya da $\text{Ker}(f') = M_i$ bulunur. Buradan $M_i/\text{Ker}(f') \cong f'(M_i)$ bulunur. O halde $f'(M_i)$ basit ya da $f'(M_i) = 0$ olur. Sonuç olarak, $f(\text{Soc}(M)) = f(\sum_{i \in I} M_i) = \sum_{i \in I} f(M_i)$ olduğundan $f(\text{Soc}(M))$, N nin bir yarı-basit alt modülüdür. Ayrıca $\text{Soc}(N)$, N nin en büyük yarı-basit alt modülü olduğundan $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(N)$ bulunur. $\square$

Sonuç 1.11.12. M bir R -modül olsun. Eğer $U \leq M$ ise $\text{Soc}(U) \leq \text{Soc}(M)$ dir.

Kanıt. $i: U \rightarrow M$ bir içermeye dönüşümü olsun. Bu durumda Önerme 1.11.11 den, $\text{Soc}(U) = i(\text{Soc}(U)) \leq \text{Soc}(M)$ bulunur. $\square$

Sonuç 1.11.13. $f: M \rightarrow N$ bir R -homomorfizma olsun. Eğer $\text{Im}(f) \leq_e N$ ise $f(\text{Soc}(M)) = \text{Soc}(N)$ dir.

Kanıt. Öncelikle Önerme 1.11.11 den, $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(N)$ dir. Şimdi $U \leq N$ bir basit alt modül olsun. $\text{Im}(f) \leq_e N$ olduğundan $U \leq \text{Im}(f)$ dir. O halde $f^{-1}(U) \leq \text{Soc}(M)$ dir. Bu durumda $U = f(f^{-1}(U)) \leq f(\text{Soc}(M))$ olduğundan $\text{Soc}(N) \leq f(\text{Soc}(M))$ dir. Sonuç olarak, $f(\text{Soc}(M)) = \text{Soc}(N)$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.11.14. M bir R -modül olmak üzere $M \text{ Soc}(R_R) \leq \text{Soc}(M)$ dir.

Kanıt. Her $r \in R$ için $f_m(r) = mr$ ile tanımlı $f_m: R \rightarrow M$ dönüşümü R -modül homomorfizmasıdır. Bu durumda $f_m(\text{Soc}(R_R)) = m \text{Soc}(R_R)$ dir. Önerme 1.11.11 den, $m \text{Soc}(R_R) = f_m(\text{Soc}(R_R)) \leq \text{Soc}(M)$ bulunur. Her $m \in M$ için $m \text{Soc}(R_R) \leq \text{Soc}(M)$ olduğundan $M \text{Soc}(R_R) \leq \text{Soc}(M)$ elde edilir. $\square$

Uyarı 1.11.15. Önerme 1.11.14 te $M_R = R_R$ alınırsa $\text{Soc}(R_R)$, R nin bir ideali olur. Benzer şekilde, $\text{Soc}({}_R R)$ de R nin bir idealidir. Fakat $\text{Soc}(R_R) \neq \text{Soc}({}_R R)$ dir.

Örnek 1.11.16. F bir cisim olmak üzere ve $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\text{Soc}(R_R) = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \text{Soc}({}_R R) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\text{Soc}(R_R) \neq \text{Soc}({}_R R)$ elde edilir.

Teorem 1.11.17. M bir R -modül olsun. Bu durumda

$$\text{Soc}(M) = \bigcap \{ N \mid N \leq_e M \}$$

dir.

Kanıt. $S \leq M$ ve S basit modül olsun. $N \leq_e M$ alalım. Bu durumda $0 \neq N \cap S \leq S$ ve S basit modül olduğundan $N \cap S = S$ olmalıdır. Yani $S \leq N$ dir. Böylece her $N \leq_e M$ için $S \leq N$ olduğundan $\text{Soc}(M) \leq \bigcap \{ N \mid N \leq_e M \}$ bulunur. Diğer yandan,

$$X := \bigcap \{ N \mid N \leq_e M \}$$

olsun. Şimdi $X \leq \text{Soc}(M)$ olduğunu gösterelim. $Y \leq X$ alalım. O halde Y nin bir Z komplementi vardır öyle ki $Y \cap Z = 0$ ve $Y \oplus Z \leq_e M$ dir. Bu durumda $X \leq Y \oplus Z$ dir. Böylece her $x \in X$ için $x = y + z$ olacak şekilde $\exists y \in Y, z \in Z$ vardır. Buradan $x - y = z \in X \cap Z$ olduğundan $x \in Y + (X \cap Z)$ dir. Böylece $X \leq Y + (X \cap Z) \leq X$ olduğundan $X = Y + (X \cap Z)$ dir. Ayrıca $Y \cap (X \cap Z) \leq Y \cap Z = 0$ olduğundan $Y \cap (X \cap Z) = 0$ bulunur. O halde $X = Y \oplus (X \cap Z)$ dir. Her $Y \leq X$ için $Y \leq_d X$ olduğundan X yarı-basit modüldür. Bu durumda $X = \text{Soc}(X) \leq \text{Soc}(M)$ dir. Sonuç olarak, $\text{Soc}(M) = \bigcap \{ N \mid N \leq_e M \}$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.11.18. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda

$$\text{Soc}(N) = N \cap \text{Soc}(M)$$

dir. Özellikle, $\text{Soc}(\text{Soc}(M)) = \text{Soc}(M)$ dir.

Kanıt. $N \leq M$ olsun. $\text{Soc}(N) \leq N$ ve $\text{Soc}(N) \leq \text{Soc}(M)$ olduğundan $\text{Soc}(N) \leq N \cap \text{Soc}(M)$ bulunur. Diğer yandan, $K \leq M$ bir basit alt modül ve $K \leq N$ olsun. Bu durumda $K = \text{Soc}(K)$ olduğundan $K \leq \text{Soc}(N)$ dir. Böylece $N \cap \text{Soc}(M) \leq \text{Soc}(N)$ bulunur. Sonuç olarak, $\text{Soc}(N) = N \cap \text{Soc}(M)$ elde edilir. Özel olarak, $N \leq M$ alt modülü yerine $\text{Soc}(M) \leq M$ alt modülü alınırsa

$$\text{Soc}(\text{Soc}(M)) = \text{Soc}(M) \cap \text{Soc}(M) = \text{Soc}(M)$$

elde edilir. □

Önerme 1.11.19. M bir R -modül olsun. Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise

$$\text{Soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i)$$

dir.

Kanıt. Her $i \in I$ için $\text{Soc}(M_i)$ yarı-basit modül olduğundan $\text{Soc}(M_i)$, M_i nin basit alt modüllerinin bir direkt toplamıdır. Bu durumda $\bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i)$ de bir yarı-basit modül olur. Her $i \in I$ için $\text{Soc}(M_i) \leq M_i$ olduğundan $\bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i) \leq \bigoplus_{i \in I} M_i$ dir. Ayrıca $\text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nin en büyük yarı-basit alt modülü olduğundan $\bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i) \leq \text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ bulunur.

Diğer yandan, $S \leq \bigoplus_{i \in I} M_i$ bir basit alt modül olsun. Teorem 1.2.29 dan her $0 \neq x \in S$ için $S = xR$ yazılabilir. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$ olacak şekilde $\exists m_{i_j} \in M_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = 1, 2, \dots, n$ vardır. x in sıfırdan farklı bileşeni $m_{i_j} \in M_{i_j}$ olsun. Şimdi $f_j(xr) = m_{i_j}r$ ile tanımlı $f_j: S \rightarrow M_{i_j}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $xr_1, xr_2 \in S$ için $xr_1 = xr_2$ olsun. Bu durumda $m_{i_j}r_1 = m_{i_j}r_2$ olduğundan $f_j(xr_1) = f_j(xr_2)$ dir. O halde f_j iyi tanımlıdır. Her

$xr_1, xr_2 \in S$ ve $a \in R$ için

$$\begin{aligned} f_j(xr_1 + xr_2) &= m_{i_j}(r_1 + r_2) = m_{i_j}r_1 + m_{i_j}r_2 = f_j(xr_1) + f_j(xr_2) \\ f_j((xr_1)a) &= f_j(x(r_1a)) = m_{i_j}(r_1a) = (m_{i_j}r_1)a = f_j(xr_1)a \end{aligned}$$

olduğundan f_j bir homomorfizmadır. Her $m_{i_j}r \in M_{i_j}$ için $f_j(0, 0, \dots, m_{i_j}r, 0, \dots) = m_{i_j}r$ olacak şekilde $\exists (0, 0, \dots, m_{i_j}r, 0, \dots) \in S$ vardır. O halde f_j örtendir. Yani $f_j(S) = M_{i_j}$ dir. Bir basit modülün her homomorfik görüntüsü de basit olduğundan M_{i_j} de basittir. Bu durumda $M_{i_j} \leq \text{Soc}(M_{i_j})$ dir. Böylece

$$S \leq \bigoplus_j M_{i_j} \leq \bigoplus_j \text{Soc}(M_{i_j}) \leq \bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i)$$

olduğundan $\text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i) \leq \bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i)$ bulunur. Sonuç olarak,

$$\text{Soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Soc}(M_i)$$

elde edilir. □

1.12. Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 1.12.1. *A bir R-modül olsun. Eğer A'nın alt modüllerinin boştan farklı her ailesi bir maksimal (minimal) elemana sahip ise, A modülüne **maksimal (minimal) şartını sağlıyor** denir.*

Tanım 1.12.2. *A bir R-modül olsun. A'nın alt modüllerinin*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

*şeklindeki her artan zinciri için $A_{n+i} = A_n$ ($\forall i \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa, A ya **artan zincir koşulunu (ACC) sağlıyor** denir.*

Tanım 1.12.3. *A bir R-modül olsun. A'nın alt modüllerinin*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

şeklindeki her azalan zinciri için $A_{n+i} = A_n$ ($\forall i \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$

varsa, A ya **azalan zincir koşulunu (DCC) sağlıyor** denir.

Önerme 1.12.4. A bir R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A maksimal (minimal) şartını sağlar.

(ii) A artan (azalan) zincir koşulunu sağlar.

Tanım 1.12.5. A bir R -modül olsun. Eğer A maksimal şartını sağlarsa ya da denk olarak artan zincir koşulunu (ACC) sağlarsa, A ya **Noetherian modül** denir. Eğer R_R (${}_R R$) Noetherian ise R halkasına **sağ (sol) Noetherian halka** denir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü Noetheriandır.

Teorem 1.12.6. A bir R -modül olsun. A nın Noetherian olması için gerek ve yeter koşul A nın her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) A , Noetherian olsun. $K \leq A$ ve Ω , A nın K da kapsanan tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin kümesi olsun. Yani

$$\Omega := \{ X \mid X \leq A, X \subseteq K, \text{ ve } X \text{ sonlu üretilmiş} \}$$

olsun. $0 \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. A Noetherian olduğundan Ω nın bir K' maksimal elemanı vardır ve $K' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ dir. İddiamız $K' = K$ dir. Tanımdan $K' \subseteq K$ dir. $K' \neq K$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_{n+1} \notin K'$ olacak şekilde bir $a_{n+1} \in K$ vardır. $K'' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle$ olsun. O halde $K'' \subseteq K$ olup $K'' \in \Omega$ dir. K'' , K nın K' nü kapsayan bir sonlu üretilmiş alt modülüdür. Bu ise K' nün Ω da maksimal oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $K' = K$ olmalıdır. Böylece K bir sonlu üretilmiş alt modüldür.

($\Leftarrow$) A nın her alt modülü sonlu üretilmiş olsun. A nın alt modüllerinin

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

şeklindeki sonsuz artan zincirini göz önüne alalım. $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olsun. Böylece U , A nın bir alt modülüdür. Hipotezden, U bir sonlu üretilmiş modüldür. Bu durumda $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_t \in U$ elemanları vardır. O halde $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $a_1, a_2, \dots, a_t \in A_m$ dir.

Buradan $U = A_m$ olmalıdır. Böylece her $n \geq m$ için $A_n = A_m$ dir. Yani A bir Noetherian modüldür. $\square$

Teorem 1.12.7. *A bir R -modül ve $B \leq A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *A bir Noetherian modüldür.*

(ii) *B ve A/B Noetherian modüldür.*

Teorem 1.12.8 (Hilbert Taban Teoremi). *R bir sağ (sol) Noetherian halka ise $R[x]$ polinomlar halkası da sağ (sol) Noetheriandır.*

Tanım 1.12.9. *A bir R -modül olsun. Eğer A minimal şartını sağlarsa ya da denk olarak azalan zincir koşulunu (DCC) sağlarsa, A ya **Artinian modül** denir. Eğer R_R (${}_R R$) Artinian ise R halkasına **sağ (sol) Artinian halka** denir. Örneğin;*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, p \text{ asal} \right\} \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

prüfer p-grubu, $\mathbb{Z}$ -modül olarak Artiniandır.

1.13. Singular ve Nonsingular Modüller

Tanım 1.13.1. *M bir R -modül olsun. Eğer $m \in M$ için $r(m) \leq_e R_R$ ise m ye **singular (tekil) eleman** denir. M nin tüm singular elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir. Yani*

$$Z(M) = \{ m \in M \mid r(m) \leq_e R_R \}$$

şeklindedir. Denk bir ifadeyle,

$$Z(M) = \{ m \in M \mid \text{bir } I \leq_e R_R \text{ için } mI = 0 \}$$

şeklinde de tanımlanır.

Önerme 1.13.2. *M bir R -modül olsun.*

(1) *$Z(M) \leq M$ dir.*

(2) *$Z(M) \text{Soc}(R_R) = 0$ dir.*

(3) $f: M \longrightarrow M'$ bir R -homomorfizma ise $f(Z(M)) \subseteq Z(M')$ dür.

(4) $N \leq M$ için $Z(N) = N \cap Z(M)$ dir.

(5) $Z(M)$, M nin bir fully invariant alt modülüdür.

Kanıt. (1) $m_1, m_2 \in Z(M)$ olsun. Bu durumda $r(m_1) \leq_e R_R$ ve $r(m_2) \leq_e R_R$ dir. O halde $r(m_1) \cap r(m_2) \subseteq r(m_1 + m_2)$ ve $r(m_1) \cap r(m_2) \leq_e R_R$ olduğundan $r(m_1 + m_2) \leq_e R_R$ bulunur. Böylece $m_1 + m_2 \in Z(M)$ bulunur. Şimdi $m \in Z(M)$ ve $x \in R$ olsun. Bu durumda $r(m) \leq_e R_R$ dir. Önerme 1.8.10 dan, $x^{-1}r(m) \leq_e R_R$ dir. O halde $0 \neq r \in R$ için $0 \neq rs \in x^{-1}r(m)$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Böylece $xrs \in r(m)$ olup $m(xrs) = (mx)(rs) = 0$ bulunur. Yani $0 \neq rs \in r(mx)$ olup $r(mx) \leq_e R_R$ dir. Dolayısıyla $mx \in Z(M)$ bulunur. O halde $Z(M) \leq M$ dir.

(2) $m \in Z(M)$ için $r(m) \leq_e R_R$ dir. $\text{Soc}(R_R) = \bigcap \{ K \mid K \leq_e R_R \}$ olduğundan $\text{Soc}(R_R) \subseteq r(m)$ dir. O halde $m\text{Soc}(R_R) = 0$ dır. Dolayısıyla $Z(M)\text{Soc}(R_R) = 0$ bulunur.

(3) $m \in Z(M)$ olsun. O halde $r(m) \subseteq r(f(m))$ ve $r(m) \leq_e R_R$ olduğundan $r(f(m)) \leq_e R_R$ olup $f(m) \in Z(M')$ bulunur. Dolayısıyla $f(Z(M)) \subseteq Z(M')$ dür.

(4) Tanımdan $Z(N) = N \cap Z(M)$ olduğu açıktır.

(5) $f: M \longrightarrow M$ herhangi bir R -homomorfizma ve $m \in Z(M)$ olsun. Bu durumda $mK = 0$ olacak şekilde bir $K \leq_e R_R$ vardır. Böylece $f(mK) = f(m)K = f(0) = 0$ dır. Buradan $f(m) \in Z(M)$ olup $f(Z(M)) \subseteq Z(M)$ elde edilir. $\square$

Tanım 1.13.3. M bir R -modül olsun. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye **singular (tekil) modül** denir. Eğer $Z(M) = 0$ ise M ye **nonsingular (tekil olmayan) modül** denir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir nonsingular modüldür. Çünkü $0 \in \mathbb{Z}$ için $r(0) = \mathbb{Z}$ ve her $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ için $r(k) = 0$ dır. Sonuç olarak, $Z(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ olup $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir nonsingular modüldür.

Tanım 1.13.4. M bir R -modül olsun. $Z\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = \frac{Z_2(M)}{Z(M)}$ şeklinde tanımlanan M nin

$$Z_2(M) = \{ m \in M \mid \text{bir } I \leq_e R_R \text{ için } mI \subseteq Z(M) \}$$

alt modülüne **ikinci singular alt modül** ya da **Goldie torsion alt modül** denir. Ayrıca $Z(M) \leq Z_2(M)$ olduğu açıktır.

Önerme 1.13.5. M bir R -modül olsun.

- (1) $Z(M) \leq_e Z_2(M)$ dir.
- (2) $Z_2(M) \leq_c M$ dir.
- (3) $Z(M/Z_2(M)) = 0$ dır (i.e., $M/Z_2(M)$ bir nonsingular modüldür).
- (4) $N \leq M$ için $Z_2(N) = N \cap Z_2(M)$ dir.
- (5) $Z_2(M)$, M nin bir fully invariant alt modülüdür.

Kanıt. (1) $0 \neq a \in Z_2(M)$ olsun. Bu durumda $aI \subseteq Z(M)$ olacak şekilde bir $I \leq_e R_R$ vardır. Eğer $aI = 0$ ise $a \in Z(M)$ dir. Eğer $aI \neq 0$ ise $aI \cap Z(M) \neq 0$ dır.

(2) $Z_2(M) \leq_e A \leq M$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $0 \neq a \in A$ için R halkasının $K = \{r \in R \mid ar \in Z(M)\}$ sağ idealini göz önüne alalım. $K \neq 0$ olduğu açıktır. İddiamız $K \leq_e R_R$ dir. $0 \neq L \leq R_R$ için $aL \subseteq A$ dır. Eğer $aL = 0$ ise $L \subseteq K$ dır. Eğer $aL \neq 0$ ise $aL \cap Z(M) \neq 0$ dır. O halde $0 \neq as \in aL \cap Z(M)$ olacak şekilde bir $0 \neq s \in L$ vardır. Böylece $0 \neq s \in K$ olduğundan $K \cap L \neq 0$ dır. Dolayısıyla $K \leq_e R_R$ dir. Bu durumda $aK \subseteq Z(M)$ olacak şekilde bir $K \leq_e R_R$ var olduğundan $a \in Z_2(M)$ dir. O halde $Z_2(M) = A$ elde edilir. Yani $Z_2(M)$, M de bir essential genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla $Z_2(M) \leq_c M$ dir.

(3) $m + Z_2(M) \in Z(M/Z_2(M))$ olsun. Bu durumda $(m + Z_2(M))K = 0$ olacak şekilde bir $K \leq_e R_R$ vardır. O halde $mK + Z_2(M) = 0$ olup $mK \subseteq Z_2(M)$ dir. Böylece $mKJ \subseteq Z(M)$ olacak şekilde bir $J \leq_e R_R$ vardır. Buradan $mKJI = 0$ olacak şekilde bir $I \leq_e R_R$ vardır. Şimdi $r \in R$ alalım. $I \leq_e R_R$ olduğundan bir $s \in R$ vardır öyle ki $0 \neq rs \in I$ dır. $J \leq_e R_R$ olduğundan $0 \neq rss' \in J$ olacak şekilde bir $s' \in R$ vardır. $K \leq_e R_R$ olduğundan bir $t \in R$ vardır öyle ki $0 \neq rss't \in K$ dır. $a \in J$ ve $b \in I$ için $0 \neq r(ss'tab) = (rss't)ab \in KJI$ dır. Dolayısıyla $KJI \leq_e R_R$ olup $m \in Z(M) \leq Z_2(M)$ dir. Böylece $m \in Z_2(M)$ olup $m + Z_2(M) = 0 + Z_2(M)$ dir. Sonuç olarak, $Z(M/Z_2(M)) = 0$ elde edilir.

(4) $x \in N \cap Z_2(M)$ olsun. O halde $xI \subseteq Z(M)$ olacak şekilde bir $I \leq_e R_R$ vardır. $x \in N$ olduğundan $xI \subseteq N$ dir. Böylece $xI \subseteq N \cap Z(M) = Z(N)$ dir. $xI \subseteq Z(N)$ olacak şekilde bir $I \leq_e R_R$ var olduğundan $x \in Z_2(N)$ dir. Dolayısıyla $N \cap Z_2(M) \subseteq Z_2(N)$ dir. Diğer yandan, $Z_2(N) \subseteq N \cap Z_2(M)$ dir. Sonuç olarak,

$Z_2(N) = N \cap Z_2(M)$ elde edilir.

(5) $f: M \rightarrow M$ herhangi bir R -homomorfizma ve $m \in Z_2(M)$ olsun. Bu durumda $mK \subseteq Z(M)$ olacak şekilde bir $K \leq_e R_R$ vardır. Böylece $Z(M) \triangleleft M$ olduğundan $f(mK) \subseteq f(Z(M)) \subseteq Z(M)$ dir. Buradan $f(m)K \subseteq Z(M)$ olup $f(m) \in Z_2(M)$ dir. Dolayısıyla $f(Z_2(M)) \subseteq Z_2(M)$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.13.6. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N \leq_e M$ ise M/N bir singular modüldür.

Kanıt. $m + N \in M/N$ olsun. $0 \neq K \leq R_R$ için $0 \neq x \in K$ vardır. O halde $xR \subseteq K$ dir. Eğer $mx = 0$ ise $(m + N)x = mx + N = 0 + N$ olup $x \in r(m + N)$ dir. Bu durumda $xR \cap r(m + N) \neq 0$ dir. Eğer $mx \neq 0$ ise $mxR \neq 0$ dir. $N \leq_e M$ olduğundan $mxR \cap N \neq 0$ dir. O halde $0 \neq mxy \in mxR \cap N$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. $(m + N)xy = mxy + N = 0 + N$ olduğundan $0 \neq xy \in xR \cap r(m + N)$ dir. Böylece $xR \cap r(m + N) \neq 0$ dir. $xR \subseteq K$ olduğundan $K \cap r(m + N) \neq 0$ dir. O halde $r(m + N) \leq_e R_R$ olup $m + N \in Z(M/N)$ bulunur. Yani $M/N \leq Z(M/N)$ dir. Sonuç olarak, $Z(M/N) = M/N$ elde edilir. $\square$

Önerme 1.13.7. [11, Önerme 1.21] M bir nonsingular modül ve $N \leq M$ olsun. M/N nin singular modül olması için gerek ve yeter koşul $N \leq_e M$ olmasıdır.

Önerme 1.13.8. M bir R -modül olsun. Bu durumda

$$Z\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} Z(M_i) \quad \text{ve} \quad Z_2\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} Z_2(M_i)$$

dir.

1.14. UC-Modüller

Tanım 1.14.1. M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M de bir tek kapanışa sahip ise **M ye tek kapanışa sahip modül** ya da kısaca **UC-modül** denir. Örneğin; düzgün modüller, yarı-basit modüller ve nonsingular modüller UC-modüllerdir.

Yardımcı Teorem 1.14.2. M bir R -modül olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) M bir UC-modüldür.

(ii) $K \leq_e K' \leq M$ ve $L \leq_e L' \leq M$ ise $K + L \leq_e K' + L'$ dir.

(iii) $K, L \leq M$ için $K \cap L \leq_e K$ ise $L \leq_e K + L$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $K + L \leq M$ ve M bir UC -modül olduğundan $K + L \leq_e H \leq_c M$ olacak şekilde bir tek $H \leq M$ vardır. $K \leq H$ olduğundan $K \leq_e J \leq_c H$ olacak şekilde bir $J \leq H$ vardır. $J \leq_c H \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.10.15 den, $J \leq_c M$ dir. O halde $K \leq_e J \leq_c M$ dir. M , UC -modül olduğundan K nın M deki tek kapanışı J dir. $K' \leq M$ alt modülünün M deki kapanışı J' olsun. Böylece $K \leq_e K' \leq_e J' \leq_c M$ dir. Buradan Teorem 1.8.4 (i) den, $K \leq_e J' \leq_c M$ bulunur. K nın M deki kapanışı tek olduğundan $J = J'$ olmalıdır. O halde $K' \leq_e J \leq_c H$ olup $K' \leq H$ bulunur. Benzer şekilde, $L' \leq H$ olduğu görülebilir. $K + L \leq K' + L' \leq H$ ve $K + L \leq_e H$ olduğundan Teorem 1.8.4 (i) den, $K + L \leq_e K' + L'$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $K, L \leq M$ için $K \cap L \leq_e K$ ve $L \leq_e L$ olduğundan hipotez gereği $(K \cap L) + L \leq_e K + L$ dir. Böylece $L \leq_e K + L$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K \leq_c M$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır. Kabul edelim ki, $N \leq_e K' \leq_c M$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ olsun. $N \leq_e K$ ve $N \leq_e K'$ olduğundan $N \leq_e K \cap K' \leq K$ dır. $N \leq_e K$ olduğundan $K \cap K' \leq_e K$ dır. Böylece hipotezden, $K' \leq_e K + K'$ bulunur. Fakat $K' \leq_c M$ olduğundan hiçbir öz essential genişlemesi yoktur. O halde $K' = K + K'$ olmalıdır. Yani $K \leq K'$ dır. Diğer yandan, $N \leq_e K \cap K' \leq K'$ ve $N \leq_e K'$ olduğundan $K \cap K' \leq_e K'$ bulunur. O halde hipotezden, $K \leq_e K + K'$ bulunur. O halde $K = K + K'$ olmalıdır. Yani $K' \leq K$ dır. Sonuç olarak, $K = K'$ elde edilir. Dolayısıyla N nin M de bir tek kapanışı olduğundan M bir UC -modüldür. $\square$

1.15. Torsion ve Torsion-Free Modüller

Tanım 1.15.1. R bir halka ve M bir R -modül olsun. Eğer bir $0 \neq r \in R$ için $mr = 0$ şartını sağlayan $m \in M$ elemanına, M nin **torsion elemanı** denir. M nin tüm torsion elemanlarının kümesi $\tau(M)$ ile gösterilir. Yani

$$\tau(M) = \{ m \in M \mid \text{bir } 0 \neq r \in R \text{ için } mr = 0 \}$$

şeklindedir. Eğer $\tau(M) = M$ ise M ye **torsion modül** denir. Eğer $\tau(M) = 0$ ise M ye **torsion-free modül** denir. Ayrıca R bir tamlık bölgesi ise $\tau(M)$, M nin bir alt modülüdür. Bu durumda $\tau(M)$ ye M nin **torsion alt modülü** denir.

Örnek 1.15.2. $\mathbb{Z}$ bir torsion-free modüldür. Gerçekten, $a \in \tau(\mathbb{Z})$ olsun. Bu durumda $ak = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ olmalıdır. Yani $\tau(\mathbb{Z}) = 0$ dır.

Tanım 1.15.3. $(A, +)$ bir abelyen grup ve p bir asal sayı olsun. A grubunun sonlu mertebeli elemanlarının oluşturduğu küme $\tau(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\tau(A) = \{ a \in A \mid \text{bir } 0 \neq n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } na = 0 \}$$

şeklindedir. $\tau(A)$, A nın bir alt grubudur. Bu alt gruba **torsion alt grup** denir.

A grubunun mertebeleri p nin kuvvetleri olan elemanlarının oluşturduğu küme $\tau_p(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\tau_p(A) = \{ a \in A \mid \text{bir } 0 \neq n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } p^n a = 0 \}$$

şeklindedir. $\tau_p(A)$, A nın bir alt grubudur. Bu alt gruba **p-torsion alt grup** denir. Eğer $\tau(A) = A$ ise A ya **torsion grup** denir. Eğer $\tau(A) = 0$ ise A ya **torsion-free grup** denir.

Önerme 1.15.4. $(A, +)$ bir abelyen grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer A bir torsion grup (i.e., $\tau(A) = A$) ise $A = \bigoplus_p \tau_p(A)$ dır.

2. PROJEKTİF, İNJEKTİF VE YARI-İNJEKTİF MODÜLLER

Tanım 2.1. P bir R -modül olsun. Eğer her $\alpha: A \rightarrow B$ epimorfizması ve $\beta: P \rightarrow B$ homomorfizması için $\alpha \circ \gamma = \beta$ olacak şekilde bir $\gamma: P \rightarrow A$ homomorfizması varsa P ye **projektif modül** denir. Diğer bir ifadeyle,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \gamma & \downarrow \beta & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

diyagramı değişmeli (i.e., $\alpha \circ \gamma = \beta$) olacak şekilde bir $\gamma: P \rightarrow A$ homomorfizması varsa P ye projektif modül denir.

Tanım 2.2. E bir R -modül olsun. Eğer her $f: A \rightarrow B$ monomorfizması ve $g: A \rightarrow E$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow E$ homomorfizması varsa E ye **injektif modül** denir. Diğer bir ifadeyle,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & \swarrow h & \\ E & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli (i.e., $h \circ f = g$) olacak şekilde bir $h: B \rightarrow E$ homomorfizması varsa E ye **injektif modül** denir.

Teorem 2.3. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bir R -modüller ailesi olsun. $E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ nın injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ nın injektif olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ bir injektif modül olsun. $f: A \rightarrow B$ bir monomorfizma ve $g: A \rightarrow E_\lambda$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda E bir injektif modül olduğundan $i_\lambda: E_\lambda \rightarrow E$ kanonik injeksiyon olmak üzere $i_\lambda \circ g: A \rightarrow E$ homomorfizması için $i_\lambda \circ g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow E$ homomorfizması vardır.

Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & \swarrow h & \\ E_\lambda & & \\ \uparrow i_\lambda & \nwarrow \pi_\lambda & \\ E & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. O halde $\pi_\lambda: E \longrightarrow E_\lambda$ kanonik projeksiyon olmak üzere $h' := \pi_\lambda \circ h: B \longrightarrow E_\lambda$ homomorfizması ve her $a \in A$ için

$$(h' \circ f)(a) = ((\pi_\lambda \circ h) \circ f)(a) = (\pi_\lambda \circ i_\lambda \circ g)(a) = g(a)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \swarrow h' & \\ E_\lambda & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $h': B \longrightarrow E_\lambda$ homomorfizması vardır. Sonuç olarak, her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ bir injektif modüldür.

($\Leftarrow$) $\forall \lambda \in \Lambda$ için E_λ injektif modül olsun. $\psi: A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $f: A \rightarrow E$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ injektif modül olduğundan $\pi_\lambda: E \longrightarrow E_\lambda$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\pi_\lambda \circ f: A \longrightarrow E_\lambda$ homomorfizması için $g_\lambda \circ \psi = \pi_\lambda \circ f$ olacak şekilde bir $g_\lambda: B \longrightarrow E_\lambda$ homomorfizması vardır. Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ f \downarrow & & \swarrow g_\lambda \\ E & & \\ \pi_\lambda \downarrow & \swarrow i_\lambda & \\ E_\lambda & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. O halde $i_\lambda: E_\lambda \longrightarrow E$ kanonik injeksiyon olmak üzere $g := i_\lambda \circ g_\lambda: B \longrightarrow E$ homomorfizması ve her $a \in A$ için

$$(g \circ \psi)(a) = ((i_\lambda \circ g_\lambda) \circ \psi)(a) = (i_\lambda \circ \pi_\lambda \circ f)(a) = f(a)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ E & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $g: B \longrightarrow E$ homomorfizması vardır. Böylece E bir injektif modüldür. $\square$

Sonuç 2.4. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bir R -modüller ailesi olsun. Bu durumda;

(i) $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ injektif ise, her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ injektiftir.

(ii) Λ sonlu bir indis kümesi olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ injektif ise, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ injektiftir.

Teorem 2.5 (Baer Kriteri). E bir R -modül ve L, R nin bir sağ ideali olsun. E nin injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f: L \rightarrow E$ R -modül homomorfizması için $g|_L = f$ olacak şekilde bir $g: R \rightarrow E$ R -modül homomorfizmasının olmasıdır. (i.e., her $f: L \rightarrow E$ R -modül homomorfizmasının bir $g: R \rightarrow E$ R -modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir.)

Teorem 2.6. R bir Noetherian halka ve $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ injektif R -modüller ailesi olsun. Bu durumda $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ injektiftir.

Kanıt. E nin injektif olduğunu Baer Kriteri'ni kullanarak gösterelim. L, R nin bir sağ ideali ve $f: L \rightarrow E$ bir R -homomorfizma olsun. R bir Noetherian halka olduğundan Teorem 1.12.6 dan, L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $\text{Im}(f)$ de sonlu üretilmiştir. Bu durumda Λ index kümesinin sonlu bir Λ' alt kümesi vardır öyle ki $\text{Im}(f) \subseteq E' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} E_\lambda$ dir. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ injektif R -modüllerin sonlu bir ailesi olduğundan $E' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} E_\lambda$ injektiftir. O halde $i_L: L \rightarrow R$ içermeye dönüşümü olmak üzere bir $\phi': R \rightarrow E'$ R -homomorfizması vardır öyle ki $\phi'|_L = f$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_L} & R \\ f \downarrow & \swarrow \phi' & \\ E' & & \end{array}$$

diagramı değişmelidir. Şimdi $i: E' \rightarrow E$ içermeye dönüşümü olmak üzere $\phi \circ i_L = i \circ f$ olacak şekilde bir $\phi := i \circ \phi': R \rightarrow E$ R -homomorfizması vardır. Yani

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_L} & R \\ f \downarrow & \swarrow \phi' & \\ E' & & \\ i \downarrow & \swarrow \phi & \\ E & & \end{array}$$

diagramı değişmelidir. Böylece $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ bir injektif modüldür. □

Tanım 2.7. G bir grup olsun. Eğer her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $G = Gn$ ise (i.e., $\forall g \in G$ ve $\forall 0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $g = g'n$ olacak şekilde $\exists g' \in G$ varsa) G ye **bölünebilir (divisible) grup** denir.

Örnek 2.8. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bölünebilirdir. Çünkü $\forall q \in \mathbb{Q}$ ve $\forall 0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $q = q'n$ olacak şekilde bir $q' = \frac{q}{n} \in \mathbb{Q}$ bulunabilir.

Teorem 2.9. M bir $\mathbb{Z}$ -modül (=abelyen grup) olsun. $M_{\mathbb{Z}}$ nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $M_{\mathbb{Z}}$ nin bölünebilir olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $M_{\mathbb{Z}}$ injektif olsun. $m \in M$ ve $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ alalım. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) = kn$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir $\mathbb{Z}$ -modül monomorfizmasıdır. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $g(k) = mk$ ile tanımlı $g: \mathbb{Z} \rightarrow M$ fonksiyonu bir $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizmasıdır. $M_{\mathbb{Z}}$ injektif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ M & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $h: \mathbb{Z} \rightarrow M$ $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizması vardır. Bu durumda

$$m = m1 = g(1) = (h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(1n) = h(1)n$$

olduğundan $M_{\mathbb{Z}}$ bölünebilirdir.

