

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMI-WALKER TÜREVİ
VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

YAZAR
Ayşenur UÇAR

DANIŞMAN
Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ

SİNOP-2019

TEZ KABUL

Ayşenur UÇAR tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları” başlıklı bu çalışma, 01.04.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **DOKTORA tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi / Fen Fakültesi



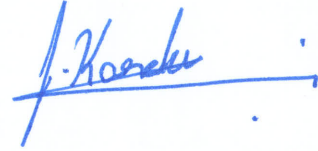
Üye Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Kırıkkale Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



Üye Prof. Dr. Nayil KILIÇ
İstanbul Üniversitesi / Cerrahpaşa Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi



Üye Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



Üye Dr. Öğretim Üyesi Tefik ŞAHİN
Amasya Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayşenur UÇAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER	i
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar	3
2.2. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM	22
4. BULGULAR	23
4.1. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Non-rotating (dönmeyen) Çatı	23
4.1.1. Frenet Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi	23
4.1.2. Darboux Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi	27
4.1.3. Bishop Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi	32
4.2. Genelleştirilmiş Fermi Türevi	35
4.2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Yüzeyler Üzerinde Genelleştirilmiş Fermi Türevi	36
4.2.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayındaki Hiperyüzeyler Üzerinde Genelleştirilmiş Fermi Türevi	41
4.2.3. n-Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Fermi Türevi	45
4.3. Örnekler	48
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	61

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
E^n	: n boyutlu Öklid uzayı
$\alpha(s)$	: E^n uzayında birim hızlı eğri
χ_α	: $\alpha(s)$ eğrisi boyunca vektör alanlarının cümlesi
$\kappa(s)$	: $\alpha(s)$ eğrisinin s – noktasındaki 1. eğriliği (eğrilik fonksiyonu)
$\tau(s)$	: $\alpha(s)$ eğrisinin s – noktasındaki 2. eğriliği (burulma fonksiyonu)
$\kappa_n(s)$	: (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği
$\kappa_g(s)$	: (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği
$t_r(s)$	: (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması
$k_1(s)$	: $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre s – noktasındaki 1. eğriliği
$k_2(s)$	: $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre s – noktasındaki 2. eğriliği
W	: $\alpha(s)$ eğrisinin Darboux vektörü
ω^*	: $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü
ϖ	: $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre Darboux vektörü
$\tilde{\omega}^*$	: $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü
$\dot{X}(s)$	: X vektör alanının Öklid türevi

∇ : Levi-Civita konneksiyonu

$\tilde{\nabla}_T^0 X$: X vektör alanının Fermi-Walker türevi

$\tilde{\nabla}_T X$: X vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$\frac{\delta X}{\delta s}$: X vektör alanının Fermi türevi

$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s}$: X vektör alanının genelleştirilmiş Fermi türevi



ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMI-WALKER TÜREVİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Bu doktora tezinin birinci bölümünde konuya giriş yapılmıştır. İkinci bölümde çalışmada gerekli olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra Fermi-Walker türevi ve genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinin tanımı verilmiştir. Fermi-Walker paralellik, non-rotating (dönmeyen) çatı kavramları, bu kavramlara bağlı olarak genelleştirilmiş Fermi-Walker paralellik kavramı verilmiş ve genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde bu doktora tezinin hazırlanmasında kullanılan materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü üç kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi 3-boyutlu Öklid uzayında incelenmiştir. Öncelikle Öklid uzayında bir eğri boyunca herhangi bir vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gereken şartlar incelenmiş ve Frenet çatısının bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu gösterilmiştir. Benzer işlemler yüzey üzerinde herhangi bir eğri alınarak Darboux çatısı için yapılmıştır. Daha sonra eğrinin Bishop çatısının genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olup olmadığı incelenmiştir. Bulgular bölümünün ikinci kısmında ise öncelikle Fermi türevinin tanımından yola çıkılarak genelleştirilmiş Fermi türevi tanımlanmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında herhangi bir yüzey üzerinde eğri boyunca bir vektör alanının hangi şartlar altında genelleştirilmiş Fermi paralel olacağı incelenmiştir. Levi-Civita türevi, Fermi türevi ve genelleştirilmiş Fermi türevinin çakışma durumları incelenmiştir. Daha sonra 4-boyutlu ve n -boyutlu Öklid uzayında genellemeler yapılmıştır. Bulgular bölümünün son kısmında ise konu ile ilgili örneklerle yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise çalışma sonucunda elde edilen verilerle ilgili değerlendirmeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fermi-Walker türevi, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi, genelleştirilmiş Fermi-Walker paralellik, genelleştirilmiş Fermi türevi, genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı, Frenet çatısı, Darboux çatısı, Bishop çatısı, hiperyüzeyler.

ABSTRACT

GENERALIZED FERMI-WALKER DERIVATIVE AND GEOMETRIC APPLICATIONS

In this doctoral thesis, the introduction of the subject has been given in the first section. Basic definitions and concepts, which are necessary for the thesis have been given in the second section. Then the definitions of Fermi-Walker derivative and generalized Fermi-Walker derivative have been given. By using the concepts of Fermi-Walker parallelism and non-rotating frame, generalized Fermi-Walker parallelism and generalized non-rotating frame concepts have been defined.

In the third section, materials and methods which are used for preparation of this doctoral thesis have been given.

The fourth section has been divided into three parts. In the first part, Fermi-Walker derivative has investigated in Euclidean 3-space. Initially the conditions of the generalized Fermi-Walker parallelism of any vector field along any curve are analyzed in Euclidean 3-space. It has shown that Frenet frame is generalized non-rotating frame along all curves. Similar operations have been made for Darboux frame considering any curve on any surface. After that, the conditions of being generalized non-rotating frame has been investigated for Bishop frame. In the second part, generalized Fermi derivative has been defined along any curve in the hypersurfaces by using the concept of Fermi derivative. The investigation of the conditions of generalized Fermi parallelism of any vector field which is along a curve on any surface in Euclidean 3-space. The conditions of coinciding Levi-Civita derivative, Fermi derivative and generalized Fermi derivative have been examined. Generalizations have been given for Euclidean 4-space and Euclidean n -space. In the last part of the fourth section, examples which are relevant to subject have been given.

In the fifth section of the thesis, the considerations of the results have been given.

Key Words: Fermi-Walker derivative, generalized Fermi-Walker derivative, generalized Fermi-Walker parallelism, generalized Fermi derivative, generalized non-rotating frame, Frenet frame, Darboux frame, Bishop frame, hypersurfaces.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her daim yol gösteren ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ'a, ilgisini ve önerilerini üzerimden eksik etmeyen Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Öğretim Üyesi sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürler ederim. İyi ki varsınız.

Ayşenur UÇAR

1. GİRİŞ

Evren gözlem yoluyla somutlaştırılabilir. Fiziksel deneylerde, bir cismin konumunu ve hareketini incelemek için cisimle aynı hareketi yapan bir γ gözlemcisinden yararlanılır. Cismin t zamanındaki hareketinin geometrik yorumlarının yapılabilmesi için gözlemcinin hareket ettiği eğri boyunca merkezi ve sabit yönleri olan uygun çatı seçimine ihtiyaç vardır. Eğer cisim serbest düşüş yapıyorsa, γ gözlemcisi uzayda Levi-Civita paralellik vasıtasıyla hareket ettirilir. Hızlanan (ivmelenen) cisimler için ise gözlemcinin hareket ettiği uzayda artık Levi-Civita paralellik kullanılamaz. Bu sebeple 1922 yılında Fermi, hızlanan gözlemciler için Fermi türevini tanımlamıştır. Daha sonra Walker 1932 yılında hiperyüzeyler üzerindeki herhangi bir α eğrisi (gözlemcinin üzerinde hareket ettiği eğri-çizdiği rota) için tanımlanan Fermi türevini uzay eğrilerine genişleterek Fermi-Walker türevini tanımlamıştır. 1973 yılında ünlü fizikçi Stephen Hawking ve arkadaşı Ellis "The Large Scale Structure of Spacetime" adlı kitaplarında bu türevin uygulamalarını incelemiştir. Bu kaynak Fermi-Walker türevinin fiziksel uygulamalardaki karşılığı hakkında bazı ipuçları vermektedir, ancak kaynakta derinlemesine bir matematiksel inceleme yapılmamıştır. 1989 yılından sonra Fermi-Walker türevi ve Fermi-Walker paralellik kavramları daha kapsamlı şekilde çalışılmaya başlanmıştır (Benn ve Tucker, 1989; Dandoloﬀ, 1989; Balakrishnan, 2005). Hehl, Lemke ve Mielke 1991 yılında Fermi-Walker türevinin bazı açılımlarını ele alarak bu türevin uzaysal bir öteleme olduğundan bahsetmişlerdir.

Yapılan çalışmaların birçoğunda Fermi-Walker türevi fiziksel olarak açıklanmış olup çalışmalarda geometrik yorumlara çok fazla değinilmemiştir. Bu nedenle Karakuş ve Yaylı 2012 ve 2018 yılları arasındaki çalışmalarında Fermi-Walker türevinin geometrik anlamına değinmişlerdir.

Fermi-Walker türevi sadece hızlanan gözlemciler için geçerlidir ve yalnızca eğrinin geodezik olma durumunda Fermi-Walker türevi ile Levi-Civita türevi çakışır. Bu nedenle hem hızlanan hem hızlanmayan gözlemciler için geçerli olabilecek bir türev tanımına ihtiyaç duyulmuştur. Buradan yola çıkarak 1998 yılında Manoff Fermi-Walker öteleme için bazı genelleştirmeler vermiştir. Daha sonra Priporae 1999 ve 2000 yıllarında yaptığı çalışmalarda hem hızlanan (ivmelenen) hem de hızlanmayan (ivmelenmeyen) gözlemciler için geçerli olan ve doktora tezinin ana konusu olan genelleştirilmiş Fermi-Walker türevini tanımlamıştır.

