

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS HİBRİT
POLİNOMLARI

Ayşe ŞAHİN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2022
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Ayşe ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma 01/12/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ömür DEVECİ İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bülent ÇAĞLAR

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Hibrit Polinomları” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 01/12/2022

(İmza)

Ayşe şAHİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS HİBRİT POLİNOMLARI

Ayşe ŞAHİN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları ile kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirmesi olan hibrit sayıları kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinomları tanımlanmıştır. Bu hibrit polinomlarının dizileri oluşturulmuş ve bu dizilerin rekürans bağıntıları, özellikleri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinom dizilerinin terimlerini arasındaki ilişkiler eşitliklerle sunulmuştur. Ayrıca bu polinomlar için üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve matris temsilleri verilmiştir.

2022, 80 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci polinomu, Genelleştirilmiş Fibonacci polinomları, Hibrit sayıları, Hibrit polinomları, Lucas polinomu

ABSTRACT

MSc Thesis

GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS HYBRID POLYNOMIALS

Ayşe ŞAHİN

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, generalized Fibonacci and Lucas hybrid polynomials are defined by using generalized Fibonacci and Lucas polynomials with hybrid numbers, which are a generalization of complex, dual and hyperbolic numbers. Sequences of these hybrid polynomials are created, and the recurrence relations, the properties of these sequences are obtained. The relations between terms of generalized Fibonacci and Lucas hybrid polynomial sequences are presented with equations. Also, generating functions, Binet formulas and matrix representations are given for these polynomials.

2022, 80 Pages

Keywords: Fibonacci polynomial, Generalized Fibonacci polynomials, Hybrid numbers, Hybrid polynomials, Lucas polynomial

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzinan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a, değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Bugünlere gelmemde en büyük emeği olan babam Salih AKSU'ya ve annem Rabia AKSU'ya, çalışmalarım boyunca her türlü desteği veren eşim İlyas ŞAHİN'e ve bu süreçte beni sabırla bekleyen hayatımı şenlendiren kızım Elif ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe ŞAHİN

Aralık, 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vi
SİMGELER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Hibrit Sayıları.....	8
2.3. Rekürans Diziler.....	11
2.3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları	12
2.3.1. Özel hibrit sayı dizileri ve özellikleri.....	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	26
3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları ve Özellikleri.....	26
3.1.1. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlar.....	30
3.1.2. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlar.....	35
3.1.3. $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları.....	42
3.1.4. Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının özellikleri.....	45
3.2. Özel Hibrit Polinom Dizileri ve Özellikleri	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	59
4.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Tipli Hibrit Polinomları	59
4.2. Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomlarının Binet Formülleri ve Üreteç Fonksiyonları.....	64
4.3. Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomlarının Matris Temsilleri ve Özellikleri.....	67
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	76
5.1. Sonuçlar.....	76
5.2. Öneriler.....	76
KAYNAKLAR	77

EKLER.....	80
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	80



TABLolar LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 1.1. $1, i, \varepsilon$ ve h için çarpım tablosu	10
Tablo 1.2. Bazı ikinci mertebeden sayı dizileri.....	13
Tablo 1.3. Sayı dizileri ile ilişkili bazı hibrit sayıları	18
Tablo 3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlar	31
Tablo 3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların Binet formülleri	33
Tablo 3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların üreteç fonksiyonları	35
Tablo 3.4. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlar	37
Tablo 3.5. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların Binet formülleri	39
Tablo 3.6. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların üreteç fonksiyonları	41
Tablo 3.7. Polinom dizileri ile ilişkili bazı hibrit polinomları	52
Tablo 4.1. $\{G_n H(x)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları	60

SİMGELER

$\{a_n\}_{n \geq 0}$	Terimleri $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ Olan Dizi
$\{a_n(x)\}_{n \geq 0}$	Terimleri $a(x)_1, a_2(x), \dots, a_n(x), \dots$ Olan Polinom Dizisi
$\{Ha_n\}_{n \geq 0}$	Terimleri $Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_n, \dots$ Olan Hibrit Sayı Dizisi
$\{Ha_n(x)\}_{n \geq 0}$	Terimleri $Ha_1(x), Ha_2(x), \dots, Ha_n(x), \dots$ Olan Hibrit Polinom Dizisi
$B_n(x)$	n -inci Birinci Tür Morgan-Voyce Polinomu
$B_nH(x)$	n -inci Birinci Tür Morgan-Voyce Hibrit Polinomu
$C_n(x)$	n -inci İkinci Tür Morgan-Voyce Polinomu
$C_nH(x)$	n -inci İkinci Tür Morgan-Voyce Hibrit Polinomu
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Kümesi
$F_{h,n}H(x)$	n -inci $h(x)$ -Fibonacci Hibrit Polinom
$F_{k,n}$	n -inci k -Fibonacci Sayısı
$F_{p,q,n}$	n -inci (p, q) -Fibonacci Sayısı
F_n	n -inci Fibonacci Sayısı
$F_n(x)$	n -inci Fibonacci Polinomu
$\mathcal{F}_n(x)$	n -inci Fibonacci Tipli Polinomu
$F_nH(x)$	n -inci Fibonacci Hibrit Polinomu
$F_n(x, y)$	n -inci iki değişkenli Fibonacci Polinomu
$\mathfrak{f}_nH(x)$	n -inci İki Değişkenli Fibonacci Hibrit Polinomu
$G_n(x)$	n -inci Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomu
$G_nH(x)$	n -inci Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomu
$GF_nH(x)$	Genelleştirilmiş Fibonacci Tipli Hibrit Polinomu
$GL_nH(x)$	Genelleştirilmiş Lucas Tipli Hibrit Polinomu
HW_n	n -inci Horadam Hibrit Sayısı
$HW_n(x)$	n -inci Horadam Hibrit Polinomu
$j_nH(x)$	n -inci Jacobsthal-Lucas Hibrit Polinomu
$J_nH(x)$	n -inci Jacobsthal Hibrit Polinomu
j_n	n -inci Jacobsthal-Lucas Sayısı
J_n	n -inci Jacobsthal Sayısı
$j_n(x)$	n -inci Jacobsthal-Lucas Polinomu
$J_n(x)$	n -inci Jacobsthal Polinomu
$L_{h,n}H(x)$	n -inci $h(x)$ -Lucas Hibrit Polinom
$L_{k,n}$	n -inci k -Lucas Sayısı
$L_{p,q,n}$	n -inci (p, q) -Lucas Sayısı

L_n	n -inci Lucas Sayısı
$L_n H(x)$	n -inci Lucas Hibrit Polinomu
$l_n H(x)$	n -inci İki Değişkenli Lucas Hibrit Polinomu
$L_n(x)$	n -inci Lucas Polinomu
$\mathcal{L}_n(x)$	n -inci Genelleştirilmiş Lucas Tipli Polinomu
$L_n(x, y)$	n -inci iki değişkenli Lucas Polinomu
$P_{k,n}$	n -inci k -Pell Sayısı
P_n	n -inci Pell Sayısı
$P_n(x)$	n -inci Pell Polinomu
$P_n H(x)$	n -inci Pell Hibrit Polinomu
$\mathbb{P}$	Hiperbolik Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar Kümesi
$\mathbb{R}[x]$	Reel Katsayılı Polinomlar Kümesi
Q_n	n -inci Pell-Lucas Sayısı
q_n	n -inci Modifiye Pell Lucas Sayısı
$Q_n(x)$	n -inci Pell-Lucas Polinomu
$Q_n H(x)$	n -inci Pell-Lucas Hibrit Polinomu
$Q'_n(x)$	n -inci Pell-Lucas-prime Polinomu
$Q'_n H(x)$	n -inci Pell-Lucas-prime Hibrit Polinomu
$\mathbb{Q}[x]$	Rasyonel Katsayılı Polinomlar Kümesi
$T_n(x)$	n -inci Birinci Tür Chebyshev Polinomu
$T_n H(x)$	n -inci Birinci Tür Chebyshev Hibrit Polinomu
$U_n(x)$	n -inci İkinci Tür Chebyshev Polinomu
$U_n H(x)$	n -inci İkinci Tür Chebyshev Hibrit Polinomu
$V_n(x)$	n -inci Vieta Polinomu
$V_n H(x)$	n -inci Vieta Hibrit Polinomu
$v_n(x)$	n -inci Vieta-Lucas Polinomu
$v_n H(x)$	n -inci Vieta-Lucas Hibrit Polinomu
$\vartheta_n(x)$	n -inci Fermat Lucas Polinomu
$\vartheta_n H(x)$	n -inci Fermat Lucas Hibrit Polinomu
$\mathbb{Z}[x]$	Tamsayı Katsayılı Polinomlar Kümesi
W_n	n -inci Horadam Sayısı
$W_n(x)$	n -inci Horadam Polinomu
$\Phi_n(x)$	n -inci Fermat Polinomu
$\Phi_n H(x)$	n -inci Fermat Hibrit Polinomu

1. GİRİŞ

Cebirde çok sayıda türü olan diziler önemli bir yer tutmaktadır. Bu dizilerden biri olan rekürans diziler bilimin hemen hemen her alanında kullanılmıştır. Rekürans diziler, dizinin herhangi bir teriminin kendisinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği özel bir dizi türüdür. Rekürans dizilerle tanımlanabilen Fibonacci ve Lucas tipli sayı ve polinom dizileri araştırmacılar için en çok ilgi çeken diziler olup literatürde bu diziler ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Özellikle $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan Fibonacci sayı dizisinin ardışık terimlerinin oranı olan altın oran ile hem cebirsel hem de coğrafi alanlarda sıkça karşılaşılmıştır. Diğer taraftan literatürde Fibonacci ve Lucas tipli sayı dizilerinin farklı genelleştirmeleri çalışılmış ve birçok özelliği sunulmuştur. Fibonacci sayı dizisinin özel bir hali olan Lucas sayı dizisi $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

ile tanımlanır. Bu dizilerle ilgili birçok çalışma vardır (Horadam, 1965; Vajda, 1989; Vorobyov 1976; Everest vd., 2003).

Özel sayı dizilerinin cebir, fizik, biyoloji, kimya, bilgisayar bilimi gibi birçok farklı alanda kullanımı olduğundan bu dizilerin terimleri modern bilimde hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş alanda çalışılmaktadır. Fibonacci ve Lucas sayı dizileri bu rekürans diziler arasında en önemli yere sahiptir (Koshy, 2001).

Sayı dizileri gibi rekürans bağıntılar ile tanımlanan polinom dizileri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi E. Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından çalışıldı. Catalan tarafından çalışılan Fibonaccipolinomları daha sonra 1966 yılında M. N. S.Swamy tarafından geliştirildi. Ayrıca 1963 yılında P.F.Bryd tarafından Fibonacci tipi polinomların bir yenisi olan Pell polinomu literature eklendi. Daha sonra tüm bu farklı tanımlamalar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar olarak adlandırıldı (Horzum ve Kocer, 2009; Taşyurdu ve Deveci, 2017).

Polinomlar ile ilgili yukarıda belirtilen çalışmalardan sonra Nalli ve Haukkanen $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları olarak adlandırılan ve Fibonacci ve Lucas polinomlarının genellemesi olan $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomlarını sunmuşlardır. Ayrıca Binet, üreteç, toplam formüllerini, özel eşitliklerini ve çeşitli özelliklerini vermişlerdir (Nalli vd., 2009). 2014 ve 2018 yıllarında literatürdeki birçok çalışmanın genel hali olarak tamsayı katsayılı genelleştirilmiş Fibonacci polinomları tanımlanmıştır. Daha özel olarak bu polinomlar rasyonel katsayılı polinomlarla tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci tipli ve genelleştirilmiş Lucas tipi polinomlar olarak sunulmuştur. Ayrıca Binet, üreteç, toplam formüllerini, özel eşitliklerini ve çeşitli özelliklerini vermişlerdir (Florez, R., vd., 2014, 2018a; Florez, R., vd., 2018b). Fibonacci ve Lucas sayıları için Fibonacci tipi ve Lucas tipi polinomların birçok genelleştirmesi sunulmuş ve uygulamaları verilmiştir. Birçok özelliği elde edilmiştir (Deveci ve Saraçoğlu Eskiyyapar, 2016; Taşyurdu, vd., 2018).