($\Leftarrow$) $M_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir olsun. $M_{\mathbb{Z}}$ nin injektif olduğunu Baer Kriteri'ni kullanarak göstereyim. I , $\mathbb{Z}$ nin bir ideali ve $f: I \rightarrow M$ bir $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizması olsun. $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ alalım. $M_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir olduğundan $f(n) = mn$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $g(k) = mk$ ile tanımlı $g: \mathbb{Z} \rightarrow M$ fonksiyonu bir $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizmasıdır. Böylece her $nt \in n\mathbb{Z} = I$ için $g(nt) = m(nt) = (mn)t = f(n)t = f(nt)$ olduğundan $g|_I = f$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ M & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. O halde $M_{\mathbb{Z}}$ injektiftir. □

Örnek 2.10. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir injektif modüldür. Bunu göstermek için Baer Kriteri'ni kullanalım. $L, \mathbb{Z}$ nin bir ideali ve bir $\alpha: L \rightarrow \mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizması olsun. $L, \mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğundan $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $L = n\mathbb{Z}$ alalım. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir olduğundan $\alpha(n) = qn$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. Şimdi her $m \in \mathbb{Z}$ için $\beta(m) = qm$ olmak üzere $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonunu tanımlayalım. β nın bir $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizması olduğu açıktır. Her $nk \in n\mathbb{Z} = L$ için $\beta(nk) = q(nk) = (qn)k = \alpha(n)k = \alpha(nk)$ olduğundan $\beta|_L = \alpha$ dır. Yani

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \\ \alpha \downarrow & \swarrow \beta & \\ \mathbb{Q} & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Örnek 2.11. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir injektif modül değildir. Çünkü $2 = 3n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ elemanı yoktur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir olmadığından injektif değildir.

Yardımcı Teorem 2.12. [1, Lemma 5.5.2] Eğer M bir bölünebilir (=injektif) $\mathbb{Z}$ -modül ise $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ bir injektif R -modüldür.

Teorem 2.13. [1, Teorem 5.5.3] Her modülden bir injektif modüle monomorfizma vardır.

Sonuç 2.14. [1, Sonuç 5.5.5] Her modül bir injektif modülün alt modülüdür.

Teorem 2.15. E bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (i) E bir injektif modüldür.
- (ii) E, E yi kapsayan her R -modülün bir dik toplananıdır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) E bir injektif R -modül ve $E \leq E'_R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & E' \\ 1_E \downarrow & \swarrow \theta & \\ E & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\theta: E' \rightarrow E$ R -modül homomorfizması vardır. Bir $e' \in E'$ alalım. $\theta(e') \in E$ olur. Buradan $\theta(e') = \theta(\theta(e'))$ dür. O halde

$\theta(e' - \theta(e')) = 0$ olup $e' - \theta(e') \in \text{Ker}(\theta)$ dir. Yani $e' \in \text{Ker}(\theta) + E$ dir. Böylece $E' \subseteq \text{Ker}(\theta) + E$ elde edilir. Ayrıca $\text{Ker}(\theta) \leq E'$ ve $E \leq E'$ olduğundan $\text{Ker}(\theta) + E \subseteq E'$ olur. Dolayısıyla $E' = \text{Ker}(\theta) + E$ bulunur. Şimdi bir $x \in \text{Ker}(\theta) \cap E$ alalım. $x \in E$ ve $\theta(x) = x = 0$ olduğundan $\text{Ker}(\theta) \cap E = 0$ dir. O halde $E' = \text{Ker}(\theta) \oplus E$ dir. Yani $E \leq_d E'$ dür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sonuç 2.14 ten, $E \leq N$ olacak şekilde bir N injektif R -modülü vardır. Hipotezden $N = E \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq N$ vardır. Böylece E, N injektif modülünün bir dik toplananı olduğundan Sonuç 2.4 ten, E bir injektif modüldür. $\square$

Teorem 2.16. *Bir $0 \neq E_R$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul E_R nin öz essential genişlemesinin olmamasıdır (i.e., $E \leq_e N$ ise $E = N$ dir).*

Kanıt. ($\Rightarrow$) E bir injektif R -modül ve E' de E nin bir essential genişlemesi olsun. Teorem 2.15 den, $E' = E \oplus F$ olacak şekilde bir $F \leq E'$ vardır. $E \cap F = 0$ ve $E \leq_e E'$ olduğundan $F = 0$ dir. O halde $E' = E$ dir. Dolayısıyla E nin öz essential genişlemesi yoktur.

($\Leftarrow$) E nin öz essential genişlemesi olmasın. F de E yi kapsayan bir injektif modül olsun. E nin F de $E \cap T = 0$ olacak şekilde bir T komplementi vardır. O halde Teorem 1.10.7 den,

$$E \cong \frac{E}{E \cap T} \cong \frac{E \oplus T}{T} \leq_e \frac{F}{T}$$

dir. E nin öz essential genişlemesi olmadığından

$$\frac{E \oplus T}{T} = \frac{F}{T} \quad \text{ya da} \quad E \oplus T = F$$

dir. Böylece E, F injektif modülünün bir dik toplananı olduğundan Sonuç 2.4 ten, E bir injektif modüldür. $\square$

Önerme 2.17. *A bir R -modül, E A yı essential olarak kapsayan bir modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda $i: A \rightarrow N$ içerme dönüşümü olmak üzere $f|_A = i$ olacak şekilde bir $f: E \rightarrow N$ monomorfizması vardır.*

Kanıt. N injektif modül olduğundan bir $f: E \rightarrow N$ homomorfizması vardır öyle

ki $f|_A = i$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & E \\ i \downarrow & \swarrow f & \\ N & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. $A \cap \text{Ker}(f) = 0$ dır. Gerçekten, bir $x \in A \cap \text{Ker}(f)$ alalım. $x \in A$ ve $f(x) = x = 0$ dır. $A \leq_e E$ ve $\text{Ker}(f) \leq E$ olduğundan $\text{Ker}(f) = 0$ dır. Böylece f bir monomorfizmadır. $\square$

Önerme 2.18. *A bir R-modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda E, A nın bir maksimal essential genişlemesi olacak şekilde N nin bir E alt modülü vardır.*

Kanıt.

$$\Omega := \{ X \mid A \leq_e X \leq N \}$$

kümesini tanımlayalım. $A \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. Ω , “ $\subseteq$ ” bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir. Böylece *Zorn Lemma*’dan, Ω nın bir E maksimal elemanı vardır. Şimdi E nin, A nın bir maksimal essential genişlemesi olduğunu gösterelim. $E \leq_e E'$ olsun. O halde Önerme 2.17 den, $i: E \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere bir $\theta: E' \rightarrow N$ monomorfizması vardır öyle ki $\theta|_E = i$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & E' \\ i \downarrow & \swarrow \theta & \\ N & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. $E \leq N \leq E'$ ve $E \leq_e E'$ olduğundan $E \leq_e N$ ve $N \leq_e E'$ bulunur. Diğer yandan, $E = \theta(E) \leq \theta(E') \leq N$ ve $E \leq_e N$ olduğundan $E \leq_e \theta(E')$ ve $\theta(E') \leq_e N$ bulunur. O halde $A \leq_e E \leq_e \theta(E')$ olduğundan $A \leq_e \theta(E') \leq N$ elde edilir. Yani $\theta(E') \in \Omega$ dır. $E \leq \theta(E')$ ve E, Ω nın maksimal elemanı olduğundan $\theta(E') = E$ olmalıdır. Buradan $\theta(E') = \theta(E) = E$ ve θ bir monomorfizma olduğundan $E' = E$ dir. Böylece E, A nın bir maksimal essential genişlemesidir. $\square$

Önerme 2.19. *A bir R-modül ve $A \leq E$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(i) *E, A nın bir essential injektif genişlemesidir.*

(ii) E , A nın bir maksimal essential genişlemesidir.

(iii) E , A nın bir minimal injektif genişlemesidir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $A \leq_e E$ ve E injektif olsun. $E \leq F$ olmak üzere $A \leq_e F$ olduğunu kabul edelim. Yani $A \leq_e E \leq F$ dir. $A \leq_e F$ olduğundan $E \leq_e F$ dir. E injektif olduğundan Teorem 2.16 dan, E nin hiçbir öz essential genişlemesi yoktur. O halde $E = F$ dir. Yani E , A nın bir maksimal essential genişlemesidir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 2.16 dan açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) E' injektif olmak üzere $A \leq E' \leq E$ olsun. $A \leq_e E$ olduğundan $E' \leq_e E$ olur. E' injektif olduğundan Teorem 2.16 dan, $E' = E$ olmalıdır. Dolayısıyla E , A nın bir minimal injektif genişlemesidir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) E , A nın bir minimal injektif genişlemesi olsun. O halde $A \leq E$ ve E injektif olduğundan Önerme 2.18 den E'' , A nın bir maksimal essential genişlemesi olacak şekilde E nin bir E'' alt modülü vardır. Yani $A \leq_e E'' \leq E$ dir. $A \leq_e E'' \leq_e F$ olsaydı $A \leq_e F$ olurdu. Bu ise E'' nün, A nın maksimal essential genişlemesi olmasıyla çelişirdi. Bu yüzden E'' nün öz essential genişlemesi yoktur. Böylece Teorem 2.16 dan, E'' injektif olmalıdır. E minimal injektif olduğundan $E'' = E$ dir. Yani E , A nın bir maksimal essential genişlemesidir. $\square$

Teorem 2.20. A bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki denk koşulları sağlayan bir E R -modülü vardır.

(i) E , A nın bir essential injektif genişlemesidir.

(ii) E , A nın bir maksimal essential genişlemesidir.

(iii) E , A nın bir minimal injektif genişlemesidir.

Ayrıca E_1 ve E_2 , A nın birer essential injektif genişlemesi ise

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & E_1 \\ i \downarrow & \swarrow \theta & \\ E_2 & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\theta: E_1 \longrightarrow E_2$ izomorfizması vardır.

Kanıt. Sonuç 2.14, Önerme 2.18 ve Önerme 2.19 dan verilen denk koşulları sağlayan bir E -modülü vardır. Şimdi E_1 ve E_2 , A nın birer essential injektif genişlemesi olsun. Önerme 2.17 den, $i: A \longrightarrow E_2$ içirme dönüşümü olmak üzere $\theta|_A = i$ olacak şekilde bir $\theta: E_1 \longrightarrow E_2$ monomorfizması vardır. O halde 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $E_1 \cong \theta(E_1)$ dir. E_1 injektif olduğundan $\theta(E_1)$ de injektiftir. $A = \theta(A) \leq \theta(E_1) \leq E_2$ ve $A \leq_e E_2$ olduğundan $\theta(E_1) \leq_e E_2$ dir. $\theta(E_1)$ injektif olduğundan Teorem 2.16 dan, $\theta(E_1) = E_2$ dir. Yani θ örtendir. Böylece θ bir izomorfizmadır. $\square$

Tanım 2.21. A bir R -modül olsun. Teorem 2.20 deki denk koşullardan birini sağlayan E R -modülüne A modülünün **injektif zarfı (injective hull)** denir ve $E(A) = E$ ile gösterilir. Eğer A bir injektif modül ise injektif zarfı kendisidir.

Örnek 2.22. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü için $E(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Gerçekten, $\forall 0 \neq \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $0 \neq (\frac{a}{b})b \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ bulunduğundan $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \leq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. Ayrıca $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir injektif modüldür. Böylece $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün injektif zarfı $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir.

Tanım 2.23. M ve X birer R -modül ve $N \leq M$ olsun. Her $\alpha: N \longrightarrow X$ homomorfizması için $\beta|_N = \alpha$ olacak şekilde bir $\beta: M \longrightarrow X$ homomorfizması varsa (i.e., her $\alpha: N \longrightarrow X$ homomorfizması bir $\beta: M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişlerse) X modülüne **M -injektif modül** denir. Yani

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M \\ \alpha \downarrow & \swarrow \beta & \\ X & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\beta: M \longrightarrow X$ homomorfizması varsa X modülüne M -injektif modül denir.

Uyarı 2.24. X bir R -modül olsun. X bir injektif modül ise her M_R modülü için X , M -injektiftir. X modülü R -injektif ise Baer Kriteri'nden, X bir injektif modüldür. O halde $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir injektif modül olmadığından $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -injektif değildir.

Tanım 2.25. Bir Q modülü Q -injektif ise Q ya **yarı-injektif (quasi-injektif)** modül denir.

Önerme 2.26. Her injektif modül yarı-injektif modüldür.

Kanıt. M bir injektif R -modül olsun. Bu durumda A ve B keyfi R -modüller olmak üzere her $f: A \rightarrow B$ monomorfizması ve $g: A \rightarrow M$ homomorfizması için bir $h: B \rightarrow M$ homomorfizması vardır öyle ki $h \circ f = g$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ M & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Özel olarak, $B = M$ ve $A \leq M$ alınırsa M bir yarı-injektif modül olur. $\square$

Örnek 2.27. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir injektif modül olduğundan yarı-injektif modüldür. Fakat $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ yarı-injektif modül değildir.

Uyarı 2.28. Önerme 2.26 nın tersi doğru değildir. Yani her yarı-injektif modül injektif modül olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 2.29. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak yarı-injektiftir fakat injektif değildir.

Kanıt. $\bar{1} = 4\bar{a}$ olacak şekilde bir $\bar{a} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olmadığından $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bölünebilir değildir. Dolayısıyla injektif değildir. Şimdi $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nin yarı-injektif olduğunu gösterelim. Yani $N \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ için, her $f: N \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizmasının bir $h: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizmasına genişlediğini gösterelim. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nin alt modülleri 0 , $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ve kendisidir. Her $\bar{x} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ için $f_1(\bar{x}) = 2\bar{x}$, $f_2(\bar{x}) = 3\bar{x}$, $1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ ve 0 homomorfizması olmak üzere $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ye toplamda dört tane homomorfizma vardır. Ayrıca f_2 ve $1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ birer monomorfizmadır.

1. Durum: $h = 0$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ i \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

2. Durum: $h = 1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ i \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

3. Durum: Herhangi bir $f: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ homomorfizması için $h = f$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ f \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

4. Durum: $h = 0$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ 0 \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

5. Durum: $h = f_2$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ 1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

6. Durum: $h = f_1$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ f_1 \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

7. Durum: $h = 1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ homomorfizması aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ f_2 \downarrow & \swarrow h & \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & \end{array}$$

Dolayısıyla $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modül olarak yarı-injektiftir. □

Teorem 2.30. M bir R -modül olsun. Bir X R -modülünün M -injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\psi \in \text{Hom}_R(E(M), E(X))$ için $\psi(M) \subseteq X$ olmasıdır.

Kanıt. $E(X)$ injektif olduğundan $\psi \in \text{Hom}_R(M, E(X))$ i göz önüne almak yeter-

lidir.

($\Leftarrow$) $N \leq M$ ve $\varphi: N \rightarrow X$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $E(X)$ injektif olduğundan $\psi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir $\psi: M \rightarrow E(X)$ homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M \\ \varphi \downarrow & & \swarrow \psi \\ X & & \\ i \downarrow & & \\ E(X) & & \end{array}$$

Hipotezden $\psi(M) \subseteq X$ olduğundan $\psi: M \rightarrow X$ dir. Yani $\psi|_N = \varphi$ dir. Dolayısıyla X modülü M -injektiftir.

($\Rightarrow$) $N = \{m \in M \mid \psi(m) \in X\}$ olsun. $N \leq M$ olduğu açıktır. X modülü M -injektif olduğundan $\beta|_N = \psi|_N$ olacak şekilde bir $\beta: M \rightarrow X$ homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M \\ \psi|_N \downarrow & \beta \swarrow & \\ X & & \\ i \downarrow & \searrow \psi & \\ E(X) & & \end{array}$$

$X \cap (\beta - \psi) = 0$ dir. Gerçekten, $x \in X$ ve $m \in M$ için $x = (\beta - \psi)(m)$ olsun. Bu durumda $\psi(m) = \beta(m) - x$ dir. N nin tanımı gereği $m \in N$ dir. O halde $x = \beta(m) - \psi(m) = \psi(m) - \psi(m) = 0$ dir. $(\beta - \psi)(M) \leq E(X)$ ve $X \leq_e E(X)$ olduğundan $(\beta - \psi)(M) = 0$ dir. Dolayısıyla $\beta(M) = \psi(M) \subseteq X$ dir. $\square$

Sonuç 2.31. Bir Q modülünün yarı-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \text{End}_R(E(M))$ için $f(Q) \subseteq Q$ olmasıdır.

Tanım 2.32. $\{M_i\}_{i \in I}$ bir R -modüller ailesi olsun. Eğer her $i \neq j$ ($i, j \in I$) için M_i, M_j -injektif ise M_i lere **göreceli (relatively) injektif modül** denir.

Önerme 2.33. X bir R -modül olsun. X modülünün $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda)$ -injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için X modülü M_λ -injektiftir.

Önerme 2.34. A bir R -modül olsun. $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ nın A -injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Lambda$ için M_α, A -injektiftir.

3. SÜREKLİ, YARI-SÜREKLİ VE CS-MODÜLLER

Bu bölümde sürekli, yarı-sürekli ve CS -modüllere yer vereceğiz. Bu amaçla sürekli, yarı-sürekli ve CS -modüller ile ilgili bazı temel tanımlar ve sonuçlar ele alınacaktır. Bir CS -modülün bir dik toplananının CS -modül olduğu gösterilip CS -modüllerin bir dik toplamının CS -modül olmak zorunda olmadığına ilişkin bir örnek verilecektir. Daha ayrıntılı bilgiler için [3-5] önerilir.

Tanım 3.1. *Bir M R -modülü için aşağıdaki koşulları göz önüne alalım.*

(C_1) *M nin her alt modülü M nin bir dik toplananında essential olarak kapsanır.*

(C_2) *Her $A \leq M$ için A , M nin bir dik toplananına izomorf ise $A \leq_d M$ dir.*

(C_3) *$K, L \leq_d M$ için $K \cap L = 0$ ise $K \oplus L \leq_d M$ dir.*

Yardımcı Teorem 3.2. *$f: M \longrightarrow N$ ve $g: N \longrightarrow M$ birer R -modül homomorfizması olsun. Eğer $g \circ f = 1_M$ ise $N = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$ dir.*

Kanıt. Her $n \in N$ için $n = f(g(n)) + n - f(g(n))$ yazılabilir. Ayrıca

$$g(n - f(g(n))) = g(n) - (g \circ f)(g(n)) = g(n) - g(n) = 0$$

olduğundan $n - f(g(n)) \in \text{Ker}(g)$ dir. $f(g(n)) \in \text{Im}(f)$ ve $n - f(g(n)) \in \text{Ker}(g)$ olduğundan $N = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$ bulunur. Şimdi $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$ alalım. Bu durumda $g(x) = 0$ ve $x = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan $0 = g(x) = g(f(m)) = m$ olup $x = f(m) = f(0) = 0$ dır. Yani $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = 0$ dır. Sonuç olarak, $N = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.3. *Her (yarı)-injektif M modülü (C_1) ve (C_2) koşullarını sağlar.*

Kanıt. $N \leq M$ ve $E_1 = E(N) \leq E(M)$ için $E_1 \leq_d E(M)$ dir. Yani $\exists E_2 \leq M$ için $E(M) = E_1 \oplus E_2$ dir. M , yarı-injektif olduğundan Sonuç 2.31 den, $M = M \cap E(M) = M \cap (E_1 \oplus E_2) = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$ dir. $N \leq_e E_1 = E(N)$ ve $N \leq M$ olduğundan $N = N \cap M \leq_e M \cap E_1 \leq_d M$ dir. Dolayısıyla M modülü (C_1) koşulunu sağlar.

Diğer yandan, $A \leq M$ ve $A \cong B \leq_d M$ olsun. M , yarı-injektif olduğundan M , M -injektiftir. O halde Önerme 2.34 ten, B de M -injektiftir. Dolayısıyla A , M -injektiftir. O halde

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & M \\ 1_A \downarrow & \swarrow f & \\ A & & \end{array}$$

diagramı değişmeli (i.e., $f \circ i = 1_A$) olacak şekilde bir $f: M \rightarrow A$ vardır. O halde Yardımcı Teorem 3.2 den, $M = \text{Im}(i) \oplus \text{Ker}(f) = A \oplus \text{Ker}(f)$ dir. Yani $A \leq_d M$ dir. Böylece M modülü (C_2) koşulunu sağlar. $\square$

Önerme 3.4. M bir R -modül olsun. $D \leq_d M$ olması için gerek ve yeter koşul $D = e(M)$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $D \leq_d M$ olsun. Bu durumda $M = D \oplus D'$ olacak şekilde bir $D' \leq M$ vardır. $f: M \rightarrow D$ bir kanonik projeksiyon olsun. Böylece $D = f(M)$ ve her $m \in M$ için $(f \circ f)(m) = f(f(m)) = f(m)$, i.e., $f^2 = f$ dir.

$(\Leftarrow)$ $e = e^2 \in \text{End}_R(M)$ ve $D = e(M)$ olsun. Şimdi $M = e(M) \oplus (1 - e)(M)$ olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için $m = e(m) + (m - e(m))$ yazılabilir. Yani $M = e(M) + (1 - e)(M)$ dir. Şimdi $x \in e(M) \cap (1 - e)(M)$ alalım. Bu durumda $x = e(m_1) = (1 - e)(m_2)$ olacak şekilde $\exists m_1, m_2 \in M$ vardır. O halde $e(m_1) + e(m_2) = e(m_1 + m_2) = m_2$ dir. Buradan $e(m_1) + e(m_2) = e(m_2)$ olup $x = e(m_1) = 0$ bulunur. Yani $e(M) \cap (1 - e)(M) = 0$ dir. Sonuç olarak, $e(M) = D \leq_d M$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.5. $M = K \oplus L$ ve $\pi: M \rightarrow K$ bir kanonik projeksiyon olsun. Her $Q \leq M$ için $Q \cap L = 0$ ise $Q \oplus L = \pi(Q) \oplus L$ dir.

Kanıt. $x \in Q \oplus L$ olsun. Bu durumda $x = q + l$ ve $q = k + l'$ olacak şekilde $\exists q \in Q, k \in K$ ve $\exists l, l' \in L$ vardır. O halde $\pi(q) = k$ olduğundan $x = q + l = (k + l') + l = \pi(q) + (l' + l) \in \pi(Q) \oplus L$ dir. Yani $Q \oplus L \subseteq \pi(Q) \oplus L$ dir. Diğer yandan, $y \in \pi(Q) \oplus L$ olsun. Bu durumda $y = \pi(q) + l$ ve $q = k + l'$ olacak şekilde $\exists q \in Q, k \in K$ ve $\exists l, l' \in L$ vardır. Böylece $k = q - l'$ olduğundan $y = \pi(k + l') + l = k + l = q - l' + l \in Q \oplus L$ bulunur. Yani $\pi(Q) \oplus L \subseteq Q \oplus L$ dir. Sonuç olarak, $Q \oplus L = \pi(Q) \oplus L$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.6. M bir R -modül olmak üzere $M = K \oplus K'$, $\pi: M \longrightarrow K$ bir kanonik projeksiyon ve $L \leq M$ olsun. Bu durumda $M = L \oplus K'$ olması için gerek ve yeter koşul $\pi|_L: L \longrightarrow K$ bir izomorfizma olmasıdır.

Önerme 3.7. Bir M modülü (C_2) koşulunu sağlıyorsa (C_3) koşulunu da sağlar.

Kanıt. $K, L \leq_d M$ için $K \cap L = 0$ olsun. Bu durumda $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. $\pi: M \longrightarrow K'$ bir kanonik projeksiyon olsun. $\pi|_L: L \longrightarrow K'$ bir monomorfizmadır. Çünkü $\text{Ker}(\pi|_L) = K \cap L = 0$ dir. O halde $L \cong \pi(L)$ dir. $\pi(L) \leq K' \leq M$ ve $\pi(L), M$ nin bir dik toplananı olan L ye izomorf olduğundan (C_2) koşulu gereği $\pi(L) \leq_d M$ bulunur. Böylece $M = \pi(L) \oplus L'$ olacak şekilde bir $L' \leq M$ vardır. Ayrıca Önerme 3.5 den, $K \oplus L = K \oplus \pi(L)$ dir. Modüler kuralından,

$$K' = K' \cap M = K' \cap (\pi(L) \oplus L') = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

bulunur. Buradan $M = K \oplus K' = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L') = K \oplus L \oplus (K' \cap L')$ elde edilir. Yani $K \oplus L \leq_d M$ dir. Böylece M modülü (C_3) koşulunu sağlar. $\square$

Tanım 3.8. Bir M R -modülüne;

- (i) (C_1) ve (C_2) koşullarını sağlıyorsa **sürekli (continuous) modül** denir.
- (ii) (C_1) ve (C_3) koşullarını sağlıyorsa **yarı-sürekli (quasi-continuous) modül** denir.

Uyarı 3.9. Önerme 3.7 den, her yarı-sürekli modülün sürekli modül olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü sürekli fakat yarı-sürekli değildir.

Tanım 3.10. M bir R -modül olsun. Eğer M modülü (C_1) koşulunu sağlıyorsa M ye **CS-modül** ya da **extending modül** denir. Özel olarak, R halkası için R_R bir CS-modül ise R ye **sağ CS-halka** denir. Yani her $I \leq R_R$ sağ ideali için $I \leq_e eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Örneğin; injektif, düzgün ve yarı-basit modüller CS-modüllerdir.

Bir CS-modülün her alt modülü CS olmayabilir. Örneğin; M bir CS olmayan R -modül ve $E(M)$ de M nin bir injektif zarfı olsun. Bu durumda $M \leq E(M)$ ve $E(M)$ bir CS-modüldür.

Önerme 3.11. M bir R -modül olsun. M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her komplement alt modülünün M de dik toplanan olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M bir CS -modül ve $K \leq_c M$ olsun. Bu durumda kabulden $K \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ vardır. $K \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.10.14 ten, $K = L \leq_d M$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $N \leq M$ olsun. Önerme 1.10.12 den, $N \leq_e K \leq_c M$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. Hipotezden, $K \leq_d M$ dir. O halde $N \leq_e K \leq_d M$ bulunur. Böylece M bir CS -modüldür. $\square$

Önerme 3.12. (C_i) ($i = 1, 2, 3$) koşulu dik toplananlara taşınır.

Kanıt. M bir CS -modül ve $N \leq_d M$ olsun. $K \leq_c N$ alalım. $K \leq_c N \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.10.15 den, $K \leq_c M$ dir. M , CS olduğundan Önerme 3.11 den, $K \leq_d M$ dir. Böylece bir $L \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus L$ dir. O halde

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus L) = K \oplus (N \cap L)$$

olup $K \leq_d N$ dir. Yani N , CS -modüldür.

M , (C_2) koşulunu sağlayan bir modül, $X \leq_d M$ ve $K \leq X$ olsun. K , X in bir dik toplananına izomorf olsun. Dolayısıyla K , M nin bir dik toplananına izomorf olur. M , (C_2) koşulunu sağladığından $K \leq_d M$ dir. O halde $K \leq_d X$ dir. Yani X de (C_2) koşulunu sağlar.

M , (C_3) koşulunu sağlayan bir modül ve $N \leq_d M$ olsun. $K, L \leq_d N$ için $K \cap L = 0$ olsun. Bu durumda $M = K \oplus L \oplus L'$ olacak şekilde bir $L' \leq M$ vardır. Modüler kuralından

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus L \oplus L') = K \oplus [N \cap (L \oplus L')] = K \oplus L \oplus (N \cap L')$$

bulunur. Böylece $K \oplus L \leq_d N$ olduğundan N de (C_3) koşulunu sağlar. $\square$

Sonuç olarak, (yarı)-sürekli ve CS -modüllerin dik toplananları da sırasıyla (yarı)-sürekli ve CS -modüldür.

Önerme 3.13. M_R bir ayrıştırılmaz modül olsun. M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin düzgün modül olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M , CS -modül olsun. $0 \neq N \leq M$ alalım. Bu durumda $N \leq_e K \leq_d M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. M ayrıştırılmaz modül olduğundan $K = 0$ ya da $K = M$ dir. $K \neq 0$ olduğundan $K = M$ dir. O halde $N \leq_e M$ dir. Yani M düzgün modüldür.

$(\Leftarrow)$ M düzgün modül olsun. Bu durumda her $0 \neq X \leq M$ için $X \leq_e M$ dir. M ayrıştırılmaz modül olduğundan $X \leq_e M \leq_d M$ dir. Yani X , CS -modüldür. $\square$

Önerme 3.14. M bir R -modül olsun. M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul $N \cap L = 0$ şartını sağlayan her $N, L \leq M$ için $N \cap K = 0$ ve $L \leq K$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ var olmasıdır. Üstelik, bu durumda $N \oplus K \leq_e M$ dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki, M bir CS -modül olsun. $N, L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olsun. Önerme 1.10.3 ten, $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde N nin M de bir K komplementi vardır. Kabulden, $K \leq_d M$ dir.

$(\Leftarrow)$ $L \leq_c M$ olsun. Bu durumda bir $N \leq M$ vardır öyle ki L, N nin M de bir komplementidir. O halde $N \cap L = 0$ dir. Hipotezden, $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. L, N ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $L = K$ olmalıdır. Sonuç olarak, M nin her komplement alt modülü M nin bir dik toplananı olduğundan Önerme 3.11 gereği M bir CS -modüldür. Ayrıca Önerme 1.10.5 den, $N \oplus K \leq_e M$ olduğu görülür. $\square$

Yardımcı Teorem 3.15. M_1 ve M_2 , R -modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) M_1, M_2 -injektiftir.

(ii) $N \cap M_1 = 0$ koşulunu sağlayan her $N \leq M$ için $M = M_1 \oplus M'$ ve $N \leq M'$ olacak şekilde bir $M' \leq M$ vardır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) M_1, M_2 -injektif olsun. $i = 1, 2$ için $\pi_i: M \rightarrow M_i$ kanonik projeksiyon olsun. $N \leq M$ için $N \cap M_1 = 0$ olsun. Şimdi

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & N \xrightarrow{\alpha} M_2 \\ & & \downarrow \beta \\ & & M_1 \end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım. O halde $\alpha = \pi_{2|_N}$ ve $\beta = \pi_{1|_N}$ dir. Hipotezden, $\psi \circ \alpha = \beta$ olacak şekilde bir $\psi: M_2 \longrightarrow M_1$ homomorfizması vardır.

$$M' = \{ \psi(m) + m \mid m \in M_2 \}$$

kümesini tanımlayalım. $M' \leq M$ olduğu açıktır. $m \in M$ için $m = m_1 + m_2$ olacak şekilde $\exists m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ vardır. Böylece

$$m = m_1 + m_2 = (m_1 - \psi(m_2)) + (\psi(m_2) + m_2) \in M_1 + M'$$

bulunur. Dolayısıyla $M = M_1 + M'$ olur. Diğer yandan, $x \in M_1 \cap M'$ olsun. Bu durumda $x \in M_1$ ve $x = \psi(n) + n$ olacak şekilde bir $n \in M_2$ vardır. Buradan $x - \psi(n) = n \in M_1 \cap M_2 = 0$ dır. Böylece $x = \psi(0) + 0 = 0$ olup $M_1 \cap M' = 0$ bulunur. Sonuç olarak, $M = M_1 \oplus M'$ elde edilir. Ayrıca $a \in N$ için $a = a_1 + a_2$ olacak şekilde $\exists a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$ vardır. O halde

$$a = a_1 + a_2 = \pi_1(a) + \pi_2(a) = \psi(\pi_2(a)) + \pi_2(a) \in M'$$

olduğundan $N \leq M'$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $N \cap M_1 = 0$ koşulunu sağlayan her $N \leq M$ için $M = M_1 \oplus M'$ ve $N \leq M'$ olacak şekilde bir $M' \leq M$ olsun. $L \leq M_2$ ve $\varphi: L \longrightarrow M_1$ bir homomorfizma olsun.

$$H = \{ x - \varphi(x) \mid x \in L \}$$

kümesini tanımlayalım. $H \leq M$ olduğu açıktır. Ayrıca $H \cap M_1 = 0$ dır. Gerçekten, $y \in H \cap M_1$ alalım. Bu durumda $y = m_1 = x - \varphi(x)$ olacak şekilde $\exists m_1 \in M_1, x \in L$ vardır. Buradan $m_1 + \varphi(x) = x \in M_1 \cap L \leq M_1 \cap M_2 = 0$ dır. Böylece $y = 0 - \varphi(0) = 0$ olup $H \cap M_1 = 0$ dır. Hipotezden, $M = M_1 \oplus H'$ ve $H \leq H'$ olacak şekilde bir $H' \leq M$ vardır. Şimdi $\pi: M \longrightarrow M_1$ kanonik projeksiyon olsun. Burada $\text{Ker}(\pi) = H'$ dür. $\pi|_{M_2}: M_2 \longrightarrow M_1$ ve $x \in L$ için

$$\pi(x) = \pi(\varphi(x) + (x - \varphi(x))) = \pi(\varphi(x)) + \pi(x - \varphi(x)) = \varphi(x)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{i} & M_2 & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi|_{M_2} & \swarrow \pi & \\ & & M_1 & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla M_1, M_2 -injektiftir. $\square$

Yardımcı Teorem 3.16. M_1 ve M_2 , CS -modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul $K \cap M_1 = 0$ ya da $K \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan her $K \leq_c M$ için $K \leq_d M$ olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ $K \cap M_1 = 0$ ya da $K \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan bir $K \leq_c M$ için $K \leq_d M$ olsun. $L \leq_c M$ alalım. $L \cap M_2 \leq L$ olduğundan Önerme 1.10.12 den, $L \cap M_2 \leq_e H \leq_c L$ olacak şekilde bir $H \leq L$ vardır. Önerme 1.10.15 den, $H \leq_c M$ dir. Ayrıca $H \cap M_1 = 0$ dir. Kabulden, $H \leq_d M$ dir. Bu durumda $M = H \oplus H'$ olacak şekilde bir $H' \leq M$ vardır. Buradan

$$L = L \cap M = L \cap (H \oplus H') = H \oplus (L \cap H')$$

bulunur. O halde $L \cap H' \leq_d L$ dir. $L \cap H' \leq_c L \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.10.15 den, $L \cap H' \leq_c M$ dir. $L \cap M_2 \leq_e H$ olduğundan $(L \cap M_2) \cap H' \leq_e H \cap H' = 0$ dir. Dolayısıyla $(L \cap H') \cap M_2 = 0$ olur. Kabul gereği, $L \cap H' \leq_d M$ dir. Böylece $L \cap H' \leq_d H'$ olup $L \leq_d M$ dir. Yani M , CS -modüldür. $\square$

Teorem 3.17. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i ler göreceli injektif olsun. M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i lerin CS -modül olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ Her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i ler CS -modül olsun. Şimdi $n = 2$ için M nin CS -modül olduğunu göstereyim. $K \leq_c M$ ve $K \cap M_1 = 0$ alalım. Yardımcı Teorem 3.15 den, $M = M_1 \oplus M'$ ve $K \leq M'$ olacak şekilde bir $M' \leq M$ vardır. $M' \cong M/M_1 \cong M_2$ olduğundan $M' \cong M_2$ dir. Böylece M_2 , CS -modül olduğundan M' de CS -modüldür. $K \leq_c M'$ olduğu açıktır. M' , CS olduğundan $K \leq_d M'$ bulunur. O halde $K \leq_d M$ dir. Benzer şekilde $H \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan bir $H \leq_c M$ için

$H \leq_d M$ dir. Yardımcı Teorem 3.16 dan, M bir CS -modüldür. n ye göre tümevarım yöntemi uygulanarak $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ nin CS -modül olduğu elde edilir. $\square$

Uyarı 3.18. Bir CS -modülün dik toplananının da CS -modül olduğu Önerme 3.12 yardımıyla bilinmektedir. Fakat CS -modüllerin dik toplamaları CS -modül olmayabilir. Şimdi Teorem 3.17 yardımıyla bu durumu açıklayan bir örneğe yer verelim.