Bu doktora tezinde öncelikle temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik tanımları verildikten sonra genelleştirilmiş Fermi-Walker

türevine geçilmiştir. Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinin üç boyutlu Öklid uzayındaki incelemeleri yapılmıştır. Daha sonra Fermi türevinin tanımı kullanılarak genelleştirilmiş Fermi türevi tanımlanmış ve bu türevin 3, 4 ve n -boyutlu Öklid uzaylarındaki incelemelerine yer verilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. V boştan farklı bir cümle ve F de bir cisim olsun. V üzerinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri $+: V \times V \rightarrow V$, $+(x, y) = x + y$ ve $\cdot: F \times V \rightarrow V$, $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ şeklinde tanımlansın. Eğer $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall \lambda, \mu \in F$ için

i) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

ii) $x + y = y + x$,

iii) $x + 0 = x$ olacak şekilde V cümlesinin sıfır elemanı diye adlandırılan bir $0 \in V$ elemanı vardır,

iv) Her bir $x \in V$ elemanı için x elemanının $+$ işlemine göre tersi diye adlandırılan ve $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in V$ elemanı vardır,

v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$,

viii) $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in F$ vardır,

şartları sağlanıyorsa V cümlesine F cismi üzerinde **vektör uzayı** denir. V cümlesinin elemanlarına vektörler ve F cisminin elemanlarına da **skalerler** denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2. A boştan farklı bir cümle ve V , bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu mevcutsa, A ya V ile birleşen **Afin Uzay** denir.

i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

olmalıdır.

ii) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için

$$f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.3. A reel afin uzay ve A ile birleşen bir vektör uzayı da V olsun.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere, V vektör uzayında $\forall x, y \in V$ için

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanıyorsa, A afin uzayına **Öklid Uzayı** denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.4. Reel sayılar cismi üzerinde $V_1, V_2, \dots, V_r$; r tane vektör uzayı olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$ için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = af(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

biçiminde tanımlı ise f ye **r -lineer fonksiyon** denir. Özel olarak, $r = 2$ ise f ye **bilineer (2-lineer) fonksiyon** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.5. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye r -lineer fonksiyonların cümlesi

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = \{ f \mid f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \xrightarrow{r\text{-lineer}} \mathbb{R} \}$$

olsun. Bu cümlede $\forall f_1, f_2, f \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}), \forall (u_1, u_2, \dots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için toplama ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla,

$$(f_1 + f_2)(u_1, u_2, \dots, u_r) = f_1(u_1, u_2, \dots, u_r) + f_2(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

$$(\lambda f)(u_1, u_2, \dots, u_r) = \lambda(f(u_1, u_2, \dots, u_r))$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre, $\mathbb{R}$ üstünde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına, $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının **tensörel çarpımı** denir ve

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

şeklinde gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına **r. dereceden tensör** denir. O halde, r. dereceden tensör, bir r-lineer fonksiyondur.

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r = V$$

oluyorsa $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına **kovaryant tensör uzayı** denir ve $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir. Bu uzayın her bir elemanına **r. dereceden bir kovaryant tensör** veya **kovaryant r-tensör** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Örnek 2.1.6. Bir V vektör uzayının duali olan V^* vektör uzayının elemanları 1. dereceden kovaryant tensörlerdir. Çünkü

$$T^1(V) = V^* = \{f \mid f: V \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Örnek 2.1.7. Bir V reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu bilineer olduğundan 2. dereceden kovaryant tensördür (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.8. Kovaryant tensör tanımında V yerine V^* alınırsa, V^* üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayı elde edilir. Bu şekilde elde edilen

$$\mathcal{L}(V^*, V^*, \dots, V^*; \mathbb{R}) = V \otimes V \otimes \dots \otimes V = T_s(V^*)$$

uzayına **kontravaryant tensör uzayı** denir. Bu uzayın elemanlarına **s. dereceden kontravaryant tensör** veya **kontravaryant s-tensör** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Örnek 2.1.9. V vektör uzayının elemanları 1. dereceden kontravaryant tensörlerdir. Çünkü,

$$T^1(V^*) = V = \{ f \mid f : V^* \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.10. Reel sayılar cismi üzerinde n -boyutlu vektör uzayı V ve bu uzayın duali V^* olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{ f \mid f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} \mathbb{R} \}$$

cümlesi Tanım 2.1.5 te verilen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya **r . dereceden kovaryant ve s . dereceden kontravaryant tensör uzayı** denir ve $T_s^r(V)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına da **(r, s) tipinde tensör** adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Örnek 2.1.11. İç çarpım fonksiyonu $(2, 0)$ tipinde tensördür. $\mathbb{R}$ nin elemanları ise $(0, 0)$ tipindeki tensörlerdir. V^* in elemanları $(1, 0)$ tipinde tensörler ve V nin elemanları ise $(0, 1)$ tipinde tensörlerdir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.12. X bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu

$$\mathbf{T1)} \quad X, \emptyset \in \tau,$$

$$\mathbf{T2)} \quad \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau,$$

$$\mathbf{T3)} \quad A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau,$$

şartlarını sağlıyorsa τ koleksiyonuna X üzerinde **topoloji**, (X, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.13. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli, fonksiyonun f^{-1} tersi var ve sürekli ise f fonksiyonuna X den Y ye bir **homeomorfizm** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.14. X bir topolojik uzay olsun. $P, Q \in X$ olmak üzere $P \neq Q$ noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içinde bulunduran A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına **Hausdorff uzayı** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.15. M bir topolojik uzay olsun. M için

M1) M bir Hausdorff uzayıdır,

M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorfiktir,

M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir,

önergeleri doğru ise M ye **bir n -boyutlu topolojik manifold** veya kısaca **topolojik n -manifold** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.16. M bir topolojik n -manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. W , M nin bir alt cümlesi olmak üzere

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

şeklinde bir ψ homeomorfizmi tanımlansın. (ψ, W) ikilisine M de bir **koordinat komşuluğu** veya **harita** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.17. E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna **C^k sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyon** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.18. E^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve $\mathbb{R}$ nin irtibatlı bir açık alt cümlesi I olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir **eğri** ve $t \in I$ değişkenine ise **eğrinin parametresi** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.19. M , (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olmak üzere; $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ oluyorsa M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğunda **birim hızlı eğri** ve $s \in I$ parametresine de eğrinin **yay parametresi** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.20. $M, (I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri ve $\psi = (\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)})$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu durumda $k > r$ olacak şekildeki $\forall \alpha^{(k)}$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Frenet r-ayaklı** alanı ve $\forall m \in M$ noktası için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise eğrinin m noktasındaki **Frenet r-ayaklısı** denir. $1 \leq i \leq r$ olmak üzere her bir V_i vektörüne **Frenet vektörü** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.21. $U, \mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi olsun. U nun her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, U üstünde bir **vektör alanı** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.22. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi s -yay parametrelili bir eğri olmak üzere, $\forall s \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eğrinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

ve eğrinin binormal vektör alanı

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olmak üzere, $\{T, N, B\}$ sistemine **Frenet 3-ayaklısı** denir. $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.23. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. s -yay parametresi olmak üzere, $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu** ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Teorem 2.1.24. (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere; $k_i(s)$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği ve $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ Frenet r-ayaklısı ise

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 \leq i \leq r$$

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

olur (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.25. $\alpha_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ koordinat fonksiyonları olmak üzere s -yay parametresi ile verilen

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda,

$$T'(s) = k_1(s)N(s)$$

$$N'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s)$$

$$B'(s) = -k_2(s)N(s)$$

denklemlerine **Frenet formülleri** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.26. s -yay parametrelili $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$k_1(s) = \kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

değerine $\alpha(s)$ eğrisinin **s-noktasındaki eğriliği** denir (Carmo, 1976).

$k_1(s) = \kappa(s)$ eğriliği, eğrinin teğet vektörden ne kadar uzaklaştığını ölçer (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.27. s -yay parametresi ile verilen $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliği ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına $\alpha(s)$ eğrisinin **s-noktasındaki burulması** denir.

$k_2(s) = \tau(s)$ burulması, eğrinin oskülatör düzlemden ne kadar saptığını ölçer (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.28. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) eksen**i denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** adını alır. Bu vektör

$$W = N \wedge N'$$

eşitliğiyle bulunur (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.29. E^n Öklid uzayında s -yay parametrelili $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin $\forall s \in I$ noktasındaki burulması $\tau(s) = 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine **düzlemsel eğri** denir (Hacısalıhoğlu, 2000a).

Tanım 2.1.30. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine **Frenet eğrisi** veya **uzay eğrisi** denir (Kühnel, 2006).

Tanım 2.1.31. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\mathbb{R}^n$ in her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna C^∞ **sınıftandır** veya **düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur**, denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.32. $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ düzgün bir fonksiyon ve $q \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\varphi_{*q}: T_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{\varphi(q)}(\mathbb{R}^m)$ lineer dönüşümü birebir ise φ fonksiyonu q noktasında **regülerdir**, denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.33. $M \subset \mathbb{R}^3$ olsun. $\forall P \in M$ için $P \in \varphi(U) \subset M$ olacak şekilde $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler dönüşümü bir homeomorfizm ise M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir **yüzey** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.34. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu yüzeye **hiperyüzey** denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.35. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine **regüler (düzenli) eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.36. Z , M yüzeyi üstünde birim normal vektör alanı olsun. M yüzeyinin bir p noktasında

$$S_p(\nu_p) = -D_{\nu_p} Z$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, Z birim dik vektör alanına bağlı **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.37. M yüzeyinin bir p noktasında verilen $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ lineer dönüşümünün öz değerlerine, p noktasındaki **baş (asli) eğrilikler** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.38. M yüzeyinin bir p noktasında verilen $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı öz vektörlerine p noktasındaki **baş (asli) vektörler** veya **eğrilik vektörleri** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.39. $M ; E^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M hiperyüzeyi üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.40. E^{n+1} de M hiperyüzeyi ve bu hiperyüzey üzerinde birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi verilsin. α eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonal ise α eğrisine M hiperyüzeyi üzerinde **geodezik eğri** denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.41. $\nu_p \neq 0$ ve $\langle S(\nu_p), \nu_p \rangle = 0$ ise ν_p vektörüne, p noktasında bir **asimptotik vektör** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.42. $M ; E^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M hiperyüzeyi üzerinde **asimptotik eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.43. M bir diferensiyellenebilir C^∞ manifold olsun. M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve M deki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** denir ve (M, g) ile gösterilir (Kobayashi ve Nomizu, 1996).