Hibrit sayıları kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirmesidir (Özdemir, 2018). Hibrit sayı dizileri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Birçok araştırmacı tarafından rekürans bağıntılarla tanımlanan sayı ve polinom dizilerinin kompleks, dual, hiperbolik ve hibrit sayıları gibi özel sayılar ile ilişkili olarak genelleştirmeleri elde edilmiştir. Özellikle son yıllarda hibrit sayıları kullanılarak rekürans bağıntılarla birçok sayı ve polinom dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin n -inci terimlerini veren Binet formüllerini, üreteç ve toplam formüllerini, matris temsillerini ve özelliklerini sunmuşlardır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları ve özellikleri incelenmiştir (Cerdá-Morales, 2018; Szynal-Liana ve Wloch, 2019a; Polatlı, 2021). Szynal-Liana 2018 yılında sunduğu çalışmada Horadam hibrit sayılarını tanımlamıştır (Szynal-Liana, 2018). Daha sonra Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas hibrit sayıları ele alınmış ve bazı özellikleri verilmiştir (Szynal-Liana ve Wloch, 2018; 2019b). Catarino, k -Pell hibrit sayıları adı verilen yeni bir sayı dizisi tanıtmış ve bu diziyi içeren bazı cebirsel özellikleri vermiştir (Catarino, 2019). Catarino ve Bilgici modifiye edilmiş k -Pell hibrit dizisini tanımlamışlardır (Catarino ve Bilgici, 2020). Kızılateş q -Fibonacci ve q -Lucas hibrit sayılarını araştırmış ve bu sayıların bazı özelliklerini sunmuştur (Kızılateş, 2020). Şentürk vd., Horadam hibrit sayılarını ve özelliklerini incelemiştir (Şentürk, vd., 2021)

İki mertebeden rekürans dizilerinde olduğu gibi hibrit sayıları üçüncü mertebeden rekürans diziler ile çalışılmıştır. Taşyurdu Tribonacci ve Tribonacci-Lucas hibrit sayılarının tanımlarını, rekürans bağıntılarını vermiştir. Ayrıca determinantı ve permanenti, Tribonacci ve Tribonacci-Lucas hibrit sayılarına eşit olan Hessenberg matrisleri tanımlamıştır (Taşyurdu, 2019). Yağmur genelleştirilmiş hibrit Tribonacci sayılarını incelemiştir (Yağmur, 2020). Soykan ve Tasdemir genelleştirilmiş Tetranacci hibrit sayılarını tanıtmış ve bu hibrit sayıların bazı özelliklerini sunmuştur (Soykan ve Taşdemir, 2020).

Rekürans bağıntılarla tanımlanan polinom dizileri ile hibrit sayıları kullanılarak da birçok hibrit polinom dizileri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Liana vd. Pell hibrit polinomlarını incelemişlerdir (Liana vd., 2019). Daha sonra Fibonacci, Lucas ve Fibonacci-Pell hibrit polinomlarını ve bunların çeşitli özellikleri sunulmuştur. (Szynal-Liana ve Wloch, 2020a; 2020b). Tan ve Ait-Amrane iki periyodik Horadam hibrit sayılarını incelemiştir (Tan ve Ait-Amrane, 2006). Başka bir çalışmada ise Horadam hibrit sayıları incelenmiş ve çeşitli özellikler elde edilmiştir (Şentürk vd., 2020). Liana vd. Jacobsthal hibrit polinomlarını incelemişlerdir (Liana, vd., 2021). 2022 yılında ise Horadam hibrit polinomları adı verilen Horadam hibrit polinomlarını tanıtmıştır ve özel durumları elde edilmiştir (Kızılateş, 2022).

Sunulan bu tezde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının rekürans bağıntıları ile kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirmesi olan hibrit sayıları kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinomların tanımlanmıştır ve birçok önemli özelliklerini içeren sonuçlar elde edilmiştir (Taşyurdu ve Şahin, 2022). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci polinomları sunulmuştur. Bu polinomların rekürans bağıntıları göz önüne alınarak Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra rasyonel katsayılı polinomlarla tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci tipli ve genelleştirilmiş Lucas tipi polinomlar ile reel katsayılı polinomlarla tanımlanan $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları sunulmuştur. Bu polinomlarının dizileri oluşturulmuş ve Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir.

Daha sonra rekürans bağıntılarla tanımlanan polinom dizileri ile hibrit sayıları kullanılarak sunulan hibrit polinom dizileri tanımlanmış ve özel durumları verilmiştir. Ayrıca bu hibrit polinomları için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üstel fonksiyonları, toplam formülleri ile Catalan, Cassini, ve d'Ocagne eşitlikleri gibi özel eşitlikler sunulmuştur. ve bazı özellikleri verilmiştir

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak k -Pell, k -Pell-Lucas ve Modifiye k -Pell matris dizileri tanımlanmıştır ve detaylı bir şekilde özellikleri incelenmiştir. Bu dizilerin n -inci genel terimini veren matrisler, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. . Daha sonra k -Pell, k -Pell Lucas ve Modifiye k -Pell matris dizilerini içeren bazı önemli eşitlikler, aralarındaki ilişkiler ve birçok sonuç elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntıları ile hibrit sayılarının tanımı kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomları tanımlanmış ve detaylı bir şekilde özellikleri incelenmiştir. Bu hibrit polinomlarının dizileri oluşturulmuş ve n -inci terimin elde edilmesini sağlayan genel formüller elde edilmiştir. Ayrıca üreteç fonksiyonları ile matris temsilleri sunulmuştur. Daha sonra genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit, genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları olarak adlandırılan özel durumlar verilmiştir. Bu özel durumlarının da genel formüllerinin yanı sıra birçok özelliği elde edilmiştir.

.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden kavramlar verilecektir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $*$: $A^n \rightarrow A$ dönüşümüne A üzerinde bir n -li işlem denir. A kümesi üzerinde bir $*$ işlemi tanımlanmışsa $(A, *)$ ifadesine cebirsel yapı denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.2: $G \neq \emptyset$ bir küme ve $*$, G üzerinde bir işlem olsun. Buna göre

- i. $\forall x, y, z \in G$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ ise (Birleşme özelliği)
- ii. $\forall x \in G$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (Birim eleman varlığı özelliği)
- iii. e , G nin birim elemanı olmak üzere $\forall x \in G$ için $x * x' = x' * x = e$ olacak şekilde bir $x' \in G$ sayısı varsa (Ters elemanın varlığı özelliği)

$(G, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.3: $(G, *)$ bir grup olmak üzere $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ oluyorsa bu gruba değişmeli (komutatif ya da abelyan) grup denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.4: $R \neq \emptyset$ bir küme ve toplama $+$, ile çarpma, $\cdot$ denilen iki ikili işlem R kümesi üzerinde tanımlanmış olsun. Buna göre

- i. $(R, +)$ değişmeli bir grup ise
- ii. $\forall x, y, z \in R$ için $x(yz) = (xy)z$ ise (Birleşme özelliği)
- iii. $\forall x, y, z \in R$ için $x(y + z) = xy + xz$ ve $(y + z)x = yx + zx$ oluyorsa (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği)

$(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.5: $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. Buna göre

- i. $\forall x, y \in R$ için $xy = yx$ ise $(R, +, \cdot)$ halkasına değişmeli (komütatif) halka denir.
- ii. $\forall x \in R$ için $x1_R = 1_Rx = x$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.6: $(F, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere sıfırdan farklı her elemanın çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya cisim denir (Taşçı, 2010).

Reel sayılar bir boyutlu olan hiper kompleks sayılardır. Ayrıca adi toplama ve çarpma işlemlerine göre cisim olan bir cebirsel yapıdır. İyi bilinen iki boyutlu sayı sistemlerinden olan kompleks, dual ve hiperbolik sayılar aşağıdaki tanımlarla verilmiştir.

Tanım 2.7: x, y birer reel sayı ve $i^2 = -1$ olmak üzere $x + iy$ şeklindeki sayılara kompleks ya da karmaşık sayılar denir. Kompleks sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{C} = \{x + iy : i^2 = -1 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır (Yaglom, 1968).

Tanım 2.8: x, y birer reel sayı ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $x + \varepsilon y$ şeklindeki sayılara dual sayılar denir. Dual sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{D}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{D} = \{x + \varepsilon y : \varepsilon^2 = 0 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır (Yaglom, 1968).

Tanım 2.9: x, y birer reel sayı ve $h^2 = 1$ olmak üzere $x + hy$ şeklindeki sayılara hiperbolik sayılar denir. Hiperbolik sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{P}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{P} = \{x + hy : h^2 = 1 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır (Yaglom, 1968).

Tanım 2.10: R birimli bir halka, x bir belirsiz, $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ olmak üzere

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

ifadesine R katsayılı x e göre bir polinom denir. $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ elemanlarına $f(x)$ polinomunun katsayıları ve a_ix^i ye de $f(x)$ polinomunun terimleri adı verilir. R üzerinde x belirsizine göre tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.11: R birimli bir halka, x bir belirsiz ve $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \in R[x]$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \in R[x]$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ için $a_i = b_i$ ise $f(x)$ ve $g(x)$ eşit polinomlar denir ve $f(x) = g(x)$ ile gösterilir. Özel olarak $i > n$ için $a_i = 0$ ve $i > m$ için $b_i = 0$ şeklindedir (Taşçı, 2010).

Teorem 2.12: R birimli bir halka, x bir belirsiz ve $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \in R[x]$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \in R[x]$$

olsun. $k = \max\{m, n\}$ ve $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ olmak üzere

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^k (a_i + b_i)x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle $(R[x], +, \cdot)$ birimli bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki polinomlar halkası denir. Eğer R değişmeli ise $R[x]$ de değişmelidir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.13: F bir cisim ve $u_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya m satırlı ve n sütunlu ya da kısaca $m \times n$ boyutlu (mertebeli) matris denir (Taşçı, 2011).

Matris cebirindeki işlemler reel ya da kompleks sayılar cebirinde olduğu gibi tanımlanmıştır.

$U = (u_{ij})_{m \times n}$, $V = (v_{ij})_{m \times n}$, $W = (w_{ij})_{m \times n}$, $S = (s_{ij})_{n \times p}$ ve $T = (t_{ij})_{m \times p}$ birer matris ve λ bir reel sayı olmak üzere

i. İki matrisin toplamı

$$U + V = (u_{ij})_{m \times n} + (v_{ij})_{m \times n} = (u_{ij} + v_{ij})_{m \times n} = (w_{ij})_{m \times n} = W$$

ii. Bir skalerle matrisin çarpımı

$$\lambda U = (\lambda u_{ij})_{m \times n}$$

iii. İki matris çarpımı $US = T = (t_{ij})_{m \times p}$ olmak üzere t_{ij} elemanı

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik} s_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p)$$

şeklindedir (Taşçı, 2011).

2.2. Hibrit Sayıları

Hibrit sayıları, iyi bilinen iki boyutlu sayı sistemlerinden olan kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirilmesidir.

Tanım 2.14: x, y, z, t birer reel sayı ve $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$ olmak üzere $x + iy + \varepsilon z + ht$ şeklindeki sayılara hibrit sayılar denir. Hibrit sayıların oluşturduğu küme K ile gösterilir ve

$K = \{x + iy + \varepsilon z + ht : i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i \text{ ve } x, y, z, t \in \mathbb{R},\}$ olarak tanımlanır (Özdemir, 2018).