Örnek 3.19. p bir asal sayı olmak üzere $M = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$ bir Z -modül olsun. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, CS -modüller olmasına rağmen M bir CS -modül değildir.

Kanıt. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, düzgün modüller olduğundan CS -modüllerdir. Fakat M , CS -modül değildir. Çünkü $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -injektif olmasına rağmen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ -injektif değildir. Gerçekten, $N \leq \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ nin alt modülleri 0 , $p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, $p^2\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ dir. $N = p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ alalım. Şimdi $\phi(pn + p^3\mathbb{Z}) = n + p\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $\phi: p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dönüşümü tanımlayalım. $\forall pn_1 + p^3\mathbb{Z}, pn_2 + p^3\mathbb{Z} \in p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ için $pn_1 + p^3\mathbb{Z} = pn_2 + p^3\mathbb{Z}$ olsun. Buradan $pn_1 - pn_2 = p(n_1 - n_2) \in p^3\mathbb{Z}$ dir. O halde $n_1 - n_2 \in p^2\mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$ olduğundan $n_1 - n_2 \in p\mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $n_1 + p\mathbb{Z} = n_2 + p\mathbb{Z}$ elde edilir. Yani ϕ iyi tanımlıdır. Her $pn_1 + p^3\mathbb{Z}, pn_2 + p^3\mathbb{Z} \in p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} \phi((pn_1 + p^3\mathbb{Z}) + (pn_2 + p^3\mathbb{Z})) &= \phi((pn_1 + pn_2) + p^3\mathbb{Z}) \\ &= \phi(p(n_1 + n_2) + p^3\mathbb{Z}) \\ &= (n_1 + n_2) + p\mathbb{Z} = (n_1 + p\mathbb{Z}) + (n_2 + p\mathbb{Z}) \\ &= \phi(pn_1 + p^3\mathbb{Z}) + \phi(pn_2 + p^3\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

$$\phi((pn_1 + p^3\mathbb{Z})k) = \phi(pn_1k + p^3\mathbb{Z}) = n_1k + p\mathbb{Z} = (n_1 + p\mathbb{Z})k = \phi(pn_1 + p^3\mathbb{Z})k$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmadır. Şimdi $\theta: \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $p + p^3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ için

$$\theta(p + p^3\mathbb{Z}) = \theta(p(1 + p^3\mathbb{Z})) = p\theta(1 + p^3\mathbb{Z})$$

dir. O halde $\theta(1 + p^3\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olduğundan $\theta(1 + p^3\mathbb{Z}) = a + p\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $a + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vardır. Böylece $\theta(p + p^3\mathbb{Z}) = p(a + p\mathbb{Z}) = 0 + p\mathbb{Z}$ bulunur.

$p + p^3\mathbb{Z} \in p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ için $(\theta \circ i)(p + p^3\mathbb{Z}) = \theta(i(p + p^3\mathbb{Z})) = \theta(p + p^3\mathbb{Z}) = 0 + p\mathbb{Z}$ ve $\phi(p + p^3\mathbb{Z}) = 1 + p\mathbb{Z}$ olduğundan $\theta \circ i \neq \phi$ elde edilir. Yani

$$\begin{array}{ccc} p\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \\ \phi \downarrow & \swarrow \theta & \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & & \end{array}$$

diagramı değişmeli (i.e., $\theta \circ i = \phi$) olacak şekilde bir $\theta: \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ homomorfizması yoktur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ -injektif değildir. $\square$

Teorem 3.20. *M bir R-modül olsun. Bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul $Z_2(M)$, N-injektif ve $Z_2(M)$, N birer CS-modül olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus N$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) *M bir CS-modül olsun. $Z_2(M) \leq_c M$ ve M, CS-modül olduğundan $Z_2(M) \leq_d M$ dir. O halde N bir nonsingular modül olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus N$ yazılır. Ayrıca CS-modüllerin dik toplananları da CS-modül olduğundan $Z_2(M)$ ve N, CS-modüllerdir. Şimdi $Z_2(M)$ nin N-injektif olduğunu gösterelim. $X \leq N$ ve $\phi: X \rightarrow Z_2(M)$ bir R-modül homomorfizması olsun.*

$$X' := \{x - \phi(x) \mid x \in X\}$$

kümesini göz önüne alalım. $X' \leq M$ olduğu açıktır. M, CS-modül olduğundan bir $X^* \leq_d M$ vardır öyle ki $X' \leq_e X^* \leq_d M$ dir. Böylece $M = X^* \oplus Y$ olacak şekilde bir $Y \leq M$ vardır. $x_1 \in X' \cap Z_2(M)$ olsun. Bu durumda $x \in X$ olmak üzere $x_1 = x - \phi(x)$ yazılır. Buradan $x_1 + \phi(x) = x \in Z_2(M) \cap X = 0$ olduğundan $x = 0$ olup $x_1 = 0$ bulunur. O halde $X' \cap Z_2(M) = 0$ dır. $0 = X' \cap Z_2(M) \leq_e X^* \cap Z_2(M)$ olduğundan $X^* \cap Z_2(M) = 0$ dır. Diğer yandan, $X^* \cap Z(M) \leq X^* \cap Z_2(M) = 0$ olduğundan $X^* \cap Z(M) = 0$ dır. Böylece Önerme 1.13.2 (4) ten, $Z(X^*) = X^* \cap Z(M) = 0$ dır. Yani X^* bir nonsingular modüldür. Önerme 1.13.5 (1) den, $0 = Z(X^*) \leq_e Z_2(X^*)$ olduğundan $Z_2(X^*) = 0$ bulunur. $Z_2(M) = Z_2(X^* \oplus Y) = Z_2(X^*) \oplus Z_2(Y) = Z_2(Y)$ elde edilir. Bu durumda $Z_2(M) = Z_2(Y) \leq Y$ ve Y bir CS-modül olduğundan $Z_2(M) \leq_d Y$ bulunur. Böylece $Y = Y' \oplus Z_2(M)$ olacak şekilde bir $Y' \leq Y$ vardır.

$\pi: X^* \oplus Y' \oplus Z_2(M) \longrightarrow Z_2(M)$ bir kanonik projeksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$\pi(x) = \pi((x - \phi(x)) + \phi(x)) = \pi(x - \phi(x)) + \pi(\phi(x)) = \phi(x)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi|_N & \swarrow \pi & \\ & & Z_2(M) & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla $Z_2(M)$, N -injektiftir.

($\Leftarrow$) $Z_2(M)$, N -injektif ve $Z_2(M)$, N birer CS -modül olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus N$ olsun. $A \leq_c M$ olsun. O halde $Z_2(A) \leq_c A$ ve $A \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.10.15 den, $Z_2(A) \leq_c M$ dir. Ayrıca $Z_2(A) \leq Z_2(M) \leq M$ ve $Z_2(A) \leq_c M$ olduğundan $Z_2(A) \leq_c Z_2(M)$ dir. $Z_2(M)$, CS -modül olduğundan $Z_2(A) \leq_d Z_2(M)$ bulunur. Böylece $Z_2(M) = Z_2(A) \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq Z_2(M)$ vardır. Bu durumda $M = Z_2(M) \oplus N = Z_2(A) \oplus K \oplus N$ yazılır. Modüle kuralından

$$A = A \cap M = A \cap (Z_2(A) \oplus K \oplus N) = Z_2(A) \oplus [A \cap (K \oplus N)]$$

dir. Yani $Z_2(A) \leq_d A$ dir. O halde $A = Z_2(A) \oplus B$ olacak şekilde bir $B \leq A$ nonsingular alt modülü vardır. $0 = Z(B) \leq_e Z_2(B)$ olduğundan $Z_2(B) = 0$ bulunur. Önerme 1.13.5 (4) ten, $Z_2(B) = B \cap Z_2(M) = 0$ bulunur. $B \cap Z_2(M) = 0$ ve $Z_2(M)$, N -injektif olduğundan $\pi_1: M \longrightarrow Z_2(M)$ ve $\pi_2: M \longrightarrow N$ kanonik projeksiyonlar olmak üzere $\psi\pi_{2|B} = \pi_{1|B}$ olacak şekilde bir $\psi: N \longrightarrow Z_2(M)$ R -homomorfizması vardır. Yani

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{\pi_2} & N \\ & \searrow \pi_{1|B} & \downarrow \pi_1 & \swarrow \psi & \\ & & Z_2(M) & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Şimdi

$$N^* := \{ n + \psi(n) \mid n \in N \}$$

kümesini göz önüne alalım. Açıktır ki, $N^* \leq M$ dir. $x \in B$ için $x = m_1 + m_2$ olacak

şekilde $\exists m_1 \in Z_2(M)$, $m_2 \in N$ vardır. Bu durumda

$$x = m_1 + m_2 = \pi_1(x) + \pi_2(x) = \psi(\pi_2(x)) + \pi_2(x) \in N^*$$

bulunur. Dolayısıyla $B \leq N^*$ dır. Ayrıca $B \leq_c N^*$ dır. Çünkü eğer $B \not\leq_c N^*$ ise bir $N_1 \leq N^*$ vardır öyle ki $B \leq_e N_1 \leq_c N^*$ dır. Buradan $B = A \cap B \leq_e A \cap N_1 \leq A$ bulunur. Fakat $B \leq_d A$ olduğundan B nin A da öz essential genişlemesi yoktur. Dolayısıyla bu bir çelişki olup $B \leq_c N^*$ olmalıdır. $Z_2(M) + N^* \subseteq M$ dir. Şimdi $m \in M$ olsun. Bu durumda $m = a + n$ olacak şekilde $\exists a \in Z_2(M)$, $n \in N$ vardır. Böylece $m = (a - \psi(n)) + (n + \psi(n)) \in Z_2(M) + N^*$ bulunur. Yani $M = Z_2(M) + N^*$ dır. $x \in Z_2(M) \cap N^*$ olsun. O halde bir $n \in N$ için $x = n + \psi(n)$ yazılır. Buradan $x - \psi(n) = n \in Z_2(M) \cap N = 0$ olduğundan $n = 0$ olup $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla $Z_2(M) \cap N^* = 0$ dır. Sonuç olarak, $M = Z_2(M) \oplus N^* = Z_2(M) \oplus N$ elde edilir. $N \cong M/Z_2(M) \cong N^*$ olduğundan $N \cong N^*$ dır. N , CS -modül olduğundan N^* da CS -modüldür. O halde $B \leq_c N^*$ ve N^* , CS -modül olduğundan $B \leq_d N^*$ dır. Böylece $N^* = B \oplus B'$ olacak şekilde bir $B' \leq N^*$ vardır. Buradan

$$M = Z_2(M) \oplus N^* = (Z_2(A) \oplus K) \oplus (B \oplus B') = (Z_2(A) \oplus B) \oplus (K \oplus B') = A \oplus (K \oplus B')$$

oldüğundan $A \leq_d M$ bulunur. Dolayısıyla M , CS -modüldür. □

4. GOLDIE EXTENDING MODÜLLER

Bu bölümde extending modüllerin bir genellemesi olan Goldie extending modül sınıfına yer vereceğiz. Goldie extending modüllerin yapısal özelliklerini analiz etmek için oldukça kullanışlı olan göreceli ejektif kavramından bahsedeceğiz. Goldie extending modüllerin bir dik toplamının ve bir Goldie extending modülün bir dik toplananının Goldie extending modül olabilmesi için gerekli koşullar ele alınacaktır.

Tanım 4.1. M bir R -modül olsun. M nin alt modülleri üzerinde

$$X\beta Y \iff X \cap Y \leq_e X \text{ ve } X \cap Y \leq_e Y$$

bağıntısını tanımlayalım. β nın bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Her $X \leq M$ için, $X\beta D$ (i.e., $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$) olacak şekilde bir $D \leq_d M$ varsa M ye **Goldie extending (i.e., $\mathcal{G}$ -extending) modül** denir. Ayrıca M nin her dik toplananı $\mathcal{G}$ -extending modül ise M ye **$\mathcal{G}^+$ -extending modül** denir.

Yardımcı Teorem 4.2. M bir R -modül ve $K \leq_c M$ olsun. $K \leq_d M$ olması için gerek ve yeter koşul K nın, M de bir L komplementi olması ve her $\varphi: K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizmasının bir $\theta: M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişlemesidir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. $L = K'$ alınırsa $\theta|_{K \oplus L} = \varphi$ dir.

$(\Leftarrow)$ L, K nın bir komplementi olsun. Her $x \in K$ ve $y \in L$ için $\varphi(x + y) = x$ ile tanımlı $\varphi: K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Hipotezden, $\theta|_{K \oplus L} = \varphi$ olacak şekilde bir $\theta: M \rightarrow M$ homomorfizması vardır. Yani

$$\begin{array}{ccc} K \oplus L & \xrightarrow{i} & M \\ \varphi \downarrow & \swarrow \theta & \\ M & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Burada $K \subseteq \text{Im}(\theta)$ ve $L \subseteq \text{Ker}(\theta)$ dir. $0 \neq v \in \text{Im}(\theta)$ alalım. Bu durumda $0 \neq v = \theta(u)$ olacak şekilde bir $u \in M$ vardır. $u \notin L$ dir. Çünkü $u \in L$ olsaydı $u \in \text{Ker}(\theta)$ olup $\theta(u) = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Böylece $K \cap (L + uR) \neq 0$ dir. Çünkü L, K nın komplementi olduğundan $K \cap L = 0$ özelliğine

göre L maksimaldir. Bu durumda $0 \neq x = y + ur$ olacak şekilde $\exists x \in K, y \in L, r \in R$ vardır. Buradan

$$0 \neq x = \theta(x) = \theta(y + ur) = \theta(y) + \theta(ur) = \theta(u)r = vr \in K \cap vR$$

bulunur. O halde $K \cap vR \neq 0$ olduğundan $K \leq_e \text{Im}(\theta)$ dir. $K \leq_c M$ olduğundan K nın hiçbir essential genişlemesi yoktur. Dolayısıyla $K = \text{Im}(\theta)$ elde edilir. Şimdi $M = \text{Im}(\theta) \oplus \text{Ker}(\theta)$ olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için $m = \theta(m) + (m - \theta(m))$ yazılabilir. Ayrıca $\theta(m - \theta(m)) = \theta(m) - \theta(\theta(m)) = \theta(m) - \theta(m) = 0$ olduğundan $m - \theta(m) \in \text{Ker}(\theta)$ dir. O halde $\theta(m) \in \text{Im}(\theta)$ ve $m - \theta(m) \in \text{Ker}(\theta)$ olduğundan $M = \text{Im}(\theta) + \text{Ker}(\theta)$ bulunur. Şimdi $x \in \text{Im}(\theta) \cap \text{Ker}(\theta)$ alalım. Bu durumda $\theta(x) = 0$ ve $x = \theta(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan $0 = \theta(x) = \theta(\theta(m)) = \theta(m)$ olup $x = \theta(m) = 0$ dir. Yani $\text{Im}(\theta) \cap \text{Ker}(\theta) = 0$ dir. Böylece, $M = \text{Im}(\theta) \oplus \text{Ker}(\theta)$ elde edilir. Sonuç olarak, $M = K \oplus \text{Ker}(\theta)$ olup $K \leq_d M$ bulunur. $\square$

Önerme 4.3. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.
- (ii) Her $Y \leq M$ için, bir $X \leq M$ ve bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ dir.
- (iii) Her $Y \leq M$ için, Y nin bir L komplementi ve L nin bir K komplementi vardır öyle ki $Y\beta K$ ve her $f: K \oplus L \rightarrow M$ homomorfizması bir $\bar{f}: M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişler.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $Y \leq M$ olsun. Bu durumda $Y\beta D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ vardır. O halde $Y \cap D \leq_e Y$ ve $Y \cap D \leq_e D$ dir. $X = Y \cap D$ alınrsa $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $Y \leq M$ olsun. Hipotezden, bir $X \leq M$ ve bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ dir. Buradan $M = D \oplus D'$ olacak şekilde bir $D' \leq M$ vardır. $X \cap D' \leq_e D \cap D' = 0$ ve $X \cap D' \leq_e Y \cap D'$ olduğundan $X \cap D' = 0$ ve $Y \cap D' = 0$ olmalıdır. $X \leq_e Y \cap D \leq Y$ ve $X \leq_e Y$ olduğundan $Y \cap D \leq_e Y$ bulunur. Diğer yandan, $X \leq_e Y \cap D \leq D$ ve $X \leq_e D$ olduğundan $Y \cap D \leq_e D$

bulunur. Kabul edelim ki, $D' \leq E$ ve $Y \cap E = 0$ olacak şekilde bir $E \leq M$ olsun. $0 = (Y \cap D) \cap E \leq_e D \cap E$ olduğundan $D \cap E = 0$ olmalıdır. $E = M \cap E = (D \oplus D') \cap E = (D \cap E) \oplus D' = D'$ bulunur. O halde D' , Y nin bir komplementidir. $D = K$ ve $D' = L$ alınırsa $\bar{f}|_{K \oplus L} = f$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Yardımcı Teorem 4.2 ve (iii) den, $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. $\square$

Önerme 4.4. M_R bir UC-modül olsun. M nin $\mathcal{G}$ -extending olması için gerek ve yeter koşul M nin extending olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $Y \leq M$ olsun. Bu durumda $Y \cap D \leq_e Y$, $Y \cap D \leq_e D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ vardır. O halde $M = D \oplus D'$ olacak şekilde bir $D' \leq M$ vardır. M , UC-modül olduğundan Yardımcı Teorem 1.14.2 den, $D \leq_e Y + D$ ve $Y \leq_e Y + D$ dir. Buradan $0 = D \cap D' \leq_e (Y + D) \cap D'$ olduğundan $(Y + D) \cap D' = 0$ olmalıdır. $Y + D = M \cap (Y + D) = (D \oplus D') = D \oplus ((Y + D) \cap D')$ olduğundan $Y + D = D$ bulunur. Yani $Y \leq D$ dir. O halde $Y = Y \cap D \leq_e D \leq_d M$ elde edilir. Dolayısıyla M , extending modüldür.

($\Leftarrow$) Teorem 5.19 dan açıktır. $\square$

Tanım 4.5. N ve M , R -modüller olsun. Eğer her $K \leq M$ ve her $f: K \rightarrow N$ için $\bar{f}|_X = f$ olacak şekilde bir $\bar{f}: M \rightarrow N$ homomorfizması ve bir $X \leq_e K$ varsa, N modülüne **M -ejektif modül** denir. Yani

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{i} & M \\ & & f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ & & N & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Uyarı 4.6. N modülü M -injektif ise N nin M -ejektif olduğu açıktır. Eğer her $M \in \text{Mod-}R$ için N , M -ejektif ise N ye ejektif modül denir.

Tanım 4.7. $\rho: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R$ olmak üzere ρ , R -modüller kategorisinden R -modüller kategorisine bir fonktor olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa ρ ya **preradical** denir.

(i) Her M R -modülü için $\rho(M)$, M nin alt modülüdür.

(ii) M ve M' , R -modüller olmak üzere bir $\phi: M \longrightarrow M'$ homomorfizması için $\phi(\rho(M)) \subseteq \rho(M')$ dır.

M_1 ve M_2 , R -modüller olmak üzere $\rho(M_1 \oplus M_2) = \rho(M_1) \oplus \rho(M_2)$ olduğu açıktır. Yukarıdaki iki koşula ek olarak;

(iii) $\rho(M/\rho(M)) = 0$

koşulu da sağlanıyorsa ρ ya **radikal** denir.

Tanım 4.8. ρ bir preradikal olsun. Eğer her M R -modülü için $\rho(\rho(M)) = \rho(M)$ ise ρ ya **idempotent preradikal** denir. Örneğin; socle bir idempotent preradikaldır.

Tanım 4.9. ρ bir preradikal ve M bir R -modül olsun. Eğer her $N \leq M$ için $\rho(N) = N \cap \rho(M)$ ise ρ ya **left exact preradikal** denir. Örneğin; singular alt modül ve socle left exact preradikallerdir.

Önerme 4.10. ρ bir preradikal ve $\rho(M) \leq_e M_2$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M_1, M_2 -ejektiftir.

Kanıt. $K \leq M_2$, $f: K \longrightarrow M_1$ bir homomorfizma ve $X = K \cap \rho(M)$ olsun. O halde $K \leq_e K$ ve $\rho(M) \leq_e M_2$ olduğundan $X = K \cap \rho(M) \leq_e K \cap M_2 = K$ elde edilir. Eğer $\bar{f}: M_2 \longrightarrow M_1$ sıfır homomorfizması olarak alınırsa, her $x \in X$ için $\bar{f}(x) = f(x)$ bulunur. Yani $\bar{f}|_X = f$ dir. $\square$

Teorem 4.11. M_1 ve M_2 , R -modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) M_1, M_2 -ejektiftir.

(ii) $K \cap M_1 = 0$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_3$ ve $K \cap M_3 \leq_e K$ olacak şekilde bir $M_3 \leq M$ vardır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) M_1, M_2 -ejektif olsun. $i = 1, 2$ için $\pi_i: M \longrightarrow M_i$ kanonik projeksiyon olsun. $K \leq M$ için $K \cap M_1 = 0$ olsun. $\pi_{2|_K}: K \longrightarrow M_2$ bir monomorfizmadır. Çünkü $\text{Ker}(\pi_{2|_K}) = K \cap M_1 = 0$ dır. $\bar{K} = \pi_2(K)$ olsun. O halde $M_1,$

M_2 -ejektif olduğundan $h|_X = (\pi_1 \circ \pi_2^{-1})|_X$ olacak şekilde bir $h: M_2 \rightarrow M_1$ homomorfizması ve bir $X \leq_e \overline{K}$ vardır. Yani

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \overline{K} & \xrightarrow{i} & M_2 \\ & & \pi_2^{-1} \downarrow & & \nearrow h \\ & & M & & \\ & & \pi_1 \downarrow & & \\ & & M_1 & & \end{array}$$

diagramı değişmelidir. Şimdi

$$M_3 = \{ h(y) + y \mid y \in M_2 \}$$

kümesini tanımlayalım. $M_3 \leq M$ olduğu açıktır. $m \in M$ için $m = m_1 + m_2$ olacak şekilde $m_i \in M_i$ ($i = 1, 2$) vardır. Böylece

$$m = m_1 + m_2 = (m_1 - h(m_2)) + (h(m_2) + m_2) \in M_1 + M_3$$

bulunur. Dolayısıyla $M = M_1 + M_3$ olur. Diğer yandan, $y \in M_1 \cap M_3$ olsun. Bu durumda $y = y_1 = h(y_2) + y_2$ olacak şekilde $y_i \in M_i$ ($i = 1, 2$) vardır. Buradan $y_1 - h(y_2) = y_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$ bulunur. Böylece $M_1 \cap M_3 = 0$ dır. $M = M_1 \oplus M_3$ elde edilir. Şimdi $K \cap M_3 \leq_e K$ olduğunu gösterelim. $0 \neq k \in K$ alalım. Bu durumda $k = \pi_1(k) + \pi_2(k)$ yazılabilir. $K \cap M_1 = 0$ olduğundan $\pi_2(k) \neq 0$ dır. Çünkü $\pi_2(k) = 0$ olsaydı $k = \pi_1(k) \in K \cap M_1 = 0$ olurdu. Fakat $k \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. $X \leq_e \overline{K} = \pi_2(K)$ olduğundan $0 \neq \pi_2(k)r = \pi_2(kr) \in X$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $0 \neq kr = \pi_1(kr) + \pi_2(kr)$ dir. $h|_X = (\pi_1 \circ \pi_2^{-1})|_X$ olduğundan $(h \circ \pi_2)|_X = [(\pi_1 \circ \pi_2^{-1}) \circ \pi_2]|_X = \pi_1|_X$ dir. Dolayısıyla $h(\pi_2(kr)) = \pi_1(kr)$ bulunur. Böylece $0 \neq kr = h(\pi_2(kr)) + \pi_2(kr) \in K \cap M_3$ olur. Sonuç olarak, her $0 \neq k \in K$ için $0 \neq kr \in K \cap M_3$ olacak şekilde bir $r \in R$ bulunduğundan $K \cap M_3 \leq_e K$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $K \cap M_1 = 0$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_3$ ve $K \cap M_3 \leq_e K$ olacak şekilde bir $M_3 \leq M$ olsun. $L \leq M_2$ ve $g: L \rightarrow M_1$ bir homomorfizma olsun. Şimdi

$$H = \{ x - g(x) \mid x \in L \}$$

kümesini tanımlayalım. $H \leq M$ ve $H \cap M_1 = 0$ dir. Hipotezden, $M = M_1 \oplus H'$ ve $H' \cap L \leq_e L$ olacak şekilde bir $H' \leq M$ vardır. $\pi: M \rightarrow M_1$ kanonik projeksiyon olsun. $x \in H' \cap L$ için

$$\pi(x) = \pi(g(x) + (x - g(x))) = \pi(g(x)) + \pi(x - g(x)) = \pi(g(x)) = g(x)$$

bulunur. Yani $\pi|_{H' \cap L} = g|_{H' \cap L}$ dir. Dolayısıyla M_1, M_2 -ejektiftir. $\square$

Teorem 4.12. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda;

- (i) Eğer M_1, M_2 -ejektif (ya da M_2, M_1 -ejektif) ve M_1 ile $M_2, \mathcal{G}$ -extending modüller ise M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.
- (ii) Eğer M_1, M_2 -injektif ve M bir $\mathcal{G}$ -extending modül ise M_2 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

Kanıt. (i) $Y \leq M$ olsun. Eğer $Y \cap M_1 = 0$ ise Teorem 4.11 den, $M = M_1 \oplus M_3$ ve $Y \cap M_3 \leq_e Y$ olacak şekilde bir $M_3 \leq M$ vardır. $M_3 \cong M/M_1 \cong M_2$ olduğundan $M_3 \cong M_2$ dir. $M_3 \cong M_2$ olduğundan M_3 de $\mathcal{G}$ -extendingdir. $Y \cap M_3 \leq M_3$ için Önerme 4.3 ten, bir $X \leq M_3$ ve bir $D \leq_d M_3$ vardır öyle ki $X \leq_e Y \cap M_3$ ve $X \leq_e D$ dir. M_3, M nin bir dik toplananı olduğundan D, M nin bir dik toplananı olur. Diğer yandan, $X \leq_e Y \cap M_3 \leq_e Y$ olduğundan $X \leq_e Y$ bulunur. Böylece M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

Şimdi $Y \cap M_1 \neq 0$ olsun. $Y \cap M_1 \leq Y$ için, $Y \cap M_1$ in bir $K \leq Y$ komplementi vardır öyle ki $(Y \cap M_1) \cap K = 0$ ve $(Y \cap M_1) \oplus K \leq_e Y$ dir. O halde $K \cap M_1 = 0$ dir. Yine Teorem 4.11 den, $M = M_1 \oplus M_4$ ve $K \cap M_4 \leq_e K$ olacak şekilde bir $M_4 \leq M$ vardır. $M_4 \cong M_2$ olduğundan M_4 de $\mathcal{G}$ -extendingdir. $Y \cap M_1 \leq M_1$ için Önerme 4.3 ten, bir $X_1 \leq M_1$ ve bir $D_1 \leq_d M_1$ vardır öyle ki $X_1 \leq_e Y \cap M_1$ ve $X_1 \leq_e D_1$ dir. Ayrıca $K \cap M_4 \leq M_4$ için Önerme 4.3 ten, bir $X_2 \leq M_4$ ve bir $D_2 \leq_d M_4$ vardır öyle ki $X_2 \leq_e K \cap M_4$ ve $X_2 \leq_e D_2$ dir.

İddia. $X_1 \oplus X_2 \leq_e Y$ ve $X_1 \oplus X_2 \leq_e D_1 \oplus D_2$ dir.

$X_2 \leq_e K \cap M_4 \leq_e K$ olduğundan $X_2 \leq_e K$ dir. O halde $X_1 \leq_e Y \cap M_1$ ve $X_2 \leq_e K$ olduğundan $X_1 \oplus X_2 \leq_e (Y \cap M_1) \oplus K \leq_e Y$ dir. Böylece $X_1 \oplus X_2 \leq_e Y$ elde edilir. Diğer yandan, $X_1 \leq_e D_1$ ve $X_2 \leq_e D_2$ olduğundan $X_1 \oplus X_2 \leq_e D_1 \oplus D_2$

elde edilir.

Ayrıca $D_1 \leq_d M_1$ ve $D_2 \leq_d M_4$ olduğundan $M_1 = D_1 \oplus D'_1$ ve $M_4 = D_2 \oplus D'_2$ olacak şekilde $\exists D'_1 \leq M_1, D'_2 \leq M_4$ vardır. Böylece

$$M = M_1 \oplus M_4 = (D_1 \oplus D'_1) \oplus (D_2 \oplus D'_2) = (D_1 \oplus D_2) \oplus (D'_1 \oplus D'_2)$$

olduğundan $D_1 \oplus D_2 \leq_d M$ bulunur. Sonuç olarak, M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. **(ii)** $Y \leq M_2$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan bir $X \leq M$ ve bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e D$ dir. $X \cap M_1 \leq_e Y \cap M_1 \leq M_2 \cap M_1 = 0$ olduğundan $X \cap M_1 = 0$ dir. O halde $0 = X \cap M_1 \leq_e D \cap M_1$ olduğundan $D \cap M_1 = 0$ dir. Yardımcı Teorem 3.15 den, $M = M_1 \oplus M'$ ve $D \leq M'$ olacak şekilde bir $M' \leq M$ vardır. Her $x \in X$ için $h(x) = x$ olacak şekilde bir $h: M' \rightarrow M_2$ izomorfizması vardır (i.e., $h = \pi_{2|_{M'}}$). $D_2 = h(D) \leq M_2$ olsun. $X = h(X) \leq_e h(D) = D_2$ dir. $D \leq_d M$ olduğundan $M = D \oplus D'$ olacak şekilde bir $D' \leq M$ vardır. Buradan $M' = M' \cap M = M' \cap (D \oplus D') = D \oplus (M' \cap D')$ dür. $h(M') = h(D) \oplus h(M' \cap D')$ bulunur. Böylece $M_2 = D_2 \oplus h(M' \cap D')$ dür. Yani $D_2 \leq_d M_2$ dir. Sonuç olarak, M_2 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. $\square$

Teorem 4.13. $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ olsun. Bu durumda;

- (i) Eğer her $j > i$ için M_i, M_j -ejektif ve her $M_i, \mathcal{G}$ -extending modül ise $M, \mathcal{G}$ -extending modüldür.
- (ii) Eğer tüm M_i ler göreceli injektif ve $M, \mathcal{G}$ -extending modül ise her $M_i, \mathcal{G}$ -extending modüldür.

Kanıt. (i) Tümevarım yöntemini uygulayalım. Her $1 \leq i < j \leq n+1$ için M_i ler $\mathcal{G}$ -extending modül ve M_i, M_j -ejektif olmak üzere $M = \bigoplus_{i=1}^{n+1} M_i$ olsun. Her $1 \leq k \leq n$ için $\bigoplus_{i=1}^k M_i, \mathcal{G}$ -extending modül olsun. $M = \bigoplus_{i=1}^{n+1} M_i = \left(\bigoplus_{i=1}^n M_i \right) \oplus M_{n+1}$ dir. Şimdi $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ nin M_{n+1} -ejektif olduğunu gösterelim. $K \leq M_{n+1}$ olsun. $f: K \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$ bir homomorfizma olsun. $\pi_i: M \rightarrow M_i, i$ -inci projeksiyon homomorfizması olsun. $f_i = \pi_i \circ i \circ f$ olsun. M_i, M_{n+1} -ejektif olduğundan her $1 \leq i \leq n+1$ için bir $X_i \leq_e K$ ve $\bar{f}_i: M_{n+1} \rightarrow M_i$ homomorfizması vardır öyle ki her $x \in X_i$ için $\bar{f}_i(x) = f(x)$ dir.

Yani

$$\begin{array}{ccccc}
 X_i & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{i} & M_{n+1} \\
 & & f \downarrow & & \\
 & & \bigoplus_{i=1}^n M_i & & \\
 & & i \downarrow & \nearrow \bar{f}_i & \\
 & & M & & \\
 & & \pi_i \downarrow & & \\
 & & M_i & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Her $1 \leq i \leq n+1$ için $X_i \leq_e K$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^n \leq_e K$ dır. $X = \bigcap_{i=1}^n$ alınırsa $X \leq_e K$ dır. $\bar{f}: M_{n+1} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$, $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)$ ile tanımlı olsun. O halde her $x \in X$ için

$$\bar{f}(x) = (\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \dots, \bar{f}_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = f(x)$$

bulunur. Yani

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{i} & M_{n+1} \\
 & & f \downarrow & \nwarrow \bar{f} & \\
 & & \bigoplus_{i=1}^n M_i & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla $\bigoplus_{i=1}^n M_i$, M_{n+1} -ejektiftir. Kabul gereği $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ ve M_{n+1} , $\mathcal{G}$ -extending modüllerdir. Böylece Teorem 4.12 (i) den, $M = \bigoplus_{i=1}^{n+1} M_i$ bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

(ii) Kanıt, (i) seçeneğindeki benzer tümevarım yöntemiyle ve Teorem 4.12 (ii) yardımıyla elde edilir. $\square$

Tanım 4.14. M bir R -modül ve $X \leq M$ olsun. Her $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ için $e(X) \subseteq X$ oluyorsa X e M nin **projection invariant (projeksiyon değişmez) alt modülü** denir.

Tanım 4.15. M bir R -modül olmak üzere M nin her projection invariant alt modülü, M nin bir dik toplananında essential oluyorsa M ye **PI-extending modül** denir.

Teorem 4.16. K , M nin bir projection invariant alt modülü olsun.