Tanım 2.1.44. M n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M deki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-linear}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\text{i)} \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{ii)} \nabla_{fX+gY} Z = f(\nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z)$$

$$\text{iii)} \nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir **Afin Konneksiyon** denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.45. (M, g) n -boyutlu Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\text{i)} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\text{ii)} X_g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Konneksiyonu** ya da M nin **Levi-Civita Konneksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu, 2000b).

Tanım 2.1.46. E^n de tanımlı α eğrisinin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilikleri k_i , $(1 \leq i \leq n)$ ve $\{V_1, \dots, V_{n-1}\}$ tanjant uzayının Levi-Civita türevleri $\nabla_{V_i} V_i$ olmak üzere

$$\nabla_{V_1} V_1 = k_1(s) V_2(s)$$

$$\nabla_{V_i} V_i = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), 1 < i < r$$

$$\nabla_{V_1} V_r = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$$

olur (Hacısalıhoğlu, 2000b; Monterde, 2007).

Tanım 2.1.47. M , E^n de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ ise bu yüzey üzerinde bir eğri olsun.

α nın teğet vektör alanı $T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ ve yüzeyin birim normal vektör alanı n olmak üzere Y vektör alanı

$$Y = n \wedge T$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{T(s), Y(s), n(s)\}$ kümesi, $T_{\alpha(s)}E^n$ uzayının ortonormal bir çatısı olur. Bu çatıya (α, M) **eğri-yüzey ikilisinin çatısı** veya **Darboux çatısı** denir (Gray ve ark., 2006; Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.48. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$$

eşitliğiyle verilen $\kappa_n(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **normal eğriliği** denir (Gray ve ark., 2006; Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.49. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle$$

eşitliğiyle verilen $\kappa_g(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **geodezik eğriliği** denir (Gray ve ark., 2006; Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.50. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$t_r(s) = -\langle n'(s), Y(s) \rangle$$

eşitliğiyle verilen $t_r(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **geodezik burulması** denir (Gray ve ark., 2006; Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.51. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa_n(s)$, $\kappa_g(s)$ ve $t_r(s)$ fonksiyonlarına, (α, M) **eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri** denir (Gray ve ark., 2006; Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.52. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{T(s), Y(s), n(s)\}$, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı ve $\kappa_n(s)$, $\kappa_g(s)$ ve $t_r(s)$ eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri olmak üzere T , Y ve n vektör alanlarının türevleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ Y'(s) \\ n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & t_r(s) \\ -\kappa_n(s) & -t_r(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ Y(s) \\ n(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.53. E^3 Öklid uzayında M yüzeyi üzerinde birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ve $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada γ , yüzeyin birim normal vektör alanı n ile eğrinin binormal vektör alanı B arasındaki açıdır. Ayrıca $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve burulması olmak üzere (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri için

$$\kappa_n(s) = \kappa(s) \sin \gamma$$

$$\kappa_g(s) = \kappa(s) \cos \gamma$$

$$t_r(s) = \tau(s) - \gamma'(s)$$

eşitlikleri sağlanır (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.54. E^3 Öklid uzayında $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri ve $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı T olsun.

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları N_1 ve $N_2 = T \wedge N_1$ olmak üzere T, N_1, N_2 vektör alanları hareketli α eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına **Bishop çatısı** denir (Bishop, 1975).

Teorem 2.1.55. E^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ve $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada ϕ , N ile N_1 arasındaki açıdır. T , N_1 ve N_2 vektör alanlarının türevleri

$$T'(s) = k_1(s)N_1(s) + k_2(s)N_2(s),$$

$$N_1'(s) = -k_1(s)T(s),$$

$$N_2'(s) = -k_2(s)T(s),$$

şeklindedir. Burada $k_1(s)$ ve $k_2(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve burulması olmak üzere

$$k_1(s) = \kappa(s) \cos \phi,$$

$$k_2(s) = \kappa(s) \sin \phi,$$

$$\tau(s) = \phi'(s)$$

eşitlikleri sağlanır (Bishop, 1975).

Tanım 2.1.56. $\alpha(s)$, s -yay parametrelili bir uzay eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca

$$\frac{dT}{ds} = \varpi \wedge T$$

$$\frac{dN_1}{ds} = \varpi \wedge N_1$$

$$\frac{dN_2}{ds} = \varpi \wedge N_2$$

eşitlikleriyle tanımlı

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

vektörüne $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre **Darboux vektörü** denir (Bukcu ve Karacan, 2008; Hanson ve Ma, 1995a; Hanson ve Ma, 1995b; Selig 2007).

Tanım 2.1.57. E^n Öklid uzayında s -yay parametrelili $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. α boyunca bir X vektör alanının Öklid türevi $\frac{dX}{ds}$ olmak üzere

$$\dot{X} = \frac{dX}{ds} = 0$$

oluyorsa X vektör alanına α eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoglu, 2000b).

Tanım 2.1.58. M , E^{n+1} de bir hiperyüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi M üzerinde parametrik bir eğri olsun. X , α boyunca M hiperyüzeyine teğet olan bir vektör alanı ve X vektör alanının Öklid türevi $\dot{X}$ olmak üzere

$$X'(t) = \dot{X}(t) - \langle \dot{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

türevine X vektör alanının **Levi-Civita türevi** veya **kovaryant türevi** denir. Burada $t \in I$ eğrinin parametresi ve N hiperyüzeyin birim normal vektör alanıdır (Hacısalihoglu, 2000b).

Tanım 2.1.59. M , E^{n+1} de bir hiperyüzey ve M üzerinde bir parametre eğrisi $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. α boyunca M hiperyüzeyine teğet olan bir X vektör alanının Levi-Civita türevi X' olmak üzere

$$X'(t) = 0$$

ise X vektör alanına **Levi-Civita anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoglu, 2000b).

2.2. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi

Bir cismin konumu ve hareketi türev kavramıyla açıklanır. M bir hiperyüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ parametrik eğri ve $\forall t \in I$ için $X(t)$, tanjant uzayının bir elemanı olmak üzere X vektör

alanının $\dot{X} = \frac{dX}{ds}$ Öklid türevi genellikle M ye teğet değildir. Bu nedenle serbest düşüş

yapan cisimlerin hareketini incelemek için $\dot{X}(t)$ nin tanjant uzaya ortogonal izdüşümü alınarak elde edilen Levi-Civita türevi tanımlanmıştır. Ancak Levi-Civita türevi sadece serbest düşüş yapan cisimlerin hareketini incelediğinden hızlanan cisimlerin hareketini açıklamada yetersiz kalmıştır. Bu nedenle hiperyüzeyler üzerinde cisimlerin hareketini açıklamak için Fermi türevi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1. E^{n+1} de M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. X , α boyunca yüzeye teğet ve her yerde α eğrisine dik bir vektör alanı olsun. ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlı $\frac{\delta X}{\delta s}$ türevine X vektör alanının **Fermi türevi** denir (Thorpe, 1979).

1922 yılında yüzey üzerindeki eğriler boyunca tanımlanan Fermi türevi 1932 yılında Walker tarafından uzay eğrilerine genişletilmiştir.

Tanım 2.2.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, s -yay parametrelili bir eğri ve X , α eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. O halde $T = \frac{d\alpha}{ds}$ eğrinin teğet vektör alanı ve ∇ , Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı $\tilde{\nabla}$ türevine **Fermi-Walker türevi** denir (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 2.2.3. X , $\alpha(s)$ birim hızlı uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. Eğer X vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

oluyorsa X vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 2.2.4. $\alpha(s)$, s -yay parametrelili bir uzay eğrisi olsun. α eğrisi boyunca U , V ve W ortonormal vektörler olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T U = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T V = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T W = 0$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına **non-rotating (dönmeyen) çatı** denir (Balakrishnan, 2005).

Tanım 2.2.5. $\alpha(s)$, s -yay parametrelili bir uzay eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca

$$\tilde{\nabla}_T T = \omega^* \wedge T,$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \omega^* \wedge N,$$

$$\tilde{\nabla}_T B = \omega^* \wedge B$$

eşitlikleriyle tanımlı

$$\omega^* = \tau T$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

Sabit yönleri tanımlamak için bir α eğrisi boyunca tanjant uzaylar arasında izometri olan Fermi-Walker türevi sadece hızlanan cisimler için geçerli olup, yalnızca α nın geodezik olma durumunda Levi-Civita türevine eşittir Sachs ve Wu, 1972; Weinberg, 1972; Pripoe, 1999; Pripoe, 2000). Ancak Fermi-Walker türevi hem hızlanan hem de hızlanmayan cisimlerin hareketinin açıklanmasında yetersiz kalmıştır. Bu nedenle bu türev genellenerek genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi tanımlanmıştır.