$k_1 = x_1 + iy_1 + \varepsilon z_1 + ht_1$ ve $k_2 = x_2 + iy_2 + \varepsilon z_2 + ht_2$ birer hibrit sayısı ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki hibrit sayının toplamı

$$k_1 + k_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) + \varepsilon(z_1 + z_2) + h(t_1 + t_2)$$

- İki hibrit sayının farkı

$$k_1 - k_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) + \varepsilon(z_1 - z_2) + h(t_1 - t_2)$$

- İki hibrit sayının çarpımı

$$k_1 k_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + y_1 z_2 + z_1 y_2$$

$$+ i(x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 t_2 - t_1 t_2)$$

$$+ \varepsilon(x_1 z_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - z_1 t_2 - x_1 y_2 + t_1 z_2)$$

$$+ h(x_1 t_2 - y_1 z_2 + z_1 t_2 + t_1 x_2)$$

- Bir reel sayı ile bir hibrit sayının çarpımı

$$\lambda k_1 = \lambda x_1 + i\lambda y_1 + \varepsilon\lambda z_1 + h\lambda t_1$$

- Bir hibrit sayısının eşleniği

$$\bar{k}_1 = x_1 - iy_1 - \varepsilon z_1 - ht_1$$

- Bir hibrit sayısının karakteri

$$C(k_1) = k_1 \bar{k}_1 = \bar{k}_1 k_1 = x_1^2 + (y_1 - z_1)^2 - z_1^2 - t_1^2$$

- Bir hibrit sayısının normu

$$\|k_1\| = \sqrt{|k_1 \bar{k}_1|} = \sqrt{|C(k_1)|} = \sqrt{|x_1^2 + (y_1 - z_1)^2 - z_1^2 - t_1^2|}$$

şeklindedir.

Hibrit sayıları kompleks, dual ve hiperbolik sayılardan farklı olmasına rağmen bazı benzer cebirsel özelliklere sahiptir. Hibrit sayılarında çarpma işleminin değişmeli olmadığı görülmektedir. Ancak birleşme özelliğine sahiptir. Hibrit sayılarında toplama işlemi ise hem değişmeli hem de birleşmelidir. Toplama işlemine göre birim elemanı 0 olmak üzere $k = x + iy + \varepsilon z + ht$ hibrit sayısının toplama işlemine göre tersi $-k = -x - iy - \varepsilon z - ht$ şeklindedir. Bu ise $(K, +)$ yapısının abel grup olduğu anlamına gelir.

Tablo 1.1. 1, i , ε ve h için çarpım tablosu

$\times$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1 - h$	$i + \varepsilon$
ε	ε	$1 + h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-i - \varepsilon$	ε	1

Ayrıca hibrit sayıları skaler ve vektör bölümlerine ayrılabilir. $k = x + iy + \varepsilon z + ht$ bir hibrit sayısı olmak üzere x reel sayısına skaler kısım denir ve S_k ile gösterilir, $iy + \varepsilon z + ht$ kısmı ise vektör kısmı olarak adlandırılır ve V_k ile gösterilir. Yani

$$S_k = x \quad \text{ve} \quad V_k = iy + \varepsilon z + ht$$

olmak üzere k hibrit sayısı

$$k = S_k + V_k$$

şekilde gösterilir.

2.3. Rekürans Diziler

Matematikte çok farklı biçimlerde tanımlanan diziler bulunmaktadır. Burada dizinin başlangıcındaki birkaç terim hariç olmak üzere, her bir teriminin kendisinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği diziler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.15: Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan fonksiyonlara dizi denir (Kadıoğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.16: Her $n \geq r$ için $u_0 \neq 0$ olacak şekilde u_i ($0 \leq i \leq r-1$) katsayıları için r -inci mertebeden homojen lineer rekürans dizisi, $\{k_n\}_{n \geq 0}$

$$k_n = u_{r-1}k_{n-1} + u_{r-2}k_{n-2} + \dots + u_1k_{n-r+1} + u_0k_{n-r} \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. (2.1) eşitliğe ise r -inci mertebeden homojen lineer rekürans bağıntı denir. $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin ilk r terimini olan $k_0, k_1, \dots, k_{r-1}$ sayılarına da dizisinin başlangıç değerleri denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.17: (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olan $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisi için

$$p(x) = x^r - u_{r-1}x^{r-1} - u_{r-2}x^{r-2} - \dots - u_1x - u_0$$

polinomuna $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik polinomu denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.18: $p(x) = x^r - u_{r-1}x^{r-1} - u_{r-2}x^{r-2} - \dots - u_1x - u_0 = 0$ denkleminde $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik denklemi denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.19: $p(x)$ polinomunun kökleri $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için, $v_i \neq v_j$ ise, $a_n = w_1v_1^n + w_2v_2^n + \dots + w_rv_r^n$ olacak şekilde $w_1, w_2, \dots, w_r$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç değerleri için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $w_1, w_2, \dots, w_r$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve a_n arasındaki eşitliğe rekürans bağıntının çözümü denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.20: Bir $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan

$$G(x) = k_0x^0 + k_1x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} k_ix^i$$

serisine $\{k_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Everest vd., 2003).

Şimdi çalışmamızın temelini oluşturan ikinci mertebeden rekürans diziler sunulacaktır.

2.3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları

İkinci ve daha yüksek mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan sayı dizileri cebir, fizik, kimya, biyoloji, bilgisayar biliminin yanı sıra sanatın birçok farklı alanda uygulamaları vardır. Bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak bu sayılar çok geniş alanda çalışılmaktadır. Bu bölümde literatürde en çok ilgi gören ve ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan Fibonacci ve Lucas sayıları ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.21: $n \geq 2$ için $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleriyle n -inci Fibonacci sayısı, F_n ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç değerleriyle n -inci Lucas sayısı, L_n sırasıyla

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır.

Uzun yıllardır Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirmeleri çalışılmaktadır. Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmesi çalışılırken farklı bakış açıları ortaya çıkmıştır. Horadam, 1965 yılındaki çalışmasında tanımladığı ikinci mertebeden rekürans dizi ile Fibonacci ve Lucas sayılarının en önemli genelleştirmelerini sunmuştur.

Tanım 2.22: $n \geq 2$ için p ve q birer tamsayı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ keyfi reel sayılar olmak üzere ikinci mertebeden rekürans dizi

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2} \quad (2.2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n -inci terimi W_n ile gösterilir (Horadam, 1965).

Daha sonra yapılan çalışmalarda W_n sayısına Horadam sayısı ve bu sayıların oluşturduğu diziye de Horadam sayı dizileri adı verilmiştir. Genel olarak p ve q birer tamsayı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ keyfi reel sayıları başlangıç değerleri için n -inci Horadam sayısı $W_n = W_n(a, b; p, q)$ olmak üzere Horadam sayı dizileri $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir.

$n \geq 2$ olmak üzere $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin özel durumları olarak Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin rekürans bağıntısına benzer bağıntılarla elde edilen ve literatürde ilgi gören diğer sayı dizilerinden olan k -Fibonacci $\{F_{k,n}\}$, (p, q) -Fibonacci $\{F_{p,q,n}\}$, k -Lucas (p, q) -Lucas $\{L_{p,q,n}\}$, Pell $\{P_n\}$, Pell-Lucas $\{Q_n\}$, Modifiye Pell $\{q_n\}$, k -Pell $\{P_{k,n}\}$, Jacobsthal $\{J_n\}$, Jacobsthal-Lucas $\{J_n\}$ gibi sayı dizileri Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2. Bazı ikinci mertebeden sayı dizileri

Sayı Dizileri	$\{W_n(a, b; p, q)\}_{n \geq 0}$ Gösterimi
k -Fibonacci Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; k, -1)\} = \{F_{k,n}\}$
(p, q) -Fibonacci Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; p, -q)\} = \{F_{p,q,n}\}$
k -Lucas Sayı Dizileri	$\{W_n(2, 1; k, -1)\} = \{L_{k,n}\}$
(p, q) -Lucas Sayı Dizileri	$\{W_n(2, p; p, -q)\} = \{L_{p,q,n}\}$
Pell Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; 2, -1)\} = \{P_n\}$
Pell-Lucas Sayı Dizileri	$\{W_n(2, 2; 2, -1)\} = \{Q_n\}$
Modifiye Pell Sayı Dizileri	$\{W_n(1, 1; 2, -1)\} = \{q_n\}$
k -Pell Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; 2, -k)\} = \{P_{k,n}\}$
Jacobsthal Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; 1, -2)\} = \{J_n\}$
Jacobsthal-Lucas Sayı Dizileri	$\{W_n(2, 1; 1, -2)\} = \{J_n\}$
k -Jacobsthal Sayı Dizileri	$\{W_n(0, 1; k, -2)\} = \{J_{k,n}\}$

Şimdi Horadam sayı dizilerinin n -inci terimini elde etmemizi sağlayan genel formüller verilecektir.

Rekürans diziler rekürans bağıntıları kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile dizinin herhangi bir terimi, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunabilir. Örneğin bir dizinin 100-üncü terimini elde etmek için rekürans bağıntısı kullanılırsa kendisinden önce ilk 99 terimin bilinmesi gerekmektedir. Ancak bunun yerine Binet formülü kullanılırsa bu hesaplama ihtiyacı duyulmamaktadır. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır. (2.2) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $t^2 - pt + q = 0$ olup bu karakteristik denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

şeklindedir. Bu kökler arasında

$$\alpha + \beta = p$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$\alpha\beta = q$$

eşitlikleri vardır. Buradan Horadam sayıları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.23: $n \geq 0$ için α ve β , $t^2 - pt + q = 0$ denkleminin kökleri, $A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}$ ve $B = \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta}$ olmak üzere olmak üzere n -inci Horadam sayısı için Binet formülü

$$W_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklindedir.

İspat: Tanım 2.19 dan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için n -inci Horadam sayısının genel formu

$$W_n = w_1\alpha^n + w_2\beta^n \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$W_0 = a = w_1 + w_2$$

$$W_1 = b = w_1\alpha + w_2\beta$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$w_1 = \frac{b-a\beta}{\alpha-\beta} \quad \text{ve} \quad w_2 = \frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}$$

olarak bulunur. Bulunan w_1 ve w_2 değerleri (2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$W_n = \frac{(b-a\beta)\alpha^n + (a\alpha-b)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

olup $A = \frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$ ve $B = \frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}$ için n -inci Horadam sayısı için Binet formülü

$$W_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tablo 1.2 de verilen a, b, p, q değerleri Teorem 2.23 de kullanılarak Horadam sayılarının özel durumları için Binet formülleri elde edilebilir.

Şimdi Horadam sayıları için üreteç fonksiyonunu verilecektir. n -inci Horadam sayısı W_n olmak üzere $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n \quad (2.4)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.24: Horadam sayı dizilerin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{a + (b - pa)x}{1 - px + qx^2}$$

şeklindedir (Horadam, 1965).

İspat: (2.4) eşitliğinden Horadam sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = W_0 x^0 + W_1 x^1 + W_2 x^2 + \dots + W_n x^n + \dots$$

dir. Bu denklemin her iki yanı $-px$ ve qx^2 ile çarpılırsa

$$-pxgG(x) = -pW_0x^1 - pW_1x^2 - pW_2x^3 - \dots - pW_nx^{n+1} - \dots$$

$$qx^2G(x) = qW_0x^2 + qW_1x^3 + qW_2x^4 + \dots + qW_nx^{n+2} + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - px + qx^2)G(x) = W_0 + (W_1 - pW_0)x + (W_2 - pW_1 + qW_0)x^2 \\ + (W_3 - pW_2 + qW_1)x^3 + \dots + (W_n - pW_{n-2} + qW_{n-3})x^n + \dots$$

dir. Tanım 2.22 deki $W_0 = a$, $W_1 = b$ başlangıç değerleri için $W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - px + qx^2)G(x) = W_0 + (W_1 - pW_0)x$$

olup Horadam sayı dizileri için üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{a + (b - pa)x}{1 - px + qx^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 1.2 de verilen a, b, p, q değerleri Teorem 2.24 de kullanılarak Horadam sayılarının özel durumları için üreteç fonksiyonları elde edilebilir.