- (i) M bir $\mathcal{G}$ -extending modül olsun. Bu durumda $\exists M_1, M_2 \leq M$ alt modülleri vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$ ve $K \leq_e M_2$ dir.
- (ii) M bir $\mathcal{G}$ -extending modül ve K , bir tek kapanışa sahip olsun. Bu durumda $\exists M_1, M_2 \leq M$ alt modülleri vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$, $K \leq_e M_2$ ve M_1, M_2 birer $\mathcal{G}$ -extending modüldür.
- (iii) ρ bir preradikal, $\rho(M) \leq_e M_2$ ve M_1, M_2 $\mathcal{G}$ -extending modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

Kanıt. (i) M , $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır öyle ki $K\beta_e M$ dir. Yani $K \cap eM \leq_e K$ ve $K \cap eM \leq_e eM$ dir. $k \in K$ olmak üzere $ek \in eK$ olsun. K , projection invariant alt modül olduğundan $ek \in eK \subseteq K$ dir. Buradan $ek \in K$ ve $ek \in eM$ olduğundan $ek \in K \cap eM$ dir. O halde $eK \subseteq K \cap eM$ bulunur. Şimdi $x \in K \cap eM$ olsun. Bu durumda $x = k = em$ olacak şekilde $\exists m \in M, k \in K$ vardır. Buradan $ek = e^2m = em = k \in eK$ dir. O halde $K \cap eM \subseteq eK$ bulunur. Böylece $eK = K \cap eM$ dir. Diğer yandan, $(1-e)k \in (1-e)K$ olsun. $eK \subseteq K$ olduğundan $(1-e)k = k - ek \in K$ dir. O halde $(1-e)K \subseteq K \cap (1-e)M$ dir. Şimdi $y \in K \cap (1-e)M$ olsun. Böylece $y = k = (1-e)m$ olacak şekilde $\exists m \in M, k \in K$ vardır. Buradan

$$(1-e)k = (1-e)(1-e)m = (1-e-e+e^2)m = (1-e)m = k \in (1-e)K$$

dir. O halde $K \cap (1-e)M \subseteq (1-e)K$ dir. Böylece $(1-e)K = K \cap (1-e)M$ dir. Şimdi $K = eK \oplus (1-e)K$ olduğunu gösterelim. $K \subseteq eK + (1-e)K$ olduğu açıktır. $ek_1 + (1-e)k_2 \in eK + (1-e)K$ alalım. $eK \subseteq K$ olduğundan $ek_1 + (1-e)k_2 = ek_1 + k_2 - ek_2 \in K$ dir. O halde $eK + (1-e)K \subseteq K$ dir. Böylece $K = eK + (1-e)K$ bulunur. $a \in eK \cap (1-e)K$ olsun. Bu durumda $a = ek = (1-e)k'$ olacak şekilde $k, k' \in K$ elemanları vardır. Buradan $ek = e^2k = (e - e^2)k' = 0$ dir. Yani $eK \cap (1-e)K = 0$ dir. Sonuç olarak, $K = eK \oplus (1-e)K$ elde edilir. $eK = K \cap eM \leq_e K$ ve $eK = K \cap eM \leq_e eM$ dir. $eK \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ olduğundan $eK \cap (1-e)M = 0$ dir. $0 = eK \cap (1-e)M \leq_e K \cap (1-e)M$ olduğundan $K \cap (1-e)M = 0$ bulunur. O halde $(1-e)K = 0$ bulunur. Böylece $K = eK \oplus (1-e)K$ olduğundan $K = eK \leq_e eM$ dir. Eğer $M_1 = (1-e)M$ ve $M_2 = eM$ alınırsa

$M = M_1 \oplus M_2$ ve $K \leq_e M_2$ elde edilir.

(ii) (i) den $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$, $M_1 = (1 - e)M$, $M_2 = eM$ ve $K \leq_e M_2$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

İddia 1. M_2 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

$Y \leq M_2 = eM$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan bir $d^2 = d \in \text{End}_R(M)$ vardır öyle ki $Y \beta dM$ dir. Yani $Y \cap dM \leq_e Y$ ve $Y \cap dM \leq_e dM$ dir. (i) den $dK = K \cap dM$, $(1 - d)K = K \cap (1 - d)M$ olmak üzere $K = dK \oplus (1 - d)K$ dir. $K \leq_e eM$ olduğundan $Y \cap K \leq_e Y$ dir. O halde $Y \cap K \cap dM \leq_e Y \cap dM \leq_e dM$ olduğundan $Y \cap dK \leq_e dM$ bulunur. $Y \cap dK \leq dK \leq dM$ ve $Y \cap dK \leq_e dM$ olduğundan $Y \cap dK \leq_e dK$ ve $dK \leq_e dM$ bulunur. Böylece $K = dK \oplus (1 - d)K \leq_e dM \oplus (1 - d)K$ dir. K nın M deki tek kapanışı eM olduğundan $dM \subseteq eM = M_2$ olur. Sonuç olarak, M_2 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

İddia 2. M_1 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

$X \leq M_1 = (1 - e)M$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan bir $d^2 = d \in \text{End}_R(M)$ vardır öyle ki $X \beta dM$ dir. Yani $X \cap dM \leq_e X$ ve $X \cap dM \leq_e dM$ dir. O halde $X \cap dM = X \cap dM \cap (1 - e)M \leq_e dM \cap (1 - e)M \leq dM$ dir. Buradan $X \cap dM \leq_e dM$ olduğundan $dM \cap (1 - e)M \leq_e dM$ dir. Böylece $0 = dM \cap (1 - e)M \cap eM \leq_e dM \cap eM$ olduğundan $dM \cap eM = 0$ olmalıdır. (i) den $dK = dM \cap K$, $(1 - d)K = (1 - d)M \cap K$ olmak üzere $K = dK \oplus (1 - d)K$ dir. $dK = dM \cap K \leq dM \cap eM = 0$ olduğundan $dK = 0$ olmalıdır. O halde $K = (1 - d)K \leq (1 - d)M$ dir. Şimdi C , K nın $(1 - d)M$ deki bir kapanışı olsun. $(1 - d)M$, M nin kapalı alt modülü olduğundan C , K nın M deki bir kapanışıdır. Fakat K , M de bir tek kapanışa sahip olduğundan $C = eM \subseteq (1 - d)M$ dir. Her $m \in M$ için $em = (1 - d)m'$ olacak şekilde bir $m' \in M$ vardır. $dem = d(1 - d)m' = (d - d^2)m' = 0$ ve $d(1 - e) = d - de = d$ dir. Böylece $[(1 - e)d]^2 = (1 - e)d$ dir. Şimdi $dM \cap (1 - e)M \leq (1 - e)dM$ olduğunu gösterelim. $dm = (1 - e)m'$ olsun. $(1 - e)dm = (1 - e)(1 - e)m' = (1 - e)m' = dm \in (1 - e)dM$ dir. O halde $dM \cap (1 - e)M \leq (1 - e)dM$ dir. Bir $0 \neq (1 - e)dm \in (1 - e)dM$ alalım. $dM \cap (1 - e)M \leq_e dM$ olduğundan $0 \neq dmr \in dM \cap (1 - e)M$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $0 \neq dmr = (1 - e)dmr \in dM \cap (1 - e)M$ olup $dM \cap (1 - e)M \leq_e (1 - e)dM$ dir. Böylece $dM \beta (1 - e)dM$ bulunur. $X \beta dM$ ve

$dM\beta(1-e)dM$ olduğundan $X\beta(1-e)dM$ elde edilir. Ayrıca

$$M_1 = (1-e)M = (1-e)(dM \oplus (1-d)M) = (1-e)dM \oplus (1-e)(1-d)M$$

olduğundan $(1-e)dM \leq_d M_1$ dir. Sonuç olarak, M_1 bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

(iii) ρ bir preradikal, $\rho(M) \leq_e M_2$ ve M_1, M_2 $\mathcal{G}$ -extending modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Önerme 4.10 dan M_1, M_2 -ejektiftir. Böylece Teorem 4.12 (i) den, M bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. $\square$

Sonuç 4.17. M , $\mathcal{G}$ -extending modül ve her M_i , M nin projection invariant alt modülü olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda her M_i , $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

Kanıt. Teorem 4.16 da $K = M_i$ alınırsa istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 4.18. M , (C_3) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{G}$ -extending modül olsun. Bu durumda M nin, her dik toplananı $\mathcal{G}$ -extending modüldür (i.e., M , $\mathcal{G}^+$ -extendingdir).

Kanıt. $N \leq_d M$ olsun. Bu durumda $M = N \oplus N'$ olacak şekilde bir $N' \leq M$ vardır. $K \leq N$ ve $\pi: M \rightarrow N$ kanonik projeksiyon olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan bir $L \leq_d M$ vardır öyle ki $K\beta L$ dir. Yani $K \cap L \leq_e K$ ve $K \cap L \leq_e L$ dir. Böylece $K \cap N' \leq N \cap N' = 0$ olduğundan $K \cap N' = 0$ dir. $0 = (K \cap L) \cap N' \leq_e L \cap N'$ olduğundan $L \cap N' = 0$ dir. M , (C_3) koşulunu sağladığından $N' \oplus L \leq_d M$ dir. Önerme 3.5 den, $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L)$ dir. Böylece $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L) \leq_d M$ dir. O halde $M = N' \oplus \pi(L) \oplus A$ olacak şekilde bir $A \leq M$ vardır. Buradan

$$N = M \cap N = (N' \oplus \pi(L) \oplus A) \cap N = [(N' \oplus A) \cap N] \oplus \pi(L)$$

bulunur. Böylece $\pi(L) \leq_d N$ dir. Şimdi $K \cap \pi(L) \leq_e \pi(L)$ ve $K \cap \pi(L) \leq_e K$ olduğunu gösterelim. $0 \neq x \in \pi(L)$ olsun. Bu durumda $x = \pi(l)$ olacak şekilde bir $0 \neq l \in L$ vardır. $K \cap L \leq_e L$ olduğundan $0 \neq lr \in K \cap L$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. O halde $0 \neq lr = k = l_1$ olacak şekilde $\exists k \in K, l_1 \in L$ vardır. Buradan $0 \neq xr = \pi(l)r = \pi(lr) = \pi(k) = \pi(l_1)$ olup $0 \neq xr = \pi(l)r = k = \pi(l_1) \in K \cap \pi(L)$ bulunur. Dolayısıyla $K \cap \pi(L) \leq_e \pi(L)$ dir. $\pi(L) = N \cap (N' \oplus \pi(L)) = N \cap (N' \oplus L)$ olduğu açıktır. O halde $K \cap \pi(L) = K \cap [N \cap (N' \oplus L)] = K \cap (N' \oplus L)$ elde edilir. $K \cap L = \pi(K \cap L) \leq_e \pi(K) = K$ dir. $\pi(K \cap L) \leq \pi(K) \cap \pi(L) = K \cap \pi(L) \leq K$

ve $\pi(K \cap L) \leq_e K$ olduğundan $K \cap \pi(L) \leq_e K$ bulunur. Böylece N bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. Dolayısıyla M , $\mathcal{G}^+$ -extendingdir. $\square$

Tanım 4.19. R bir halka olsun.

- (i) $e \in R$ ve $e^2 = e$ ise e ye **idempotent** denir. R nin bütün idempotent elemanlarının kümesi $\mathcal{S}(R)$ ile gösterilir.
- (ii) $e_1, e_2 \in R$ iki idempotent olsun. Eğer $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ ise e_1 ve e_2 ye **ortogonal idempotentler** denir.
- (iii) $0 \neq e \in R$ bir idempotent olsun. Eğer $e = f_1 + f_2$ olacak şekilde her f_1 ve f_2 ortogonal idempotent çifti için $f_1 = 0$ ya da $f_2 = 0$ oluyorsa e ye **primitif idempotent** denir.

Tanım 4.20. M bir R -modül olsun. Eğer M nin her dik toplanan çiftinin arakesiti de bir dik toplanan ise M ye **dik toplananların arakesit özelliğini (summand intersection property, kısaca SIP)** sağlar denir.

Önerme 4.21. R bir halka ve $e \in R$ bir idempotent olsun. eR nin ayrıştırılmaz olması için gerek ve yeter koşul e nin primitif idempotent olmasıdır.

Önerme 4.22. M bir ayrıştırılmaz modül olsun. Bu durumda M nin $\mathcal{G}$ -extending modül olması için gerek ve yeter koşul M nin düzgün modül olmasıdır.

Önerme 4.23. M bir $\mathcal{G}$ -extending R -modül ve $N \leq M$ olsun.

- (i) Eğer her $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ olmak üzere $N \cap eM \leq_e fN$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in \text{End}_R(N)$ varsa N bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.
- (ii) Eğer her $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ için $eM \beta fM$ ve $fN \subseteq N$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in \text{End}_R(M)$ varsa N bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. Özel olarak, M nin her projection invariant alt modülü bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

Kanıt. (i) $Y \leq N$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan Önerme 4.3 ten bir $X \leq M$ ve bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $X \leq_e eM$ dir. Bu durumda bir $f^2 = f \in \text{End}_R(N)$ için $X \leq_e eM \cap N \leq_e fN$ dir. O halde $X \leq_e fN \leq_d N$ dir. Dolayısıyla N bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür.

(ii) $Y \leq N$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan $Y\beta eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır. $Y\beta eM$ ve $eM\beta fM$ olduğundan $Y\beta fM$ bulunur. O halde $fN \subseteq N$ olduğundan N bir $\mathcal{G}$ -extending modüldür. $\square$

Önerme 4.24. M bir $\mathcal{G}$ -extending modül olsun. Eğer M modülü SIP ya da (C_2) koşulunu sağlıyorsa M bir $\mathcal{G}^+$ -extending modüldür.

Kanıt. M , $\mathcal{G}$ -extending modül ve $N \leq_d M$ olsun. Kabul edelim ki, M modülü SIP koşulunu sağlasın. $Y \leq N$ olsun. Bu durumda Önerme 4.3 ten, bir $X \leq M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ olmak üzere $X \leq_e eM$ dir. O halde kabulden $N \cap eM \leq_d M$ dir. Böylece bir $K \leq M$ için $M = (N \cap eM) \oplus K$ yazılır. Diğer yandan, $X \leq_e N \cap eM$ dir. Buradan

$$N = N \cap M = N \cap [(N \cap eM) \oplus K] = (N \cap eM) \oplus (N \cap K)$$

elde edilir. O halde $N \cap eM \leq_d N$ olup N , $\mathcal{G}$ -extending modüldür. Dolayısıyla M bir $\mathcal{G}^+$ -extending modüldür. Şimdi kabul edelim ki, M modülü (C_2) koşulunu sağlasın. $d^2 = d \in \text{End}_R(M)$ olmak üzere $D = dM \leq_d M$ ve $Y \leq D$ olsun. Önerme 4.3 ten, bir $X \leq M$ vardır öyle ki $X \leq_e Y$ ve $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ olmak üzere $X \leq_e eM$ dir. $\pi: M \rightarrow D$ bir kanonik projeksiyon olsun. $X \leq_e eM$ ve $X \leq_e Y \leq D = dM$ olduğundan $X \leq_e eM \cap Y \leq eM \cap dM$ dir. O halde

$$X \cap (1-d)M \leq_e eM \cap Y \cap (1-d)M \leq eM \cap dM \cap (1-d)M = 0$$

olduğundan $X \cap (1-d)M = 0$ bulunur. $0 = X \cap (1-d)M \leq_e eM \cap (1-d)M$ olduğundan $eM \cap (1-d)M = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\pi|_{eM}: eM \rightarrow dM$ bir monomorfizmadır. Çünkü $\text{Ker}(\pi|_{eM}) = eM \cap (1-d)M = 0$ dir. $X \leq_e eM$ olduğundan $X = \pi(X) \leq_e \pi(eM) \leq D$ dir. Böylece 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $eM/\text{Ker}(\pi|_{eM}) = \pi(eM)$ olup $eM \cong \pi(eM)$ dir. $\pi(eM)$, M nin bir dik toplanımı olan eM ye izomorf olduğundan (C_2) koşulu gereği $\pi(eM) \leq_d M$ olur. Böylece $K' \leq M$ için $M = \pi(eM) \oplus K'$ yazılır. Buradan

$$D = D \cap M = D \cap [\pi(eM) \oplus K'] = \pi(eM) \oplus (D \cap K')$$

olduğundan $\pi(eM) \leq_d D$ olup D , $\mathcal{G}$ -extending modüldür. Sonuç olarak, M bir $\mathcal{G}^+$ -extending modüldür. $\square$

Tanım 4.25. M bir R -modül ve $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere $X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ olsun. Eğer Λ nın her Λ' sonlu alt kümesi için $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$, M nin bir dik toplananı oluyorsa X e M nin **yerel dik toplananı (local summand)** denir.

R bir halka ve M bir R -modül olsun. Eğer R halkası, $m \in M$ olmak üzere $r(m) = \{s \in R \mid ms = 0\}$ formundaki sağ idealleri üzerinde artan zincir koşulunu (ACC) sağlarsa M modülü (A) koşulunu sağlar diyeceğiz.

Yardımcı Teorem 4.26. M bir R -modül olmak üzere (A) koşulunu sağlasın. Bu durumda M nin her yerel dik toplananı M de bir komplement alt modüldür.

Kanıt. $X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, M nin bir yerel dik toplananı olsun. O halde Önerme 1.10.12 den, $X \leq_e X^* \leq_c M$ olacak şekilde bir $X^* \leq M$ vardır. Kabul edelim ki, $X \neq X^*$ olsun. $m \in X^* \setminus X$ elemanını $r(m)$, $\{r(x) \mid x \in X^* \setminus X\}$ de maksimal olacak şekilde seçelim. $X \leq_e X^*$ olduğundan $0 \neq mr \in X$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. O halde bir $\Lambda' \subseteq \Lambda$ sonlu alt kümesi için $mr \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ dır. X , M nin bir yerel dik toplananı olduğundan $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \leq_d M$ dir. Bu durumda $M = (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda) \oplus Y$ olacak şekilde bir $Y \leq M$ vardır. Böylece $x \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ ve $y \in Y$ olmak üzere $m = x + y$ yazılabilir. Buradan $y = m - x \in X^*$ ve $y \notin X$ dir. Yani $y \in X^* \setminus X$ dir. Eğer $s \in r(m)$ ise $ms = (x + y)s = xs + ys = 0$ dır. Buradan $ys = -xs \in Y \cap (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda) = 0$ bulunur. Böylece $ys = 0$ olup $s \in r(y)$ elde edilir. Yani $r(m) \subseteq r(y)$ dir. O halde $r(m)$ nin maksimalliğinden $r(m) = r(y)$ olmalıdır. $yr = mr - xr \in Y \cap (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda) = 0$ olduğundan $yr = 0$ olup $r \in r(y) = r(m)$ bulunur. Yani $mr = 0$ dır. Fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $X = X^* \leq_c M$ olmalıdır. Sonuç olarak, M nin her yerel dik toplananı M de bir komplement alt modüldür. $\square$

Yardımcı Teorem 4.27. [7, Lemma 4.51] M bir R -modül olmak üzere (A) koşulunu sağlasın. Bu durumda M modülü (C_{11}) ve (C_3) koşullarını sağlarsa M nin her yerel dik toplananı bir dik toplanandır.

Yardımcı Teorem 4.28. [7, Lemma 4.52] M bir R -modül olmak üzere (A) koşulunu sağlasın. Bu durumda M modülü (C_{11}) ve (C_3) koşullarını sağlarsa M modülü düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır.

Sonraki teorem ve sonuç, bir $\mathcal{G}$ -extending modülün düzgün alt modüllerin direkt toplamı şeklinde yazılmasını sağlayan koşulları dikkate alacaktır.

Teorem 4.29. *M bir R -modül olmak üzere (A) koşulunu sağlasın. Bu durumda;*

- (i) *Eğer M , $\mathcal{G}$ -extending modül ise $r(m)$, $\{r(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olacak şekilde her $m \in M$ için bir $e \in \text{End}_R(M)$ primitif idempotenti vardır öyle ki $mR\beta e(M)$ dir.*
- (ii) *Eğer M , $\mathcal{G}^+$ -extending modül ise $r(m)$, $\{r(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olacak şekilde her $m \in M$ için mR bir düzgün modüldür. Böylece M nin her dik toplananı bir düzgün dik toplanan kapsar.*
- (iii) *Eğer M , $\mathcal{G}$ -extending modül olmak üzere SIP ya da (C_3) koşulunu sağlarsa M modülü düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır.*

Kanıt. (i) M , $\mathcal{G}$ -extending modül ve $r(m)$, $\{r(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olacak şekilde bir $0 \neq m \in M$ olsun. M , $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan $mR \leq M$ için $mR\beta eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır. Yani $mR \cap eM \leq_e mR$ ve $mR \cap eM \leq_e eM$ dir. Şimdi e nin primitif idempotent olmadığını kabul edelim. Bu durumda $0 \neq K_1, K_2 \leq eM$ için $eM = K_1 \oplus K_2$ yazılır. O halde $M = eM \oplus (1-e)M$ olduğundan her $m \in M$ için $m = m_1 + m_2 + m'$ olacak şekilde $m_i \in K_i$ ($i = 1, 2$) ve $m' \in (1-e)M$ elemanları vardır. Eğer $m_1 = 0$ ise $m = m_2 + m' \in K_2 \oplus (1-e)M$ dir. Şimdi $x \in mR \cap K_1$ alalım. O halde $x = mr = k_1 = (k_2 + (1-e)(m''))r$ olacak şekilde $r \in R$, $k_i \in K_i$ ve $m'' \in M$ elemanları vardır. Buradan $k_1 = k_2r + (1-e)(m'')r \in K_1 \cap (K_2 \oplus (1-e)M) = 0$ olduğundan $x = k_1 = 0$ bulunur. Yani $mR \cap K_1 = 0$ dir. O halde $0 = (K_1 \cap mR) \cap eM \leq_e K_1 \cap eM = K_1$ olduğundan $K_1 = 0$ olmalıdır. Bu ise e nin primitif idempotent olmamasıyla çelişir. Dolayısıyla $m_1 \neq 0$ olmalıdır. Şimdi $r(m) \subseteq r(m_1)$ olduğunu gösterelim. $s \in r(m)$ olsun. Bu durumda $ms = (m_1 + m_2 + m')s = m_1s + m_2s + m's = 0$ dir. Buradan $m_1s = -m_2s - m's \in K_1 \cap (K_2 \oplus (1-e)M) = 0$ bulunur. Böylece $m_1s = 0$ olup $s \in r(m_1)$ olur. Yani $r(m) \subseteq r(m_1)$ dir. $r(m)$, $\{r(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olduğundan $r(m) = r(m_1)$ olmalıdır. Benzer şekilde, $r(m_2) \neq 0$ ve $r(m) = r(m_2)$ bulunur. Çünkü $mR \cap eM \leq_e eM$ olduğundan $0 \neq m_1 \in K_1 \leq eM$ için bir $r_1 \in R$ vardır öyle ki $0 \neq m_1r_1 \in mR \cap eM$ dir. O halde $0 \neq m_1r_1 \in mR$ olduğundan

$0 \neq m_1 r_1 = m r_2 = (m_1 + m_2 + m') r_2 = m_1 r_2 + m_2 r_2 + m' r_2$ olacak şekilde bir $0 \neq r_2 \in R$ vardır. Böylece $m_1 r_1 - m_1 r_2 = m_2 r_2 + m' r_2 \in K_1 \cap (K_2 \oplus (1-e)M) = 0$ olduğundan $m_2 r_2 = -m' r_2 \in K_2 \cap (1-e)M = 0$ bulunur. Buradan $m_2 r_2 = 0$ olup $r_2 \in r(m_2)$ dir. Sonuç olarak, $r_2 \in r(m_2) \setminus r(m)$ bulunur. Çünkü $r_2 \in r(m)$ olsaydı $m r_2 = 0$ olurdu. Fakat $m r_2 \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Kabulden $r(m)$ maksimal olduğundan $r(m) = r(m_2)$ olmalıdır. Buradan $r(m_2) \setminus r(m) = 0$ olup $r_2 = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla e bir primitif idempotenttir.

(ii) M , $\mathcal{G}^+$ -extending ve her $m \in M$ için $r(m)$, $\{r(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ de maksimal olsun. O halde (i) den, $mR \cap eM \leq_e mR$ ve $mR \cap eM \leq_e eM$ olacak şekilde bir e primitif idempotent vardır. M , $\mathcal{G}^+$ -extending modül olduğundan M nin dik toplananı olan eM de $\mathcal{G}$ -extending modüldür. e primitif idempotent olduğundan Önerme 4.21 den, eM bir ayrıştırılmaz modüldür. O halde Önerme 4.22 den, $e(M)$ bir düzgün modüldür. Şimdi mR nin düzgün modül olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, mR düzgün modül olmasın. Yani $0 \neq X \leq mR$ için $X \cap Y = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq Y \leq mR$ olsun. $X \cap eM \leq eM$, $Y \cap eM \leq eM$ ve eM düzgün modül olduğundan $X \cap eM \leq_e eM$ ve $Y \cap eM \leq_e eM$ dir. Diğer yandan, $mR \cap eM \leq_e mR$ olduğundan $Y \cap eM \leq_e Y$ dir. Böylece $0 = (Y \cap eM) \cap (X \cap eM) \leq_e Y \cap eM$ olduğundan $Y \cap eM = 0$ bulunur. O halde $0 = Y \cap eM \leq_e eM$ olduğundan $eM = 0$ olmalıdır. Bu ise $e \neq 0$ olduğundan mümkün değildir. Dolayısıyla mR bir düzgün modüldür.

(iii) M , $\mathcal{G}$ -extending modül olsun. M nin SIP koşulunu sağladığını kabul edelim. O halde Önerme 4.24 ten, M bir $\mathcal{G}^+$ -extending modüldür. Şimdi

$$S = \{ K, M \text{ nin yerel dik toplananı} \mid K_i \text{ düzgün modülleri için } K = \bigoplus_{i \in I} K_i \}$$

kümesini göz önüne alalım. $0 \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. $(S, \subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir. O halde *Zorn Lemma*'dan S nin bir N maksimal elemanı vardır. S nin tanımı gereği N_i ler düzgün modüller olmak üzere $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, M nin maksimal yerel dik toplananıdır. $N \leq M$ ve M bir $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan $N \beta D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ vardır. Böylece bir $D' \leq M$ için $M = D \oplus D'$ dür. $\overline{N_i} = N_i \cap D$ olsun. N yerel dik toplanan olduğundan $N_i \leq_d M$ dir. O halde

kabulden $N_i \cap D \leq_d M$ dir. Buradan

$$D = D \cap M = D \cap [(N_i \cap D) \oplus K'] = (N_i \cap D) \oplus (D \cap K')$$

olduğundan $N_i \cap D \leq_d D$ dir. N_i ler düzgün modüller olduğundan N_i lerin alt modülleri olan $\overline{N_i} = N_i \cap D$ ler de düzgün modüllerdir. $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ yerel dik toplanan olduğundan bir $F \subseteq I$ sonlu alt kümesi için $\bigoplus_{i \in F} N_i \leq_d M$ dir. Böylece *SIP* koşulu gereği $(\bigoplus_{i \in F} N_i) \cap D = \bigoplus_{i \in F} (N_i \cap D) \leq_d M$ dir. O halde $\overline{N} = \bigoplus_{i \in I} \overline{N_i}$, M nin bir yerel dik toplanamıdır. Ayrıca $M = \bigoplus_{i \in F} (N_i \cap D) \oplus K''$ olacak şekilde bir $K'' \leq M$ vardır. Buradan

$$D = D \cap M = D \cap \left[\left(\bigoplus_{i \in F} (N_i \cap D) \right) \oplus K'' \right] = \bigoplus_{i \in F} (N_i \cap D) \oplus (D \cap K'')$$

olduğundan $\bigoplus_{i \in F} (N_i \cap D) \leq_d D$ bulunur. Dolayısıyla $\overline{N} = \bigoplus_{i \in I} \overline{N_i}$, D nin bir yerel dik toplananı olur. $\overline{N_i} \leq_e N_i$ olduğundan $\overline{N} = \bigoplus_{i \in I} \overline{N_i} \leq_e \bigoplus_{i \in I} N_i = N$ dir. Diğer yandan, $\overline{N} = \bigoplus_{i \in I} (N_i \cap D) \leq D$ olduğu açıktır. O halde $\overline{N} \leq_e N$ ve $N \cap D \leq_e D$ olduğundan $\overline{N} \leq_e N \cap D \leq_e D$ elde edilir. Buradan $\overline{N} \leq_e D \leq_d M$ bulunur. Yardımcı Teorem 4.26 gereği $\overline{N}$, M de bir komplement alt modüldür. Yani $\overline{N}$ nin hiçbir essential genişlemesi yoktur. O halde $\overline{N} = D$ olmalıdır. Buradan

$$\overline{N} = \bigoplus_{i \in I} (N_i \cap D) = \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cap D = N \cap D = D$$

bulunur. Yani $D \leq N$ dir. Ayrıca $D = N \cap D \leq_e N \leq M$ ve $D \leq_d M$ olduğundan $D = N$ bulunur. O halde $M = D \oplus D' = N \oplus D'$ dir. Eğer $D' \neq 0$ ise yukarıda yaptığımız argüman yardımıyla U bir düzgün modül olmak üzere $U, U' \leq D'$ için $D' = U \oplus U'$ yazılır. O halde $M = N \oplus U \oplus U'$ olur. Böylece $N \oplus U$, M nin bir yerel dik toplananı olur. Fakat N maksimal yerel dik toplanan olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $D' = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak, $M = N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ elde edilir. Yani M , düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır. Şimdi M modülü (C_3) koşulunu sağlasın. Ayrıca M bir $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan Teorem 5.19 dan, M modülü (C_{11}) koşulunu sağlar. Yardımcı Teorem 4.28 den, M modülü düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır. $\square$

Tanım 4.30. M bir R -modül olsun. Eğer M modülünün her sonlu üretilmiş alt modülü Noetherian ise M ye **yerel Noetherian (locally Noetherian) modül** denir. Her Noetherian modülün yerel Noetherian modül olduğu açıktır. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir Noetherian modül olduğundan aynı zamanda $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ bir yerel Noetherian modüldür.

Uyarı 4.31. Diğer yandan, her yerel Noetherian modül Noetherian modül olmak zorunda değildir. Örneğin; $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün her sonlu üretilmiş alt modülü Noetherian olduğundan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ yerel Noetherian modüldür. Fakat Sonuç 1.2.22 den, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin maksimal alt modülü yoktur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir Noetherian modül değildir.

Sonuç 4.32. R bir halka ve M bir yerel Noetherian $\mathcal{G}$ -extending R -modül olsun. Bu durumda M modülü SIP ya da (C_3) koşulunu sağlarsa M modülü düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır.

Kanıt. M bir yerel Noetherian $\mathcal{G}$ -extending R -modül olsun. $f: R \rightarrow M$ dönüşümü her $r \in R$ için $f(r) = mr$ şeklinde tanımlı olsun. Eğer her $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 = r_2$ ise $mr_1 = mr_2$ dir. O halde $f(r_1) = f(r_2)$ olup f iyi tanımlıdır. Diğer yandan, her $r_1, r_2, s \in R$ için $f(r_1 + r_2) = m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2 = f(r_1) + f(r_2)$ ve $f(r_1s) = m(r_1s) = (mr_1)s = f(r_1)s$ olduğundan f bir homomorfizmadır. Ayrıca her $y \in M$ için $y = f(r') = mr'$ olacak şekilde bir $r' \in R$ vardır. Yani f örtendir. $\text{Ker}(f) = \{s \in R \mid f(s) = 0\} = \{r \in R \mid ms = 0\} = r(m)$ bulunur. O halde 1. İzomorfizma Teoremi'nden $R/r(m) \cong mR$ elde edilir. M bir yerel Noetherian modül olduğundan mR , Noetherian modüldür. Dolayısıyla $R/r(m)$ de Noetherian modüldür. Şimdi $m_i \in M$ olmak üzere $r(m)$ nin

$$r(m_1) \subseteq r(m_2) \subseteq \cdots \subseteq r(m_k) \subseteq \cdots$$

şeklindeki artan zincirini göz önüne alalım. Buradan $R/r(m)$ nin

$$R/r(m_1) \subseteq R/r(m_2) \subseteq \cdots \subseteq R/r(m_k) \subseteq \cdots$$

şeklindeki bir artan zinciri elde edilir. O halde $R/r(m)$, Noetherian olduğundan $r(m_k) = r(m_{k+t})$ ($\forall t \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $r(m)$, Noetherian olur. Böylece R halkası Noetheriandır. Dolayısıyla R halkası, $m \in M$

olmak üzere $r(m)$ formundaki sağ idealleri üzerinde artan zincir koşulunu (ACC) sağlar. Teorem 4.29 (iii) den, M modülü düzgün alt modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır. $\square$

Tanım 4.33. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $x \in M \setminus \{0\}$ ve $y \in M$ için $x(y^{-1}N) \neq \{0\}$ ise (yani $xr \neq 0$ ve $yr \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa) N ye M nin **yoğun (dense) alt modülü** ya da **N 'ye M 'de yoğundur** denir.

Diğer yandan, $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq y \in M$ için $y(y^{-1}N) \neq \{0\}$ olmasıdır. Bu durumda her yoğun alt modülün bir essential alt modül olduğu açıktır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $R = \mathbb{Z}$ için $M = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ ve $N = p\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ (p asal ve $n \geq 1$) ise $N \leq_e M$ dir. Fakat N , M nin bir yoğun alt modülü değildir. Çünkü $y = \bar{1}$ ve $x = \overline{p^n}$ için $x(y^{-1}N) = 0$ dir.

Tanım 4.34. T , R halkasını kapsayan bir halka olsun. Eğer R_R, T_R de yoğun ise T ye R nin **bölüm halkalarının bir sağ halkası (a right ring of quotients of R)** denir. R nin bölüm halkalarının maksimal sağ halkası $Q(R)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.35. T , R nin bölüm halkalarının bir sağ halkası olsun. (i.e., T , R halkasını kapsayan bir halka olmak üzere R_R, T_R de yoğundur.) Bu durumda T nin X ve Y sağ idealleri için $X_T \leq_e Y_T$ ise $X_R \leq_e Y_R$ dir.

Kanıt. $X_T \leq_e Y_T$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq y \in Y$ olsun. Bu durumda $0 \neq yt \in X$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. R_R, T_R de yoğun olduğundan $0 \neq yt \in T$ ve $t \in T$ için $ytr \neq 0$ ve $tr \in R$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. O halde $0 \neq ytr \in X$ elde edilir. Böylece $X_R \leq_e Y_R$ bulunur. $\square$

Teorem 4.36. [8, Teorem 1] S , R yi kapsayan bir halka olmak üzere $R_R \leq_e S_R$ olsun.

(i) Eğer $R_R, \mathcal{G}$ -extending ise S_R ve $S_S, \mathcal{G}$ -extendingdir.

(ii) $S, Q(R)$ nin bir alt halkası olmak üzere S_R nin $\mathcal{G}$ -extending olması için gerek ve yeter koşul S_S nin $\mathcal{G}$ -extending olmasıdır.

Kanıt. (i) $Y_R \leq S_R$ ve $X_R = (Y \cap R)_R$ olsun. O halde $R_R, \mathcal{G}$ -extending olduğundan Önerme 4.3 ten, bir $K_R \leq R_R$ vardır öyle ki $K_R \leq_e X_R$ ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere

$K_R \leq_e eR_R$ dir. $R_R \leq_e S_R$ olduğundan $X_R = (Y \cap R)_R \leq_e (Y \cap S)_R = Y_R$ bulunur. Böylece $K_R \leq_e X_R \leq_e Y_R$ olduğundan $K_R \leq_e Y_R$ dir. Şimdi iddiamız $K_R \leq_e eS_R$ dir. $0 \neq es \in eS \leq S$ olsun. $R_R \leq_e S_R$ olduğundan $0 \neq esr_1 \in R$ olacak şekilde bir $r_1 \in R$ vardır. $0 \neq e(esr_1) = e^2sr_1 = esr_1 \in eR$ dir. $K_R \leq_e eR_R$ olduğundan $0 \neq esr_1r_2 \in K$ olacak şekilde bir $r_2 \in R$ vardır. Yani $K_R \leq_e eS_R$ dir. Dolayısıyla $S_R, \mathcal{G}$ -extendingdir. Benzer şekilde, $KS_S \leq_e Y_S$ ve $KS_S \leq_e eS_S$ bulunur. Böylece $S_S, \mathcal{G}$ -extending olur.