2012 yılında Karakuş ve Yaylı tarafından $\tilde{\nabla}$ koneksiyonu ile verilen Fermi-Walker koneksiyonu bundan sonraki kısımlarda $\tilde{\nabla}^0$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, s -yay parametrelili bir eğri ve $X \in \chi_\alpha$, α eğrisi boyunca herhangi vektör alanı olsun. ∇ Riemann koneksiyonu ve $A, (1,1)$ tensör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T + A(X) \quad (2.3)$$

$$\langle A(Z), T \rangle = 0, \quad Z \in \chi_\alpha^\perp \quad (2.4)$$

şeklinde (2.3)-(2.4) denklemleriyle tanımlı $\tilde{\nabla}$ türevine **genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi** denir (Pripoe, 2000).

Görüldüğü gibi (2.3) denklemi Fermi-Walker türevi cinsinden

$$\tilde{\nabla}_T X = \tilde{\nabla}_T^0 X + A(X) \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.6. X , $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. Eğer X vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

oluyorsa X vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisi boyunca **genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Priopae, 1999).

Tanım 2.2.7. $\alpha(s)$, s -yay parametrelili bir uzay eğrisi olsun. α eğrisi boyunca U , V ve W ortonormal vektörler olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T U = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T V = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T W = 0$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına genelleştirilmiş Fermi-Walker türevine göre **non-rotating (dönmeyen) çatı** veya kısaca **genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı** denir.

Tanım 2.2.8. $\alpha(s)$, s -yay parametrelili bir uzay eğrisi olsun. $\{T, N_1, N_2\}$, $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısı ve A , $(1,1)$ tensör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T T = \tilde{\omega}^* \wedge T$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = \tilde{\omega}^* \wedge N_1$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = \tilde{\omega}^* \wedge N_2$$

eşitlikleriyle tanımlı

$$\tilde{\omega}^* = N_1 \wedge A(N_1)$$

vektörüne $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre **genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir.

Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi hem hızlanan hem de hızlanmayan cisimler için geçerli olduğundan Fermi-Walker türevinin daha genel halidir. Bir gözlemcinin hareketinin yorumlanabilmesi için bu türevin incelenmesi önemlidir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında öncelikle kaynak taraması yapılmış, gerekli tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Daha sonra bu temel tanım ve kavramlar baz alınarak çalışmanın esas konusuyla ilgili teoremler verilmiştir. Bir vektör alanının hangi koşullar altında genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olacağı belirlenmiştir. Öklid uzayındaki Frenet, Darboux ve Bishop çatılarının hangi durumlarda genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu ispatlanmıştır. Benzer işlemler genelleştirilmiş Fermi türevi için tekrarlanmıştır. Daha sonra elde edilen bulgular Microsoft Office ve MathType programları yardımıyla yazılmıştır.



4. BULGULAR

Bu bölümde, temel tanım ve kavramlardan yararlanılarak elde edilen ve bu doktora tezinin ana konusunu teşkil eden bulgulara yer verilecektir.

4.1. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Non-rotating (dönmeyen) Çatı

Bu bölümde genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi, 3-boyutlu Öklid uzayında ele alınacaktır. Önce herhangi bir uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker paralelliği Frenet çatısı ile birlikte değerlendirilecek ve Frenet çatısının hangi şartlar altında genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olacağı belirlenecektir. Daha sonra bir yüzey üzerindeki herhangi bir eğri boyunca bir vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi bu kez eğri-yüzey çatısı yardımıyla verilecektir. Darboux çatısının hangi eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olacağı incelenecektir. Benzer işlemler uzay eğrileri boyunca bu kez Bishop çatısı göz önüne alınarak tekrarlanacaktır.

4.1.1. Frenet Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi

Bu kısımda eğrinin Frenet çatısının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevine göre değişimi incelenecektir.

Lemma 4.1.1.1. $\alpha(s)$, birim hızlı uzay eğrisi ve X , $\alpha(s)$ eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \kappa(X \wedge B) + A(X) \quad (4.1)$$

şeklinde elde edilir.

İspat: (2.3) denkleminde

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \kappa N + \langle \kappa N, X \rangle T + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa [\langle T, X \rangle N - \langle N, X \rangle T] + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \kappa(X \wedge B) + A(X),$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.1.2. $\alpha(s)$, birim hızlı uzay eğrisi olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau\lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau\lambda_2 \right) B \right]$$

olmasıdır.

İspat: (4.1) denkleminde $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T (\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) + \kappa [(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) \wedge B] + A(X),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_T X &= \frac{d\lambda_1}{ds} T + \frac{d\lambda_2}{ds} N + \frac{d\lambda_3}{ds} B + \lambda_1 \nabla_T T + \lambda_2 \nabla_T N + \lambda_3 \nabla_T B \\ &\quad + \kappa [(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) \wedge B] + A(X), \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte Frenet vektör alanlarının türevleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau\lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau\lambda_2 \right) B + A(X)$$

elde edilir. X vektör alanı genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel ise

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau\lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau\lambda_2 \right) B \right]$$

olmalıdır.

Diğer yandan

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau\lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau\lambda_2 \right) B \right]$$

olması durumunda

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1.3. $\alpha(s)$, birim hızlı uzay eğrisi olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = \tau(X \wedge T)$$

olmasıdır.

İspat: (4.1) denkleminde

$$\tilde{\nabla}_T X = \lambda_1 \nabla_T T + \lambda_2 \nabla_T N + \lambda_3 \nabla_T B + \kappa[(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) \wedge B] + A(X)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\tilde{\nabla}_T X = -\tau\lambda_3 N + \tau\lambda_2 B + A(X)$$

olduğu görülür. X , genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olsun. Bu takdirde

$$A(X) = \tau\lambda_3 N - \tau\lambda_2 B$$

olmalıdır. Bu eşitlik düzenlenirse

$$A(X) = \tau[\lambda_1(T \wedge T) + \lambda_2(N \wedge T) + \lambda_3(B \wedge T)],$$

$$A(X) = \tau[(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) \wedge T],$$

$$A(X) = \tau(X \wedge T)$$

elde edilir.

Tersine $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemini düzenlenerek $A(X)$ yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = -\tau\lambda_3 N + \tau\lambda_2 B + \tau(X \wedge T)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = -\tau\lambda_3 N + \tau\lambda_2 B + \tau[(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B) \wedge T],$$

$$\tilde{\nabla}_T X = -\tau\lambda_3 N + \tau\lambda_2 B - \tau\lambda_2 B + \tau\lambda_3 N ,$$

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.1.4. $\alpha(s)$ birim hızlı uzay eğrisi; $A(X) = \tau(X \wedge T)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler ve $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ eğri boyunca bir vektör alanı olmak üzere X vektör alanı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paraleldir.

İspat: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler ve $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere X vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = -\tau\lambda_3 N + \tau\lambda_2 B + \tau(X \wedge T)$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur. Buna göre, X vektör alanı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paraleldir.

Sonuç 4.1.1.5. $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

İspat: (4.1) denkleminde yola çıkılarak $\{T, N, B\}$ Frenet vektörleri için, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T + \kappa(T \wedge B) + \tau(T \wedge T),$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \nabla_T N + \kappa(N \wedge B) + \tau(N \wedge T),$$

$$\tilde{\nabla}_T B = \nabla_T B + \kappa(B \wedge T) + \tau(B \wedge T)$$

genelleştirilmiş Fermi-Walker türevleri elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T T = \kappa N - \kappa N ,$$

$$\tilde{\nabla}_T N = -\kappa T + \tau B + \kappa T - \tau B ,$$

$$\tilde{\nabla}_T B = -\tau N + \tau N$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{\nabla}_T T = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T N = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T B = 0$$

bulunur. O halde $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

Karakuş ve Yaylı tarafından 2012 yılında yapılan çalışmaya göre gösterilmiştir ki $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı yalnızca düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır. Aşağıdaki uyarı, Fermi-Walker türevi ile genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi kıyaslanması açısından önem taşımaktadır.

Uyarı 4.1.1.7. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı eğri boyunca bir non-rotating (dönmeyen) çatı ise, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı eğri boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

4.1.2. Darboux Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde Darboux çatısının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevine göre incelemesi verilecektir.

Lemma 4.1.2.1. M, E^3 te herhangi bir yüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ yüzey üzerinde herhangi bir eğri olsun. $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı ve $\alpha(s)$ eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, X vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(X) \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: $\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T + A(X)$

genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi vektörel çarpımla yeniden düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (T \wedge \nabla_T T) + A(X),$$

elde edilir.

$$\nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n n$$

değeri yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(X)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2.2. $\alpha: I \rightarrow M$, s -yay parametrelili bir eğri olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n \right]$$

olmasıdır. Burada t_r eğrinin geodezik burulmasıdır.

İspat: $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olsun. X vektör alanı (4.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T (\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) + \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) \right] + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \frac{d\lambda_2}{ds} Y + \frac{d\lambda_3}{ds} n + \lambda_1 \nabla_T T + \lambda_2 \nabla_T Y + \lambda_3 \nabla_T n$$

$$+ \kappa_g \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge n \right] - \kappa_n \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge Y \right] + A(X),$$

bulunur. Bu eşitlikte Darboux vektör alanlarının türevleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n + A(X)$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olduğundan

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n \right]$$

bulunur.

Öte yandan

$$A(X) = - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n \right]$$

olsun. Bu durumda $A(X)$, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n \right],$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n - \left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r \lambda_3 \right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r \lambda_2 \right) n \right]$$

elde edilir. Buradan

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur.

Sonuç 4.1.2.3. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = t_r (X \wedge T)$$

olmasıdır.