2.3.1. Özel hibrit sayı dizileri ve özellikleri

Rekürans bağıntılarla tanımlanan sayı dizileri ile hibrit sayıları kullanılarak yeni sayı dizileri tanımlanmıştır. Bu bölümde Horadam sayı dizileri ile ilişkili Horadam hibrit sayıları sunulmuştur. Bu hibrit sayılarından herhangi birini elde etmek için kullanılan ve genel formül olarak bilinen Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Ayrıca Horadam sayı dizilerinin özel durumları olan Fibonacci, k -Fibonacci, (p, q) -Fibonacci, Lucas, k -Lucas, (p, q) -Lucas, Pell, Pell-Lucas, Modifiye Pell, k -Pell, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas ve k -Jacobsthal sayı dizileri ile ilişkili hibrit sayıları, genel formülleri ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.25: W_n , n -inci Horadam sayısı olmak üzere

$$i^2 = -1, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad h^2 = 1, \quad ih = -hi = \varepsilon + i$$

değerlerini sağlayan $\{1, i, \varepsilon, h\}$ tabanı ile n -inci Horadam hibrit sayısı, HW_n

$$HW_n = W_n + iW_{n+1} + \varepsilon W_{n+2} + hW_{n+3}, \quad n \geq 0 \quad (2.5)$$

eşitliği ile tanımlanır (Szynal Liana, 2018).

Genel olarak p ve q birer tamsayı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ keyfi reel sayıları başlangıç değerleri için n -inci Horadam sayısı $W_n = W_n(a, b; p, q)$ olmak üzere n -inci Horadam hibrit sayısı $HW_n = HW_n(a, b; p, q)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5 kullanılarak ilk birkaç Horadam hibrit sayısı şöyledir:

$$HW_0 = a + ib + \varepsilon(pb - qa) + h(p^2b - q(a + b)),$$

$$HW_1 = b + i(pb - qa) + \varepsilon(p^2b - q(a + b)) + h(p^3 + q^2a - pq(a + 2b) - b)$$

$$HW_2 = pb - qa + i(p^2b - q(a + b)) + \varepsilon(p^3 + q^2a - pq(a + 2b) - b)$$

$$+ h(p^4 + q^2ap - p^2q(a + 2b) - bp - p^2bq + q^2(a + b))$$

$$HW_3 = p^2b - q(a + b) + i(p^3 + q^2a - pq(a + 2b) - b)$$

$$+ \varepsilon(p^4 + q^2ap - p^2q(a + 2b) - bp - p^2bq + q^2(a + b))$$

$$+ h(p^5 + q^2ap^2 - p^3q(a + 2b) - bp - p^2bq + q^2(a + b))$$

$$- p^3q + q^3a - pq^2(a + 2b) - bq)$$

Tablo 1.2 de verilen a, b, p, q değerleri ile Tanım 2.25 kullanılarak Horadam hibrit sayılarının özel durumları olan Fibonacci hibrit $\{HF_n\}$, k -Fibonacci hibrit $\{HF_{k,n}\}$, (p, q) -Fibonacci hibrit $\{HF_{p,q,n}\}$, Lucas hibrit $\{HL_n\}$, k -Lucas hibrit $\{HL_{k,n}\}$, (p, q) -Lucas hibrit $\{HL_{p,q,n}\}$, Pell hibrit $\{HP_n\}$, Pell-Lucas hibrit $\{HQ_n\}$, Modifiye Pell hibrit $\{Hq_n\}$, k -Pell hibrit $\{HP_{k,n}\}$, Jacobsthal hibrit $\{HJ_n\}$, Jacobsthal-Lucas hibrit $\{Hj_n\}$ ve k -Jacobsthal hibrit $\{HJ_{k,n}\}$ sayıları gibi hibrit sayıları elde edilir. Bu hibrit sayıları Tablo 1.3 de verilmiştir.

Tablo 1.3. Sayı dizileri ile ilişkili bazı hibrit sayıları

Hibrit Sayıları	$H\mathcal{W}_n(a, b; p, q)$	Sembolü
Fibonacci hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; 1, -1)$	HF_n
k -Fibonacci hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; k, -1)$	$HF_{k,n}$
(p, q) -Fibonacci hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; p, q)$	$HF_{p,q,n}$
Lucas hibrit sayıları	$HW_n(2, 1; 1, -1)$	HL_n
k -Lucas hibrit sayıları	$HW_n(2, 1; k, -1)$	$HL_{k,n}$
(p, q) -Lucas hibrit sayıları	$HW_n(2, p; p, q)$	$HL_{p,q,n}$
Pell hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; 2, -1)$	HP_n
Pell-Lucas hibrit sayıları	$HW_n(2, 2; 2, -1)$	HQ_n
Modifiye Pell hibrit sayıları	$HW_n(1, 1; 2, -1)$	Hq_n
k -Pell hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; 2, -k)$	$HP_{k,n}$
Jacobsthal hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; 1, -2)$	HJ_n
Jacobsthal-Lucas hibrit sayıları	$HW_n(2, 1; 1, -2)$	Hj_n
k -Jacobsthal hibrit sayıları	$HW_n(0, 1; k, -2)$	$HJ_{k,n}$

Tanım 2.25 kullanılarak Horadam hibrit sayıları bulunurken Horadam sayı dizilerinin terimlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu hibrit sayıları da Horadam sayı dizilerinin rekürans bağıntısına benzer bağıntılarla da sunulabilir.

Tanım 2.26: $n \geq 2$ için

$$HW_0 = a + ib + \varepsilon(pb - qa) + h(p^2b - q(a + b)),$$

$$HW_1 = b + i(pb - qa) + \varepsilon(p^2b - q(a + b)) + h(p^3 + q^2a - pq(a + 2b) - b)$$

başlangıç değerleriyle n -inci Horadam hibrit sayısı, HW_n

$$HW_n = pHW_{n-1} - qHW_{n-2} \quad (2.6)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Şentürk vd., 2020).

Horadam hibrit sayıları Tanım 2.25 ve Tanım 2.26 kullanılarak elde edilebileceği gibi bilinen sayı dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci Horadam hibrit sayısı elde edilir. (2.6) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $t^2 - pt + q = 0$ olup bu karakteristik denklem Horadam sayı dizilerinin karakteristik denklem ile aynıdır. Bu denklemin kökleri α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

şeklindedir. Buradan Horadam hibrit sayıları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.27: $n \geq 0$ için α ve β , $t^2 - pt + q = 0$ denkleminin kökleri, $A = \frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$ ve

$B = \frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}$ olmak üzere n -inci Horadam hibrit sayısı için Binet formülü

$$HW_n = A\alpha^n(1 + ia + \varepsilon a^2 + ha^3) + B\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon\beta^2 + h\beta^3)$$

şeklindedir (Szynal Liana, 2018).

İspat: Teorem 2.23 ile verilen n -inci Horadam sayısının Binet formülünü (2.5) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 HW_n &= W_n + iW_{n+1} + \varepsilon W_{n+2} + hW_{n+3} \\
 &= (A\alpha^n + B\beta^n) + i(A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}) \\
 &\quad + \varepsilon(A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2}) + h(A\alpha^{n+3} + B\beta^{n+3}) \\
 &= A\alpha^n(1 + ia + \varepsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + B\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon\beta^2 + h\beta^3)
 \end{aligned}$$

olup Horadam hibrit sayılarının Binet formülü

$$HW_n = A\alpha^n(1 + ia + \varepsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + B\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon\beta^2 + h\beta^3), \quad n \geq 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Horadam hibrit sayılarının özel durumlarının Binet formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.28: n -inci Horadam hibrit sayısı, $HW_n = HW_n(a, b; p, q)$ olmak üzere

- i. $HW_n(0,1; 1, -1) = HF_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019a) çalışmasında $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n -inci Fibonacci hibrit sayısı, HF_n için Binet formülü

$$\begin{aligned}
 HF_n &= \frac{\alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + \alpha) + h(1 + 2\alpha))}{\alpha - \beta} \\
 &\quad - \frac{\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + \beta) + h(1 + 2\beta))}{\alpha - \beta}
 \end{aligned}$$

- ii. $HW_n(0,1; k, -1) = HF_{k,n}$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere n -inci k -Fibonacci hibrit sayısı, $HF_{k,n}$ için Binet formülü

$$\begin{aligned}
 HF_{k,n} &= \frac{\alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + k\alpha) + h(k + (k^2 + 1)\alpha))}{\alpha - \beta} \\
 &\quad - \frac{\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + k\beta) + h(k + (k^2 + 1)\beta))}{\alpha - \beta}
 \end{aligned}$$

- iii. $HW_n(2,1;1,-1) = HL_n$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n -inci Lucas hibrit sayısı, HL_n için Binet formülü

$$HL_n = \alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + \alpha) + h(1 + 2\alpha))$$

$$-\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + \beta) + h(1 + 2\beta))$$

- iv. $HW_n(2,1;k,-1) = HL_{k,n}$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere n -inci k -Lucas hibrit sayısı, $HL_{k,n}$ Binet formülü

$$HL_{k,n} = \alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + k\alpha) + h(k + (k^2 + 1)\alpha))$$

$$-\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + k\beta) + h(k + (k^2 + 1)\beta))$$

- v. $HW_n(0,1;2,-1) = HP_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2018) çalışmasında $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere n -inci Pell hibrit sayısı, HP_n için Binet formülü

$$HP_n = \frac{\alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + 2\alpha) + h(2 + 5\alpha))}{\alpha - \beta} - \frac{\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + 2\beta) + h(2 + 5\beta))}{\alpha - \beta}$$

- vi. $HW_n(2,2;2,-1) = HQ_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2018) çalışmasında $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere n -inci Pell-Lucas hibrit sayısı, HQ_n için Binet formülü

$$HQ_n = \alpha^n(\alpha^n(1 + ia + \varepsilon(1 + 2\alpha) + h(2 + 5\alpha)))$$

$$-\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon(1 + 2\beta) + h(2 + 5\beta))$$

- vii. $HW_n(0,1;1,-2) = HJ_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019b) çalışmasında n -inci Jacobsthal hibrit sayısı, HJ_n için Binet formülü

$$HJ_n = \frac{1}{3} 2^n(1 + 2i + 4\varepsilon + 8h) - \frac{1}{3} (-1)^n(1 - i + \varepsilon - h)$$

- viii. $HW_n(2,1;1,-2) = Hj_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019b) çalışmasında n -inci Jacobsthal-Lucas hibrit sayısı, Hj_n için Binet formülü

$$Hj_n = 2^n(1 + 2i + 4\varepsilon + 8h) + (-1)^n(1 - i + \varepsilon - h)$$

şeklinde sunulmuştur.

Şimdi Horadam hibrit sayı dizileri için üreteç fonksiyonunu verilecektir. n -inci Horadam hibrit sayısı HW_n olmak üzere $\{HW_n\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$HG(x) = \sum_{n=0}^{\infty} HW_n x^n \quad (2.7)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.29: Horadam hibrit sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HW_n x^n = \frac{HW_0 + (HW_1 - pHW_0)x}{1 - px + qx^2}$$

şeklindedir (Szynal Liana, 2018).

İspat: (2.7) eşitliğinden Horadam hibrit sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$HG(x) = \sum_{n=0}^{\infty} HW_n x^n = HW_0 x^0 + HW_1 x^1 + HW_2 x^2 + \dots + HW_n x^n + \dots$$

dir. Bu denklemin her iki yanı $-px$ ve qx^2 ile çarpılırsa

$$-pxHG(x) = -pHW_0 x^1 - pHW_1 x^2 - pHW_2 x^3 - \dots - pHW_n x^{n+1} - \dots$$

$$qx^2HG(x) = qHW_0 x^2 + qHW_1 x^3 + qHW_2 x^4 + \dots + qHW_n x^{n+2} + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - px + qx^2)HG(x) = HW_0 + (HW_1 - pHW_0)x + (HW_2 - pHW_1 + qHW_0)x^2 \\ + (HW_3 - pHW_2 + qHW_1)x^3 + \dots + (HW_n - pHW_{n-2} + qHW_{n-3})x^n + \dots$$

dir.