(ii) $(\Rightarrow)$ (i) den $S_R, \mathcal{G}$ -extending ise S_S de $\mathcal{G}$ -extendingdir.

$(\Leftarrow)$ S_S nin $\mathcal{G}$ -extending olduğunu kabul edelim. $Y_R \leq S_R$ olsun. $S_S, \mathcal{G}$ -extending olduğundan $YS_S \leq S_S$ için $YS_S \beta eS_S$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. Yani $(YS \cap eS)_S \leq_e YS_S$ ve $(YS \cap eS)_S \leq_e eS_S$ dir. O halde Yardımcı Teorem 4.35 den, $(YS \cap eS)_R \leq_e YS_R$ ve $(YS \cap eS)_R \leq_e eS_R$ elde edilir. R_R, S_R de yoğun olduğundan $Y_R \leq_e YS_R$ dir. Bunu görmek için, $0 \neq y \in YS$ alalım. O halde $y_i \in Y, s_i \in S$ ve $y_i s_i \neq 0$ olmak üzere $y = \sum_{i=1}^k y_i s_i$ dir. Buradan $0 \neq y \in S$ ve $s_1 \in S$ için $yr_1 \neq 0$ ve $s_1 r_1 \in R$ olacak şekilde bir $r_1 \in R$ vardır. Yine $0 \neq yr_1 \in S$ ve $s_2 r_1 \in S$ için $yr_1 r_2 \neq 0$ ve $s_2 r_1 r_2 \in R$ olacak şekilde bir $r_2 \in R$ vardır. Böyle devam edilirse

$$\begin{aligned} 0 \neq yr_1 r_2 \dots r_k &= y_1 s_1 (r_1 r_2 \dots r_k) + y_2 s_2 (r_1 r_2 \dots r_k) + \dots + y_k s_k (r_1 r_2 \dots r_k) \\ &= y_1 (s_1 r_1 r_2 \dots r_k) + y_2 (s_2 r_1 r_2 \dots r_k) + \dots + y_k (s_k r_1 r_2 \dots r_k) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $0 \neq yr_1 r_2 \dots r_k \in Y$ dir. Yani $0 \neq y \in YS$ için $0 \neq yr \in Y$ olacak şekilde bir $r = r_1 r_2 \dots r_k \in R$ vardır. Dolayısıyla $Y_R \leq_e YS_R$ elde edilir. Buradan $(Y \cap eS)_R \leq_e (YS \cap eS)_R \leq_e YS_R$ olduğundan $(Y \cap eS)_R \leq_e YS_R$ bulunur. Böylece $(Y \cap eS)_R \leq Y_R \leq_e YS_R$ ve $(Y \cap eS)_R \leq_e YS_R$ olduğundan $(Y \cap eS)_R \leq_e Y_R$ dir. Diğer yandan, $(Y \cap eS)_R \leq_e (YS \cap eS)_R \leq_e eS_R$ olduğundan $(Y \cap eS)_R \leq_e eS_R$ dir. Yani $S_R, \mathcal{G}$ -extendingdir. $\square$

Tanım 4.37. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun.

(i) Eğer her $x \in R$ için $ex = xe$ ise e ye **merkezcil (central) idempotent** denir. Ayrıca R nin tüm idempotentleri merkezcil ise R ye Abelyen halka denir.

(ii) Eğer her $x \in R$ için $xe = exe$ ise e ye **sol yarı-merkezcil (semicentral) idempotent** denir. Tüm sol yarı-merkezcil idempotentlerin kümesi $\mathcal{S}_l(R)$ ile

gösterilir. Yani

$$\mathcal{S}_l(R) = \{ e^2 = e \in R \mid \forall x \in R \text{ için } xe = exe \}$$

şeklindedir.

(iii) *Eğer her $x \in R$ için $ex = exe$ ise e ye **sağ yarı-merkezcil (semicentral) idempotent** denir. Tüm sağ yarı-merkezcil idempotentlerin kümesi $\mathcal{S}_r(R)$ ile gösterilir. Yani*

$$\mathcal{S}_r(R) = \{ e^2 = e \in R \mid \forall x \in R \text{ için } ex = exe \}$$

şeklindedir.

(iv) *Tüm merkezcil idempotentlerin kümesi $\mathcal{B}(R)$ ile gösterilir ve*

$$\mathcal{B}(R) = \mathcal{S}_l(R) \cap \mathcal{S}_r(R)$$

şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.38. *[9, Lemma 2.1] R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

- (i) $e \in \mathcal{S}_l(R)$
- (ii) $1 - e \in \mathcal{S}_r(R)$
- (iii) $(1 - e)Re = 0$
- (iv) eR , R nin bir idealidir.
- (v) $R(1 - e)$, R nin bir idealidir.
- (vi) $eR(1 - e)$, R nin bir ideali ve $eR = eR(1 - e) \oplus Re$ sol ideal direkt ayrışımıdır.

Tanım 4.39. *R bir halka ve M bir (R, R) -bimodül olsun.*

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid r \in R, m \in M \right\}$$

kümesini tanımlayalım. R birimli olduğundan T nin birimi $\begin{bmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 1_R \end{bmatrix}$ olup T birimli bir halkadır. T ye “**split-null extension halkası**” ya da “ **R nin M ile olan aşikâr genişlemesi (trivial extension of M by R)**” denir ve genellikle $T = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ ile gösterilir.

Tanım 4.40. R ve S iki halka, M bir (R, S) -bimodül olsun.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M \right\}$$

kümesini tanımlayalım. R ve S birimli olduğundan T nin birimi $\begin{bmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 1_S \end{bmatrix}$ olup T birimli bir halkadır. T ye “**genelleştirilmiş üçgensel matris halkası (the generalized triangular matrix ring)**” denir ve genellikle $T = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme genelleştirilmiş üçgensel matrisler için oldukça kullanışlıdır.

Önerme 4.41. [10, Önerme 1.3] $T = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ genelleştirilmiş üçgensel matris halkası olmak üzere;

- (1) $c \in \mathcal{I}(\text{End}(M_S))$ ve $e^2 = e \in \text{End}(M_S)$ için $cM_S \beta eM_S$ ise $cM = eM$, $c \text{End}(M_S) = e \text{End}(M_S)$ ve $e \in \mathcal{I}(\text{End}(M_S))$ dir.
- (2) $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in \mathcal{I}(T)$ olması için gerek ve yeter koşul $c \in \mathcal{I}(R)$, $e \in \mathcal{I}(S)$, $k = ck$, $ke = 0$ ve her $m \in M$ için $cme = me$ olmasıdır.
- (3) $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in T$ olsun. Bu durumda $k = ck$ olması için gerek ve yeter koşul $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olmasıdır.

Kanıt. (1) $c \in \mathcal{I}(\text{End}(M_S))$ ve $e^2 = e \in \text{End}(M_S)$ için $cM_S \beta eM_S$ olsun. Yani $cM_S \cap eM_S \leq_e cM_S$ ve $cM_S \cap eM_S \leq_e eM_S$ dir. Bu durumda $c \in \mathcal{I}(\text{End}(M_S))$ olduğundan $ec = cec$ dir. Buradan $ec = e^2c = ecec = (ec)^2$ dir. $cM \cap eM = ecM$ dir. Gerçekten, $cm \in cM \cap eM$ olsun. O halde $cm = em'$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Böylece $ecm = e^2m' = em' = cm \in ecM$ dir. Yani $cM \cap eM \subseteq ecM$ dir. Şimdi $ecm \in ecM$ olsun. Buradan $ec = cec$ olduğundan $ecm = cecm \in cM$ dir. Ayrıca $ecm \in eM$ dir. Yani $ecM \subseteq cM \cap eM$ dir. O halde $cM \cap eM = ecM$ elde edilir. Böylece $cM = ecM = eM$ dir. Şimdi $cm \in cM = eM$ olsun. Bu durumda bir $n \in N$ için $cm = en$ yazılır. Buradan $ecm = e^2n = en = cm$ olup $ec = c$ bulunur.

O halde $c\text{End}(M_S) \subseteq e\text{End}(M_S)$ dir. Diğer yandan, $em \in eM = cM$ olsun. Böylece $em = ck$ olacak şekilde bir $k \in M$ vardır. Buradan $cem = c^2k = ck = em$ olup $ce = e$ bulunur. Benzer şekilde, $e\text{End}(M_S) \subseteq c\text{End}(M_S)$ dir. Sonuç olarak, $c\text{End}(M_S) = e\text{End}(M_S)$ elde edilir. Şimdi $e \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_S))$ olduğunu gösterelim. $r \in \text{End}(M_S)$ olsun. Buradan $re = r(ce) = (rc)e = (crc)e = ecrce = erce = ere$ bulunur. Böylece $e \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_S))$ bulunur.

(2) $(\Rightarrow)$ $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_l(T)$ olduğunu kabul edelim. $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} rc & rk+me \\ 0 & se \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm+ks \\ 0 & es \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} crc & crk+cme+kse \\ 0 & ese \end{bmatrix}$$

olduğundan $rc = crc$, $se = ese$ ve $rk+me = crk+cme+kse$ dir. Böylece $c \in \mathcal{S}_l(R)$ ve $e \in \mathcal{S}_l(S)$ dir. $r = 1$, $m = 0$ ve $s = 0$ ise $k = ck$ bulunur. $r = 0$, $m = 0$ ve $s = 1$ ise $ke = 0$ bulunur. $r = 0$ ve $s = 0$ ise her $m \in M$ için $cme = me$ bulunur.

($\Leftarrow$) $c \in \mathcal{S}_l(R)$, $e \in \mathcal{S}_l(S)$, $k = ck$, $ke = 0$ ve her $m \in M$ için $cme = me$ olduğunu kabul edelim. $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} crc & crk+cme+kse \\ 0 & ese \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rc & (crc)k+me+(ke)se \\ 0 & se \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} rc & r(ck)+me \\ 0 & se \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rc & rk+me \\ 0 & se \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_l(T)$ elde edilir.

(3) $(\Rightarrow)$ $k = ck$ olsun. $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ alalım. O halde

$$\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm+ks \\ 0 & es \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm+(ck)s \\ 0 & es \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m+ks \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$$

olduğundan $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T \subseteq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Şimdi $\begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \in T$ alalım. Böylece

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr_1 & cm_1 \\ 0 & es_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr_1 & cm_1-(ck)s_1+ks_1 \\ 0 & es_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & m_1-ks \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$$

olduğundan $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T \subseteq \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Sonuç olarak, $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & es \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır. Böylece $k = cm$ dir. Buradan $ck = c^2m = cm = k$ elde edilir. $\square$

Önerme 4.42. [10, Önerme 1.4] A bir birimli halka, $c \in \mathcal{I}_l(A)$ ve $1 - c \neq 0$ olmak üzere $A = cA \oplus (1 - c)A$ (sağ ideal direkt ayrışımı) olsun. Bu durumda;

- (i) $A' = (1 - c)A$ birimi $1 - c$ olan bir halka ve $A' \cong A/cA$ olsun. Eğer $Z(A_A) \subseteq cA$ ise A'_A ve $A'_{A'}$ nonsingular modüllerdir.
- (ii) A'_A nın $(\mathcal{G})$ -extending olması için gerek ve yeter koşul $A'_{A'}$ nün $(\mathcal{G})$ -extending olmasıdır.
- (iii) $Z(A_A) \subseteq cA$ olsun. Bu durumda $A'_{A'}$ nün $\mathcal{G}$ -extending olması için gerek ve yeter koşul $A'_{A'}$ nün extending olmasıdır.

Önerme 4.43. [10, Önerme 1.5] Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) Eğer $Y_S \leq M_S$ ise $Y_S \beta f M_S$ ($Y_S \leq_e f M_S$) olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır.
- (ii) Eğer M_S , $\mathcal{G}$ -extending (extending) ve $D_S \leq_d M_S$ ise $D_S \beta f M_S$ ($D_S = f M_S$) olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır.

Önerme 4.44. [10, Önerme 1.6] M bir S -modül olsun. Eğer $M/Z_2(M_S)$, S_S -ejektif ise $M/Z_2(M_S)$ injektif S -modül ve injektif $S/Z_2(S_S)$ -modüldür. Özel olarak, eğer M_S , S_S -ejektif ve $M = Z_2(M_S) \oplus X$ ise $M/Z_2(M_S)$ injektif S -modül ve injektif $S/Z_2(S_S)$ -modüldür.

Önerme 4.45. [12, Önerme 1.9] Eğer M_R bir $\mathcal{G}$ -extending modül, $X \triangleleft M$ ve $Z(M/X) = 0$ ise M/X bir extending modüldür.

Sonuç 4.46. [12, Sonuç 3.10] ρ , bir stable hereditary torsion teori için radikal olsun (e.g., $\rho = Z_2$). Bu durumda M nin bir $\mathcal{G}$ -extending modül olması için gerek ve yeter koşul M_1 ve $M_2 = \rho(M)$, $\mathcal{G}$ -extending modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olmasıdır.

Önerme 4.47. [10, Önerme 1.2] M bir R -modül olsun. M nin bir $\mathcal{G}$ -extending modül olması için gerek ve yeter koşul $Z_2(M)$ bir $\mathcal{G}$ -extending modül ve K bir extending modül olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus K$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 4.48. $H = \text{End}_R(M)$ ve $e^2 = e \in H$ olsun.

(i) $A \triangleleft M$ olsun. Bu durumda $(eM + A) \triangleleft M$ olması için gerek ve yeter koşul $(1 - e)H(eM) \subseteq A$ olmasıdır.

(ii) $eM \triangleleft M$ olması için gerek ve yeter koşul $e \in \mathcal{S}_l(H)$ olmasıdır.

Kanıt. (i) $(\Rightarrow)$ $t \in (1 - e)He$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $tm = tem \in eM + A$ bulunur. Buradan $tm = (1 - e)tm \in (1 - e)A \subseteq A$ dır.

$(\Leftarrow)$ $h \in H$ olsun. O halde

$$h(eM) = (eh + (1 - e)h)eM \subseteq eM + (1 - e)HeM \subseteq eM + A$$

elde edilir. Dolayısıyla $eM + A \triangleleft M$ bulunur.

(ii) $(\Rightarrow)$ $h \in H$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $hem = ek$ olacak şekilde bir $k \in M$ vardır. Böylece $ehem = e^2k = ek = hem$ dir. O halde $ehe = he$ dir. Dolayısıyla $e \in \mathcal{S}_l(H)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $h \in H$ ve $m \in M$ olsun. O halde $hem = ehem \in eM$ dir. Böylece $eM \triangleleft M$ bulunur. $\square$

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe R, S birimli halkalar ve M bir (R, S) -bimodül olmak üzere $T = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ bir genelleştirilmiş üçgensel matris halkası olarak ele alınacaktır.

Önerme 4.49. [11, Önerme 4.2] K, T nin bir sağ ideali ve $l_R(M) = 0$ (i.e., ${}_R M$ faithful) olsun. Bu durumda $K_T \leq_e T_T$ olması için gerek ve yeter koşul $\begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & E \end{bmatrix} \subseteq K$ olacak şekilde bir $N_S \leq_e M_S$ ve bir $E_S \leq_e S_S$ var olmasıdır.

Önerme 4.50. ${}_R M$ faithful (i.e., $l_R(M) = 0$) olsun. Kabul edelim ki, $D_S \leq_d M_S$ ise $D_S \beta f M_S$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ olsun. Eğer M_S ve S_S , $\mathcal{G}$ -extending ise bir $c^2 = c \in R$ ve bir $e \in \mathcal{S}_l(S)$ vardır öyle ki

$$(1) \quad Z_2(M_S) = cM;$$

$$(2) \quad Z_2(S_S) = eS; \text{ ve}$$

$$(3) \quad Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} cR & Z_2(M_S) \\ 0 & Z_2(S_S) \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Kanıt. (1) ve (2) M_S ve S_S , $\mathcal{G}$ -extending olsun. Sonuç 4.46 dan, $Z_2(M_S) \leq_d M_S$ ve $Z_2(S_S) \leq_d S_S$ dir. $Z_2(M_S) \triangleleft M_S$ ve $Z_2(S_S) \triangleleft S_S$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.48

(ii) den, $c' \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_S))$ ve $e \in \mathcal{S}_l(S)$ olmak üzere $Z_2(M_S) = c'M$ ve $Z_2(S_S) = eS$ bulunur. O halde hipotez ve Önerme 4.41 (1) den, $c \in R$ ve $c \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_S))$ olmak üzere $Z_2(M_S) = cM$ elde edilir.

(3) Kabul edelim ki, $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in Z(T_T)$ olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} L = 0$ olacak şekilde bir $L_T \leq_e T_T$ vardır. Önerme 4.49 gereği $\begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & E \end{bmatrix} \subseteq L$ olacak şekilde bir $N_S \leq_e M_S$ ve bir $E_S \leq_e S_S$ vardır. O halde $\begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & E \end{bmatrix} \subseteq L$ olduğundan $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & rN+mE \\ 0 & sE \end{bmatrix} = 0$ elde edilir. Böylece $rN + mE = 0$ ve $sE = 0$ dir. Dolayısıyla $m \in Z(M_S)$ ve $s \in Z(S_S)$ bulunur. Eğer $rM = 0$ ise $l_R(M) = \{r \in R \mid rM = 0\} = 0$ olduğundan $r = 0$ olup $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olur. Şimdi $rM \neq 0$ olsun. Bu durumda $rk \neq 0$ olacak şekilde bir $k \in M$ vardır. O halde $k \notin N$ dir. Çünkü $k \in N$ olsaydı $rN = 0$ olduğundan $rk = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Şimdi $X = \{s \in S \mid ks \in N_S\}$ sağ idealini göz önüne alalım. $kX \subseteq N$ olduğu açıktır. İddiamız $X_S \leq_e S_S$ dir. $y \in S_S \setminus X_S$ alalım. Bu durumda $y \notin X_S$ olup $ky \notin N_S$ dir. $N_S \leq_e M_S$ olduğundan $kys' \in N_S$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır. Dolayısıyla $ys' \in X_S$ olup $X_S \leq_e S_S$ bulunur. Böylece $r(kX) \subseteq rN = 0$ olduğundan $r(kX) = (rk)X = 0$ dir. O halde $rk \in Z(M_S) \leq Z_2(M_S) = cM$ dir. $rk = cm_1$ olacak şekilde bir $m_1 \in M$ vardır. Buradan $crk = c^2m_1 = cm_1 = rk$ olup $crk - rk = (cr - r)k = 0$ dir. ${}_R M$ faithful olduğundan $cr = r$ dir. Ayrıca $m \in Z(M_S) = cM$ olduğundan $m = cm_2$ olacak şekilde bir $m_2 \in M$ vardır. Buradan $cm = c^2m_2 = cm_2 = m$ olup $cm = m$ dir. Diğer yandan, $s \in Z(S_S) = eS$ olduğundan $s = es_1$ olacak şekilde bir $s_1 \in S$ vardır. Buradan $es = e^2s_1 = es_1 = s$ olup $es = s$ dir. Sonuç olarak, $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & es \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ elde edilir. Böylece $Z(T_T) \subseteq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ bulunur. O halde $Z_2(T_T) \subseteq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Şimdi $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \subseteq Z(T_T)$ ve $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ olduğunu gösterelim.

İddia 1. $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \subseteq Z(T_T)$ dir.

$0 \neq \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & v \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $k \in Z(M_S)$ ve $v \in Z(S_S)$ olduğundan $kX = 0$ ve $vY = 0$ olacak şekilde bir $X_S \leq_e S_S$ ve bir $Y_S \leq_e S_S$ vardır. O halde $(X \cap Y)_S \leq_e S_S$ dir. Böylece $\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & X \cap Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(X \cap Y) \\ 0 & v(X \cap Y) \end{bmatrix} = 0$ dir. $\begin{bmatrix} R & M \\ 0 & X \cap Y \end{bmatrix}_T \leq_e T_T$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & v \end{bmatrix} \in Z(T_T)$ bulunur. Sonuç olarak, $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \subseteq Z(T_T)$ elde edilir.

İddia 2. $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ dir.

$0 \neq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & es \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olsun. Eğer $cr = 0$ ise $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & es \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix}$ dir. $cr \neq 0$ olsun. ${}_R M$ faithful olduğundan $0 \neq crk = c(rk) \in cM = Z_2(M_S)$ olacak

şekilde bir $k \in M$ vardır. O halde bir $v \in S$ vardır öyle ki $0 \neq crkv \in Z(M_S)$ dir. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & es \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & kv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & crkv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix}$ dir. O halde $\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \subseteq Z(T_T) \subseteq Z_2(T_T) \subseteq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 & Z(M_S) \\ 0 & Z(S_S) \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$$

olduğundan $Z_2(T_T) \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Fakat $Z_2(T_T) \leq_c T_T$ olduğundan $Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & eS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cR & Z_2(M_S) \\ 0 & Z_2(S_S) \end{bmatrix}$$

elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.51. $A = l_R(M)$ olmak üzere bir $a^2 = a \in R$ için $aR = A$ olsun. Eğer $f = f^2 \in R$ ise $(1-a)f = [(1-a)f]^2$ ve $fM = (1-a)fM$ dir.

Kanıt. $A \triangleleft R$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $a \in \mathcal{I}_l(R)$ dir. O halde $f = f^2 \in R$ için $fa = afa$ dir. Ayrıca $a \in \mathcal{I}_l(R)$ olduğundan $1-a \in \mathcal{S}_r(R)$ dir. Böylece $(1-a)f = (1-a)f(1-a)$ olur. O halde

$$[(1-a)f]^2 = (1-a)f(1-a)f = (1-a)f^2 = (1-a)f$$

dir. Buradan $m \in M$ için $fm = afm + (1-a)fm = (1-a)fm$ yazılır. Dolayısıyla $fM = (1-a)fM$ elde edilir. □

Tanım 4.52. R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ iken $a \in I$ ya da $b \in I$ oluyorsa R ye **yarı-asal (semiprime) ideal** denir. Eğer R nin 0 ideali yarı-asal ise R ye **yarı-asal halka** denir.

Ayrıca R bir yarı-asal halka ve $A^n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olacak şekilde A , R nin bir ideali ise $A = 0$ dir. Yani R bir yarı-asal halka ise R nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

Yardımcı Teorem 4.53. R bir yarı-asal halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda e nin merkezci idempotent olması için gerek ve yeter koşul eR nin bir ideal olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki, e bir merkezci idempotent olsun. O halde her $r \in R$ için $er = re$ dir. Şimdi $er \in eR$ ve $r' \in R$ olsun. Böylece $(er)r' = e(rr') \in eR$ ve

$r'(er) = r'(re) = (r'r)e = e(r'r) \in eR$ bulunur. Dolayısıyla eR , R nin bir idealidir. ($\Leftarrow$) eR , R nin bir ideali olsun. O halde $Re \subseteq eR$ dir. $(1-e)Re \subseteq (1-e)eR = 0$ olduğundan $(1-e)Re = 0$ dir. Böylece her $r \in R$ için $(1-e)re = re - ere = 0$ olup $re = ere$ bulunur. Yani $e \in \mathcal{S}_l(R)$ olup $Re = eRe$ dir. O halde $1-e \in \mathcal{S}_r(R)$ olup $(1-e)R = (1-e)R(1-e)$ dir. Buradan

$$R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e)$$

olduğundan $R = Re \oplus R(1-e)$ elde edilir. Böylece $R(1-e)$, R nin bir ideali olduğundan $eR(1-e)$, R nin bir sağ idealidir. Gerçekten, $er(1-e) \in eR(1-e)$ ve $\bar{r} \in R$ için $er(1-e)\bar{r} = e(r(1-e)\bar{r}) \in eR(1-e)$ dir. Ayrıca $[eR(1-e)]^2 = 0$ dir. R bir yarı-asal halka olduğundan R nin 0 dan farklı nilpotent sağ ideali yoktur. Dolayısıyla $eR(1-e) = 0$ olmalıdır. Buradan $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ olup $er = ere$ bulunur. Diğer yandan, $(1-e)Re = 0$ olduğundan $(1-e)re = 0$ olup $re = ere$ bulunur. Sonuç olarak, $er = ere = re$ olduğundan e bir merkezci idempotenttir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.54. $A = l_R(M)$ ve $a^2 = a \in R$ olmak üzere $A = aR$, $R' = (1-a)R(1-a)$ ve $B = \begin{bmatrix} R' & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ olsun.

(1) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleleft T$, M bir (R', S) -bimodule ve $B = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}T$ olmak üzere $T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \oplus \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}T$ dir.

(2) B_T , $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T_T$ -injektiftir.

(3) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T_T$, B_T -ejektiftir.

(4) Eğer $a^2 = a \in Cen(R)$ (e.g., R bir yarı-asal halka) ise $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T_T$, B_T -injektiftir.

Kanıt. (1) $A = l_R(M) = \{r \in R \mid rM = 0\} = aR$ olsun. $a1_R = a \in aR = l_R(M)$ olduğundan $aM = 0$ dir. O halde

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aR & aM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aR & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. $A \triangleleft R$ olduğundan $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleleft T$ dir. O halde Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $a \in \mathcal{S}_l(R)$ ve $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_l(T)$ dir. $A = l_R(M)$ olduğundan her $m \in M$ için

$(1-a)m = m - am = m$ bulunur. $(1-a) \in \mathcal{S}_r(R)$ olduğundan her $r \in R$ için $(1-a)r = (1-a)r(1-a)$ yazılır. Yani $(1-a)R = (1-a)R(1-a) = R'$ dir. Böylece

$$\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a)R & (1-a)M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R' & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = B$$

bulunur. O halde M bir (R', S) -bimodül olmak üzere $B = \begin{bmatrix} R' & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \oplus \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} aR & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} (1-a)R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aR \oplus (1-a)R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = T$$

elde edilir.

(2) $\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T$ ve $h: \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow B$ bir T -homomorfizma olsun. Şimdi $k \in K$ alalım. O halde $h\left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (1-a)r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in B$ dir. Kabul edelim ki, $(1-a)r \neq 0$ olsun. Bu durumda ${}_R M$ faithful olduğundan $(1-a)rm_1 \neq 0$ olacak şekilde bir $m_1 \in M$ vardır. Böylece

$$h\left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a)r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-a)rm_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan $(1-a)rm_1 = 0$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $(1-a)r = 0$ olmalıdır. Diğer yandan, $h\left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{bmatrix}$ olduğundan $m = s = 0$ olup $h\left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. O halde $h = 0$ dır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T & \xrightarrow{i} & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \\ \downarrow h & \nwarrow h' & \\ B_T & & \end{array}$$

diyagramı $h' = 0$ homomorfizması için değişmelidir. Yani $B_T, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ -injektiftir.

(3) $X_T \leq B_T$ ve $h: X \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ bir T -homomorfizma olsun. $\begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & S \end{bmatrix}_T \leq_e B_T$ olduğundan $Y = X \cap \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ olmak üzere $Y_T \leq_e X_T$ dir. $y \in Y$ alalım. Bu durumda $y = x = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\exists m \in M$ ve $s \in S$ vardır. O halde $h(y) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $b \in A$ vardır. Böylece

$$h(y) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = h(y) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla $h(Y) = 0$ olup $h = 0$ dır. Sonuç olarak,

$$\begin{array}{ccccc} Y_T & \xrightarrow{i} & X_T & \xrightarrow{i} & B_T \\ & & \downarrow h & \nwarrow \bar{h} & \\ & & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T & & \end{array}$$

diyagramı $\bar{h} = 0$ homomorfizması için değişmelidir. Yani $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, B_T -ejektiftir.

(4) Yukarıda (3) de kullanılan notasyonlar kullanılacaktır. $\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \in X_T$ olsun. Bu durumda $h\left(\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $k \in A$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} h\left(\begin{bmatrix} r(1-a) & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) &= h\left(\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(1-a) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup $h\left(\begin{bmatrix} r(1-a) & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k(1-a) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. Gerçekten, $k \in A = aR$ olduğundan $k = ar_1$ olacak şekilde bir $r_1 \in R$ vardır. Ayrıca $a \in Cen(R)$ olduğundan $aR = Ra$ dır. O halde $k(1-a) = ar_1(1-a) = r_1a(1-a) = 0$ bulunur. Diğer yandan, $a \in Cen(R)$ olduğundan $1-a \in Cen(R)$ dır. Yani $(1-a)R = R(1-a)$ dır. O halde $r \in R' = (1-a)R = R(1-a)$ olduğundan $r = r_2(1-a)$ olacak şekilde bir $r_2 \in R$ vardır. Buradan $r(1-a) = r_2(1-a)^2 = r_2(1-a) = r$ bulunur. Böylece $h\left(\begin{bmatrix} r & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir. Dolayısıyla $h = 0$ dır. Sonuç olarak,

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{i} & B_T \\ \downarrow h & \nwarrow h' & \\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T & & \end{array}$$

diyagramı $h' = 0$ homomorfizması için değişmelidir. Yani $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, B_T -injektiftir.

R bir yarı-asal halka ise $A = aR$, R nin bir ideali ve $a^2 = a \in R$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.53 ten, $a \in Cen(R)$ olur. $\square$

Yardımcı Teorem 4.55. T_T , $\mathcal{G}$ -extending olsun.

- (1) Eğer $Y_S \leq M_S$ ise $Y_S \beta c M_S$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ vardır.
- (2) M_S ve S_S , $\mathcal{G}$ -extendingdir.
- (3) M_S , S_S -ejektiftir.

(4) $A = l_R(M)$ olsun. Bu durumda $A = aR$, aR_R $\mathcal{G}$ -extending ve $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_l(T)$ olacak şekilde bir $a^2 = a \in R$ vardır. Üstelik, $R' = (1 - a)R(1 - a)$ için $B = \begin{bmatrix} R' & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ bir genelleştirilmiş üçgensel matris halkası olmak üzere $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, B_T ve B_B , $\mathcal{G}$ -extendingdir.

Kanıt. (1) $Y_S \leq M_S$ olsun. T_T , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & Y_S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq T_T$ için

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T\right)_T \leq_e \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \quad \text{ve} \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T\right)_T \leq_e \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$$

olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in T$ vardır. $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olacak şekilde bir $X_S \leq Y_S$ vardır. Ayrıca $X \subseteq cM$ dir. Şimdi $0 \neq cm \in cM$ alalım. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olduğundan bir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cms \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Buradan $0 \neq cms \in X \leq Y$ olup $0 \neq cms \in (Y \cap cM)_S$ dir. Yani $(Y \cap cM)_S \leq_e cM_S$ dir. Benzer şekilde, $(Y \cap cM)_S \leq_e Y_S$ bulunur. Sonuç olarak, $Y_S \beta cM_S$ elde edilir.

(2) $0 \neq X_S \leq M_S$ olsun. T_T , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & X_S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq T_T$ için

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T\right)_T \leq_e \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \quad \text{ve} \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T\right)_T \leq_e \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$$

olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in T$ vardır. Şimdi $0 \neq x \in X$ alalım. Bu durumda $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T \leq_e \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ için bir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & xs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & xs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \in T$ vardır. Buradan $\begin{bmatrix} 0 & cxs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & xs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xs \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. O halde $0 \neq xs = cxs \in (X \cap cM)_S$ dir. Dolayısıyla $(X \cap cM)_S \leq_e X_S$ elde edilir. Şimdi $(X \cap cM)_S \leq_e cM_S$ olduğunu gösterelim. $0 \neq cm \in cM_S$ alalım. Bu durumda $0 \neq \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T \leq_e \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olduğundan bir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cmv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} c & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. O halde $0 \neq cmv \in (X \cap cM)_S$ olup $(X \cap cM)_S \leq_e cM_S$ dir. Dolayısıyla M_S , $\mathcal{G}$ -extendingdir. Benzer şekilde, S_S nin $\mathcal{G}$ -extending olduğu gösterilebilir.

(3) $X_S \leq S_S$ ve $\varphi: X_S \rightarrow M_S$ bir S -homomorfizma olsun. Şimdi

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \varphi(x) \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x \in X \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Böylece $F_T \leq T_T$ dir. T_T , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan $\begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $F_T \beta \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T_T$ dir. Yani $(F \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T)_T \leq_e F_T$ ve $(F \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T)_T \leq_e \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T_T$ dir. Şimdi $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \neq \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T$ dir. $(F \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T)_T \leq_e \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T_T$ olduğundan bir $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar & am \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F$ dir. Böylece bir $x \in S$ vardır öyle ki $\begin{bmatrix} ar & am \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(x) \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dir. Buradan $x = 0$, $ar = 0$ ve $am = \varphi(0) = 0$ olduğundan $\begin{bmatrix} ar & am \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix}$ elde edilir.

$$Y = \left\{ y \in X \mid \begin{bmatrix} 0 & \varphi(y) \\ 0 & y \end{bmatrix} \in F \cap \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $Y_S \leq X_S$ olduğu açıktır. $0 \neq x \in X$ alalım. Bu durumda $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & \varphi(x) \\ 0 & x \end{bmatrix} \in F$ dir. $F \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T \leq_e F$ olduğundan $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & \varphi(x) \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(xv) \\ 0 & xv \end{bmatrix} \in F \cap \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T$ olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \in T$ vardır. Böylece $0 \neq xv \in Y$ olup $Y_S \leq_e X_S$ bulunur. Şimdi $\begin{bmatrix} 0 & \varphi(w) \\ 0 & w \end{bmatrix} \in F \cap \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T$ olsun. Böylece $\begin{bmatrix} 0 & \varphi(w) \\ 0 & w \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} T$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & \varphi(w) \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır. Bu durumda $\begin{bmatrix} 0 & kw \\ 0 & bw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varphi(w) \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(w) \\ 0 & w \end{bmatrix}$ bulunur. O halde $\varphi(w) = kw$ elde edilir. Her $s \in S$ için $\overline{\varphi}(s) = ks$ olacak şekilde bir $\overline{\varphi}: S_S \rightarrow M_S$ S -homomorfizması tanımlansın. Böylece her $w \in Y$ için $\overline{\varphi}(w) = \varphi(w)$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccccc} Y_S & \xrightarrow{i} & X_S & \xrightarrow{i} & S_S \\ & & \downarrow \varphi & \nwarrow \overline{\varphi} & \\ & & M_S & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla M_S , S_S -ejektiftir.

(4) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleleft T$ ve T_T , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan $\begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \beta \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ dir. Yani $(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T)_T \leq_e \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T$ ve $(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T)_T \leq_e \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ dir. $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olsun. $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ olduğundan $e = 0$ dir. Gerçekten, $0 \neq \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} T$ dir. Bu durumda bir $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ks \\ 0 & es \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $e = 0$ dir. Kabul edelim ki, $0 \neq k \in M$ olsun. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ dir. Bu durumda bir $\begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ks_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup bu bir çelişkidir. O halde $k = 0$, $\begin{bmatrix} a & k \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} aR & aM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. $aM \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $0 \neq am_2 \in aM$ olacak şekilde bir $m_2 \in M$ vardır.