İspat: $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olsun. Bu durumda (4.2) denkleminde

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T (\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) + \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) \right] + A(X),$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X &= \lambda_1 \nabla_T T + \lambda_2 \nabla_T Y + \lambda_3 \nabla_T n + \kappa_g \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge n \right] \\ &\quad - \kappa_n \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge Y \right] + A(X),\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde Darboux vektör alanlarının türevleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = -t_r \lambda_3 Y + t_r \lambda_2 n + A(X)$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olduğundan

$$A(X) = t_r \lambda_3 Y - t_r \lambda_2 n$$

bulunur. Buradan

$$A(X) = t_r \left[\lambda_1 (T \wedge T) + \lambda_2 (Y \wedge T) + \lambda_3 (n \wedge T) \right],$$

$$A(X) = t_r \left[(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n) \wedge T \right],$$

$$A(X) = t_r (X \wedge T)$$

bulunur.

Öte yandan $A(X) = t_r (X \wedge T)$ olsun. Bu durumda (4.2) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = -t_r \lambda_3 Y + t_r \lambda_2 n + t_r (X \wedge T)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1.2.4. $\alpha: I \rightarrow M$ birim hızlı eğri; $A(X) = t_r (X \wedge T)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler ve $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ eğri boyunca bir vektör alanı olmak üzere X vektör alanı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paraleldir.

İspat: $A(X) = t_r (X \wedge T)$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere (4.2) denkleminde

$$\tilde{\nabla}_T X = -t_r \lambda_3 Y + t_r \lambda_2 n + t_r (X \wedge T)$$

olup

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.2.5. $A(X) = t_r (X \wedge T)$ olmak üzere $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

İspat: (4.2) denkleminde yola çıkılarak $\{T, Y, n\}$ Darboux vektörleri için

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T + T \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(T),$$

$$\tilde{\nabla}_T Y = \nabla_T Y + Y \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(Y),$$

$$\tilde{\nabla}_T n = \nabla_T n + n \wedge (\kappa_g n - \kappa_n Y) + A(n)$$

yazılır. Buradan T , Y ve n vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T T = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T Y = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T n = 0$$

olduğu görülür. O halde $A(X) = t_r (X \wedge T)$ olmak üzere $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı eğri boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

2012 yılında Karakuş ve Yaylı tarafından yapılan çalışmada $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısının yalnızca eğrilik çizgisi boyunca non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu gösterilmiştir. Bu durumda aşağıdaki kıyaslamayı vermek isabetli olacaktır.

Uyarı 4.1.2.6. $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı eğri boyunca non-rotating (dönmeyen) bir çatı ise, $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır. Tersini doğru değildir.

4.1.3. Bishop Çatısı ve Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde herhangi bir uzay eğrisi boyunca vektör alanının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi eğrinin Bishop çatısı yardımıyla incelenecektir. Daha sonra Bishop çatısının hangi eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olacağı verilecektir.

Lemma 4.1.3.1. $\alpha(s)$, birim hızlı uzay eğrisi ve X , bu eğri boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı olmak üzere X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi + A(X) \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada ϖ eğrinin Bishop çatısına göre Darboux vektörü, k_1 ve k_2 eğrinin Bishop çatısına göre eğrilikleridir.

İspat: Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle (k_1 N_1 + k_2 N_2) + \langle k_1 N_1 + k_2 N_2, X \rangle T + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 [(N_1 \wedge T) \wedge X] - k_2 [(N_2 \wedge T) \wedge X] + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 (X \wedge N_2) - k_2 (X \wedge N_1) + A(X),$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge (k_1 N_2 - k_2 N_1) + A(X)$$

olup

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi + A(X)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3.2. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı, $\alpha(s)$ birim hızlı bir eğri ve $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel eğri ise $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paraleldir.

İspat: (4.3) denkleminde $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T (\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2) + k_1 (-\lambda_1 N_1 + \lambda_2 T) - k_2 (\lambda_1 N_2 - \lambda_3 T) + A(X)$$

olup buradan

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau(X \wedge T)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur.

Sonuç 4.1.3.3. $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı düzlemsel eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

İspat: $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere Teorem 4.1.3.2. den

$$\tilde{\nabla}_T T = A(T),$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = A(N_1),$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = A(N_2)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Karakuş ve Yaylı, “On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame” isimli çalışmalarında $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısının bütün eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatı olduğunu ispatlamışlardır. O halde Bishop çatısı için aşağıdaki tespit doğrudur.

Uyarı 4.1.3.4. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı eğri boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı ise, $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı eğri boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

Sonuç 4.1.3.5. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere Bishop çatısına göre genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü

$$\tilde{\omega}^* = -\tau T$$

şeklinde verilir. Burada $\tau(s)$ eğrinin burulma fonksiyonudur.

İspat: Tanım 2.2.8 den Bishop çatısına göre genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü

$$\tilde{\omega}^* = N_1 \wedge A(N_1)$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = A(N_1) = -\tau N_2$$

olup buradan da

$$\tilde{\omega}^* = -\tau T$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3.6. $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere $\tilde{\omega}^* = -\tau T$ genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\tau(s)$ in sabit olmasıdır.

İspat: (4.3) denkleminde k_1 ve k_2 eğrinin Bishop çatısına göre eğrilikleri olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T \tilde{\omega}^* = \nabla_T \tilde{\omega}^* + k_1 (\tilde{\omega} \wedge N_2) - k_2 (\tilde{\omega} \wedge N_1) + A(\tilde{\omega}),$$

$$\tilde{\nabla}_T \tilde{\omega}^* = -\frac{d\tau}{ds} T - \tau \frac{dT}{ds} + k_1 \tau N_1 + k_2 \tau N_2,$$

$$\tilde{\nabla}_T \tilde{\omega}^* = -\frac{d\tau}{ds} T - \tau (k_1 N_1 + k_2 N_2) + k_1 \tau N_1 + k_2 \tau N_2$$

$$\tilde{\nabla}_T \tilde{\omega}^* = -\frac{d\tau}{ds} T$$

elde edilir. O halde $\tilde{\nabla}_T \tilde{\omega}^* = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\tau(s) = \text{sabit}$ olmasıdır.

4.2. Genelleştirilmiş Fermi Türevi

Serbest düşüş yapan cisimlerin hareketi Levi-Civita türevi ile açıklanmaktadır. Bir vektör alanının Öklid türevinin tanjant uzaya dik izdüşümü alınarak elde edilen bu türev hızlanan cisimlerin hareketini incelemekte yetersiz kalmıştır. Bu problemten yola çıkarak Fermi 1922 yılında Fermi türevini tanımlamıştır. Daha sonra hiperyüzeyler üzerindeki eğriler boyunca tanımlanan Fermi türevi, Walker tarafından uzay eğrilerine genişletilerek Fermi-Walker türevi tanımlanmış, sonraki yıllarda bu türevin fiziksel yorumlarını içeren pek çok çalışma yapılmıştır.

1999 yılında Priporae tarafından hem hızlanan hem hızlanmayan cisimler için genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi tanımlanmıştır. Ancak hiperyüzeyler üzerinde tanımlı Fermi türevi için böyle bir genelleştirme daha önce yapılmamıştır.

Bu bölümde öncelikle Fermi türevinin tanımından ve 1999 yılında Priporae tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinden faydalanılarak hiperyüzeyler üzerinde genelleştirilmiş Fermi türevi tanımlanmıştır. Bu türev önce 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler üzerinde incelenmiş, 4-boyutlu Öklid uzayındaki değerlendirmelerden sonra türevin n -boyutlu Öklid uzayındaki genellemeleri verilmiştir.

Tanım 4.2.1. E^{n+1} de M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin.

X , α boyunca yüzeye teğet ve her yerde α eğrisine dik bir vektör alanı olsun. $\frac{\delta X}{\delta s}$, X

vektör alanının Fermi türevi ve A , $(1,1)$ tensör alanı olmak üzere

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{\delta X}{\delta s} + A(X), \quad (4.4)$$

$$\langle A(Z), T \rangle = 0, \quad Z \in \chi^\perp(M) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlı $\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s}$ türevine X vektör alanının **genelleştirilmiş Fermi türevi** denir.

Tanım 4.2.2. M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. X , α boyunca yüzeye teğet ve her yerde α eğrisine dik bir vektör alanı olmak üzere

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = 0$$

ise X vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisi boyunca **genelleştirilmiş Fermi anlamında paraleldir**, denir.

Tanım 4.2.3. M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. U , V ve W α eğrisi boyunca ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$\frac{\tilde{\delta}U}{\tilde{\delta}s} = 0,$$

$$\frac{\tilde{\delta}V}{\tilde{\delta}s} = 0,$$

$$\frac{\tilde{\delta}W}{\tilde{\delta}s} = 0$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına **genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı** denir.

4.2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Yüzeyler Üzerinde Genelleştirilmiş Fermi Türevi

Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayındaki yüzey üzerinde herhangi bir eğri alınacak ve bir vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi incelenecektir.

Lemma 4.2.1.1. M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. X , $\alpha(s)$ boyunca yüzeye teğet ve her yerde α eğrisine dik bir vektör alanı olsun. A , $(1,1)$ tensör alanı ve $\{T, Y, n\}$ yüzeyin Darboux çatısı olmak üzere X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi

$$\frac{\tilde{\delta}X}{\tilde{\delta}s} = \frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X + A(X) \quad (4.6)$$

şeklindedir.