Tanım 2.26 daki $HW_n = pHW_{n-1} - qHW_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - px + qx^2)HG(x) = HW_0 + (HW_1 - pHW_0)x$$

olur. Buradan Horadam sayı dizileri için üreteç fonksiyonu

$$HG(x) = \frac{HW_0 + (HW_1 - pHW_0)x}{1 - px + qx^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Horadam hibrit sayılarının özel durumlarının üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.30: n -inci Horadam hibrit sayısı $HW_n = HW_n(a, b; p, q)$ olmak üzere

- i. $HW_n(0,1; 1, -1) = HF_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019a) çalışmasında Fibonacci hibrit sayı dizilerinin, $\{HF_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} HF_n t^n &= \frac{HF_0 + (HF_1 - HF_0)t}{1 - t + t^2} \\ &= \frac{(i + \varepsilon + 2h) + (1 + \varepsilon + h)t}{1 - t + t^2} \end{aligned}$$

- ii. $HW_n(0,1; k, -1) = HF_{k,n}$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında k -Fibonacci hibrit sayı dizilerinin, $\{HF_{k,n}\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} HF_{k,n}(t) &= \frac{HF_{k,0} + (HF_{k,1} - kHF_{k,0})t}{1 - kt - t^2} \\ &= \frac{(i + \varepsilon k + h(k^2 + 1)) + (1 + \varepsilon + hk)t}{1 - kt + t^2} \end{aligned}$$

- iii. $HW_n(2,1;1,-1) = HL_n$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında Lucas hibrit sayı dizilerinin, $\{HL_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} HL_n(t) &= \frac{HL_0 + (HL_1 - HL_0)t}{1 - t - t^2} \\ &= \frac{(2 + i + 3\varepsilon + 4h) + (-1 + 2i + \varepsilon + 3h)t}{1 - t + t^2}\end{aligned}$$

- iv. $HW_n(2,1;k,-1) = HL_{k,n}$ ile (Erkan ve Dağdeviren, 2021) çalışmasında k -Lucas hibrit sayı dizilerinin, $\{HL_{k,n}\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} HL_{k,n}(t) &= \frac{HL_{k,0} + (HL_{k,1} - kHL_{k,0})t}{1 - kt - t^2} \\ &= \frac{(2 + ik + \varepsilon(k^2 + 2) + h(k^3 + 3k)) + (-k + 2i + \varepsilon k + h(k^2 + 2))t}{1 - kt + t^2}\end{aligned}$$

- v. $HW_n(0,1;2,-1) = HP_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2018) çalışmasında Pell hibrit sayı dizilerinin, $\{HP_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} HP_n t^n &= \frac{HP_0 + (HP_1 - 2HP_0)t}{1 - 2t - t^2} \\ &= \frac{(i + 2\varepsilon + 5h) + (1 + \varepsilon + 2h)t}{1 - 2t - t^2}\end{aligned}$$

- vi. $HW_n(2,2;2,-1) = HQ_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2018) çalışmasında Pell-Lucas hibrit sayı dizilerinin, $\{HQ_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} HQ_n t^n &= \frac{HQ_0 + (HQ_1 - 2HQ_0)t}{1 - 2t - t^2} \\ &= \frac{(2 + 2i + 6\varepsilon + 14h) + (-2 + 2i + 2\varepsilon + 6h)t}{1 - 2t - t^2}\end{aligned}$$

- vii. $HW_n(0,1; 1, -2) = HJ_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019b) çalışmasında Jacobsthal hibrit sayı dizilerinin, $\{HJ_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} HJ_n t^n &= \frac{HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)t}{1 - t - 2t^2} \\ &= \frac{(i + \varepsilon + 3h) + (1 + 2\varepsilon + 2h)t}{1 - t - 2t^2}\end{aligned}$$

- viii. $HW_n(2,1; 1, -2) = Hj_n$ ile (Szynal Liana ve Wloch, 2019b) çalışmasında Jacobsthal-Lucas hibrit sayı dizilerinin, $\{Hj_n\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Hj_n t^n &= \frac{Hj_0 + (Hj_1 - Hj_0)t}{1 - t - 2t^2} \\ &= \frac{(2 + i + 5\varepsilon + 7h) + (-1 + 4i + 2\varepsilon + 10h)t}{1 - t - 2t^2}\end{aligned}$$

şeklinde sunulmuştur.

Horadam hibrit sayılarının toplam formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.31: n pozitif bir tam sayı olmak üzere

- i. $\sum_{t=1}^n HW_t = \frac{1}{p-q-1} [HW_{n+1} - qHW_n - HW_1 + qHW_0]$
- ii. $\sum_{t=1}^n HW_{2t-1} = \frac{1}{p^2-(1+q)^2} [HW_{2n+1} - 2qHW_{2n-1} - (q+1)HW_1 + pHW_0]$
- iii. $\sum_{t=1}^n HW_{2t} = \frac{1}{p^2-(1+q)^2} [HW_{2n+2} + q^2HW_{2n} - pHW_1 + q(q+1)HW_0]$
- iv. $\sum_{t=1}^n (-1)^t HW_t = \frac{1}{p-q+1} [(-1)^{n+1}(HW_{n+1} + qHW_n) + HW_1 + qHW_0]$

dir (Şentürk vd., 2020).

Tablo 1.3 Te verilen a, b, p, q değerleri ile Teorem 2.31 de kullanılarak Horadam hibrit sayılarının özel durumları için toplam formülleri elde edilebilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Sayı dizilerinde olduğu gibi polinom dizileri üzerine de birçok çalışma vardır. Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden literatürde Fibonacci ve Lucas gibi sayı dizilerinin genelleştirilmiş hali olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının tanımları ve özellikleri sunulmuştur. Bu polinomların oluşturduğu diziler için üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özellikleri sunulmuştur. Ayrıca genel formüller olarak bilinen ve n -inci genelleştirilmiş Fibonacci polinomunu ile n -inci genelleştirilmiş Lucas polinomunu elde etmek için kullanılan Binet formülleri verilmiştir. Daha sonra kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirmesi olan hibrit sayıları ve rekürans bağıntılarla tanımlanan polinomlar ile ilişkili hibrit polinomları sunulmuştur. Bu hibrit polinomlarının oluşturduğu diziler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir.

3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları ve Özellikleri

Bu bölümde ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan sayı ve polinom dizilerinin genel hali olarak sunulan tamsayı katsayılı genelleştirilmiş Fibonacci polinomları ile dizileri detaylı bir şekilde verilmiştir. Daha sonra rasyonel katsayılı polinomlarla tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci tipli ve genelleştirilmiş Lucas tipi polinomlar ile reel katsayılı polinomlarla tanımlanan $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları sunulmuştur. Bu polinomlarının dizileri oluşturulmuş ve Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1: $\mathbb{Z}[x]$ kümesinde $p_0(x)$, $p_1(x)$, $d(x)$, $g(x)$ polinomlar ve $G_0(x) = p_0(x)$, $G_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerleri olmak üzere $G_n(x)$ ile gösterilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci polinomu

$$G_n(x) = d(x)G_{n-1}(x) + g(x)G_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu polinomların oluşturduğu diziler $\{G_n(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Florez, vd., 2014).

Tanım 3.1 den ilk birkaç genelleştirilmiş Fibonacci polinomu şöyledir:

$$G_0(x) = p_0(x)$$

$$G_1(x) = p_1(x)$$

$$G_2(x) = d(x)p_1(x) + g(x)p_0(x)$$

$$G_3(x) = d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0(x) + g(x)p_1(x)$$

$$G_4(x) = d^3(x)p_1(x) + d^2(x)g(x)p_0(x) + 2d(x)g(x)p_1(x) + g^2(x)p_0(x)$$

$$G_5(x) = d^4(x)p_1(x) + d^3(x)g(x)p_0(x) + 3d^2(x)g(x)p_1(x) + 2d(x)g^2(x)p_0(x) + g^2(x)p_1(x)$$

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomları (3.1) rekürans bağıntısı kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Bilindiği gibi Binet formülü ile dizinin herhangi bir terimi, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunabilir. İstenilen genelleştirilmiş Fibonacci polinomu (3.1) rekürans bağıntı kullanılabilmesi için kendisinden önce tüm polinomun bilinmesi gerekmektedir. Ancak bunun yerine Binet formülü kullanılırsa bu hesaplama ihtiyacı duyulmamaktadır. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci polinomları için Binet formülü verilecektir. (3.1) rekürans bağıntısında $G_n(x) = t^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$G_n(x) = d(x)G_{n-1}(x) + g(x)G_{n-2}(x) \Rightarrow t^n = d(x)t^{n-1} + g(x)t^{n-2}$$

elde edilir. Burada özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$t^2 - d(x)t - g(x) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$ olmak üzere

$$\sigma(x) = \frac{d(x) + \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho(x) = \frac{d(x) - \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2}$$

olarak bulunur.

Bu kökler arasında

$$\sigma(x) + \rho(x) = d(x)$$

$$\sigma(x) - \rho(x) = \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}$$

$$\sigma(x) \rho(x) = -g(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.2: $n \geq 0$ için $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$, $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının Binet formülü

$$G_n(x) = \frac{p_1(x)(\sigma^n(x) - \rho^n(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^{n-1}(x) - \rho^{n-1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \quad (3.2)$$

şeklindedir (Florez, vd., 2014).

İspat: Tanım 2.19 dan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizilerinin n -inci teriminin genel formu

$$G_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$G_0(x) = p_0(x) = A + B$$

$$G_1(x) = p_1(x) = A\sigma(x) + B\rho(x)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{p_1(x) - p_0(x)\rho(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \quad \text{ve} \quad B = \frac{-p_1(x) + p_0(x)\sigma(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$G_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının Binet formülü

$$G_n(x) = \frac{p_1(x)(\sigma^n(x) - \rho^n(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^{n-1}(x) - \rho^{n-1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Üreteç fonksiyonları lineer homojen rekürans bağıntıları çözmek için en önemli yöntemlerden biridir. Genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.3: Genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$G_f(t) = \frac{p_0(x) + (p_1(x) - p_0(x)d(x))t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

şeklindedir (Florez, vd., 2014).

İspat: n -inci genelleştirilmiş Fibonacci polinomu $G_n(x)$ olmak üzere Tanım 2.20 den genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizileri için

$$G_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) t^n$$

yazılabilir. Buradan

$$G_f(t) = G_0(x) + G_1(x)t + G_2(x)t^2 + \dots + G_n(x)t^n + \dots \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} -d(x)G_f(t)t &= -d(x)G_0(x)t - d(x)G_1(x)t^2 - d(x)G_2(x)t^3 - \dots \\ &\quad -d(x)G_n(x)t^{n+1} - \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} -g(x)G_f(t)t^2 &= -g(x)G_0(x)t^2 - g(x)G_1(x)t^3 - g(x)G_2(x)t^4 - \dots \\ &\quad -g(x)G_n(x)t^{n+2} - \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir. (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.1 deki $G_0(x) = p_0(x)$, $G_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerleri için $G_n(x) = d(x)G_{n-1}(x) + g(x)G_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$G_f(t)(1 - d(x)t - g(x)t^2) = G_0(x) + G_1(x)t - d(x)G_0(x)t$$

eşitliği elde edilir. Buradan genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$G_f(t) = \frac{p_0(x) + (p_1(x) - d(x)p_0(x))t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizileri literatürde sunulan birçok özel sayı ve polinom dizilerinin genel halidir. Polinomların katsayı kümelerine ve Tanım 3.1'deki başlangıç değerlerine göre bu polinomlar gruplandırılabilir. Bunlar genelleştirilmiş Fibonacci tipli, genelleştirilmiş Lucas tipli, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları olarak sunulmuştur.