Bu durumda $0 \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & am_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ dir. O halde bir $\begin{bmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & am_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & am_2 s_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Fakat bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $aM = 0$ dir. O halde $a \in A = l_R(M)$ olup $aR \subseteq A$ dir. Buradan $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \leq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T$ dir. $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T$ olduğundan $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ ve $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \leq_e \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T$ dir. Fakat $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \leq_d T_T$ olduğundan $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ nin essential genişlemesi yoktur. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} aR & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir. Böylece $A = aR$ bulunur. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleleft T$ olduğundan $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_l(T)$ dir. Önerme 4.41 (1) den, $a \in \mathcal{S}_l(R)$ olur. $T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \oplus \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \oplus B_T$ dir. Teorem 4.16 (ii) den, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ ve B_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir. O halde aR_R , $\mathcal{G}$ -extendingdir. Önerme 4.42 (ii) gereği B_B , $\mathcal{G}$ -extendingdir. $\square$

Teorem 4.56. T_T nin nonsingular ve extending olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

- (i) Her $K_S \leq_c M_S$ için $K_S = eM_S$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır.
- (ii) S_S , nonsingular ve extendingdir.
- (iii) M_S bir nonsingular injektif modüldür.

Yardımcı Teorem 4.57. Eğer ${}_R M$ faithful ve aşağıdaki koşullar sağlanırsa T_T , $\mathcal{G}$ -extending olur.

- (i) Eğer $D_S \leq_d M_S$ ise $D_S \beta f M_S$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır.
- (ii) M_S ve S_S , $\mathcal{G}$ -extendingdir.
- (iii) M_S , S_S -ejektiftir.

Kanıt. Önerme 4.50 den, $Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T$, $Z_2(M_S) = cM$ ve $Z_2(S_S) = eS$ ve $T' = \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} T$ olmak üzere $T = Z_2(T_T) \oplus T'$ olduğunu biliyoruz. Yani

$$\begin{aligned}
T_T = Z_2(T_T) \oplus T' &= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T \oplus \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} T \\
&= \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & eS \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} (1-c)R & (1-c)M \\ 0 & (1-e)S \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} cR \oplus (1-c)R & cM \oplus (1-c)M \\ 0 & eS \oplus (1-e)S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $Z(T'_T) = 0$ dir. İlk olarak, $Z_2(T_T)$ nin $\mathcal{G}$ -extending olduğunu gösterelim.

İddia 1. $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T = \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

Eğer $c = 0$ ise kanıt elde edilir. Kabul edelim ki, $c \neq 0$ olsun. $X_T \leq \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ olsun. $\begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ dir. Gerçekten, $0 \neq \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ olsun. Eğer $cr = 0$ ise bir $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cms \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Eğer $cr \neq 0$ ise ${}_R M$ faithful olduğundan $0 \neq crm_1 \in cM$ olacak şekilde bir $m_1 \in M$ vardır. O halde $0 \neq \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & crm_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup $\begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_e \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ bulunur. $Y' \leq cM$ için $Y = X \cap \begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Böylece $Y_T \leq_e X_T$ olduğundan $X_T \beta Y_T$ dir. M_S , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan $Y'_S \leq M_S$ için $Y'_S \beta bM_S$ olacak şekilde bir $b^2 = b \in R$ vardır. Şimdi $Y_T \beta \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ olduğunu gösterelim. $Y_T \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \leq_e \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ olduğunu göstermek için $0 \neq \begin{bmatrix} br & bm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ olsun. Kabul edelim ki, $br \neq 0$ olsun. ${}_R M$ faithful olduğundan $0 \neq brn \in bM$ olacak şekilde bir $n \in M$ vardır. Bu durumda $Y'_S \cap bM_S \leq_e bM_S$ olduğundan bir $s \in S$ vardır öyle ki $0 \neq brns \in Y'_S \cap bM_S$ dir. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} br & bm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ns \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & brns \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Y \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ bulunur. Eğer $br = 0$ ise bir $v \in S$ vardır öyle ki $0 \neq bmv \in Y'_S \cap bM_S$ dir. O halde $0 \neq \begin{bmatrix} br & bm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bmv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Y \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ olup $(Y \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T)_T \leq_e \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ bulunur. $Y_T \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \leq_e Y_T$ olduğunu göstermek için $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Y_T = \begin{bmatrix} 0 & Y' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $Y'_S \cap bM_S \leq_e Y'_S$ olduğundan $0 \neq yw \in Y'_S \cap bM_S$ olacak şekilde bir $w \in S$ vardır. O halde $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & yw \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Y \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ olup $(Y \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T)_T \leq_e Y_T$ bulunur. Sonuç olarak, $Y_T \beta \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ elde edilir. Böylece β bir denklik bağıntısı ve $X_T \beta Y_T$ olduğundan $X_T \beta \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ bulunur. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

İddia 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & eS \end{bmatrix}$ dir. S_S bir $\mathcal{G}$ -extending modül olduğundan Sonuç 4.46 gereği $Z_2(S_S) \leq_d S_S$ ve $Z_2(S_S) = eS$, $\mathcal{G}$ -extendingdir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

İddia 3. $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T$ -ejektiftir.

$X_T \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} T_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & eS \end{bmatrix}$ ve $h: X_T \longrightarrow \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ bir T -homomorfizma olsun. Bu durumda bir $K_S \leq_e eS_S$ için $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$ dir. Şimdi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \in X$ olsun. O halde $h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\exists r \in R, m \in M$ vardır. Böylece

$$\begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $cr = 0$ bulunur. O halde $h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\right) \subseteq \begin{bmatrix} 0 & cM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & cm \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\varphi(k) = cm$ ile tanımlı $\varphi: K \rightarrow M$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda φ bir S -homomorfizmadır. $\varphi(K) \subseteq cM$ dir. M_S , S_S -ejektif olduğundan bir $N_S \leq_e K_S$ ve bir $\overline{\varphi}: S_S \rightarrow M_S$ S -homomorfizması vardır öyle ki $\varphi' := \overline{\varphi}|_{eS}: eS_S \rightarrow M_S$ olmak üzere her $n \in N$ için $\varphi(n) = \overline{\varphi}(n) = \varphi'(n)$ dir. Yani

$$\begin{array}{ccccc} N_S & \xrightarrow{i} & K_S & \xrightarrow{i} & S_S \\ & & \varphi \downarrow & \nwarrow \overline{\varphi} & \\ & & M_S & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olur. $\pi: M \rightarrow cM$ kanonik projeksiyonu her $m \in M$ için $\pi(m) = cm$ ile tanımlı olsun. $\theta: eS_S \rightarrow cM_S$ dönüşümü $\theta = \pi \circ \varphi'$ ile tanımlı olsun. O halde her $n \in N$ için $\theta(n) = (\pi \circ \varphi')(n) = \pi(\varphi'(n)) = \pi(\varphi(n)) = \varphi(n)$ dir. Şimdi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}_T \leq_e X_T$ olduğunu gösterelim. $N_S \leq_e K_S$ olduğundan $0 \neq k \in K_S$ için $0 \neq ks \in N_S$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Böylece bir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ks \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ dir. O halde $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}_T \leq_e X_T$ dir. $\theta(es) = cm_1$ olmak üzere $\overline{h}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & es \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & cm_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı $\overline{h}: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}T \rightarrow \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in N$ için $\overline{h}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\right)$ ile tanımlı $\overline{h}$ dönüşümü bir T -homomorfizmadır. $Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}T_T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}T$ dir. O halde İddia 1 – 3 ve Teorem 4.12 (i) den, $Z_2(T_T) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

Şimdi $T'_T = \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}T$ nin extending olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için c ve e ye bağlı aşağıdaki durumları inceleyelim.

1. Durum: $1 - c = 0$ ve $1 - e = 0$ olsun.

Bu durumda $T' = 0$ dır. Dolayısıyla T'_T extendingdir.

2. Durum: $1 - c = 0$ ve $1 - e \neq 0$ olsun.

$T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-e)S \end{bmatrix}$ ve $Z_2(S_S) = eS$ dir. S_S , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan Sonuç 4.46 dan, $Z_2(S_S)$ ve $(1 - e)S$, $\mathcal{G}$ -extending olmak üzere $S_S = Z_2(S_S) \oplus (1 - e)S$ dir. Buradan $S_S/Z_2(S_S) \cong (1 - e)S$ dir. Önerme 1.13.5 (3) ten, $Z(S_S/Z_2(S_S)) = 0$ dir. Ayrıca Önerme 1.13.5 (5) den, $Z_2(S_S) \triangleleft S_S$ dir. Bu durumda Önerme 4.45 den, $S_S/Z_2(S_S)$ extendigdir. Böylece $S_S/Z_2(S_S) \cong (1 - e)S$ olduğundan $(1 - e)S$ de extendingdir. Dolayısıyla T'_T , extendingdir.

3. Durum: $1 - c \neq 0$ ve $1 - e = 0$ olsun.

$T' = \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} (1-c)R & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $Z_2(M_S) = cM$ dir. Şimdi bir $K \leq (1 - c)M$ için $X_T \leq T'_T$ ve $Y = X \cap \begin{bmatrix} 0 & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. M_S , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan Sonuç

4.46 dan, $Z_2(M_S)$ ve $(1-c)M$, $\mathcal{G}$ -extending olmak üzere $M_S = Z_2(M_S) \oplus (1-c)M$ dir. Buradan $M_S/Z_2(M_S) \cong (1-c)M$ dir. Önerme 1.13.5 (3) ten, $Z(M_S/Z_2(M_S)) = 0$ dir. Böylece $M_S/Z_2(M_S) \cong (1-c)M$ olduğundan $Z((1-c)M) = 0$ olup $(1-c)M$ bir nonsingular modüldür. Önerme 4.47 ve (i) koşulundan, $K_S \beta f M_S$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. Yani $(K \cap fM)_S \leq_e K_S$ ve $(K \cap fM)_S \leq_e fM_S$ dir. $1-c \in \mathcal{S}_r(R)$ olduğundan $[(1-c)f]^2 = (1-c)f(1-c)f = (1-c)f^2 = (1-c)f$ bulunur. Böylece $(K \cap fM)_S \leq_e (1-c)fM_S \leq (1-c)M_S$ bulunur. $(1-c)M_S$ bir nonsingular modül olduğundan bir UC -modüldür. Dolayısıyla $(1-c)M_S$ nin her alt modülü bir tek kapanışa sahiptir. O halde $K_S \leq_e (1-c)fM_S$ dir. $\begin{bmatrix} 0 & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e T'_T$ olduğunu gösterelim. $0 \neq \begin{bmatrix} (1-c)r & (1-c)m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T'_T$ olsun. Kabul edelim ki, $(1-c)r \neq 0$ olsun. ${}_R M$ faithful olduğundan $0 \neq (1-c)rm_1 \in (1-c)M$ olacak şekilde bir $m_1 \in M$ vardır. Böylece $0 \neq \begin{bmatrix} (1-c)r & (1-c)m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-c)rm_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Şimdi $(1-c)r = 0$ olsun. Bu durumda $0 \neq \begin{bmatrix} (1-c)r & (1-c)m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-c)ms \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} 0 & (1-c)M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e T'_T$ elde edilir. O halde $Y_T = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e X_T$ dir. Üstelik, $Y_T = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T \leq_e \begin{bmatrix} (1-c)f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T T_T$ dir. Böylece $X_T \beta Y_T$ ve $Y_T \beta \begin{bmatrix} (1-c)f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T T_T$ olur. β bir denklik bağıntısı olduğundan $X_T \beta \begin{bmatrix} (1-c)f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T T_T$ bulunur. Dolayısıyla T'_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir. Önerme 4.45 gereği T'_T , extendingdir.

4. Durum: $1-c \neq 0$ ve $1-e \neq 0$ olsun.

$T' = \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} (1-c)R & (1-c)M \\ 0 & (1-e)S \end{bmatrix}$ dir. Önerme 4.42 den, $T' = \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} T$ birimi $\begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}$ olan bir halka, $R' = (1-c)R(1-c)$ ve $S' = (1-e)S(1-e)$ olmak üzere $(1-c)M$ bir (R', S') -bimodüldür. Böylece $T' = \begin{bmatrix} R' & (1-c)M \\ 0 & S' \end{bmatrix}$ dir. S_S , $\mathcal{G}$ -extending olduğundan Sonuç 4.46 dan, $Z_2(S_S) = eS_S$ ve $S' = (1-e)S_S$, $\mathcal{G}$ -extending olmak üzere $S_S = Z_2(S_S) \oplus S' = eS_S \oplus (1-e)S_S$ dir. Buradan $S_S/eS_S \cong (1-e)S_S$ dir. Önerme 1.13.5 (3) ten, $Z(S_S/Z_2(S_S)) = Z(S_S/eS_S) = 0$ dir. Ayrıca Önerme 1.13.5 (5) den, $Z_2(S_S) \triangleleft S_S$ dir. Bu durumda Önerme 4.45 den, S_S/eS_S extendigdir. Böylece $S_S/eS_S \cong (1-e)S$ olduğundan $(1-e)S_S$ de extendingdir. $S' = (1-e)S$ birimi $1-e$ olan bir halka, $S' \cong S/eS$ ve $Z(S_S) \subseteq Z_2(S_S) = eS$ olduğundan Önerme 4.42 (i) den, $S'_{S'}$ nonsingularıdır. $S'_S = (1-e)S_S$, $\mathcal{G}$ -extending olduğundan Önerme 4.42 (ii) gereği $S'_{S'}$, $\mathcal{G}$ -extendingdir. Buradan $S'_{S'}$, $\mathcal{G}$ -extending olduğundan Önerme 4.42 (iii) gereği $S'_{S'}$, extendingdir. M_S , S_S -ejektif olduğundan Önerme 4.44 ten, $M/Z_2(M_S)$ injektif $S/Z_2(S_S)$ -modüldür. Böylece $Z(M/Z_2(M_S)) = 0$, $M/Z_2(M_S) \cong (1-c)M_S$ ve $S_S/Z_2(S_S) \cong S'$ olduğundan $(1-c)M_S$ bir nonsingular injektif S' -

modül olur. Şimdi $K_{S'}$, $(1-c)M_{S'}$ nün bir kapalı alt modülü olsun. $(1-c)M_S$ injektif olduğundan Önerme 3.3 ten, $(1-c)M_S$ bir extending modüldür. O halde $K_{S'} \leq_d (1-c)M_{S'}$ dür. Bu durumda $K_S \leq_d (1-c)M_S$ dir. Böylece (i) koşulundan, $K_S \beta f M_S$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. 3. Durumdan, $[(1-c)f]^2 = (1-c)f \in R'$ olmak üzere $K_S \leq_e (1-c)f M_S$ dir. O halde $K_{S'} \leq_e (1-c)f M_{S'}$ olur. Fakat $K_{S'}$, $(1-c)M_{S'}$ nün bir kapalı alt modülü olduğundan $K_{S'} = (1-c)f M_{S'}$ olmalıdır. Teorem 4.56 dan $T'_{T'}$, nonsingular ve extendingdir. Böylece Önerme 4.42 (ii) gereği T'_T , extendingdir.

Sonuç olarak, yukarıdaki dört durum için de T'_T , extendingdir. O halde $Z_2(T_T)$, $\mathcal{G}$ -extending ve T'_T , extending olmak üzere $T_T = Z_2(T_T) \oplus T'_T$ elde edilir. Böylece Önerme 4.47 gereği T_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir. $\square$

Teorem 4.58. T_T nin $\mathcal{G}$ -extending olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen koşulların sağlanmasıdır.

- (1) Eğer $D_S \leq_d M_S$ ise $D_S \beta f M_S$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır.
- (2) M_S ve S_S , $\mathcal{G}$ -extendingdir.
- (3) M_S , S_S -ejektiftir.
- (4) $A = l_R(M)$ olsun. Bu durumda $aR = A$ ve aR_R , $\mathcal{G}$ -extending olmak üzere bir $a^2 = a \in R$ vardır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ T_T , $\mathcal{G}$ -extending olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.55 ve Önerme 4.43 ten, (1) – (4) koşulları sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki, (1) – (4) koşulları sağlansın. Şimdi T_T nin $\mathcal{G}$ -extending olduğunu gösterelim.

İddia 1. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$ olduğu açıktır. $X_T \leq \begin{bmatrix} aR & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. O halde $X_T = \begin{bmatrix} X' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $X'_R \leq aR$ vardır. (4) koşulundan, $X' \beta c R$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ vardır. Böylece $X_T \beta \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ bulunur. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, $\mathcal{G}$ -extendingdir.

İddia 2. $B = \begin{bmatrix} (1-a)R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ birimi $\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olan bir halkadır ve B_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir.

$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \triangleleft T$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_l(T)$ dir. Önerme 4.42 den, B birimi $\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olan bir halkadır. $R' = (1-a)R(1-a)$ olsun.

Bu durumda ${}_R M$ faithful ve M bir (R', S) -bimodüldür. O halde $B = \begin{bmatrix} R' & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ dir. Yardımcı Teorem 4.51 gereği B , Yardımcı Teorem 4.57 in (i) koşulunu sağlar. B nin Yardımcı Teorem 4.57 deki (ii) ve (iii) koşullarını sağladığı açıktır. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.57 den B_B , $\mathcal{G}$ -extendingdir. Dolayısıyla Önerme 4.42 (ii) gereği B_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir.

Böylece $T_T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \oplus \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \oplus B_T$ dir. Yardımcı Teorem 4.54 ten $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$, B_T -ejektiftir. İddia 1-2 den, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ ve B_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir. Sonuç olarak, Teorem 4.12 (i) yardımıyla T_T , $\mathcal{G}$ -extendingdir. $\square$



5. C_{11} -MODÜLLER

Bu bölümde extending modüllerin bir genellemesi olan C_{11} -modül sınıfına yer vereceğiz. Bu amaçla C_{11} -modül tanımı ve bu tanıma denk koşullar verilecektir. C_{11} -modüllerin bir dik toplamının C_{11} -modül olduğu gösterilip bir C_{11} -modülün bir dik toplananının C_{11} -modül olmak zorunda olmadığına ilişkin bir örnek verilecektir. Ayrıca bir C_{11} -modülün bir dik toplananının C_{11} -modül olması için gerekli koşullar ele alınacaktır. Daha ayrıntılı bilgiler için [6] önerilir.

Tanım 5.1. M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahip ise **M ye C_{11} -modül ya da M , (C_{11}) koşulunu sağlar** denir. Özel olarak, bir R halkası için R_R bir C_{11} -modül ise R ye **sağ C_{11} -halka** denir. Ayrıca M nin her dik toplananı (C_{11}) koşulunu sağlıyorsa **M , (C_{11}^+) koşulunu sağlar** denir. Örneğin; düzgün modüller, yarı-basit modüller ve injektif modüller C_{11} -modüllerdir.

Önerme 5.2. M_R modülü CS -modül ise C_{11} -modüldür.

Kanıt. $N \leq M_R$ olsun. Sonuç 1.10.4 ten, N nin M de bir K komplementi vardır. O halde $K \leq_c M$ dir. M bir CS -modül olduğundan Önerme 3.11 den, $K \leq_d M$ dir. Böylece M bir C_{11} -modüldür. $\square$

Önerme 5.3. M bir R -modül olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.

- (i) M bir C_{11} -modüldür.
- (ii) Herhangi bir $L \leq_c M$ için K , L nin M deki bir komplementi olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır.
- (iii) Herhangi bir $N \leq M$ için $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır.
- (iv) Herhangi bir $L \leq_c M$ için $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (iv) Açıktır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii), (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) Yardımcı Teorem 1.10.6 dan açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $A \leq M$ olsun. Bu durumda Önerme 1.10.12 den, $A \leq_e B \leq_c M$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden, $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. O halde Yardımcı Teorem 1.10.6 gereği K, B nin M deki bir komplementidir. Diğer yandan, $A \cap K \leq_e B \cap K = 0$ olduğundan $A \cap K = 0$ dır. Kabul edelim ki, $K \not\leq K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ olsun. Bu durumda K, B nin komplementi olduğundan $B \cap K' \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $A \cap B \cap K' \neq 0$ dır. Yani $A \cap K' \neq 0$ dır. Böylece K, A nın M deki bir komplementidir. Sonuç olarak, M bir C_{11} -modüldür. $\square$

Önerme 5.4. M_R bir ayrıştırılmaz modül olsun. M nin C_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin düzgün modül olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) M bir C_{11} -modül olsun. $0 \neq N \leq M$ olsun. Kabulden, bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki K, N nin M deki bir komplementidir. M bir ayrıştırılmaz modül olduğundan $K = 0$ ya da $K = M$ dir. Eğer $K = M$ ise $N \cap K = N \cap M = N = 0$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $K = 0$ olmalıdır. Böylece her $0 \neq U \leq M$ için $N \cap U \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ dir. Yani M bir düzgün modüldür.

($\Leftarrow$) Açıktır. $\square$

Teorem 5.5. C_{11} -modüllerin herhangi bir dik toplamı da C_{11} -modüldür.

Kanıt. Λ bir indis kümesi ve her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{11} -modüller olmak üzere $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. $\lambda \in \Lambda$ alalım. O halde $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ ve M_λ bir C_{11} -modüldür. M_λ, C_{11} -modül olduğundan Önerme 5.3 ten,

$$(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0 \text{ ve } (N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda \leq_e M_\lambda$$

olacak şekilde bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ vardır. Bu durumda $N \cap (M_\lambda \cap K_\lambda) = N \cap K_\lambda = 0$ ve $(N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda = (N \oplus K_\lambda) \cap M_\lambda \leq_e M_\lambda$ dır. Şimdi

$$\Lambda' = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \text{bir } K' \leq_d M' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda \text{ için } N \cap K' = 0 \text{ ve } (N \oplus K') \cap M' \leq_e M' \right\}$$

şeklinde tanımlı λ ları kapsayan Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Kabul edelim ki, $\Lambda' \neq \Lambda$ olsun. O halde bir $\mu \in \Lambda$ vardır öyle ki $\mu \notin \Lambda'$ dır. Böylece $L = (N \oplus K') \cap M_\mu \leq M_\mu$ olduğundan bir $K_\mu \leq_d M_\mu$ vardır öyle ki $L \cap K_\mu = 0$

ve $L \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$ dır. Şimdi $\Lambda'' = \Lambda' \cup \{\mu\}$ ve $M'' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda''} M_\lambda = M' \oplus M_\mu$ olsun. $K' \cap K_\mu = 0$ olduğu açıktır. $K'' = K' \oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K' \leq_d M'$ ve $K_\mu \leq_d M_\mu$ olduğundan $K'' \leq_d M''$ dır. Ayrıca

$$N \cap K_\mu \leq L \cap K_\mu = (N \oplus K') \cap M_\mu \cap K_\mu = (N \oplus K') \cap K_\mu = 0$$

olduğundan $N \cap K_\mu = 0$ bulunur. Diğer yandan, $N \cap K' = 0$ ve $N \cap K_\mu = 0$ olduğundan $N \cap (K' \oplus K_\mu) = N \cap K'' = 0$ bulunur. Şimdi $N \oplus K'' \leq M$ alt modülünü göz önüne alalım. Buradan

$$(N \oplus K') \cap M' \leq (N \oplus K'') \cap M' \leq M' \quad \text{ve} \quad (N \oplus K') \cap M' \leq_e M'$$

olduğundan $(N \oplus K'') \cap M' \leq_e M'$ dır. Üstelik,

$$(N \oplus K'') \cap M_\mu = (N \oplus K' \oplus K_\mu) \cap M_\mu = [(N \oplus K') \cap M_\mu] \oplus K_\mu = L \oplus K_\mu \leq_e M_\mu$$

dır. Bu durumda $(N \oplus K'') \cap M' \leq_e M'$ ve $(N \oplus K'') \cap M_\mu \leq_e M_\mu$ olduğundan $[(N \oplus K'') \cap M'] \oplus [(N \oplus K'') \cap M_\mu] \leq_e M' \oplus M_\mu = M''$ dır. Diğer yandan,

$$[(N \oplus K'') \cap M'] \oplus [(N \oplus K'') \cap M_\mu] \leq (N \oplus K'') \cap (M' \oplus M_\mu) \leq M''$$

olduğundan $(N \oplus K'') \cap (M' \oplus M_\mu) \leq_e M''$ dır. Yani $(N \oplus K'') \cap M'' \leq_e M''$ dır. Bu uygulama tekrarlanırsa, $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ elde edilir. O halde Önerme 5.3 ten, M bir C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 5.6. *CS-modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11} -modüldür.*

Kanıt. Teorem 5.5 den açıktır. $\square$

Sonuç 5.7. *Düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı C_{11} -modüldür.*

Kanıt. Sonuç 5.6 dan açıktır. $\square$

Teorem 5.8. *M bir R -modül olsun. Bu durumda M nin C_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul $Z_2(M)$ ve K , C_{11} -modüller olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus K$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) Teorem 5.5 den açıktır.

($\Rightarrow$) M , C_{11} -modül olsun. İlk olarak, $Z_2(M) \leq_d M$ olduğunu gösterelim. $L = Z_2(M)$ olsun. $Z_2(M) \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan Önerme 5.3 ten, bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir. O halde bir $K' \leq M$ için $M = K' \oplus K$ dir. $L = Z_2(M) = Z_2(K \oplus K') = Z_2(K) \oplus Z_2(K')$ dür. $Z_2(K) = Z_2(M) \cap K = 0$ dir. Böylece $L = Z_2(M) = Z_2(K') \leq K'$ bulunur. Bu durumda $L \oplus K \leq_e M$ olduğundan $L = (L \oplus K) \cap K' = (K' \cap K) \oplus L \leq_e M \cap K' = K'$ dür. $L \leq_e K'$ olduğundan Önerme 1.13.6 dan, K'/L singular modüldür. Yani $Z(K'/L) = K'/L$ dir. O halde $Z(K'/Z_2(K')) = K'/Z_2(K') = 0$ olduğundan $Z_2(K') = K' = L$ dir. Buradan $M = K' \oplus K = L \oplus K$ dir. Yani $L \leq_d M$ dir. Şimdi L nin C_{11} -modül olduğunu gösterelim. $N \leq L$ olsun. $N \cap K \leq L \cap K = 0$ olduğundan $N \cap K = 0$ dir. O halde $N \oplus K \leq M$ dir. Önerme 5.3 ten, bir $P \leq_d M$ vardır öyle ki $(N \oplus K) \cap P = 0$ ve $N \oplus K \oplus P \leq_e M$ dir. $P \leq_d M$ olduğundan $M = P \oplus P'$ olacak şekilde bir $P' \leq M$ vardır. $K \cap P \leq (N \oplus K) \cap P = 0$ olduğundan $K \cap P = 0$ dir. $f: P \longrightarrow M/K \cong L$ dönüşümü $f(p) = p + K$ ile tanımlı olsun. $p, s \in P$ için $f(p) = f(s)$ olsun. O halde $p + K = s + K$ olup $p - s \in K$ dir. Böylece $p - s \in K \cap P = 0$ olup $p = s$ dir. Yani f bire-birdir. Bu durumda $P, M/K \cong L$ içine gömülür. O halde $P \leq L$ dir. $P \cap Z_2(P') \leq P \cap P' = 0$ olduğundan $P \cap Z_2(P') = 0$ dir. Buradan

$$P = P \cap L = P \cap Z_2(P \oplus P') = P \cap [Z_2(P) \oplus Z_2(P')] = Z_2(P) \oplus [P \cap Z_2(P')]$$

olduğundan $P = Z_2(P)$ dir. Böylece $L = L \cap M = L \cap (P \oplus P') = P \oplus (L \cap P')$ olup $P \leq_d L$ dir. $N \cap P \leq (N \oplus K) \cap P = 0$ olduğundan $N \cap P = 0$ dir. O halde $N \oplus P \leq L$ dir. Buradan $(N \oplus K \oplus P) \cap L = (L \cap K) \oplus (N \oplus P) \leq_e M \cap L = L$ dir. Dolayısıyla $N \oplus P \leq_e L$ bulunur. Önerme 5.3 ten, L bir C_{11} -modüldür. Son olarak, K nın C_{11} -modül olduğunu gösterelim. $\pi: M \longrightarrow K$ kanonik projeksiyon ve $H \leq K$ olsun. Bu durumda $L \cap H \leq L \cap K = 0$ olduğundan $L \cap H = 0$ dir. $L \oplus H \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan Önerme 5.3 ten, $(L \oplus H) \cap Q = 0$ ve $L \oplus H \oplus Q \leq_e M$ olacak şekilde bir $Q \leq_d M$ vardır. O halde bir $Q' \leq M$ için $M = Q \oplus Q'$ yazılır. $Q \cap Z_2(Q') \leq Q \cap Q' = 0$ olduğundan $Q \cap Z_2(Q') = 0$ dir. $L \cap Q \leq (L \oplus H) \cap Q = 0$

olduğundan $L \cap Q = 0$ dir. Buradan

$$L \cap Q = Z_2(Q \oplus Q') \cap Q = [Z_2(Q) \oplus Z_2(Q')] \cap Q = [Q \cap Z_2(Q')] \oplus Z_2(Q) = 0$$

olduğundan $Z_2(Q) = 0$ bulunur. Böylece $L = Z_2(M) = Z_2(Q \oplus Q') = Z_2(Q) \oplus Z_2(Q')$ olduğundan $L = Z_2(M) = Z_2(Q') \leq Q'$ bulunur. O halde $M = L \oplus K = Z_2(Q') \oplus K$ elde edilir. Buradan

$$Q' = Q' \cap M = Q' \cap [Z_2(Q') \oplus K] = Z_2(Q') \oplus (Q' \cap K) = L \oplus (Q' \cap K)$$

bulunur. Böylece $M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K)$ olduğundan $Q \oplus L \leq_d M$ dir. Ayrıca Önerme 3.5 den, $Q \oplus L = \pi(Q) \oplus L$ dir. Bu durumda

$$M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K) = \pi(Q) \oplus L \oplus (Q' \cap K)$$

olduğundan $\pi(Q) \leq_d M$ dir. O halde $\pi(Q) \leq_d K$ dir. Şimdi $H \cap \pi(Q) = 0$ ve $H \oplus \pi(Q) \leq_e K$ olduğunu görelim. $H \cap (L \oplus Q) = 0$ dir. Gerçekten, $h \in H \cap (L \oplus Q)$ olsun. Bu durumda $h = l + q$ olacak şekilde $\exists l \in L, q \in Q$ vardır. Buradan $h - l = q \in (L \oplus H) \cap Q = 0$ olduğundan $q = 0$ dir. Böylece $l = h \in L \cap H = 0$ olup $h = 0$ dir. O halde $H \cap (L \oplus Q) = H \cap (L \oplus \pi(Q)) = 0$ dir. Diğer yandan, $H \cap \pi(Q) \leq H \cap (L \oplus \pi(Q)) = 0$ olduğundan $H \cap \pi(Q) = 0$ bulunur. $H \leq K$ ve $\pi(Q) \leq K$ olduğundan $H \oplus \pi(Q) \leq K$ dir. $L \oplus H \oplus Q \leq_e M$ ve $Q \oplus L = \pi(Q) \oplus L$ olduğundan $H \oplus \pi(Q) \oplus L \leq_e M$ dir. Buradan

$$(H \oplus \pi(Q) \oplus L) \cap K = H \oplus \pi(Q) \oplus (L \cap K) \leq_e M \cap K = K$$

olduğundan $H \oplus \pi(Q) \leq_e K$ dir. Böylece Önerme 5.3 ten, K bir C_{11} -modüldür. $\square$

Yardımcı Teorem 5.9. $M, (C_{11})$ koşulunu sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda M_1, M nin essential socle'a sahip bir alt modülü ve M_2, M nin sıfır socle'a sahip bir alt modülü olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

Kanıt. $\text{Soc}(M) = S$ ile gösterilsin. $\text{Soc}(M) \leq M$ olduğundan ve $M, (C_{11})$ koşulunu sağladığından Önerme 5.3 ten, $S \cap K = 0$ ve $S \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. O halde bir $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ yazılır. Önerme 1.11.19

dan, $S = \text{Soc}(M) = \text{Soc}(K \oplus K') = \text{Soc}(K) \oplus \text{Soc}(K')$ dır. Önerme 1.11.18 den, $S \cap K = \text{Soc}(M) \cap K = \text{Soc}(K) = 0$ dır. Böylece $S = \text{Soc}(K') \leq K'$ bulunur. Diğer yandan, $S \oplus K \leq_e M$ olduğundan

$$(\text{Soc}(K') \oplus K) \cap K' = \text{Soc}(K') \oplus (K \cap K') \leq_e M \cap K' = K'$$

olduğundan $\text{Soc}(K') \leq_e K'$ bulunur. Sonuç olarak, $K' = M_1$ ve $K = M_2$ alınır. $M = M_1 \oplus M_2$ elde edilir. $\square$

M bir nonsingular R -modül olsun. Herhangi bir $N \leq M$ için $N \leq_e c(N)$ olacak şekilde bir tek $c(N)$ komplementi vardır. Yani

$$c(N) = \{m \in M \mid \text{bir } E \leq_e R_R \text{ için } mE \leq N\}$$

şeklindedir.

Teorem 5.10. *M bir nonsingular R -modül olsun. Bu durumda M nin (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M_1 , (C_{11}) koşulunu sağlayan essential socle'a sahip bir modül ve M_2 , (C_{11}) koşulunu sağlayan sıfır socle'a sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olmasıdır.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$ Teorem 5.5 den açıktır.

$(\Rightarrow)$ M , (C_{11}) koşulunu sağlasın. Yardımcı Teorem 5.9 yardımıyla M_1 , M nin essential socle'a sahip bir alt modülü ve M_2 , M nin sıfır socle'a sahip bir alt modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $\text{Soc}(M) = S$ ile gösterilsin.

$$S = \text{Soc}(M) = \text{Soc}(M_1 \oplus M_2) = \text{Soc}(M_1) \oplus \text{Soc}(M_2)$$

dir. $\text{Soc}(M_2) = 0$ olduğundan $S = \text{Soc}(M_1) \leq_e M_1$ bulunur. $S = \text{Soc}(M) \leq M$ ve M bir nonsingular modül olduğundan $S \leq_e c(S) \leq_e M$ olacak şekilde M de bir tek $c(S)$ komplementi vardır. Diğer yandan, $S = \text{Soc}(M_1) \leq_e M_1 \leq_e M$ dir. $c(S)$ nin tekliğinden $M_1 = c(S)$ olmalıdır. Şimdi M_1 in (C_{11}) koşulunu sağladığını gösterelim. $N \leq M_1$ olsun. $N \cap M_2 \leq M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $N \cap M_2 = 0$ dir. $N \oplus M_2 \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan bir $P \leq_d M$ vardır öyle ki $(N \oplus M_2) \cap P = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus P \leq_e M$ dir. O halde $M = P \oplus P'$ olacak şekilde bir $P' \leq M$ vardır.