İspat: X vektör alanının Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n$$

olup

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

ve

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{\delta X}{\delta s} + A(X)$$

denklemlerinden

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n, T \right\rangle T + A(X)$$

elde edilir. $\langle X, T \rangle = 0$ ve $\langle X, n \rangle = 0$ olduğundan

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{dX}{ds} + \left\langle X, \frac{dn}{ds} \right\rangle n + \left\langle X, \frac{dT}{ds} \right\rangle T + A(X)$$

bulunur.

$$\frac{dT}{ds} = \kappa_g Y + \kappa_n n,$$

$$\frac{dn}{ds} = -\kappa_n T - t_r Y$$

değerleri yerine yazılarak denklem tekrar düzenlenirse

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{dX}{ds} - \langle X, Y \rangle \frac{dY}{ds} + A(X)$$

elde edilir. $\langle X, T \rangle = 0$ ve $\langle X, n \rangle = 0$ olduğundan

$$X = \lambda(s)Y$$

olup

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X + A(X)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.2. M, E^3 te herhangi bir yüzey olmak üzere $X = \lambda(s)Y$ vektör alanının M üzerindeki bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = -\frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X$$

olmasıdır.

İspat: $\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = 0$ olsun. Bu durumda, (4.6) denkleminde

$$\frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X + A(X) = 0$$

olup

$$A(X) = -\frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X$$

elde edilir.

Öte yandan

$$A(X) = -\frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X$$

olsun. $A(X)$, (4.6) denkleminde yerine yazılırsa $X = \lambda(s)Y$ vektör alanının genelleştirilmiş Fermi paralel olduğu görülür.

Sonuç 4.2.1.3. λ sabit ise $X = \lambda Y$ vektör alanının genelleştirilmiş Fermi türevi ile Fermi türevi çakışır.

Sonuç 4.2.1.4. M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin.

i) $\alpha(s)$ asimptotik eğri ise eğrinin normali N eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

ii) $\alpha(s)$ geodezik eğri ise eğrinin binormali B eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

İspat: i) $\alpha(s)$ asimptotik eğri olsun. Bu durumda $\kappa_n = 0$ olup

$$Y = N$$

olur. O halde

$$\frac{\tilde{\delta}N}{\tilde{\delta}s} = \frac{\tilde{\delta}Y}{\tilde{\delta}s} = 0$$

bulunur.

ii) $\alpha(s)$ geodezik eğri olsun. Bu durumda $\kappa_g = 0$ olup

$$Y = B$$

olur. Bu taktirde

$$\frac{\tilde{\delta}B}{\tilde{\delta}s} = \frac{\tilde{\delta}Y}{\tilde{\delta}s} = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.1.5. E^3 te herhangi bir M yüzeyi üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi geodezik bir eğri olsun. λ sabit olmak üzere X vektör alanının eğri boyunca Levi-Civita paralel olması için gerek ve yeter koşul genelleştirilmiş Fermi paralel olmasıdır.

İspat: $X = \lambda Y$ vektör alanı eğri boyunca Levi-Civita paralel olsun. Bu durumda

$$\frac{\tilde{\delta}X}{\tilde{\delta}s} = A(X)$$

olur. λ sabit olduğundan

$$A(X) = 0$$

bulunur. O halde X eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

Tersine X eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olsun. Bu durumda X in Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X = -\kappa_g \lambda T$$

olup α eğrisi geodezik bir eğri olduğundan

$$\nabla_T X = 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.1.6. X vektör alanı geodezik eğri boyunca Levi-Civita paralel ise hem Fermi paralel hem de genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

İspat: Sonuç 4.2.1.3 ve Teorem 4.2.1.5 yardımıyla X vektör alanının eğri boyunca Levi-Civita paralel olması durumunda hem Fermi paralel hem de genelleştirilmiş Fermi paralel olacağı görülür.

Teorem 4.2.1.7. λ sabit ve $A(X) = t_r(X \wedge T)$ olsun. X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olması için gerek ve yeter koşul eğrinin eğrilik çizgisi olmasıdır.

İspat: (4.6) denkleminde

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X + t_r(X \wedge T)$$

olup X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = -t_r \lambda n$$

bulunur. X , eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olduğundan

$$t_r = 0$$

olacaktır. Buna göre eğri bir eğrilik çizgisidir.

Tersine eğri bir eğrilik çizgisi olsun. (4.6) denkleminde

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{d(\ln(\lambda(s)))}{ds} X + t_r(X \wedge T)$$

olup λ sabit ve $t_r = 0$ olduğundan

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = 0$$

bulunur. O halde X vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

4.2.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayındaki Hiperyüzeyler Üzerinde Genelleştirilmiş Fermi Türevi

Bu bölümde dört boyutlu Öklid uzayındaki hiperyüzey üzerinde herhangi bir eğri alınacak ve bir vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi incelenecektir.

Lemma 4.2.2.1. E^4 teki M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin.

X , α boyunca yüzeye teğet ve her yerde α eğrisine dik bir vektör alanı olsun. A , (1,1) tensör alanı olmak üzere X vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds}, T \right\rangle T + A(X) \quad (4.7)$$

şeklindedir. Burada n , M hiperyüzeyinin normalidir.

İspat: X vektör alanının Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n$$

olup

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

ve

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{\delta X}{\delta s} + A(X)$$

denklemlerinden

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n, T \right\rangle T + A(X)$$

$$\frac{\tilde{\delta}X}{\tilde{\delta}s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n \right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds}, T \right\rangle T + A(X)$$

bulunur.

E^4 te bir M hiperyüzeyi verilsin. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi bu hiperyüzey üzerinde birim hızlı bir eğri ve X eğri boyunca $\langle X, T \rangle = 0$ ve $\langle X, n \rangle = 0$ şartlarını sağlayan herhangi bir vektör alanı olsun. λ_1 ve λ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere genelleştirilmiş Fermi türevinin tanımından $X \in \chi(M)$ ve $\langle X, T \rangle = 0$ olduğundan vektör alanı $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ şeklinde ifade edilecektir. Burada $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısıdır.

Teorem 4.2.2.2. E^4 teki M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğri olsun. $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı, λ_1 ve λ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanının $\alpha(s)$ eğrisi boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \tau\lambda_2 \right) N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \tau\lambda_1 \right) B \right]$$

olmasıdır.

İspat: $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olsun. (4.4) denkleminde

$$A(X) = - \frac{\delta X}{\delta s}$$

olup Fermi türevinin tanımından

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T,$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{d\lambda_1}{ds} N + \lambda_1 \nabla_T N + \frac{d\lambda_2}{ds} B + \lambda_2 \nabla_T B + \left\langle \frac{d\lambda_1}{ds} N + \lambda_1 \nabla_T N + \frac{d\lambda_2}{ds} B + \lambda_2 \nabla_T B, T \right\rangle T,$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \tau\lambda_2 \right) N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \tau\lambda_1 \right) B \quad (4.8)$$

bulunur. Buradan

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \tau\lambda_2 \right) N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \tau\lambda_1 \right) B \right]$$

elde edilir.

Tersine

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \tau\lambda_2 \right) N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \tau\lambda_1 \right) B \right]$$

olsun. $A(X)$, (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\tilde{\delta} X}{\tilde{\delta} s} = 0$$

bulunur. O halde X , genelleştirilmiş Fermi paraleldir.

Sonuç 4.2.2.3. λ_1 ve λ_2 sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanının genelleştirilmiş Fermi paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = \tau(X \wedge T)$$

olmasıdır.

İspat: $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanı genelleştirilmiş Fermi paralel olsun. Bu durumda (4.8) denkleminde

$$\frac{\delta X}{\delta s} = -\tau\lambda_2 N + \tau\lambda_1 B$$

bulunur. (4.4) denkleminde

$$A(X) = -\frac{\delta X}{\delta s}$$

olduğundan

$$A(X) = \tau(-\lambda_1 B + \lambda_2 N),$$

$$A(X) = \tau[-\lambda_1(N \wedge T) + \lambda_2(B \wedge T)]$$

bulunur. O halde

$$A(X) = \tau(X \wedge T)$$

elde edilir.

Tersine $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olsun. $A(X)$, (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\tilde{\delta}X}{\tilde{\delta}s} = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.2.2.4. E^4 teki M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin.

A (1,1) tensör alanı $A(X) = \tau(X \wedge T)$ iken $\{N, B\}$ vektör alanları $\alpha(s)$ eğrisi boyunca genelleştirilmiş Fermi paraleldir. Burada N eğrinin birim normal vektör alanı ve B eğrinin binormal vektör alanıdır.

İspat: Sonuç 4.2.2.3 den N vektör alanının genelleştirilmiş Fermi türevi

$$\frac{\tilde{\delta}N}{\tilde{\delta}s} = \tau B + A(N),$$

$$\frac{\tilde{\delta}N}{\tilde{\delta}s} = \tau B + \tau(N \wedge T),$$

$$\frac{\tilde{\delta}N}{\tilde{\delta}s} = 0$$

bulunur. Benzer şekilde Sonuç 4.2.2.3 de $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 1$ alınır

$$\frac{\tilde{\delta}B}{\tilde{\delta}s} = -\tau N + A(B),$$

$$\frac{\tilde{\delta}B}{\tilde{\delta}s} = -\tau N + \tau(B \wedge T),$$

$$\frac{\delta B}{\delta s} = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

4.2.3. n-Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Fermi Türevi

Bu bölümde n -boyutlu Öklid uzayında herhangi bir eğri boyunca vektör alanının genelleştirilmiş Fermi türevi incelenmiştir. $n \geq 4$ olmak üzere M bir Riemann manifoldu, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı ω -eğrisi, $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ eğri boyunca M nin tanjant uzayı, ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonu ve k_i ($1 \leq i \leq n$) ∇ konneksiyonuna göre eğriliklerdir.

Teorem 4.2.3.1. λ_i ($1 \leq i \leq n-2$), s ye bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$X = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olması için gerek ve yeter şart

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \right]$$

olmasıdır.