3.1.1. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlar

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının özel başlangıç değerleri için $\mathbb{Z}[x]$ tanım kümesi $\mathbb{Q}[x]$ kümesine genişletilmiş ve rasyonel katsayılı polinomlarla genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlar tanımlanmıştır.

Tanım 3.4: $\mathbb{Q}[x]$ kümesinde $d(x)$, $g(x)$ sıfır olmayan polinomlar ve $\mathcal{F}_0(x) = 0$, $\mathcal{F}_1(x) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $\mathcal{F}_n(x)$ ile gösterilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom

$$\mathcal{F}_n(x) = d(x)\mathcal{F}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{F}_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.6)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu polinom dizileri $\{\mathcal{F}_n(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Florez, vd., 2014).

Tanım 3.4'ten ilk birkaç genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomu şöyledir:

$$\mathcal{F}_0(x) = 0$$

$$\mathcal{F}_1(x) = 1$$

$$\mathcal{F}_2(x) = d(x)$$

$$\mathcal{F}_3(x) = d^2(x) + g(x)$$

$$\mathcal{F}_4(x) = d^3(x) + 2d(x)g(x)$$

$$\mathcal{F}_5(x) = d^4(x) + 3d^2(x)g(x) + g^2(x)$$

Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizileri; Fibonacci polinom dizilerini $\{F_n(x)\}$, iki değişkenli Fibonacci polinom dizilerini $\{F_n(x, y)\}$, Pell polinom dizilerini $\{P_n(x)\}$, Fermat polinom dizilerini $\{\Phi_n(x)\}$, Chebyshev ikinci tür polinom dizilerini $\{U_n(x)\}$, Jacobsthal polinom dizilerini $\{J_n(x)\}$, Morgan-Voyce birinci tür polinom dizilerini $\{B_n(x)\}$ ve Vieta polinom dizilerini $\{V_n(x)\}$ kapsamaktadır.

Tanım 3.1 de verilen $d(x), g(x)$ parametrelerine göre genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların özel durumları Tablo 3.1 ile verilmiştir.

Tablo 3.1. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlar

<i>n-inci Genelleştirilmiş Fibonacci Tipli Polinomu, $\mathcal{F}_n(x)$</i>	<i>Başlangıç Değerleri</i> $\mathcal{F}_0(x) = 0, \mathcal{F}_1(x) = 1$	<i>Rekürans Bağıntısı</i> $\mathcal{F}_n(x) = d(x)\mathcal{F}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{F}_{n-2}(x)$
n -inci Fibonacci polinomu, $F_n(x)$	$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1$	$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$
n -inci iki değişkenli Fibonacci polinomu, $F_n(x, y)$	$F_0(x, y) = 0, F_1(x, y) = 1$	$F_n(x, y) = xF_{n-1}(x, y) + yF_{n-2}(x, y)$
n -inci Pell polinomu, $P_n(x)$	$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$
n -inci Fermat polinomu, $\Phi_n(x)$	$\Phi_0(x) = 0, \Phi_1(x) = 1$	$\Phi_n(x) = 3x\Phi_{n-1}(x) - 2\Phi_{n-2}(x)$
n -inci Chebyshev ikinci tür polinomu, $U_n(x)$	$U_0(x) = 0, U_1(x) = 1$	$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$
n -inci Jacobsthal polinomu, $J_n(x)$	$J_0(x) = 0, J_1(x) = 1$	$J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x)$
n -inci Morgan-Voyce birinci tür polinom, $B_n(x)$	$B_0(x) = 0, B_1(x) = 1$	$B_n(x) = (x + 2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)$
n -inci Vieta polinomu, $V_n(x)$	$V_0(x) = 0, V_1(x) = 1$	$V_n(x) = xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x)$

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomları için Binet formülü verilecektir. Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısı genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomları rekürans bağıntısıyla aynı olup $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ karakteristik denklemi için benzer olarak

$$\sigma(x) = \frac{d(x) + \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho(x) = \frac{d(x) - \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2}$$

köklerine sahiptir.

Teorem 3.5: $n \geq 0$ için $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ denkleminin kökleri $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$ olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlarının Binet formülü

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

şeklindedir (Florez, vd., 2014).

İspat: Tanım 2.19 dan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizilerinin n -inci teriminin genel formu

$$\mathcal{F}_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\mathcal{F}_0(x) = 0 = A + B$$

$$\mathcal{F}_1(x) = 1 = A\sigma(x) + B\rho(x)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{1}{\sigma(x) - \rho(x)} \quad \text{ve} \quad B = \frac{-1}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$\mathcal{F}_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomlarının Binet formülü

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 kullanılarak Tablo 3.1 de verilen genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların özel durumlarının da Binet formülleri elde edilebilir. Bu özel durumlar ile genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların başlangıç değerleri aynıdır. Tanım 3.1 de verilen $d(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının Tablo 3.1 deki değerleri göre genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların özel durumlarının Binet formülleri Tablo 3.2 de verilmiştir.

Tablo 3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların Binet formülleri

<i>n</i> -inci Genelleştirilmiş Fibonacci Tipli Polinomu,	Karakteristik Denkleminin Kökleri	
$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$	$\sigma(x)$	$\rho(x)$
$F_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{x^2 + 4}}$	$\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$
$F_n(x, y) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{x^2 + 4y}}$	$\frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$
$P_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{2\sqrt{x^2 + 1}}$	$x + \sqrt{x^2 + 1}$	$x - \sqrt{x^2 + 1}$
$\Phi_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{9x^2 - 8}}$	$\frac{3x + \sqrt{9x^2 - 8}}{2}$	$\frac{3x - \sqrt{9x^2 - 8}}{2}$
$U_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{2\sqrt{x^2 - 1}}$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$	$x - \sqrt{x^2 - 1}$
$J_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{1 + 8x}}$	$\frac{x + \sqrt{1 + 8x}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{1 + 8x}}{2}$
$B_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$	$\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$	$\frac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$
$V_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sqrt{x^2 - 4}}$	$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$

Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.6: Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{F}_f(t) = \frac{t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

şeklinde (Florez, vd., 2014).

İspat: Tanım 2.20 den genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizileri için

$$\mathcal{F}_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(x) t^n$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathcal{F}_f(t) = \mathcal{F}_0(x) + \mathcal{F}_1(x)t + \mathcal{F}_2(x)t^2 + \dots + \mathcal{F}_n(x)t^n + \dots \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} -d(x)\mathcal{F}_f(t)t &= -d(x)\mathcal{F}_0(x)t - d(x)\mathcal{F}_1(x)t^2 - d(x)\mathcal{F}_2(x)t^3 - \dots \\ &\quad -d(x)\mathcal{F}_n(x)t^{n+1} - \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -g(x)\mathcal{F}_f(t)t^2 &= -g(x)\mathcal{F}_0(x)t^2 - g(x)\mathcal{F}_1(x)t^3 - g(x)\mathcal{F}_2(x)t^4 - \dots \\ &\quad -g(x)\mathcal{F}_n(x)t^{n+2} - \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir. (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.4 teki $\mathcal{F}_0(x) = 0$, $\mathcal{F}_1(x) = 1$ başlangıç değerleri için $\mathcal{F}_n(x) = d(x)\mathcal{F}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{F}_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\mathcal{F}_f(t)(1 - d(x)t - g(x)t^2) = \mathcal{F}_0(x) + \mathcal{F}_1(x)t - d(x)\mathcal{F}_0(x)t$$

olup buradan genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.6 kullanılarak Tablo 3.1 de verilen genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların özel durumlarının da üreteç fonksiyonları elde edilebilir. Bu özel durumlar ile genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların başlangıç değerleri aynıdır ve ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanır. Tanım 3.1 de verilen $d(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının Tablo 3.1 deki değerleri Teorem 3.6 da kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların özel durumlarının üreteç fonksiyonları elde edilir. Bu üreteç fonksiyonları Tablo 3.3 te verilmiştir.

Tablo 3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomların üreteç fonksiyonları

<i>Genelleştirilmiş Fibonacci Tipli Polinomlar</i>	<i>Üreteç fonksiyonu</i>
Fibonacci polinomu	$F_f(x) = \frac{t}{1 - xt - t^2}$
İki değişkenli Fibonacci polinomu	$F_f(x, y) = \frac{t}{1 - xt - yt^2}$
Pell polinomu	$P_f(x) = \frac{t}{1 - 2xt - t^2}$
Fermat polinomu	$\Phi_f(x) = \frac{t}{1 - 3xt + 2t^2}$
Chebyshev ikinci tür polinomu	$U_f(x) = \frac{t}{1 - 2xt + t^2}$
Jacobsthal polinomu	$J_f(x) = \frac{t}{1 - t - 2xt^2}$
Morgan-Voyce birinci tür polinom	$B_f(x) = \frac{t}{1 - (x + 2)t + t^2}$
Vieta polinomu	$V_f(x) = \frac{t}{1 - xt + t^2}$

3.1.2. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlar

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının özel başlangıç değerleri için $\mathbb{Z}[x]$ tanım kümesi $\mathbb{Q}[x]$ kümesine genişletilmiş ve rasyonel katsayılı polinomlarla genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlar tanımlanmıştır.

Tanım 3.7: $\mathbb{Q}[x]$ kümesinde $\alpha = 2/p_0$ için $|p_0| = 1$ veya 2 ve $p_1(x)$, $d(x) = \alpha p_1(x)$, $g(x)$ sıfır olmayan polinomlar ve $\mathcal{L}_0(x) = p_0$, $\mathcal{L}_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerleri olmak üzere $\mathcal{L}_n(x)$ ile gösterilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinom

$$\mathcal{L}_n(x) = d(x)\mathcal{L}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{L}_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.10)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu polinom dizileri $\{\mathcal{L}_n(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Florez, vd., 2014).

Tanım 3.7 den ilk birkaç genelleştirilmiş Lucas tipli polinomu şöyledir:

$$\mathcal{L}_0(x) = p_0$$

$$\mathcal{L}_1(x) = p_1(x)$$

$$\mathcal{L}_2(x) = d(x)p_1(x) + g(x)p_0$$

$$\mathcal{L}_3(x) = d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0 + g(x)p_1(x)$$

$$\mathcal{L}_4(x) = d^3(x)p_1(x) + d^2(x)g(x)p_0 + 2d(x)g(x)p_1(x) + g^2(x)p_0$$

$$\mathcal{L}_5(x) = d^4(x)p_1(x) + d^3(x)g(x)p_0 + 3d^2(x)g(x)p_1(x)$$

$$+ 2d(x)g^2(x)p_0 + g^2(x)p_1(x)$$

Genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizileri; Lucas polinom dizilerini $\{\mathcal{L}_n(x)\}$, iki değişkenli Lucas polinom dizilerini $\{\mathcal{L}_n(x, y)\}$, Pell-Lucas polinom dizilerini $\{Q_n(x)\}$, Pell-Lucas-prime polinom dizilerini $\{Q'_n(x)\}$, Fermat-Lucas polinom dizilerini $\{\vartheta_n(x)\}$, Chebyshev birinci tür polinom dizilerini $\{T_n(x)\}$, Jacobsthal-Lucas polinom dizilerini $\{j_n(x)\}$, Morgan-Voyce ikinci tür polinom dizilerini $\{C_n(x)\}$ ve Vieta-Lucas polinom dizilerini $\{v_n(x)\}$ kapsamaktadır.

Tanım 3.1 de verilen $d(x), g(x)$ parametrelerine göre genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlarının özel durumları detaylı bir şekilde Tablo 3.4 ile verilmiştir.