$M_2 \cap P \leq (N \oplus M_2) \cap P = 0$ olduğundan $M_2 \cap P = 0$ dır. Bu durumda P , $M/M_2 \cong M_1$ içine gömülür. O halde $P \leq M_1$ dir. $S = \text{Soc}(M_1) \leq_e M_1$ olduğundan $\text{Soc}(P) = S \cap P = \text{Soc}(M_1) \cap P \leq_e M_1 \cap P = P$ bulunur. $S \cap P \leq_e P \leq_c M$ ve $S \cap P \leq_e c(S \cap P) \leq_c M$ dir. $c(S \cap P)$ nin tekliğinden $c(S \cap P) = P$ olmalıdır. Böylece $P = c(S \cap P) \leq c(S) = M_1$ dir. Buradan

$$M_1 = M \cap M_1 = (P \oplus P') \cap M_1 = P \oplus (P' \cap M_1)$$

olduğundan $P \leq_d M_1$ elde edilir. Şimdi iddiamız $N \oplus P \leq_e M_1$ ve $N \cap P = 0$ dır.

$$(N \oplus M_2 \oplus P) \cap M_1 = N \oplus P \oplus (M_2 \cap M_1) \leq_e M \cap M_1 = M_1$$

olduğundan $N \oplus P \leq_e M_1$ dir. Ayrıca $N \cap P \leq (N \oplus M_2) \cap P = 0$ olduğundan $N \cap P = 0$ dır. Dolayısıyla Önerme 5.3 ten M_1 , (C_{11}) koşulunu sağlar. Şimdi M_2 nin C_{11} koşulunu sağladığını gösterelim. $\pi: M \longrightarrow M_2$ kanonik projeksiyon ve $H \leq M_2$ olsun. $H \cap M_1 \leq M_2 \cap M_1 = 0$ olduğundan $H \cap M_1 = 0$ dır. $H \oplus M_1 \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan Önerme 5.3 ten, $(H \oplus M_1) \cap Q = 0$ ve $H \oplus M_1 \oplus Q \leq_e M$ olacak şekilde bir $Q \leq_d M$ vardır. O halde bir $Q' \leq M$ için $M = Q \oplus Q'$ yazılır. $M_1 \cap Q \leq (H \oplus M_1) \cap Q = 0$ olduğundan $M_1 \cap Q = 0$ dır. $S \cap Q \leq_e M_1 \cap Q = 0$ olduğundan $S \cap Q = 0$ dır. Önerme 1.11.18 den, $\text{Soc}(Q) = \text{Soc}(M) \cap Q = S \cap Q = 0$ dır. Bu durumda $S = \text{Soc}(M) = \text{Soc}(Q \oplus Q') = \text{Soc}(Q) \oplus \text{Soc}(Q')$ olduğundan $S = \text{Soc}(Q') \leq Q'$ bulunur. Böylece $M_1 = c(S) \leq Q'$ dür. Buradan

$$Q' = M \cap Q' = (M_1 \oplus M_2) \cap Q' = M_1 \oplus (M_2 \cap Q')$$

olduğundan $M_1 \leq_d Q'$ bulunur. O halde $M = Q \oplus Q' = Q \oplus M_1 \oplus (M_2 \cap Q')$ olduğundan $Q \oplus M_2 \leq_d M$ dir. Ayrıca Önerme 3.5 den, $Q \oplus M_1 = \pi(Q) \oplus M_1$ dir. Bu durumda

$$M = Q \oplus Q' = Q \oplus M_1 \oplus (M_2 \cap Q') = \pi(Q) \oplus M_1 \oplus (Q' \cap M_2)$$

olduğundan $\pi(Q) \leq_d M$ dir. O halde $\pi(Q) \leq_d M_2$ dir. Şimdi $H \cap \pi(Q) = 0$ ve $H \oplus \pi(Q) \leq_e M_2$ olduğunu gösterelim. $H \cap (Q \oplus M_1) = 0$ olduğu açıktır. O halde

$H \cap (Q \oplus M_1) = H \cap (\pi(Q) \oplus M_1) = 0$ dir. $H \cap \pi(Q) \leq H \cap (\pi(Q) \oplus M_1) = 0$ olduğundan $H \cap \pi(Q) = 0$ dir. $H \leq M_2$ ve $\pi(Q) \leq M_2$ olduğundan $H \oplus \pi(Q) \leq M_2$ dir. $H \oplus M_1 \oplus Q \leq_e M$ ve $Q \oplus M_1 = \pi(Q) \oplus M_1$ olduğundan $H \oplus \pi(Q) \oplus M_1 \leq_e M$ dir. Buradan

$$(H \oplus \pi(Q) \oplus M_1) \cap M_2 = H \oplus \pi(Q) \oplus (M_1 \cap M_2) \leq_e M \cap M_2 = M_2$$

olduğundan $H \oplus \pi(Q) \leq_e M_2$ dir. Böylece Önerme 5.3 ten, M_2 bir C_{11} -modüldür. $\square$

Uyarı 5.11. C_{11} -modüllerin herhangi bir dik toplamının C_{11} -modül olduğu Teorem 5.5 yardımıyla bilinmektedir. Fakat bir C_{11} -modülün herhangi bir dik toplananı C_{11} -modül olmak zorunda değildir. Aşağıda verilen örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 5.12. [13, Örnek 17.36] $\mathbb{R}$ bir reel bir cisim ve $\mathbb{R}[x, y, z] = S$ polinom halkası olsun. Bu durumda $s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olmak üzere $R = S/Ss$ halkası değişmeli Noetherian bölgedir. $M_R = (R \oplus R \oplus R)_R$ olmak üzere M , (C_{11}) koşulunu sağlar. Fakat M nin (C_{11}) koşulunu sağlamayan bir K dik toplananı vardır.

Bundan sonra bir C_{11} -modülün herhangi bir dik toplananının C_{11} -modül olması için gereken koşullar ele alınacaktır.

Yardımcı Teorem 5.13. M bir R -modül, $N \leq_d M$ ve K , $N \cap K = 0$ şartını sağlayan M nin bir injektif alt modülü olsun. Bu durumda $N \oplus K \leq_d M$ dir.

Kanıt. $N \leq_d M$ olduğundan $M = N \oplus N'$ olacak şekilde bir $N' \leq M$ vardır. $\pi: M \rightarrow N'$ bir kanonik projeksiyon olsun. Burada $\text{Ker}(\pi) = N$ dir. $\pi|_K: K \rightarrow N'$ bir monomorfizmadır. Çünkü $\text{Ker}(\pi|_K) = N \cap K = 0$ dir. O halde 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $K \cong \pi(K)$ dir. Böylece K , injektif olduğundan $\pi(K)$ da injektiftir. Teorem 2.15 den, $\pi(K) \leq_d N'$ dür. Bu durumda $N' = \pi(K) \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. $M = N \oplus N' = N \oplus \pi(K) \oplus K'$ olduğundan $N \oplus \pi(K) \leq_d M$ dir. Önerme 3.5 den, $N \oplus \pi(K) = N \oplus K$ olduğundan $N \oplus K \leq_d M$ dir. $\square$

Önerme 5.14. M , (C_{11}) koşulunu sağlayan bir R -modül ve M/N injektif olacak şekilde bir $N \leq_d M$ olsun. Bu durumda N , (C_{11}) koşulunu sağlar.

Kanıt. $L \leq N$ olsun. $N \leq_d M$ olduğundan $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin bir N' injektif alt modülü vardır. $L \cap N' \leq N \cap N' = 0$ olduğundan $L \cap N' = 0$ dir.

$L \oplus N' \leq M$ ve M , (C_{11}) -modül olduğundan Önerme 5.3 ten, $(L \oplus N') \cap K = 0$ ve $L \oplus N' \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. $N' \cap K \leq (L \oplus N') \cap K = 0$ olduğundan $N' \cap K = 0$ dır. Böylece Yardımcı Teorem 5.13 ten, $N' \oplus K \leq_d M$ dir. $\pi: M \rightarrow N$ bir kanonik projeksiyon olsun. Önerme 3.5 den, $N' \oplus K = N' \oplus \pi(K)$ olduğundan $N' \oplus \pi(K) \leq_d M$ dir. O halde $\pi(K) \leq_d N$ dir. Şimdi $L \cap \pi(K) = 0$ ve $L \oplus \pi(K) \leq_e N$ olduğunu gösterelim. $L \cap (N' \oplus K)$ olduğu açıktır. O halde $L \cap (N' \oplus K) = L \cap (N' \oplus \pi(K)) = 0$ dır. $L \cap \pi(K) \leq L \cap (N' \oplus \pi(K)) = 0$ olduğundan $L \cap \pi(K) = 0$ dır. $L \leq N$ ve $\pi(K) \leq N$ olduğundan $L \oplus \pi(K) \leq N$ dir. $L \oplus N' \oplus K \leq_e M$ ve $N' \oplus K = N' \oplus \pi(K)$ olduğundan $L \oplus N' \oplus \pi(K) \leq_e M$ dir. Bu durumda

$$(L \oplus \pi(K) \oplus N') \cap N = L \oplus \pi(K) \oplus (N' \cap N) \leq_e M \cap N = N$$

oldüğundan $L \oplus \pi(K) \leq_e N$ dir. Böylece Önerme 5.3 ten, N bir C_{11} -modüldür. $\square$

Teorem 5.15. M , (C_{11}) ve (C_3) koşullarını sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda M , (C_{11}^+) koşulunu sağlar.

Kanıt. $N \leq_d M$ olsun. O halde $M = N \oplus N'$ olacak şekilde bir $N' \leq M$ vardır. $\pi: M \rightarrow N$ bir kanonik projeksiyon olsun. $K \leq N$ olsun. $K \cap N' \leq N \cap N' = 0$ olduğundan $K \cap N' = 0$ dır. Böylece $K \oplus N' \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan $(K \oplus N') \cap L = 0$ ve $K \oplus N' \oplus L \leq_e M$ olacak şekilde bir $L \leq_d M$ vardır. Ayrıca $N' \cap L \leq (K \oplus N') \cap L = 0$ olduğundan $N' \cap L = 0$ dır. M , (C_3) koşulunu sağladığından $N' \oplus L \leq_d M$ dir. Önerme 3.5 den, $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L)$ olduğundan $N' \oplus \pi(L) \leq_d M$ dir. O halde $M = N' \oplus \pi(L) \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. Bu durumda

$$N = M \cap N = (N' \oplus \pi(L) \oplus K') \cap N = [(N' \oplus K') \cap N] \oplus \pi(L)$$

oldüğundan $\pi(L) \leq_d N$ dir. $K \cap (N' \oplus L) = 0$ dır. O halde $K \cap (N' \oplus \pi(L)) = 0$ dır. $K \cap \pi(L) \leq K \cap (N' \oplus \pi(L)) = 0$ olduğundan $K \cap \pi(L) = 0$ dır. $K \leq N$ ve $\pi(L) \leq N$ olduğundan $K \oplus \pi(L) \leq N$ dir. $K \oplus N' \oplus L \leq_e M$ ve $N' \oplus L = N' \oplus \pi(L)$

olduğundan $K \oplus N' \oplus \pi(L) \leq_e M$ dir. Buradan

$$(K \oplus N' \oplus \pi(L)) \cap N = K \oplus \pi(L) \oplus (N' \cap N) \leq_e M \cap N = N$$

olduğundan $K \oplus \pi(L) \leq_e N$ bulunur. O halde N , (C_{11}) koşulunu sağlar. Dolayısıyla M , (C_{11}^+) koşulunu sağlar. $\square$

Tanım 5.16. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Her $\varphi \in \text{End}_R(M)$ için $\varphi(N) \subseteq N$ oluyorsa N ye M nin **fully invariant (tam değişmez) alt modülü** denir ve $N \triangleleft M$ ile gösterilir. Örneğin; $\text{Soc}(M)$ ve $\text{Rad}(M)$, M nin fully invariant alt modülleridir. Ayrıca R_R nin fully invariant alt modülleri R halkasının idealleridir.

Tanım 5.17. M bir R -modül olmak üzere M nin her fully invariant alt modülü, M nin bir dik toplananında essential oluyorsa M ye **FI-extending modül** denir.

Yardımcı Teorem 5.18. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M , FI-extending modüldür.
- (ii) M nin her fully invariant alt modülü M de dik toplanan olan bir komplemente sahiptir.
- (iii) Her $X \triangleleft M$ için, M nin bir L komplement alt modülü ve L nin bir K komplementi vardır öyle ki $X \leq_e L$ ve her $f: L \oplus K \rightarrow M$ homomorfizması bir $g: M \rightarrow M$ homomorfizmasına genişler.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $X \triangleleft M$ ve M , FI-extending modül olsun. Bu durumda $X \leq_e eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır. Böylece $(1 - e)M$, X in bir komplementi olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $X \triangleleft M$ olsun. Kabul edelim ki, $c^2 = c \in \text{End}_R(M)$ için cM , X in bir komplementi olsun. Her $x \in X$ için $x = cx + (1 - c)x$ yazılabilir. $X \triangleleft M$ olduğundan $cX \subseteq X$ dir. O halde $cx \in X \cap cM = 0$ olup $cx = 0$ dır. Böylece $x = (1 - c)x$ dir. $X \leq (1 - c)X \leq (1 - c)M$ dir. Bu durumda $X \oplus cM \leq_e M$ olduğundan $(X \oplus cM) \cap (1 - c)M \leq_e M \cap (1 - c)M$ dir. Modüler kuralından, $X \oplus (cM \cap (1 - c)M) \leq_e (1 - c)M$ elde edilir. O halde $X \leq_e (1 - c)M \leq_d M$ olduğundan M , FI-extending modüldür.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Yardımcı Teorem 4.2 den açıktır. $\square$

Teorem 5.19. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

- (i) M , *extending modüldür*.
- (ii) M , $\mathcal{G}$ -*extending modüldür*.
- (iii) M , C_{11} -*modüldür*.
- (iv) M , *FI-extending modüldür*.

Bu durumda $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ gerektirmeleri mevcuttur.

Kanıt. $(i) \Rightarrow (ii)$ M , *extending modül* olsun. Bu durumda her $X \leq M$ için $X \leq_e D$ olacak şekilde bir $D \leq_d M$ vardır. $X \leq_e D$ ve $D \leq_e D$ olduğundan $X \cap D \leq_e D$ dir. Ayrıca $X \cap D \leq_e X \cap D = X$ dir. O halde M , $\mathcal{G}$ -*extending modüldür*.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $Y \leq M$ olsun. Hipotezden, $Y \beta D$ ve $M = D \oplus D'$ olacak şekilde $\exists D, D' \leq M$ vardır. O halde $Y \cap D \leq_e Y$ ve $Y \cap D \leq_e D$ dir. $0 = (Y \cap D) \cap D' \leq_e Y \cap D'$ olduğundan $Y \cap D' = 0$ olmalıdır. Şimdi $D' \leq K$ ve $Y \cap K = 0$ olacak şekilde bir $K \leq M$ olsun. $0 = (Y \cap D) \cap K \leq_e D \cap K$ olduğundan $D \cap K = 0$ olmalıdır. Böylece $K = M \cap K = (D \oplus D') \cap K = (D \cap K) \oplus D' = D'$ bulunur. O halde D', Y nin bir komplementi ve M nin bir dik toplananıdır. Yani M , C_{11} -*modüldür*.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Yardımcı Teorem 5.18 den açıktır. □

Yardımcı Teorem 5.20. M bir abelyen p -grup olsun. $\mathbb{Z}$ -modül M , *düzgün modüllerin bir dik toplamı* olsun. Bu durumda M nin her dik toplananı *düzgün modüllerin dik toplamı* şeklinde yazılır.

Teorem 5.21. M , *düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı* olmak üzere bir $\mathbb{Z}$ -modül olsun. Bu durumda M nin herhangi bir dik toplananı *düzgün modüllerin dik toplamı* şeklinde yazılır.

Kanıt. Her düzgün $\mathbb{Z}$ -modül torsion modül ya da torsion-free modüldür. Böylece M_1 bir torsion-free modül, M_2 bir torsion modül, M_1 ve M_2 nin her biri düzgün modüllerin bir dik toplamı olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. O halde

$$\tau(M) = \tau(M_1 \oplus M_2) = \tau(M_1) \oplus \tau(M_2) = \tau(M_2)$$

dir. $N \leq_d M$ olsun. Bu durumda $M = N \oplus N'$ olacak şekilde bir $N' \leq M$ vardır. $M_2 = \tau(M) = \tau(N \oplus N') = \tau(N) \oplus \tau(N')$ dır. Buradan

$$N = N \cap M = N \cap [M_1 \oplus \tau(N) \oplus \tau(N')] = \tau(N) \oplus [N \cap (\tau(N) \oplus \tau(N'))]$$

dır. Burada $N \cap (\tau(N) \oplus \tau(N')) = K$ ile gösterilsin. O halde bir $K \leq N$ için $N = \tau(N) \oplus K$ elde edilir. Benzer şekilde, bir $K' \leq N'$ için $N' = \tau(N') \oplus K'$ dır. $M = N \oplus N' = \tau(N) \oplus K \oplus \tau(N') \oplus K' = M_2 \oplus K \oplus K'$ dır. $M_1 \cong M/M_2 \cong K \oplus K'$ olduğundan $M_1 \cong K \oplus K'$ dır. Böylece K , düzgün modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır [15, Teorem 86.7]. Diğer yandan, M_2 nin her düzgün torsion alt modülü p asal sayı olmak üzere p -gruptur. Böylece her p asal sayısı için $\tau_p(M_2)$, düzgün modüllerin bir dik toplamı olmak üzere $\tau(M_2) = M_2 = \bigoplus_p \tau_p(M_2)$ bulunur [14, Teorem 8.4]. Her p asal sayısı için $\tau_p(M_2) = \tau_p(N) \oplus \tau_p(N')$ olduğu açıktır. Yardımcı Teorem 5.20 den her p asal sayısı için $\tau_p(N)$, düzgün modüllerin dik toplamı şeklinde yazılır. O halde $\tau(N) = \bigoplus_p \tau_p(N)$ dir. Dolayısıyla $N = \tau(N) \oplus K$, düzgün modüllerin bir dik toplamıdır. $\square$

Sonuç 5.7 ve Teorem 5.21 yardımıyla eğer M , düzgün modüllerin herhangi bir dik toplamı olmak üzere bir $\mathbb{Z}$ -modül ise M , (C_{11}^+) koşulunu sağlar.

Önerme 5.22. M bir R -modül, $\text{End}(M_R)$ bir abelyen halka ve $X \leq M$ olmak üzere $h_i \in \text{End}(M_R)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ olsun. Bu durumda M nin yarı-sürekli modül olması için gerek ve yeter koşul M nin bir C_{11} -modül olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki, M bir C_{11} -modül ve $X \leq M$ olsun. O halde her $h_i \in \text{End}(M_R)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i(M)$ dir. M bir C_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ vardır öyle ki eM , X in bir komplementidir. $0 \neq x \in X$ olsun. Bu durumda $x = ex + (1 - e)x$ dir. Fakat $m_i \in M$ olmak üzere $x = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ dir. Böylece $ex = e \sum_{i \in I} h_i(m_i) = \sum_{i \in I} eh_i(m_i) = \sum_{i \in I} h_i e(m_i) = \sum_{i \in I} h_i(em_i) \in X \cap eM = 0$ dir. O halde $ex = 0$ dir. $X \oplus eM \leq_e M$ ve $X \leq (1 - e)M$ olduğundan

$$X \oplus (eM \cap (1 - e)M) = (X \oplus eM) \cap (1 - e)M \leq_e M \cap (1 - e)M = (1 - e)M$$

dir. Böylece $X \leq_e (1 - e)M \leq_d M$ dir. Yani M , (C_1) koşulunu sağlar. Şimdi M nin

(C_3) koşulunu sağladığını gösterelim. $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ ve $f^2 = f \in \text{End}(M_R)$ için $eM \cap fM = 0$ olacak şekilde eM ve fM , M nin iki dik toplananı olsun. $\text{End}(M_R)$ abelyen olduğundan $(e + f)^2 = e^2 + f^2 + 2ef$ dir. Ayrıca $ef(m) = e(f(m)) \in eM$ ve $ef(m) = fe(m) = f(e(m)) \in fM$ dir. $efM \leq eM \cap fM = 0$ olduğundan $efM = feM = 0$ olup $ef = fe = 0$ dir. O halde $(e + f)^2 = e + f \in \text{End}(M_R)$ ve $(e + f)M = eM + fM$ dir. Böylece $eM \oplus fM \leq_d M$ olduğundan M , (C_3) koşulunu sağlar. Dolayısıyla M bir yarı-sürekli modüldür. $\square$

Sonuç 5.23. *M aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda M nin CS -modül olması için gerek ve yeter koşul M nin C_{11} -modül olmasıdır.*

- (i) $M_R = R_R$ ve R bir değişmeli halkadır.
- (ii) M bir devirli modüldür ve R bir değişmeli halkadır.
- (iii) M bir çarpımsal modüldür ve R bir değişmeli halkadır.

Kanıt. (i) R bir değişmeli halka ve $R \cong \text{End}(R_R)$ olduğundan $\text{End}(R_R)$ de değişmelidir. $X_R \leq R_R$ olsun. $X = \sum_{i \in I} \text{id}_R(R)$ olduğundan Önerme 5.22 den, M bir CS -modüldür.

(ii) M bir devirli modül ve R bir değişmeli halka olsun. M devirli olduğundan Önerme 1.3.10 dan $M \cong R/B$ olacak şekilde bir $B_R \leq R_R$ vardır. Bu durumda M , C_{11} -modül olduğundan R/B de bir C_{11} -modüldür. Y/B , R/B nin bir R -alt modülü olsun. Her $y_i \in Y$ için $Y/B = (\sum_{i \in I} y_i R) + B = (\sum_{i \in I} y_i + B)R$ dir. $h_i(r + B) = y_i r + B$ ile tanımlı $h_i: R/B \rightarrow R/B$ dönüşümünü göz önüne alalım. Böylece $h_i \in \text{End}((R/B)_R)$ dir. Dolayısıyla $Y/B = \sum_{i \in I} h_i(R/B)$ dir. R değişmeli olduğundan $\text{End}((R/B)_R)$ de değişmelidir. Önerme 5.22 den, R/B bir CS -modüldür. $M \cong R/B$ olduğundan M bir CS -modüldür.

(iii) Kabul edelim ki, M bir çarpımsal modül ve R bir değişmeli halka olsun. $A_R \leq R_R$ için $X = MA$ olsun. Her $a \in A$ olmak üzere $h_a: M \rightarrow M$ dönüşümü her $m \in M$ için $h_a(m) = ma$ şeklinde tanımlı olsun. Böylece $X = MA = \sum_{a \in A} h_a(M)$ dir. Bir çarpımsal modülün her alt modülü fully invariant alt modüldür. Gerçekten, $N \leq M$ ve $f \in \text{End}(M_R)$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan $N = MB$ olacak şekilde bir $B_R \leq R_R$ vardır. Şimdi $x \in N = MB$ alalım. O halde $m \in M$,

$b \in B$ için $x = mb$ dir. Böylece $f(x) = f(mb) = f(m)b \in MB = N$ olduğundan N, M nin bir fully invariant alt modülüdür. $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ için $eM \leq_d M$ ve $(1 - e)M \leq_d M$ dir. M çarpımsal modül olduğundan $eM \triangleleft M$ ve $(1 - e)M \triangleleft M$ dir. Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $e \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_R))$ ve $1 - e \in \mathcal{S}_l(\text{End}(M_R))$ dir. Her $x \in \text{End}(M_R)$ için $xe = exe$ ve $x(1 - e) = (1 - e)x(1 - e)$ dir. Böylece her $x \in \text{End}(M_R)$ için $xe = ex$ olduğundan e bir merkezci idempotenttir. O halde $\text{End}(M_R)$ değişmelidir. Önerme 5.22 den, M bir CS -modüldür. $\square$

Önerme 5.24. M bir C_{11} -modül ve $X \leq M$ olsun. Eğer X ile M nin herhangi bir dik toplananının arakesiti X in bir dik toplananı ise X bir C_{11} -modüldür.

Kanıt. Her $D \leq_d M$ için $D \cap X \leq_d X$ olsun. $A \leq X$ olsun. $A \leq X \leq M$ ve M, C_{11} -modül olduğundan bir $N \leq_d M$ vardır öyle ki $A \cap N = 0$ ve $A \oplus N \leq_e M$ dir. O halde $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. Hipotezden, $N \cap X \leq_d X$ dir. Şimdi $A \cap (N \cap X) = 0$ ve $A \oplus (N \cap X) \leq_e X$ olduğunu gösterelim. $A \cap X = 0$ olduğundan $A \cap (N \cap X) = (A \cap N) \cap X = 0$ dır. $A \oplus N \leq_e M$ olduğundan $(A \oplus N) \cap X = A \oplus (N \cap X) \leq_e M \cap X = X$ dir. Dolayısıyla X bir C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 5.25. M bir C_{11} -modül olsun.

- (i) Eğer M bir dağılmalı modül ise M nin her alt modülü (C_1) koşulunu sağlar.
- (ii) Eğer her $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ için $eX \subseteq X$ olacak şekilde $X \leq M$ ise X bir C_{11} -modüldür. Özel olarak, M nin her fully invariant alt modülü bir C_{11} -modüldür.
- (iii) Eğer M, SIP koşulunu sağlıyorsa M nin her dik toplananı (C_{11}) koşulunu sağlar (i.e., $M, (C_{11}^+)$ koşulunu sağlar).

Kanıt. (i) $N \leq_c M$ olsun. M, C_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ için $eM \leq_d M$ vardır öyle ki eM, N nin bir komplementidir. O halde $N \cap eM = 0$ ve $N \oplus e(M) \leq_e M$ dir. $M = eM \oplus (1 - e)M$ dir. Bu durumda

$$N = N \cap M = N \cap (eM \oplus (1 - e)M) = (N \cap eM) \oplus (N \cap (1 - e)M)$$

olduğundan $N = N \cap (1 - e)M$ dir. Yani $N \leq (1 - e)M$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} (N \oplus eM) \cap (1 - e)M &\leq_e M \cap (1 - e)M \\ (N \cap (1 - e)M) \oplus (eM \cap (1 - e)M) &\leq_e (1 - e)M \end{aligned}$$

olduğundan $N = N \cap (1 - e)M \leq_e (1 - e)M$ elde edilir. Fakat $N \leq_c M$ olduğundan $N = (1 - e)M \leq_d M$ bulunur. Dolayısıyla $M, (C_1)$ koşulunu sağlar. O halde M nin her alt modülü (C_1) koşulunu sağlar [16, Sonuç 1.2 (i)].

(ii) Her $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ için $eX \subseteq X$ olacak şekilde $X \leq M$ olsun. $D \leq_d M$ ve $\pi: M \rightarrow D$ kanonik projeksiyon olsun. $eX \subseteq D$ ve $eX \subseteq X$ olduğundan $eX \subseteq D \cap X$ dir. Şimdi $D \cap X \subseteq eX$ olduğunu gösterelim. $a \in D \cap X$ olsun. O halde $a \in D$ ve $a \in X$ dir. Bu durumda $a = em$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Böylece $ea = e^2m = em = a \in eX$ dir. Yani $D \cap X \subseteq eX$ dir. Sonuç olarak, $D \cap X = eX \leq_d X$ elde edilir. Önerme 5.24 ten, X bir C_{11} -modüldür.

(iii) Önerme 5.24 ten açıktır. □

Yardımcı Teorem 5.26. *M bir R -modül ve $M_1 \triangleleft M$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin C_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M_1 ve M_2 nin C_{11} -modül olmasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) Teorem 5.5 den açıktır.

($\Rightarrow$) M bir C_{11} -modül olsun. $M_1 \triangleleft M$ olduğundan Sonuç 5.25 (ii) den, M_1 bir C_{11} -modüldür. $M_1 \leq_d M$ olduğundan $M_1 = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}_R(M)$ vardır. $eM \triangleleft M$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $e \in \mathcal{S}_l(\text{End}_R(M))$ dir. $Y \leq M_2$ olsun. $Y \cap M_1 \leq M_2 \cap M_1 = 0$ olduğundan $Y \cap M_1 = 0$ dir. $Y \oplus M_1 \leq M$ ve M, C_{11} -modül olduğundan bir $c^2 = c \in \text{End}_R(M)$ için $cM \leq_d M$ vardır öyle ki $cM, Y \oplus M_1$ in M deki bir komplementidir. O halde $(Y \oplus eM) \cap cM = 0$ ve $Y \oplus eM \oplus cM \leq_e M$ dir. Diğer yandan, $e \in \mathcal{S}_l(\text{End}_R(M))$ ve $c^2 = c \in \text{End}_R(M)$ olduğundan $b = e + c - ec$ olmak üzere $b^2 = b \in \text{End}_R(M)$ ve $bM = eM \oplus cM$ dir [17, Önerme 1.3 (ix)]. O halde $bM = M_1 \oplus cM$ dir. Böylece

$$bM = bM \cap M = bM \cap (M_1 \oplus M_2) = M_1 \oplus (bM \cap M_2)$$

olduğundan $bM \cap M_2 \leq_d bM$ dir. O halde $bM \cap M_2 \leq_d M_2$ dir. Şimdi iddiamız

$Y \cap bM \cap M_2 = 0$ ve $Y \oplus (bM \cap M_2) \leq_e M_2$ dir. $Y \cap (eM \oplus cM) = Y \cap bM = 0$ dir. O halde $Y \cap bM \cap M_2 = 0$ dir. $Y \leq M_2$ ve $bM \cap M_2 \leq M_2$ olduğundan $Y \oplus (bM \cap M_2) \leq M_2$ dir. $Y \oplus eM \oplus cM = Y \oplus bM \leq_e M$ olduğundan

$$Y \oplus (bM \cap M_2) = (Y \oplus bM) \cap M_2 \leq_e M \cap M_2 = M_2$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 5.3 ten, M_2 bir C_{11} -modüldür. $\square$

Yardımcı Teorem 5.27. *R bir halka, ρ bir left exact preradikal ve M , (C_{11}) koşulunu sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda $\rho(M_1) \leq_e M_1$ ve $\rho(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.*

Kanıt. $\rho(M) \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan Önerme 5.3 ten, $\rho(M) \cap M_2 = 0$ ve $\rho(M) \oplus M_2 \leq_e M$ olacak şekilde bir $M_2 \leq_d M$ vardır. O halde bir $M_1 \leq M$ vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_2$ dir. ρ left exact preradikal olduğundan $\rho(M_2) = \rho(M) \cap M_2 = 0$ bulunur. Diğer yandan,

$$\rho(M_1) \oplus (M_2 \cap M_1) = (\rho(M_1) \oplus M_2) \cap M_1 \leq_e M \cap M_1 = M_1$$

olduğundan $\rho(M_1) \leq_e M_1$ bulunur. $\square$

Yardımcı Teorem 5.28. *M bir R -modül, $N \leq M$ ve K , N nin M deki tek kapanışı olsun. Bu durumda K , $N \leq_e L$ olacak şekilde N yi içeren M nin tüm L alt modüllerinin toplamıdır.*

Kanıt. H , $N \leq_e L$ olacak şekilde M nin tüm L alt modüllerinin toplamı olsun. $N \leq_e K$ olduğundan $K \subseteq H$ dir. Tersine L , $N \leq_e L$ olacak şekilde M nin herhangi bir alt modülü olsun. L' , L nin M deki herhangi bir kapanışı olsun. O halde $N \leq_e L \leq_e L' \leq_c M$ olduğundan $N \leq_e L' \leq_c M$ dir. Yani L' , N nin M deki bir kapanışıdır. Fakat N nin M deki tek kapanışı K olduğundan $L' = K$ olmalıdır. Bu durumda $L \subseteq K$ dir. Böylece $H \subseteq K$ dir. Sonuç olarak, $H = K$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.29. *R bir halka, ρ bir left exact preradikal ve $\rho(M)$, M de tek kapanışa sahip olacak şekilde M bir R -modül olsun. Bu durumda M nin bir C_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul $\rho(M_1) \leq_e M_1$, $\rho(M_2) = 0$ ve M_1 , M_2 birer C_{11} -modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olmasıdır.*

Kanıt. ($\Leftarrow$) Açıktır.

($\Rightarrow$) M , C_{11} -modül olsun. Yardımcı Teorem 5.27 den, $\rho(M_1) \leq_e M_1$ ve $\rho(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. Böylece

$$\rho(M) = \rho(M_1 \oplus M_2) = \rho(M_1) \oplus \rho(M_2) = \rho(M_1)$$

olduğundan $\rho(M) = \rho(M_1) \leq M_1$ dir. O halde M_1 , $\rho(M)$ nin M deki (tek) kapanışıdır. $\pi_i: M \rightarrow M_i$ ($i = 1, 2$) kanonik projeksiyon olsun. $N \leq M_1$ olsun. $N \oplus M_2 \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. O halde bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ dir. $M_2 \cap K \leq (N \oplus M_2) \cap K = 0$ olduğundan $M_2 \cap K = 0$ dir. $\pi_{1|K}: K \rightarrow M_1$ ve $\text{Ker}(\pi_{1|K}) = M_2 \cap K = 0$ dir. Bu durumda 1. İzomorfizma Teoremi'nden, $K \cong \pi_1(K)$ bulunur. ρ left exact preradikal olduğundan $\rho(\pi_1(K)) = \pi_1(K) \cap \rho(M_1)$ dir. $\rho(M_1) \leq_e M_1$ olduğundan $\rho(\pi_1(K)) = \pi_1(K) \cap \rho(M_1) \leq_e \pi_1(K) \cap M_1 = \pi_1(K)$ elde edilir. O halde $\rho(K) \leq_e K$ dir. Ayrıca $\rho(M) = \rho(K) \oplus \rho(K') \leq_e K \oplus \rho(K')$ dir. Yardımcı Teorem 5.28 den, $K \oplus \rho(K') \subseteq M_1$ dir. Özel olarak, $K \subseteq M_1$ dir. Buradan $M_1 = M \cap M_1 = (K \oplus K') \cap M_1 = K \oplus (K' \cap M_1)$ olduğundan $K \leq_d M_1$ dir. Şimdi iddiamız $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir. $N \cap K \leq (N \oplus M_2) \cap K = 0$ olduğundan $N \cap K = 0$ dir. $N \leq M_1$ ve $K \leq M_1$ olduğundan $N \oplus K \leq M_1$ dir. Böylece

$$N \oplus K \oplus (M_2 \cap M_1) = (N \oplus M_2 \oplus K) \cap M_1 \leq_e M \cap M_1 = M_1$$

olduğundan $N \oplus K \leq_e M_1$ dir. Dolayısıyla M_1 bir C_{11} -modüldür. Şimdi M_2 nin C_{11} -modül olduğunu gösterelim. $H \leq M_2$ olsun. $H \oplus M_1 \leq M$ ve M , C_{11} -modül olduğundan bir $L \leq_d M$ vardır öyle ki $(H \oplus M_1) \cap L = 0$ ve $H \oplus M_1 \oplus L \leq_e M$ dir. O halde $M = L \oplus L'$ olacak şekilde bir $L' \leq M$ vardır. $M_1 \cap L \leq (H \oplus M_1) \cap L = 0$ olduğundan $M_1 \cap L = 0$ olmalıdır. Böylece ρ bir left exact preradikal olduğundan $\rho(L) = \rho(M) \cap L \leq M_1 \cap L = 0$ olup $\rho(L) = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$\rho(M) = \rho(L \oplus L') = \rho(L) \oplus \rho(L') = \rho(L')$$

olduğundan $\rho(M) = \rho(L') \leq L'$ bulunur. L'' , $\rho(M)$ nin L' deki bir kapanışı olsun.