İspat: $X = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olsun. (4.4)

denklemden

$$A(X) = - \frac{\delta X}{\delta s}$$

olup Fermi türevinin tanımından

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_{V_1} X - \langle \nabla_{V_1} X, V_1 \rangle V_1 \quad (4.9)$$

olduğundan

$$\nabla_{V_1} X = \nabla_{V_1} (\lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_3 + \dots + \lambda_{n-2} V_{n-1})$$

$$\nabla_{V_1} X = \frac{d\lambda_1}{ds} V_2 + \lambda_1 \nabla_{V_1} V_2 + \frac{d\lambda_2}{ds} V_3 + \lambda_2 \nabla_{V_1} V_3 + \dots + \frac{d\lambda_{n-2}}{ds} V_{n-1} + \lambda_{n-2} \nabla_{V_1} V_{n-1},$$

$$\nabla_{V_1} X = \frac{d\lambda_1}{ds} V_2 + \lambda_1 (-k_1 V_1 + k_2 V_3) + \dots + \frac{d\lambda_{n-2}}{ds} V_{n-1} + \lambda_{n-2} (-k_{n-2} V_{n-2})$$

(4.10)

bulunur.

$$\langle \nabla_{V_1} X, V_1 \rangle = \left\langle \frac{d\lambda_1}{ds} V_2 + \lambda_1 (-k_1 V_1 + k_2 V_3) + \dots + \frac{d\lambda_{n-2}}{ds} V_{n-1} + \lambda_{n-2} (-k_{n-2} V_{n-2}), V_1 \right\rangle,$$

$$\langle \nabla_{V_1} X, V_1 \rangle = -k_1 \lambda_1 \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) eşitlikleri (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + k_2 \lambda_1 - k_3 \lambda_3 \right) V_3 + \dots + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1},$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \quad (4.12)$$

elde edilir. Buradan

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \right]$$

olduğu görülür.

Tersine

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \right]$$

olsun. $A(X)$, genelleştirilmiş Fermi türevinde yerine yazılırsa $X = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör

alanının eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi paralel olduğu görülür.

Sonuç 4.2.3.2.

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \right] \text{ olmak}$$

üzere $\{V_2, V_3, \dots, V_{n-1}\}$ eğri boyunca genelleştirilmiş non-rotatingdir (dönmeyendir).

İspat: (4.10) eşitliğinde $\{V_2, V_3, \dots, V_{n-1}\}$ vektör alanları yerine yazılırsa

$$\nabla_{V_1} V_2 = -k_1 V_1 + k_2 V_3,$$

$$\nabla_{V_1} V_i = -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-2,$$

$$\nabla_{V_1} V_{n-1} = -k_{n-2} V_{n-2}$$

olur. Öte yandan (4.11) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\langle \nabla_{V_1} V_2, V_1 \rangle = -k_1$$

ve

$$\langle \nabla_{V_1} V_i, V_1 \rangle = 0, \quad 3 \leq i \leq n-1$$

bulunur. O halde (4.12) denkleminde

$$\frac{\delta V_2}{\delta s} = k_2 V_3,$$

$$\frac{\delta V_i}{\delta s} = -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-2,$$

$$\frac{\delta V_{n-1}}{\delta s} = -k_{n-2} V_{n-2}$$

bulunur.

$$A(X) = - \left[\left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2 \lambda_2 \right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1} \lambda_{i-2} - k_i \lambda_i \right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2} \lambda_{n-3} \right) V_{n-1} \right]$$

olduğundan

$$\frac{\delta \tilde{V}_i}{\delta s} = 0, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3. Örnekler

Bu bölümde genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi ve genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı ile ilgili örnekler verilecektir.

Örnek 4.3.1. $\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca herhangi bir $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının

i) Fermi-Walker paralel olması için $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fonksiyonlarının ne olması gerektiği bulunsun.

ii) Genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olması için $A(X)$ (1,1) tensör alanı ne olmalıdır?

Çözüm: i) Bir X vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

olmalıdır. $\alpha(s)$ eğrisinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right),$$

$$N = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right),$$

$$\kappa = \frac{1}{2},$$

$$\tau = \frac{1}{2},$$

olup Fermi-Walker türevi düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T^0 X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \frac{1}{2} \lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \frac{1}{2} \lambda_2 \right) B$$

elde edilir. X vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker paralel olabilmesi için

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_2}{ds} - \frac{1}{2} \lambda_3 = 0,$$

$$\frac{d\lambda_3}{ds} + \frac{1}{2} \lambda_2 = 0$$

olmalıdır. Denklem sisteminin çözümünden c_1, c_2 sabitler olmak üzere

$$\lambda_1(s) = \text{sabit},$$

$$\lambda_2(s) = c_1 \cos \frac{1}{2}(s-1) + c_2 \sin \frac{1}{2}(s-1),$$

$$\lambda_3(s) = c_2 \cos \frac{1}{2}(s-1) - c_1 \sin \frac{1}{2}(s-1)$$

şeklinde bulunur.

ii) $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı eğri boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel ise

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

olmalıdır. O halde

$$\tilde{\nabla}_T X = \tilde{\nabla}_T^0 X + A(X)$$

denklemden

$$A(X) = -\tilde{\nabla}_T^0 X$$

olup

$$A(X) = -\left[\frac{d\lambda_1}{ds} T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \frac{1}{2} \lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \frac{1}{2} \lambda_2 \right) B \right]$$

şeklinde dir. X vektör alanı eğri boyunca aynı zamanda Fermi-Walker paralel ise bu durumda

$$A(X) = 0$$

olur.

Örnek 4.3.2. $\alpha(t) = (r \cos(at+b), r \sin(at+b), ct+d)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısının non-rotating (dönmeyen) çatı olmadığı halde genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu gösterilsin.

Çözüm: $\alpha'(t) = (-ar \sin(at+b), ar \cos(at+b), c)$ olup $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 r^2 + c^2} \neq 1$

olduğundan eğri birim hızlı bir eğri değildir. Eğri $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}}$ parametre değişimiyle

birim hızlı hale getirilirse

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), r \sin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), \frac{c}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + d \right)$$

olur. Eğrinin Frenet çatısının

$$T = \alpha'(s),$$

$$N = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

$$B = T \wedge N,$$

denklemlerinden

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} \left(-ar \sin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), ar \cos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), \frac{c}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + d \right),$$

$$N = \left(-\cos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), -\sin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b\right), 0 \right),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} \left(c \sin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b \right), -c \cos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}} s + b \right), ar \right),$$

elde edilir. Eğrinin eğrilik ve burulması ise, sırasıyla,

$$\kappa = \frac{a^2 r}{\sqrt{a^2 r^2 + c^2}}$$

ve

$$\tau = \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2}$$

olup

$$\tilde{\nabla}_T^0 X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T$$

Fermi-Walker türevinde X vektör alanı yerine T , N ve B vektör alanları yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T^0 T = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T^0 N = \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} B,$$

$$\tilde{\nabla}_T^0 B = -\frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} N,$$

bulunur. O halde $\alpha(s)$ eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating (dönmeyen) çatı değildir. Öte yandan $A(X) = \tau(X \wedge T)$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \tilde{\nabla}_T^0 X + A(X)$$

denkleminde

$$\tilde{\nabla}_T T = A(T) = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} B + A(N)$$

$$= \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} B + \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} (N \wedge T)$$

$$\tilde{\nabla}_T N = 0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T B &= -\frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} N + A(B) \\ &= -\frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} N + \frac{ac}{a^2 r^2 + c^2} (B \wedge T)\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_T B = 0,$$

elde edilir. O halde α eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

Örnek 4.3.3. 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı $M = \{(x, y, z) / y^2 + z^2 = r^2\}$ yüzeyi üzerinde $\alpha(t) = (at + b, r \cos(ct + d), r \sin(ct + d))$ eğrisi verilsin. (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısının non-rotating çatı olmadığı halde genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu gösterilsin.

Çözüm: $\alpha'(t) = (a, -cr \sin(ct + d), cr \cos(ct + d))$ olduğundan

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + c^2 r^2} \neq 1$ elde edilir. Bu durumda eğri bir yay parametresi değildir.

$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}}$ parametre değişimiyle birim hızlı hale getirilirse

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + b, r \cos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right), r \sin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right) \right)$$

şeklinde yazılır. $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} \left(a, -cr \sin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right), cr \cos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right) \right),$$

$$n = \left(0, r \cos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right), r \sin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right) \right),$$

$$Y = \frac{r}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} \left(cr, a \sin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right), -a \cos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 r^2}} s + d\right) \right),$$

elde edilir. Eğri-yüzey ikilisinin normal eğriliği, geodezik eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla

$$\kappa_n = -\frac{c^2 r^2}{a^2 + c^2 r^2},$$

$$\kappa_g = 0,$$

$$t_r = \frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2},$$

olup (2.2) denkleminde X vektör alanının yerine T , Y , n vektör alanları yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T^0 T = 0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T^0 Y &= t_r n \\ &= \frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T^0 n &= -t_r Y \\ &= -\frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} Y\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\{T, Y, n\}$ çatısı non-rotating (dönmeyen) çatı değildir. Öte yandan

$A(X) = t_r (X \wedge T)$ olmak üzere (2.5) denkleminde X vektör alanının yerine T , Y , n vektör alanları yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T T &= \tilde{\nabla}_T^0 T + A(T) \\ &= t_r (T \wedge T)\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_T T = 0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T Y &= \tilde{\nabla}_T^0 Y + A(Y) \\ &= \frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} n + \frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} (Y \wedge T)\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_T Y = 0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T n &= \tilde{\nabla}_T^0 n + A(n) \\ &= -\frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} Y + \frac{acr^2}{a^2 + c^2 r^2} (n \wedge T)\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_T n = 0$$

bulunur. Öyleyse $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

Örnek 4.3.4. E^3 te s -yay parametrelili $\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ eğrisi veriliyor.

Eğrinin Bishop çatısının genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olup olmadığı incelensin.