Tablo 3.4. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlar

<i>n</i> -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinomu, $\mathcal{L}_n(x)$	<i>Başlangıç Değerleri</i> $\mathcal{L}_0(x) = p_0, \mathcal{L}_1(x) = p_1(x)$	<i>Rekürans Bağıntısı</i> $\mathcal{L}_n(x) = d(x)\mathcal{L}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{L}_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Lucas polinomu, $L_n(x)$	$L_0(x) = 2, L_1(x) = x$	$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci iki değişkenli Lucas polinomu, $L_n(x, y)$	$L_0(x, y) = 2, L_1(x, y) = x$	$L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y)$
<i>n</i> -inci Pell-Lucas polinomu, $Q_n(x)$	$Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x$	$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Pell-Lucas-prime polinomu, $Q'_n(x)$	$Q'_0(x) = 1, Q'_1(x) = x$	$Q'_n(x) = 2xQ'_{n-1}(x) + Q'_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Fermat-Lucas polinomu, $\vartheta_n(x)$	$\vartheta_0(x) = 2, \vartheta_1(x) = 3x$	$\vartheta_n(x) = 3x\vartheta_{n-1}(x) - 2\vartheta_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Chebyshev birinci tür polinomu, $T_n(x)$	$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$	$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Jacobsthal Lucas polinomu, $j_n(x)$	$j_0(x) = 2, j_1(x) = 1$	$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Morgan-Voyce ikinci tür polinom, $C_n(x)$	$C_0(x) = 2, C_1(x) = x + 2$	$C_n(x) = (x + 2)C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$
<i>n</i> -inci Vieta-Lucas polinomu, $v_n(x)$	$v_0(x) = 2, v_1(x) = x$	$v_n(x) = xv_{n-1}(x) - v_{n-2}(x)$

Şimdi genelleştirilmiş Lucas tipli polinomları için Binet formülü verilecektir. Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısı genelleştirilmiş Lucas tipli polinomları rekürans bağıntısıyla aynı olup $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ karakteristik denklemi için benzer olarak

$$\sigma(x) = \frac{d(x) + \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho(x) = \frac{d(x) - \sqrt{d^2(x) + 4g(x)}}{2}$$

kökleri yazılır.

Teorem 3.8: $n \geq 0$ için $\alpha = 2/p_0$ ve $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ denkleminin kökleri $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$ olmak üzere genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlarının Binet formülü

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{a^n(x) + b^n(x)}{\alpha}$$

şeklindedir (Florez, vd., 2014).

İspat: Tanım 2.19 dan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizilerinin n -inci teriminin genel formu

$$\mathcal{L}_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\mathcal{L}_0(x) = p_0 = A + B$$

$$\mathcal{L}_1(x) = p_1(x) = A\sigma(x) + B\rho(x)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{-\rho(x)p_0 + p_1(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \quad \text{ve} \quad B = \frac{\sigma(x)p_0 - p_1(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$\mathcal{L}_n(x) = A\sigma^n(x) + B\rho^n(x)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa genelleştirilmiş Lucas tipli polinomlarının Binet formülü

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{a^n(x) + b^n(x)}{\alpha}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.8 kullanılarak Tablo 3.4 te verilen genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların özel durumlarının da Binet formülleri elde edilebilir. Bu özel durumlar ve genelleştirilmiş Lucas tipli polinomları ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanır. Tanım 3.1 de verilen $d(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının Tablo 3.4 teki değerlerine göre genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların özel durumlarının Binet formülleri Tablo 3.5 te verilmiştir.

Tablo 3.5. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların Binet formülleri

<i>n</i> -inci Genelleştirilmiş Lucas Tipli Polinomu,	Karakteristik Denkleminin Kökleri	
	$\sigma(x)$	$\rho(x)$
$\mathcal{L}_n(x) = \frac{a^n(x) + b^n(x)}{\alpha}$		
$L_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$
$F_n(x, y) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$
$Q_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$x + \sqrt{x^2 + 1}$	$x - \sqrt{x^2 + 1}$
$Q'_n(x) = \frac{a^n(x) + b^n(x)}{2}$	$x + \sqrt{x^2 + 1}$	$x - \sqrt{x^2 + 1}$
$\vartheta_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{3x + \sqrt{9x^2 - 8}}{2}$	$\frac{3x - \sqrt{9x^2 - 8}}{2}$
$T_n(x) = \frac{a^n(x) + b^n(x)}{2}$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$	$x - \sqrt{x^2 - 1}$
$j_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{x + \sqrt{1 + 8x}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{1 + 8x}}{2}$
$C_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$	$\frac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$
$v_n(x) = a^n(x) + b^n(x)$	$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$	$\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$

Genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.10: Genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{L}_f(t) = \frac{p_0 + (p_1(x) - d(x)p_0)t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

şeklinde (Florez, vd., 2014).

İspat: Tanım 2.20 den genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizileri için

$$\mathcal{L}_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(x) t^n$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathcal{L}_f(t) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x)t + \mathcal{L}_2(x)t^2 + \dots + \mathcal{L}_n(x)t^n + \dots \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} -d(x)\mathcal{L}_f(t)t &= -d(x)\mathcal{L}_0(x)t - d(x)\mathcal{L}_1(x)t^2 - d(x)\mathcal{L}_2(x)t^3 - \dots \\ &\quad -d(x)\mathcal{L}_n(x)t^{n+1} - \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} -g(x)\mathcal{L}_f(t)t^2 &= -g(x)\mathcal{L}_0(x)t^2 - g(x)\mathcal{L}_1(x)t^3 - g(x)\mathcal{L}_2(x)t^4 - \dots \\ &\quad -g(x)\mathcal{L}_n(x)t^{n+2} - \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

dir. (3.11), (3.12) ve (3.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.7 deki $\mathcal{L}_0(x) = p_0$, $\mathcal{L}_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerleri için $\mathcal{L}_n(x) = d(x)\mathcal{L}_{n-1}(x) + g(x)\mathcal{L}_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$\mathcal{L}_f(t)(1 - d(x)t - g(x)t^2) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x)t - d(x)\mathcal{L}_0(x)t$$

eşitliği elde edilir. Buradan genelleştirilmiş Lucas tipli polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{L}_f(x) = \frac{p_0 + (p_1(x) - d(x)p_0)t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.10 kullanılarak Tablo 3.4 de verilen genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların özel durumlarının da üreteç fonksiyonları elde edilebilir. Bu özel durumlar ve genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomları ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanır. Tanım 3.1 de verilen $d(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının Tablo 3.4 teki değerlerine Teorem 3.10 da kullanılarak genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların özel durumlarının üreteç fonksiyonları elde edilir. Bu üreteç fonksiyonları Tablo 3.6 da verilmiştir.

Tablo 3.6. Genelleştirilmiş Lucas tipli polinomların üreteç fonksiyonları

<i>Genelleştirilmiş Lucas Tipli Polinomlar</i>	<i>Üreteç fonksiyonu</i>
Lucas polinomu	$L_f(x) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$
İki değişkenli Lucas polinomu	$L_f(x, y) = \frac{2 - xt}{1 - xt - yt^2}$
Pell-Lucas polinomu	$Q_f(x) = \frac{2 - 2xt}{1 - 2xt - t^2}$
Pell-Lucas-prime polinomu	$Q'_f(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt - t^2}$
Fermat-Lucas polinomu	$\vartheta_f(x) = \frac{2 - 3xt}{1 - 3xt + 2t^2}$
Chebyshev birinci tür polinomu	$T_f(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$
Jacobsthal-Lucas polinomu	$j_f(x) = \frac{2 - t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$
Morgan-Voyce ikinci tür polinom	$C_f(x) = \frac{2 - (x + 2)t}{1 - (x + 2)t + t^2}$
Vieta-Lucas polinomu	$v_f(x) = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$

3.1.3. $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının özel başlangıç değerleri için $\mathbb{Z}[x]$ tanım kümesi $\mathbb{R}[x]$ kümesine genişletilmiş ve reel katsayılı polinomlarla $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları tanımlanmıştır.

Tanım 3.11: $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olmak üzere $F_{h,n}(x) = 0, F_{h,1}(x) = 1$ başlangıç değerleri için n -inci $h(x)$ -Fibonacci polinomu

$$F_{h,n}(x) = h(x)F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.14)$$

rekürans bağıntısıyla ve $L_{h,0}(x) = 2, L_{h,1}(x) = h(x)$ başlangıç değerleri için n -inci $h(x)$ -Lucas polinomu

$$L_{h,n}(x) = h(x)L_{h,n-1}(x) + L_{h,n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.15)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. $h(x)$ -Fibonacci polinom dizileri $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ ve $h(x)$ -Lucas polinom dizileri $\{L_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Nalli vd., 2009).

Şimdi $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinom dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. Tanım 2.20 den $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu $F_{h,f}(t)$ ve $\{L_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu $L_{h,f}(t)$ olmak üzere sırasıyla

$$F_{h,f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x)t^n$$

$$L_{h,f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{h,n}(x)t^n$$

yazılabilir.

Teorem 3.12: $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinom dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F_{h,f}(t) = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}$$

$$L_{h,f}(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

dir (Nalli vd., 2009).

İspat: $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$F_{h,f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x)t^n$$

yazılabilir. Buradan

$$F_{h,f}(t) = F_{h,0}(x) + F_{h,1}(x)t + F_{h,2}(x)t^2 + \dots + F_{h,n}(x)t^n + \dots \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} -h(x)F_{h,f}(t)t &= -h(x)F_{h,0}(x)t - h(x)F_{h,1}(x)t^2 - h(x)F_{h,2}(x)t^3 - \dots \\ &\quad - h(x)F_{h,n}(x)t^{n+1} - \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$-F_{h,f}t^2 = -F_{h,0}(x)t^2 - F_{h,1}(x)t^3 - F_{h,2}(x)t^4 - \dots - F_{h,n}(x)t^{n+2} - \dots \quad (3.18)$$

dir. (3.15), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.11 deki $F_{h,n}(x) = 0, F_{h,1}(x) = 1$ başlangıç değerleri için $F_{h,n}(x) = h(x)F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-2}(x)$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$F_{h,f}(1 - h(x)t - t^2) = F_{h,0}(x) + F_{h,1}(x)t - h(x)F_{h,0}(x)t$$

eşitliği elde edilir. Buradan genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$F_{h,f} = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}$$

olarak bulunur. Benzer düşünceyle $\{L_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$L_{h,n,f}(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

İyi bilinen genel formüllerden olan Binet formülleri, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları içinde uygulanabilir. Şimdi dizilerin tüm terimlerine ihtiyaç duyulamadan n -inci $h(x)$ -Fibonacci ve n -inci $h(x)$ -Lucas polinomlarını kolay bir şekilde bulmamıza olanak sağlayan Binet formülleri verilecektir. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır.

(3.14) ve (3.15) rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi $\vartheta^2 - h(x)\vartheta - 1 = 0$ olup bu karakteristik denkleminin kökleri $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olmak üzere

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h^2(x) + 4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h^2(x) + 4}}{2}$$

dir. Ayrıca bu kökler arasında

$$\alpha(x) + \beta(x) = h(x)$$

$$\alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{h^2(x) + 4}$$

$$\alpha(x)\beta(x) = -1$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.13: $n \geq 0$ için $\vartheta^2 - h(x)\vartheta - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olmak üzere $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$F_{h,n}(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$L_{h,n}(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

dir (Nalli vd., 2009).