$L' \leq_d M$ olduğundan $\rho(M) \leq_e L'' \leq_c L' \leq_c M$ dir. O halde $\rho(M) \leq_e L'' \leq_c M$ olduğundan L'' , $\rho(M)$ nin M deki bir kapanışıdır. Fakat $\rho(M)$, M de tek kapanışa sahip olduğundan $M_1 = L'' \subseteq L'$ dür. Buradan

$$L' = M \cap L' = (M_1 \oplus M_2) \cap L' = M_1 \oplus (L' \cap M_2)$$

dir. Ayrıca Önerme 3.5 den, $L \oplus M_1 = \pi_2(L) \oplus M_1$ dir. Böylece

$$M = L \oplus L' = L \oplus M_1 \oplus (L' \cap M_2) = \pi_2(L) \oplus M_1 \oplus (L' \cap M_2)$$

oldüğundan $\pi_2(L) \leq_d M$ dir. O halde $\pi_2(L) \leq_d M_2$ dir. Şimdi $H \cap \pi_2(L) = 0$ ve $H \oplus \pi_2(L) \leq_e M_2$ olduğunu gösterelim. $H \cap (M_1 \oplus L) = 0$ olduğu açıktır. O halde $H \cap (M_1 \oplus \pi_2(L)) = 0$ dir. $H \cap \pi_2(L) \leq H \cap (M_1 \oplus \pi_2(L)) = 0$ olduğundan $H \cap \pi_2(L) = 0$ bulunur. $H \leq M_2$ ve $\pi_2(L) \leq M_2$ olduğundan $H \oplus \pi_2(L) \leq M_2$ dir. Ayrıca $H \oplus M_1 \oplus \pi_2(L) = H \oplus M_1 \oplus L \leq_e M$ dir. Bu durumda

$$H \oplus \pi_2(L) \oplus (M_1 \cap M_2) = (H \oplus M_1 \oplus \pi_2(L)) \cap M_2 \leq_e M \cap M_2 = M_2$$

oldüğundan $H \oplus \pi_2(L) \leq_e M_2$ dir. Böylece M_2 bir C_{11} -modüldür. $\square$

Teorem 5.10, Teorem 5.29 un bir sonucu olduğu söylenebilir. Çünkü socle bir left exact preradikal ve nonsingular modüller UC -modüllerdir.

Yardımcı Teorem 5.30. *M bir R -modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M_1 in (C_{11}) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul her $N \leq M_1$ için $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ var olmasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M_1 , (C_{11}) koşulunu sağlasın. $N \leq M_1$ olsun. O halde $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L \leq_e M_1$ olacak şekilde bir $L \leq_d M_1$ vardır. Bu durumda $L \oplus M_2 \leq_d M$ dir. $(N \oplus L) \cap M_2 \leq_e M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $(N \oplus L) \cap M_2 = 0$ dir. Böylece $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ dir. Diğer yandan, $(L \oplus M_2) \oplus N \leq_e M$ olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ $H \leq M_1$ olsun. Hipotezden, $M_2 \subseteq K$, $K \cap H = 0$ ve $K \oplus H \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. Buradan $K = K \cap M = K \cap (M_1 \oplus M_2) = M_2 \oplus (K \cap M_1)$ olduğundan $K \cap M_1 \leq_d M$ dir. Böylece $K \cap M_1 \leq_d M_1$ dir. $H \cap (K \cap M_1) = 0$ dir.

$K \oplus H \leq_e M$ olduğundan $H \oplus (K \cap M_1) = (K \oplus H) \cap M_1 \leq_e M \cap M_1 = M_1$ dir. Dolayısıyla $M_1, (C_{11})$ koşulunu sağlar. $\square$

Teorem 5.31. Her $K \leq_d M$ için $K \cap M_2 = 0$ ve $K \oplus M_2 \leq_d M$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2, (C_{11})$ koşulunu sağlayan bir R -modül olsun. Bu durumda $M_1, (C_{11})$ koşulunu sağlar.

Kanıt. $N \leq M_1$ olsun. O halde $N \oplus M_2 \leq M$ ve $M, (C_{11})$ koşulunu sağladığından $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. Üstelik, $K \oplus M_2 \leq_d M$ dir. Yardımcı Teorem 5.30 dan sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 5.32. M bir C_{11} -modül ve $M/K, K$ -injektif olacak şekilde $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda K bir C_{11} -modüldür.

Kanıt. $M/K, K$ -injektif olacak şekilde $K \leq_d M$ olsun. O halde $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ vardır. $M/K \cong K'$ olduğundan K', K -injektiftir. Şimdi $L \cap K' = 0$ olacak şekilde bir $L \leq_d M$ alalım. Yardımcı Teorem 3.15 den, $H \cap K' = 0$, $M = H \oplus K'$ ve $L \subseteq H$ olacak şekilde bir $H \leq M$ vardır. Böylece $L \leq_d H$ dir. Dolayısıyla $L \oplus K' \leq_d M = H \oplus K'$ bulunur. Teorem 5.31 den, K bir C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 5.33. M_1, M nin bir alt modülü ile M_2, M nin bir injektif alt modülü olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin C_{11} -modül olması için gerek ve yeter koşul M_1 in C_{11} -modül olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M bir C_{11} -modül ise Sonuç 5.32 den, M_1 bir C_{11} -modüldür.

$(\Leftarrow)$ M_1 bir C_{11} -modül ise Teorem 5.5 ve Sonuç 5.7 den, M bir C_{11} -modüldür. $\square$

Tanım 5.34. R bir halka, $M_n(R), n \times n$ tipindeki matris halkası ve $R^{(n)}, R_R$ modülünün n tane kopyalarının direkt toplamı olsun. $\text{End}(R_R) \cong R$ olduğundan $\text{End}(R^{(n)}) \cong M_n(R)$ dir. Herhangi bir Γ indeks kümesi için, elemanları $\Gamma \times \Gamma$ tarafından indekslenen ve her bir sütununda sadece sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı olan matrise “sütun sonlu (column finite) matris halkası” denir ve $\text{CFM}_\Gamma(R)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $\text{RFM}_\Gamma(R)$ ye “satır sonlu (row finite) matris halkası” denir. $\text{CFM}_\Gamma(R)$ ile $\text{RFM}_\Gamma(R)$ nin arakesiti olan $\text{CRFM}_\Gamma(R)$ ye “sütun ve satır sonlu (column and row finite) matris halkası” denir. Ayrıca $\text{End}(R^{(\Gamma)}) \cong \text{CFM}_\Gamma(R)$ dir.

Teorem 5.35. R bir sağ C_{11} -halka (i.e., R_R bir C_{11} -modül) olsun. Bu durumda;

(i) Her Γ için, $\text{CFM}_\Gamma(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır.

(ii) Her Γ için, $\text{CRFM}_\Gamma(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır.

(iii) F_R bir serbest R -modül olmak üzere $\text{End}(F_R)$ bir sağ C_{11} -halkadır.

Kanıt. A herhangi bir birimli halka olsun. F_A , Γ kardinaliteli bir baza sahip serbest A -modül olmak üzere $\text{End}(F_A) \cong \text{CFM}_\Gamma(A)$ dır. Gerçekten, F_A bir serbest modül olduğundan Sonuç 1.5.3 ten, $F_A \cong \bigoplus_\Gamma A = A^{(\Gamma)}$ dır. Böylece

$$\text{End}(F_A) \cong \text{End}(A^{(\Gamma)}) \cong \text{CFM}_\Gamma(A)$$

olduğundan $\text{End}(F_A) \cong \text{CFM}_\Gamma(A)$ elde edilir. Dolayısıyla (i) $\Leftrightarrow$ (iii) sağlanır. $\text{CFM}_\Gamma(-)$ ya da $\text{CRFM}_\Gamma(-)$, $M(-)$ ile gösterelim. $X_{M(A)} \leq e_{11}M(A)_{M(A)}$ olsun. Bu durumda bir $V_A \leq A_A$ vardır öyle ki (i, i) -inci elemanları 1 ve diğerleri 0 olmak üzere $e_{ii} \in M(A)$ ve bütün olası k lar için $X \leq e_{11}M(V)$ ve $e_{11}M(V)e_{kk} \leq X$ dir.

İddia. $e_{11}M(R)_{M(R)}$ bir C_{11} -modüldür.

$X_{M(R)} \leq e_{11}M(R)_{M(R)}$ olsun. Bu durumda bir $V_R \leq R_R$ vardır öyle ki bütün olası k lar için $X \leq e_{11}M(V)$ ve $e_{11}M(V)e_{kk} \leq X$ dir. R_R bir C_{11} -module olduğundan bir $c^2 = c \in R$ vardır öyle ki cR_R , V_R nin R_R deki bir komplementidir. $K = ce_{11}M(R)$ olmak üzere $X \cap K = 0$ dır. Gerçekten,

$$X \cap K \leq e_{11}M(V) \cap K = e_{11}M(V) \cap ce_{11}M(R) = 0$$

olduğundan $X \cap K = 0$ elde edilir. Ayrıca $K_{M(R)} \leq_d e_{11}M(R)_{M(R)}$ dir. Şimdi $X \oplus K \leq_e e_{11}M(R)_{M(R)}$ olduğunu gösterelim. $0 \neq a \in e_{11}M(R)$ olsun. O halde bir k ordinali vardır öyle ki $0 \neq ae_{kk}$ dır. ae_{kk} nin sıfırdan farklı elemanı s olsun. Bu durumda $V \oplus cR \leq_e R_R$ olduğundan $0 \neq sr \in V \oplus cR$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $0 \neq ae_{kk}r \in e_{11}M(V \oplus cR)e_{kk} = e_{11}M(V)e_{kk} \oplus e_{11}M(cR)e_{kk} \leq X \oplus K$ dır. Önerme 5.3 ten, $e_{11}M(R)_{M(R)}$ bir C_{11} -modüldür.

$M(R)$ nin her bir satırı $e_{11}M(R)_{M(R)}$ ye izomorftur. O halde $M(R)$ nin bütün satırları C_{11} -modüldür ve $M(R)_{M(R)}$ bu satırların direkt toplamı şeklinde yazılır. Böylece Teorem 5.5 den, $M(R)_{M(R)}$ bir C_{11} -modüldür. $\square$

Önerme 5.36. M bir R -modül ve $H = \text{End}_R(M)$ olmak üzere $A \leq_e eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in H$ ve $A \triangleleft M$ olsun. Bu durumda;

- (i) $(1 - e)H(eM) \subseteq Z(M)$ dir.
- (ii) $eM + Z(M) \triangleleft M$ dir.
- (iii) Eğer bir $f^2 = f \in H$ için $Z_2(M) = fM$ ise $eM + Z_2(M) = (e + f - fe)M \triangleleft M$ ve $e + f - fe \in \mathcal{S}_l(H)$ dir.
- (iv) Eğer $Z(M) \subseteq eM$ ise $eM \triangleleft M$ dir. Üstelik, eğer $A \leq_e X$ ise $X \subseteq eM$ dir. Özel olarak, $Z_2(M) \subseteq eM$ dir.

Kanıt. (i) $m \in M$ olsun. Önerme 1.8.11 den, $eM \subseteq A$ olacak şekilde bir $L \leq_e R_R$ vardır. Bu durumda $(1 - e)HemL \subseteq eM \cap (1 - e)M = 0$ bulunur. O halde $(1 - e)H(eM) \subseteq Z(M)$ elde edilir.

(ii) (i) seçeneği ve Yardımcı Teorem 4.48 (i) den, $eM + Z(M) \triangleleft M$ bulunur.

(iii) $m, k \in M$ için $em + fk \in eM + Z_2(M)$ olsun. $Z_2(M) \triangleleft M$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $f \in \mathcal{S}_l(H)$ dir. Böylece $ef = fef$ dir. Bu durumda $(e + f - fe)^2 = e + f - fe$ ve $(e + f - fe)(em + fk) = em + fk$ elde edilir. Şimdi $(e + f - fe)m \in (e + f - fe)M$ olsun. Buradan

$$(e + f - fe)m = em + fm - fem = em + f(1 - e)m \in eM + Z_2(M)$$

dir. O halde $(e + f - fe)M \subseteq eM + Z_2(M)$ dir. Diğer yandan, $eM + Z_2(M) \subseteq (e + f - fe)M$ dir. Dolayısıyla $(e + f - fe)M = eM + Z_2(M)$ bulunur. (i) seçeneği ve Yardımcı Teorem 4.48 (i) den, $eM + Z_2(M) \triangleleft M$ dir. Yardımcı Teorem 4.48 (ii) den, $e + f - fe \in \mathcal{S}_l(H)$ dir.

(iv) $Z(M) \subseteq eM$ olduğundan $eM + Z(M) = eM$ dir. O halde (ii) seçeneğinden $eM + Z(M) = eM \triangleleft M$ dir. $x \in X$ alalım. $A \leq_e X$ olduğundan Önerme 1.8.11 den, $xL \subseteq A$ olacak şekilde bir $L \leq_e R_R$ vardır. Bu durumda $(1 - e)x \in Z(M) \subseteq eM$ dir. Böylece $x = ex + (1 - e)x \in eM$ dir. O halde $X \subseteq eM$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.37. M bir C_{11} -modül ve $X \triangleleft M$ olsun. Bu durumda $X \leq_e M_1$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. Üstelik, aşağıdaki koşullar sağlanır.

- (i) Eğer $Z_2(M_1)$ bir C_{11} -modül ise M_1 bir C_{11} -modüldür.

(ii) Eğer $Z_2(M_2)$ bir C_{11} -modül ise M_2 bir C_{11} -modüldür.

(iii) Eğer $M_1 \triangleleft M$ ise M_1 ve M_2 , C_{11} -modüllerdir.

(iv) Eğer $Z_2(M) \leq M_2$ ise M_1 ve M_2 , C_{11} -modüllerdir.

Kanıt. Teorem 5.19 dan, M bir FI -extending modüldür. $X \triangleleft M$ ve M , FI -extending modül olduğundan $X \leq_e M_1 \leq_d M$ dir. Böylece $X \leq_e M_1$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ yazılır. Yardımcı Teorem 5.26 ve Önerme 5.36 dan, (iii) sağlanır. Teorem 5.8 gereği $Z_2(M)$ ve K , C_{11} -modüller olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus K$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} M_1 = M \cap M_1 &= [Z_2(M) \oplus K] \cap M_1 = [Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2) \oplus K] \cap M_1 \\ &= Z_2(M_1) \oplus [(Z_2(M_2) \oplus K) \cap M_1] \end{aligned}$$

dir. $K_1 = (Z_2(M_2) \oplus K) \cap M_1$ alınırsa $M_1 = Z_2(M_1) \oplus K_1$ dir. Benzer şekilde, $K_2 = (Z_2(M_1) \oplus K) \cap M_2$ alınırsa $M_2 = Z_2(M_2) \oplus K_2$ elde edilir. Buradan

$$M_1 + Z_2(M) = (Z_2(M_1) \oplus K_1) + Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus K_1 \oplus Z_2(M_2) = K_1 \oplus Z_2(M)$$

dir. Ayrıca $M = M_1 \oplus M_2 = (Z_2(M_1) \oplus K_1) \oplus (Z_2(M_2) \oplus K_2) = (Z_2(M) \oplus K_1) \oplus K_2$ olduğundan $K_1 \oplus Z_2(M) = M_1 + Z_2(M) \leq_d M$ dir. O halde $M_1 + Z_2(M) = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in \text{End}(M_R)$ vardır. Ayrıca $X \triangleleft M$ ve $Z_2(M) \triangleleft M$ olduğundan $X + Z_2(M) \triangleleft M$ dir. Diğer yandan, $X + Z_2(M) \leq_e M_1 + Z_2(M) = eM$ dir. Böylece Önerme 5.36 da $A = X + Z_2(M)$ alınırsa teoremin şartları sağlanır. Üstelik, $Z(M) \subseteq Z_2(M) \subseteq X + Z_2(M) \subseteq eM$ olduğundan Önerme 5.36 (iv) den, $eM \triangleleft M$ bulunur. $M = M_1 \oplus M_2 = (Z_2(M) \oplus K_1) \oplus K_2 = eM \oplus K_2$ dir. O halde (iii) uygulanırsa eM ve K_2 birer C_{11} -modül olur. $eM \leq M$ ve $Z_2(M) \subseteq eM$ olduğundan $Z_2(eM) = Z_2(M) \cap eM = Z_2(M)$ dir. O halde $eM = K_1 \oplus Z_2(eM)$ şeklinde yazılır. Böylece Teorem 5.8 den, K_1 ve $Z_2(M) = Z_2(eM)$ birer C_{11} -modül olur.

(i) $Z_2(M_1)$ bir C_{11} -modül ise Teorem 5.5 den, $M_1 = Z_2(M_1) \oplus K_1$ bir C_{11} -modüldür.

(ii) $Z_2(M_2)$ bir C_{11} -modül ise Teorem 5.5 den, $M_2 = Z_2(M_2) \oplus K_2$ bir C_{11} -modüldür.

(iv) $Z_2(M) \leq M_2$ ise $Z_2(M) = Z_2(M_2)$ dir. Çünkü $Z_2(M_2) = M_2 \cap Z_2(M) = Z_2(M)$ dir. O halde $Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$ olduğundan $Z_2(M_1) = 0$ dir. Böylece $M = Z_2(M_2) \oplus K_1 \oplus K_2$ dir. M bir C_{11} -modül olduğundan Teorem 5.8

den, $Z_2(M) = Z_2(M_2)$ ve $K_1 \oplus K_2$ birer C_{11} -modüldür. $M_1 = Z_2(M_1) \oplus K_1 = K_1$ olduğundan M_1 bir C_{11} -modüldür. Diğer yandan, $M_2 = Z_2(M_2) \oplus K_2$ olduğundan Teorem 5.5 den, M_2 bir C_{11} -modüldür. $\square$

Şimdi genelleştirilmiş üçgensel matris halkasının ve R nin M ile olan aşikâr genişlemesinin sağ C_{11} -halka olması için gerek ve yeter koşullar ele alınacaktır.

Teorem 5.38. *S ve R birer halka, ${}_S M_R$ bir (S, R) -bimodül ve $T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ bir genelleştirilmiş üçgensel matris halkası olsun. Bu durumda T nin bir sağ C_{11} -halka olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.*

(i) *R bir sağ C_{11} -halkadır.*

(ii) *$XM \subseteq N$ olacak şekilde herhangi bir $X_S \leq S_S$ ve $N_R \leq M_R$ için bir $e^2 = e \in S$ vardır öyle ki eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir ve $eS \cap X = 0$ dır. Eğer $eS \subsetneq Y$ olacak şekilde Y_S , X_S nin S_S deki bir komplementi ise $YM \not\subseteq eM$ dir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ T bir sağ C_{11} -halka olsun. $\begin{bmatrix} S & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$, T halkasının idealleridir. $T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir. $H_T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ olsun. $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \triangleleft T$ dir. Teorem 5.37 (iii) den, R bir sağ C_{11} -halkadır ve $H_T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bir C_{11} -modüldür. $B_T \leq H_T$ olsun. Bu durumda $XM \subseteq N$ ve $B = \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $X_S \leq S_S$ ve $N_R \leq M_R$ vardır. Üstelik, bir $\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T$ vardır öyle ki $e^2 = e$, $ey = y$ ve $\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$, B nin bir komplementidir. Böylece $ey = y$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & eM+yR \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

İddia. *eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir.*

$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, B_T nin H_T deki bir komplementi olduğundan

$$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T \cap B_T = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan $eS \cap X = 0$ ve $eM \cap N = 0$ dır. Şimdi $eM \subseteq K$ ve $K \cap N = 0$ olacak şekilde bir $K_R \leq M_R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} eS & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$\begin{bmatrix} eS & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap B_T = \begin{bmatrix} eS & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS \cap X & K \cap N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ dir. $\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$, B_T nin H_T deki bir komplementi olduğundan $\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmalıdır. Böylece $eM = K$ dir. O halde eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir.

$eS \subsetneq Y$ olacak şekilde Y_S , X_S nin S_S deki bir komplementi olsun. Kabul edelim ki, $YM \subseteq eM$ olsun. $\begin{bmatrix} Y & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap B = \begin{bmatrix} Y & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \cap X & eM \cap N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ ve $\begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subsetneq \begin{bmatrix} Y & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Bu ise $\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_T$ nin T_T de B_T nin komplementi olması ile çelişir. Dolayısıyla $YM \not\subseteq eM$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Teorem 5.37 (iii) den, H_T nin bir C_{11} -modül olduğunu göstermek yeterlidir. $B_T \leq H_T$ olsun. Bu durumda $XM \subseteq N$ ve $B = \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $X_S \leq S_S$ ve $N_R \leq M_R$ vardır. Hipotezden, bir $e^2 = e \in S$ vardır öyle ki eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir ve $eS \cap X = 0$ dir. $K = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $K \cap B = 0$ dir.

İddia. K_T , B_T nin H_T deki bir komplementidir.

Şimdi $K \subseteq \overline{K}$ ve $\overline{K} \cap B = 0$ olacak şekilde bir $\overline{K}_T \leq H_T$ olduğunu kabul edelim. $\overline{K}_T \leq H_T$ olduğundan $YM \subseteq V$ ve $\overline{K}_T = \begin{bmatrix} Y & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $Y_S \leq S_S$ ve $Y_R \leq M_R$ vardır. $\overline{K} \cap B = \begin{bmatrix} Y & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} X & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ olduğundan $Y \cap X = 0$, $V \cap N = 0$ dir. $eM \leq V$ ve eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementi olduğundan $V = eM$ olmalıdır. Hipotezden, $Y = eS$ dir. Böylece $\overline{K} = \begin{bmatrix} Y & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = K$ bulunur. Dolayısıyla H_T bir C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 5.39. R bir halka ve $T_m(R)$, R üzerinde tanımlı bir $m \times m$ tipindeki üst üçgensel matris halkası olsun. Bu durumda R nin bir sağ C_{11} -halka olması için gerek ve yeter koşul $T_m(R)$ nin bir sağ C_{11} -halka olmasıdır.

Kanıt. ($\Leftarrow$) $T_m(R)$ bir sağ C_{11} -halka olsun. Bu durumda Teorem 5.38 (i) den, R bir sağ C_{11} -halkadır.

($\Rightarrow$) $m = 1$ için $T_m(R)$ nin bir sağ C_{11} -halka olduğu açıktır. Şimdi $m = 2$ olsun. $XR = X \leq N$ olacak şekilde $X_R \leq R_R$ ve $N_R \leq R_R$ olsun. R_R bir C_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki eR_R , N_R nin R_R deki bir komplementidir. Böylece $X \cap eR \leq N \cap eR = 0$ olduğundan $X \cap eR = 0$ dir. Kabul edelim ki, $eR \subsetneq Y$ olacak şekilde Y_R , X_R nin bir komplementi olsun. Bu durumda $Y \not\subseteq eR$ dir. O halde Teorem 5.38 den, $T_2(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır. Şimdi kabul edelim ki, $T_k(R)$

bir sağ C_{11} -halka olsun. $k > 2$ için $T_k(R)$ nin bir sağ C_{11} -halka olduğunu gösterelim. (i, i) -inci elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan matris e_{ii} olmak üzere Teorem 5.38 de $S = (1 - e_{kk})T(1 - e_{kk})$, $M = (1 - e_{kk})Te_{kk}$ ve $R = e_{kk}Te_{kk}$ alınsın. Hipotezden, $(1 - e_{kk})T_k(R)(1 - e_{kk})$ bir sağ C_{11} -halkadır. Teorem 5.38 (ii) ve tümevarım yöntemi yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Önerme 5.40. R bir halka, M bir (R, R) -bimodül ve $S(R, M) = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$, R nin M ile olan aşikâr genişlemesi olsun. Bu durumda $S(R, M)$ nin bir sağ C_{11} -halka olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

(i) R bir sağ C_{11} -halkadır.

(ii) $IM \subseteq N$ olacak şekilde herhangi bir $I_R \leq R_R$ ve $N_R \leq M_R$ için bir $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir ve $I \cap eR = 0$ dır.

Kanıt. $S(R, M) = S$ ile gösterelim.

($\Rightarrow$) S bir sağ C_{11} -halka olsun. $J_R \leq R_R$ olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} J & M \\ 0 & J \end{bmatrix} \leq S_S$ ve S_S bir C_{11} -modül olduğundan bir $f^2 = f \in R$ vardır öyle ki

$$\begin{bmatrix} J & M \\ 0 & J \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} fR & fM \\ 0 & fR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \cap fR & M \cap fM \\ 0 & J \cap fR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \cap fR & fM \\ 0 & J \cap fR \end{bmatrix} = 0$$

ve

$$\begin{bmatrix} J & M \\ 0 & J \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} fR & fM \\ 0 & fR \end{bmatrix} \leq_e S_S$$

dir. O halde $J \cap fR = 0$ ve $fM = 0$ dır. Böylece

$$\begin{bmatrix} J & M \\ 0 & J \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} fR & fM \\ 0 & fR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \oplus fR & M \oplus fM \\ 0 & J \oplus fR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \oplus fR & M \\ 0 & J \oplus fR \end{bmatrix} \leq_e S_S$$

bulunur. O halde $J \oplus fR \leq_e R$ dir. Dolayısıyla R bir sağ C_{11} -halkadır.

Şimdi (ii) koşulunun sağlandığını gösterelim. $IM \subseteq N$ olacak şekilde $I_R \leq R_R$ ve $N_R \leq M_R$ olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq S_S$ dir. S_S bir C_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cap eR & N \cap eM \\ 0 & I \cap eR \end{bmatrix} = 0$$

ve

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \oplus eR & N \oplus eM \\ 0 & I \oplus eR \end{bmatrix} \leq_e S_S$$

dir. O halde $I \cap eR = 0$ ve $N \cap eM = 0$ dir. Şimdi iddiamız eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementidir. Kabul edelim ki, $eM \subseteq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde bir $K_R \leq M_R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} eR & K \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cap eR & N \cap K \\ 0 & I \cap eR \end{bmatrix} = 0$$

dir. $\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} eR & K \\ 0 & eR \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix}$ nin S_S deki bir komplementi olduğundan

$$\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eR & K \\ 0 & eR \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $K = eM$ bulunur. Dolayısıyla eM_R , N_R nin M_R deki bir komplementi olur.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki, (i) ve (ii) koşulları sağlansın. $U \leq S_S$ olsun. Bu durumda $IM \subseteq N$ ve $U = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix}$ olacak şekilde $I_R \leq R_R$ ve $N_R \leq M_R$ vardır. Hipotezden, bir $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki $N \cap eM = 0$ ve $N \oplus eM \leq_e M$ dir. Böylece $\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} \leq_d S_S$ dir.

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cap eR & N \cap eM \\ 0 & I \cap eR \end{bmatrix} = 0$$

ve

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \oplus eR & N \oplus eM \\ 0 & I \oplus eR \end{bmatrix} \leq_e S_S$$

elde edilir. Sonuç olarak, S_S bir sağ C_{11} -halkadır. $\square$

Teorem 5.41. *Eğer R bir sağ C_{11} -halka ve $R_R \leq_e T_R$ ise T_R bir C_{11} -modül ve T bir sağ C_{11} -halkadır.*

Kanıt. İlk olarak, T_R nin bir C_{11} -modül olduğunu gösterelim. Şimdi $X_R \leq T_R$ ve $\overline{X} = X \cap R$ olsun. $\overline{X} = X \cap R \leq R_R$ ve R_R bir C_{11} -modül olduğundan bir $e^2 = e \in R$ vardır öyle ki $eR, \overline{X}$ in R deki bir komplementidir. eT_R nin X in T_R deki bir komplementi olduğunu gösterelim.

İddia 1. $X \cap eT_R = 0$ dir.

$X \cap eT_R \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq x \in X \cap eT$ olsun. Bu durumda $0 \neq x = et$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. $R_R \leq_e T_R$ olduğundan bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in R$ dir. O halde $0 \neq xr \in X \cap R = \overline{X}$ dir. Fakat $ex = e^2t = et = x$ olduğundan $0 \neq xr = exr \in \overline{X} \cap eR = 0$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $X \cap eT_R = 0$ olmalıdır.

İddia 2. eT_R , X in bir komplementidir.

$eT_R \leq Y_R$ ve $Y_R \cap X_R = 0$ olacak şekilde bir $Y_R \leq T_R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $eR \leq Y \cap R$ dir. $(Y \cap R) \cap \overline{X}_R = (Y \cap R) \cap (X \cap R) = (Y \cap X) \cap R = 0$ dir. eR , $\overline{X}$ in R deki bir komplementi olduğundan $eR = Y \cap R$ olmalıdır. $R_R \leq_e T_R$ olduğundan $eR = Y_R \cap R_R \leq_e Y_R \cap T_R = Y_R$ bulunur. $eR_R \leq eT_R \leq Y_R$ ve $eR_R \leq_e Y_R$ olduğundan $eT_R \leq_e Y_R$ dir. Fakat $eT_R \leq_d T_R$ olduğundan $eT_R = Y_R$ dir.

Şimdi T_T nin bir C_{11} -modül olduğunu gösterelim. $X_T \leq T_T$ ve $\overline{X} = X \cap R$ olsun. O halde $X \cap eT_T = 0$ ve eT_T , X_T nin T_T deki bir komplementi olduğundan T_T bir C_{11} -modüldür. $\square$

Sonuç 5.42. R bir halka ve $Mat_n(R)$, R üzerinde tanımlı $n \times n$ tipindeki tam matrisler halkası olsun. Eğer R bir sağ C_{11} -halka ise her n pozitif tamsayısı için $Mat_n(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır.

Kanıt. R bir sağ C_{11} -halka olsun. Sonuç 5.39 dan, $T_n(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır. $T_n(R)_{T_n(R)} \leq_e Mat_n(R)_{T_n(R)}$ olduğu rutin bir hesaplama ile elde edilir. Teorem 5.41 den, $Mat_n(R)$ bir sağ C_{11} -halkadır. $\square$

Önerme 5.43. M bir R -modül, $K \subseteq \mathcal{S}(\text{End}(E(M_R)))$ ve her $X \leq M_R$ için bir $k \in K$ vardır öyle ki $kE(M_R)$, X in $E(M_R)$ deki bir komplementi olsun. $\langle K \rangle$, $\text{End}(E(M_R))$ nin alt halkası olsun. Bu durumda $\langle K \rangle_{M_R}$, M_R yi kapsayan $E(M_R)$ nin (C_{11}) koşulunu sağlayan bir alt modüldür.

Kanıt. $0 \leq M_R$ olduğundan bir $h \in K$ vardır öyle ki $h(E(M_R)) = E(M_R)$ dir. $h^2 = h$ olduğundan $E(M_R) = h(E(M_R)) \oplus (1-h)(E(M_R)) = h(E(M_R))$ dir. Böylece $1-h = 0$ olup $1 \in \langle K \rangle$ dir. O halde $M_R \leq \langle K \rangle_{M_R}$ dir. Şimdi $X_R \leq \langle K \rangle_{M_R}$ olsun. $M_R \leq_e E(M_R)$ olduğundan $(X \cap M)_R \leq_e X_R$ dir. Bu durumda bir $k \in K$ vardır öyle ki $kE(M_R)$, $(X \cap M)_R$ nin $E(M_R)$ deki bir komplementidir. Böylece $kE(M_R)$, X_R nin $E(M_R)$ deki bir komplementidir. O halde $k \langle K \rangle_M \leq_d \langle K \rangle_M$

ve $k < K > M$, X in $< K > M_R$ deki bir komplementidir. Dolayısıyla $< K > M_R$, (C_{11}) koşulunu sağlar. $\square$

Yardımcı Teorem 5.44. M bir R -modül, $M_R \leq N_R \leq E(M_R)$ ve $e \in \mathcal{S}(\text{End}(N_R))$ olsun. Bu durumda $c|_N = e$ olacak şekilde bir $c \in \mathcal{S}(\text{End}(E(M_R)))$ vardır.

Kanıt. $E(N) = E(eN) \oplus E((1-e)N)$ dir. $c: E(N) \rightarrow E(eN)$ bir kanonik projeksiyon olsun. Bu durumda her $x \in N$ için $cx = c(ex) + c((1-e)x) = c(ex) = ex$ elde edilir. Yani $c|_N = e$ dir. $\square$

Önerme 5.45. M bir R -modül ve $M_R \leq N_R \leq E(M_R)$ olsun. Eğer N_R , (C_{11}) koşulunu sağlıyorsa bir $K \subseteq \mathcal{S}(\text{End}(E(M_R)))$ vardır öyle ki her $X \leq M_R$ için, $k \in K$ olmak üzere $kE(M_R)$, X in $E(M_R)$ deki bir komplementi ve $< K > M_R$, M_R yi kapsayan N_R nin (C_{11}) koşulunu sağlayan bir alt modülüdür.

Kanıt. $0 \leq M_R$ olduğundan $1_{E(M_R)} \in < K >$ alınsın. O halde $M_R \leq < K > M_R$ dir. Böylece Önerme 5.43 ve Yardımcı Teorem 5.44 yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. $\square$

KAYNAKÇA

- [1] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. New York–London: Academic Press.
- [2] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers.
- [3] Mohamed, S.H. and Müller, B.J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*. New York: Cambridge University Press.
- [4] Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F., Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*. Burnt Mill: Longman.
- [5] Kamal, M.A. and Müller, J.B. (1988). Extending modules over commutative domains. *Osaka Journal of Mathematics*, 25(3), 531-538.
- [6] Smith, P.F. and Tercan, A. (1993). Generalizations of *CS*-modules. *Communications in Algebra*, 21(6), 1809-1847.
- [7] Tercan, A. and Yücel, C.C. (2016). *Module Theory*. Bassel: Birkhäuser–Springer.
- [8] Akalan, E., Birkenmeier, G.F. and Tercan, A. (2012). Goldie Extending Rings. *Communications in Algebra*, 40(2), 423-428.
- [9] Birkenmeier, G.F., Müller, B.J. and Rizvi, S.T. (2002). Modules in which every fully invariant submodule is essential in a direct summand. *Communications in Algebra*, 30(3), 1395-1415.
- [10] Akalan, E., Birkenmeier, G.F. and Tercan, A. (2012). Characterizations of extending and $\mathcal{G}$ -extending generalized triangular matrix rings. *Communications in Algebra*, 40(3), 1069-1085.
- [11] Goodearl, K. R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. New York: Marcel Dekker.

- [12] Akalan, E., Birkenmeier, G.F. and Tercan, A. (2009). Goldie Extending Modules. *Communications in Algebra*, 37(2), 663-683.
- [13] Lam, T.Y. (1998). *Lectures on Modules and Rings*. New York: Springer-Verlag.
- [14] Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups*. Volume I, New York-London: Academic Press.
- [15] Fuchs, L. (1973). *Infinite Abelian Groups*. Volume II, New York-London: Academic Press.
- [16] Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. and Park, J.K. (1999). When is the *CS* condition hereditary? *Communications in Algebra*, 27(8), 3875-3885.
- [17] Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. and Park, J.K. (2001). Semicentral Reduced Algebras. *International Symposium on Ring Theory*, pp. 67-84.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : EDANUR TAŞTAN

Yabancı Dil : İNGİLİZCE

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2019-Devam Ediyor, Araştırma Görevlisi, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2019-2021, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2017-Terk, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2015-2016, Klaipeda University, Faculty of Natural Science and Mathematics, Department of Mathematics (English), Erasmus
- 2011-2016, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- 2018, Poster, Private Information Retrieval, ICOMAA-2018 The International Conference on Mathematical Advances and Application, İstanbul-TURKEY.