Çözüm: $\alpha(s)$ eğrisinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları Örnek 4.3.1. ile verilmiştir.

Bishop çatısının N_1 vektör alanı ile Frenet çatısının N normal vektör alanı arasındaki açı $\theta(s)$ olmak üzere

$$\tau(s) = \theta'(s)$$

eşitliğinden c bir sabit olmak üzere

$$\theta(s) = \frac{s}{2} + c$$

elde edilir.

$$T = \alpha'(s),$$

$$N_1 = \cos\left(\frac{s}{2} + c\right) N - \sin\left(\frac{s}{2} + c\right) B,$$

$$N_2 = \sin\left(\frac{s}{2} + c\right) N + \cos\left(\frac{s}{2} + c\right) B,$$

denklemleri yardımıyla

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

$$N_1 = \left(-\cos \theta \cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \theta \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

$$N_2 = \left(-\sin \theta \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \theta \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right)$$

$\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı bulunur. T, N_1, N_2 vektör alanlarının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevleri sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_T T = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = A(N_1) = \tau(N_1 \wedge T) = -\frac{1}{2} N_2,$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = A(N_2) = \tau(N_2 \wedge T) = \frac{1}{2} N_1,$$

bulunur. Bishop çatısının N_1 ve N_2 vektör alanları genelleştirilmiş Fermi-Walker paralel olmadığından $\alpha(s)$ eğrisinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı değildir.

Örnek 4.3.5. $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ eğrisinin Bishop çatısının genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olup olmadığı incelensin.

Çözüm: $\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ olduğundan $\|\alpha'(s)\| = 1$ olup $\alpha(s)$ birim hızlı bir eğridir. Eğrinin $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları

$$T = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$N = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$B = (0, 0, 1),$$

$$\kappa(s) = 1,$$

$$\tau(s) = 0,$$

şeklindedir. N_1 ve N vektör alanları arasındaki açı θ olmak üzere

$$\tau(s) = \theta'(s) \Rightarrow \theta(s) = c \quad (c \text{ sabit})$$

bulunur.

$$T = \alpha'(s),$$

$$N_1 = \cos \theta N - \sin \theta B,$$

$$N_2 = \sin \theta N + \cos \theta B,$$

bağıntılarından $\cos \theta = \cos c = a$ ve $\sin \theta = \sin c = b$ olmak üzere

$$T = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$N_1 = (-a \cos s, a \sin s, b),$$

$$N_2 = (-b \cos s, -b \sin s, a),$$

$\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı elde edilir. Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinin tanımından

$$A(X) = \tau(X \wedge T) \text{ olmak üzere}$$

$$\tilde{\nabla}_T T = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = A(N_1) = \tau(N_1 \wedge T) = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = A(N_2) = \tau(N_2 \wedge T) = 0,$$

olduğu görülür. O halde $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezinde hızlanan cisimlerin hareketini inceleyen Fermi-Waker türevinin daha genel hali olan ve hem hızlanan hem de hızlanmayan cisimlerin hareketini inceleyen genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi ele alınmıştır. Fermi-Walker türevi ile kıyaslandığında, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi bir yandan daha geniş bir fiziksel hareketi inceleme olanağı sunarken diğer yandan geometrik olarak da daha genel sonuçlar elde edilmesini sağlar. Örneğin 2012 yılında Karakuş ve Yaylı tarafından yapılan çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısının düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi söz konusu olduğunda ise Frenet çatısının bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu görülür. Benzer şekilde herhangi bir yüzey üzerindeki eğri boyunca Darboux çatısı eğrilik çizgisi boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır (Karakuş ve Yaylı; 2012). Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevine bakıldığında Darboux çatısının bütün eğriler boyunca genelleştirilmiş non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu görülür.

Bu doktora tezinde ayrıca genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinden yola çıkılarak hiperyüzeyler üzerindeki eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi türevi tanımlanmıştır. Bu yeni tanım yüzey üzerindeki cisimlerin hareketini incelemesi açısından literatüre oldukça büyük bir katkı sağlayacaktır.

Bu doktora tezinden, SCI-Expanded kapsamında taranan uluslararası hakemli dergide bir adet makale yayımlanmıştır. Uluslararası sempozyumlarda üç adet bildiri sunulmuş ve Sinop Üniversitesi bünyesinde bir adet BAP projesi tamamlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics.*, 64(4): 607-615.
- Benn, I. M., Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. *Bull. The American Physical Society*, 39(6): 1594-1601.
- Berry, M. V. 1984. *Proc. R. Soc. London*, A392.
- Bishop, R. L. 1975. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3): 246-251.
- Bukcu, B., Karacan, M. K. 2008. Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 6(1): 27-34, DOI: 10.1080/1726037X.2008.10698542.
- Carmo, M. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dandoloff, R. 1989. Berry's phase and Fermi-Walker parallel transport. *Elsevier Science Publishers*, 139(1-2): 19-20.
- Fermi, E. 1922. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 31: 184-306.
- Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. 2006. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces With Mathematica*. Chapman&Hall CRC, 528-530.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000a. *Diferensiyel Geometri*, Cilt I. A. Ü. Fen Fakültesi, Ankara, 1-175.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000b. *Diferensiyel Geometri*, Cilt II. A. Ü. Fen Fakültesi, Ankara, 54-68.
- Hanson, A. J., Ma, H. 1995a. Parallel transport approach to curve framing. *Indiana University, Techreports*, TR425.
- Hanson, A. J., Ma, H. 1995b. Quaternion frame approach to streamline visualization. *Ieee Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(2): 164-174.
- Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. 1973. *The Large Scale Structure of Spacetime*. 4.1. Cambridge Univ. Press, 393.

- Hehl F. W., Lemke J., Mielke E. W. 1991. Two lectures on Fermions and Gravity, Geometry and Theoretical Physics, J. Debrus and A.C. Hirshfeld (eds.), Springer Verlag, N.Y., 56- 140.
- Karakuş, F. , Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(8): 1250066(11 pages).
- Karakuş, F., Yaylı, Y. 2013. The Fermi-Walker derivative in Lie groups. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 10(7): 1320011(10 pages).
- Karakuş, F., Yaylı, Y. 2014. The Fermi derivative in the hypersurfaces. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 12: 1550002 (12 pages).
- Kobayashi, S., Nomizu, K. 1996. Foundations of Differential Geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Kühnel, W. 2006. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Second edition. American Mathematical Society, Rhode Island, 380 s.
- Manoff, S. 1998. Fermi derivative and Fermi-Walker transports over $(L_n;g)$ spaces. Internat. J. Modern Phys. A, 13(25): 4289-4308.
- Monterde, J. 2007. Curves with constant curvature ratios. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 3a Serie. 13(1): 177-186.
- O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.
- Priboae, G.T.1999. Generalized Fermi-Walker transport, LibertasMath., XIX: 65-69.
- Priboae, G. T. 2000. Generalized Fermi-Walker parallelism induced by generalized Schouthen connections. Proceedings of the Conference of Applied Differential Geometry-General Relativity and the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, Balkan Society of Geometers (2000), pp. 117–125.
- Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, s. 4-328, Ankara.
- Sachs, R. K.and Wu, H. 1977. General Relativity for Mathematicians, Springer Verlag, N.Y., 3.3.

- Selig, J. M. 2007. Curves of stationary acceleration in $SE(3)$. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24: 95-113.
- Şahin, B. 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Thorpe, J. A. 1979. Elementary Topics in Differential Geometry. SpringerVerlag, s. 45-52, Berlin.
- Walker, A.G. 1932. Relative co-ordinates. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 52: 345-353.
- Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology, J. Wiley Publ., N.Y, 5.1.



ÖZGEÇMİŞ

1. Kişisel Bilgiler

Ad Soyad	Ayşenur UÇAR
Doğum Tarihi	21.10.1986
Doğum Yeri	TEKİRDAĞ
E-posta Adresi	aysnrucar@gmail.com

2. Eğitim Bilgileri

Önlisans	-
Lisans	2005-2009 Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2009-2012 Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tez Adı: II. Mertebeden Periyodik Sınır Değer Problemleri için Sonlu Fark Şemaları Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ
Doktora	2012-2019 Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tez Adı: Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları Danışman: Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ

3. İş Deneyimi

Şubat 2010-Eylül 2018	Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi
-----------------------	--

4. Yayınlar, Çalışmalar

Makale	Amiraliyev G. M., Ucar A. (2013). Asymptotic Bounds for the Time Periodic Solutions to the Singularly Perturbed Ordinary Differential Equations. the scientific world journal, Doi:10.1155/2013/301609 (Electronic Version)
Bildiri	Uçar A., Karakuş F., Yaylı Y. (2016). The Fermi-Walker Derivative On the Binormal Indicatrix. 14th International Geometry Symposium, 209 (Özet Bildiri/Poster).

Tezden Elde Edilen Makaleler

Uçar A., Karakuş F., Yaylı Y. (2017). Generalized Fermi-Walker Derivative and Non-Rotating Frame. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 17(9), 1750131-1750141.,
Doi:10.1142/S0219887817501316.

Tezden Elde Edilen Bildiriler

Uçar A., Karakuş F., Yaylı Y. (2017). Generalized Fermi-Walker Derivative in Euclidean Space. 15th International Geometry Symposium, s. 153 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).

Uçar A., Karakuş F., Yaylı Y. (2017). Generalized Fermi-Walker Derivative and Bishop Frame. 15th International Geometry Symposium, s. 356 (Özet Bildiri/Poster).

Uçar A., Karakuş F. (2017). Generalized Fermi-Walker Derivative. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), s. 992 (Özet Bildiri/Poster).

Proje

Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi, Yükseköğretim Kurumları tarafından destekli bilimsel araştırma projesi, Yürütücü: Karakuş F. Araştırmacı: Uçar A., 12/12/2016 - 06/09/2018 (ULUSAL).