İspat: Tanım 2.19 dan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için $h(x)$ -Fibonacci polinom dizilerinin n -inci teriminin genel formu

$$F_{h,n}(x) = A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$F_{h,0}(x) = 0 = A + B$$

$$F_{h,1}(x) = 1 = A\alpha(x) + B\beta(x)$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad \text{ve} \quad B = \frac{-1}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$F_{h,n}(x) = A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $h(x)$ -Fibonacci polinomlarının Binet formülü

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

şeklinde elde edilir. Benzer düşünceyle $h(x)$ -Lucas polinomlarının Binet formülü

$$L_{h,n,f}(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.4. Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının özellikleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci tipli, genelleştirilmiş Lucas tipli, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları için bazı özellikleri, toplam formülleri ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Teorem 3.14: n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom $\mathcal{F}_n(x)$ olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom dizileri için

- i. $\mathcal{F}_{n+1}(x)\mathcal{F}_{n-1}(x) - \mathcal{F}_n^2(x) = (-1)^n g^{n-1}(x)$
- ii. $n \geq m$ için $\mathcal{F}_n^2(x) - (-g)^{n-m} \mathcal{F}_m^2(x) = \mathcal{F}_{n+m}(x)\mathcal{F}_{n-m}(x)$

dir (Florez, vd., 2018b).

İspat: Teorem 3.5 ile verilen verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomunun Binet formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\text{i.} \quad \mathcal{F}_{n+1}(x)\mathcal{F}_{n-1}(x) - \mathcal{F}_n^2(x) &= \left(\frac{\sigma^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \left(\frac{\sigma^{n-1}(x) - \rho^{n-1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right)^2 \\
&= \frac{2(\sigma(x)\rho(x))^n - (\sigma^{n+1}(x)\rho^{n-1}(x) + \rho^{n+1}(x)\sigma^{n-1}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= (-1)^n g^{n-1}(x) \\
\text{iii.} \quad \mathcal{F}_n^2(x) - (-g)^{n-m} \mathcal{F}_m^2(x) &= \left(\frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right)^2 - (-g)^{n-m} \left(\frac{\sigma^m(x) - \rho^m(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right)^2 \\
&= \frac{(\sigma^n(x) - \rho^n(x))^2 - (\sigma(x)\rho(x))^{n-m} (\sigma^m(x) - \rho^m(x))^2}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\sigma^{2n}(x) + \rho^{2n}(x) - \sigma^{n+m}(x)\rho^{n-m}(x) - \sigma^{n-m}(x)\rho^{n+m}(x)}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{(\sigma^{n+m}(x) - \rho^{n+m}(x))(\sigma^{n-m}(x) - \rho^{n-m}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \mathcal{F}_{n+m}(x)\mathcal{F}_{n-m}(x)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.15: n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom $\mathcal{F}_n(x)$ ve n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinom $\mathcal{L}_n(x)$ olmak üzere $\{\mathcal{F}_n(x)\}$ ile $\{\mathcal{L}_n(x)\}$ eşdeğer genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizileri için

- i. $\mathcal{F}_{m+n+1}(x) = \mathcal{F}_{m+1}(x)\mathcal{F}_{n+1}(x) + g\mathcal{F}_m(x)\mathcal{F}_n(x)$
- ii. $n \geq m$ için $\mathcal{F}_{n+m}(x) = \alpha\mathcal{F}_n(x)\mathcal{L}_m(x) - (-g)^m\mathcal{F}_{n-m}(x)$
- iii. $n \geq m$ için $\mathcal{F}_{n+m}(x) = \alpha\mathcal{F}_m(x)\mathcal{L}_n(x) + (-g)^m\mathcal{F}_{n-m}(x)$
- iv. $(\sigma(x) - \rho(x))^2\mathcal{F}_{m+n+1}(x) = \alpha^2\mathcal{L}_{m+1}(x)\mathcal{L}_{n+1}(x) + \alpha^2g\mathcal{L}_m(x)\mathcal{L}_n(x)$

dir (Florez, vd., 2018b).

İspat: İspat Teorem 3.14 ün ispatındaki benzer düşünce ile Teorem 3.5 ile verilen verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomunun Binet formülünü ve Teorem 3.8 ile verilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinomunun Binet formülünü kullanılarak tamamlanabilir.

Teorem 3.16: m, n pozitif tam sayılar, n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinom $\mathcal{F}_n(x)$ ve n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinom $\mathcal{L}_n(x)$ olmak üzere $\{\mathcal{F}_n(x)\}$ ile $\{\mathcal{L}_n(x)\}$ eşdeğer genelleştirilmiş Fibonacci polinom dizileri için

- i. $(\sigma(x) - \rho(x))^2 \mathcal{F}_n(x) = \alpha(\mathcal{L}_{n+1}(x) + g\mathcal{L}_{n-1}(x))$
- ii. $g\mathcal{F}_{n-1}(x) + \mathcal{F}_{n+1}(x) = \alpha\mathcal{L}_n(x)$
- iii. $\mathcal{F}_{n+2}(x) - g^2\mathcal{F}_{n-2}(x) = \alpha^2\mathcal{L}_1(x)\mathcal{L}_n(x)$
- iv. $\mathcal{F}_{n+2}(x) + g^2\mathcal{F}_{n-2}(x) = (d^2 + 2g)\mathcal{F}_n(x)$

dir (Florez, vd; 2018b).

İspat: Teorem 3.14 ün ispatındaki benzer düşünce ile Teorem 3.5 ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomunun Binet formülünü ve Teorem 3.8 ile verilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinomunun Binet formülünü kullanılarak

- i.
$$\begin{aligned} (\sigma(x) - \rho(x))^2 \mathcal{F}_n &= (\sigma(x) - \rho(x))^2 \left(\frac{\sigma^n(x) - \rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &= \sigma^{n+1}(x) + \rho^{n+1}(x) - \sigma(x)\rho^n(x) - \rho(x)\sigma^n(x) \\ &= \sigma^{n+1}(x) + \rho^{n+1}(x) - g(\sigma^{n-1}(x) + \rho^{n-1}(x)) \\ &= \alpha \left(\frac{\sigma^{n+1}(x) + \rho^{n+1}(x)}{\alpha} + g \frac{\sigma^{n-1}(x) + \rho^{n-1}(x)}{\alpha} \right) \\ &= \alpha(\mathcal{L}_{n+1}(x) + g\mathcal{L}_{n-1}(x)) \end{aligned}$$
- ii.
$$\begin{aligned} g\mathcal{F}_{n-1}(x) + \mathcal{F}_{n+1}(x) &= (\sigma(x)\rho(x)) \left(\frac{\sigma^{n-1}(x) - \rho^{n-1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) + \left(\frac{\sigma^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &= \frac{\sigma^n(x)(\sigma(x) - \rho(x)) + \rho^n(x)(\sigma(x) - \rho(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \\ &= \sigma^{n+1}(x) + \rho^{n+1}(x) \\ &= \alpha\mathcal{L}_n(x) \end{aligned}$$

dir. iii., iv. şıkların ispatları da benzer düşünce ile yapılabilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.17: $n \geq 0$ için n -inci $h(x)$ -Fibonacci polinom $F_{h,n}(x)$ ve n -inci $h(x)$ -Lucas polinom $L_{h,n}(x)$ olmak üzere olmak üzere $h(x)$ tek polinom olursa yani $h(-x) = -h(x)$ için

$$F_{h,n}(-x) = (-1)^{n+1}F_{h,n}(x)$$

$$L_{h,n}(-x) = (-1)^nL_{h,n}(x)$$

dir (Nalli vd., 2009).

İspat: Teorem 3.12 ten $h(x)$ -Fibonacci polinom dizileri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(-x)(-t)^n = \frac{-t}{1 - h(x)t - t^2}$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}F_{h,n}(-x)(t)^n = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafında Teorem 3.12 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}F_{h,n}(-x)(t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x)(t)^n$$

elde edilir. Bu ise $F_{h,n}(-x) = (-1)^{n+1}F_{h,n}(x)$ olduğunu gösterir. Benzer düşünce ile Teorem 3.12, $h(x)$ -Lucas polinom dizileri için kullanılırsa

$$L_{h,n}(-x) = (-1)^nL_{h,n}(x)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$h(x)$ -Fibonacci polinom dizileri $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ ve $h(x)$ -Lucas polinom dizileri, $\{L_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ aralarında sağlanan bazı bağıntılar aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.18: $n \geq 1$ için n -inci $h(x)$ -Fibonacci polinom $F_{h,n}(x)$ ve n -inci $h(x)$ -Lucas polinom $L_{h,n}(x)$ olmak üzere

$$L_{h,n}(x) = F_{h,n+1}(x) + F_{h,n-1}(x)$$

dir (Nalli vd., 2009).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım metodu kullanılarak yapılabilir. $n = 1, 2$ için

$$L_{h,1}(x) = h(x) = F_{h,2}(x) + F_{h,0}(x)$$

$$L_{h,2}(x) = h^2(x) + 2 = F_{h,3}(x) + F_{h,1}(x)$$

elde edilir. $n \geq 3$ için eşitliğin sağlandığını kabul edelim. Buradan eşitlik (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_{h,n}(x) &= h(x)L_{h,n-1}(x) + L_{h,n-2}(x) \\ &= h(x)(F_{h,n}(x) + F_{h,n-2}(x)) + F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-3}(x) \\ &= (h(x)F_{h,n}(x) + F_{h,n-1}(x)) + (h(x)F_{h,n-2}(x) + F_{h,n-3}(x)) \\ &= F_{h,n+1}(x) + F_{h,n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.19: n -inci $h(x)$ -Fibonacci polinom $F_{h,n}(x)$ ve n -inci $h(x)$ -Lucas polinom $L_{h,n}(x)$ olmak üzere

- i. $n \geq 1$ için $L_{h,n}(x) = h(x)F_{h,n}(x) + 2F_{h,n-1}(x)$
- ii. $n \geq 0$ için $L_{h,n}(x) = 2F_{h,n+1}(x) - h(x)F_{h,n}(x)$
- iii. $n \geq 0$ için $L_{h,n}^2(x) - (h^2(x) + 4)F_{h,n}^2(x) = 4(-1)^n$
- iv. $n \geq 0$ için $F_{h,2n}(x) = F_{h,n}(x)L_{h,n}(x)$

dir (Nalli vd., 2009).

Teorem 3.20: $n \geq 1$ için n -inci $h(x)$ -Fibonacci polinom $F_{h,n}(x)$ ve n -inci $h(x)$ -Lucas polinom $L_{h,n}(x)$ olmak üzere

$$F_{h,n}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i} h^{n-2i-1}(x)$$

$$L_{h,n} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} h^{n-2i}(x)$$

dir (Nalli vd., 2009).

İspat: Teorem 3.12 ten $h(x)$ -Fibonacci polinom dizileri için

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x) t^n &= \frac{t}{1 - (h(x)t + t^2)} \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} (h(x)t + t^2)^n \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (h(x)t)^{n-i} (t^2)^i \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h^{n-i}(x) t^{n+i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n + i + 1 = m$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{h,n}(x) t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m-i-1}{i} h^{m-2i-1}(x) \right] t^m$$

dir. Bu ise $F_{h,n}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i} h^{n-2i-1}(x)$ olduğunu gösterir. Benzer düşünce ile Teorem 3.12, $h(x)$ -Lucas polinom dizileri için kullanılırsa

$$L_{h,n} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} h^{n-2i}(x)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.2. Özel Hibrit Polinom Dizileri ve Özellikleri

Rekürans bağıntılarla tanımlanan sayı dizilerinde olduğu gibi polinom dizileri ile hibrit sayıları kullanılarak yeni polinom dizileri tanımlanmıştır. Bu bölümde Horadam polinom dizileri ile ilişkili Horadam hibrit polinomları detaylı bir şekilde sunulmuştur. Bu hibrit polinomlarından herhangi birini elde etmek için kullanılan ve genel formül olarak bilinen Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üstel fonksiyonları, toplam formülleri ile Catalan, Cassini, ve d'Ocagne eşitlikleri gibi özel eşitlikler sunulmuştur. ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca Horadam polinom dizilerinin özel durumları olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinom dizileri ile ilişkili hibrit polinomları, genel formülleri ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1 kullanılarak $W_n(x) = a$ ve $W_n(x) = bx$ başlangıç değerleriyle n -inci Horadam polinomu, $W_n(x)$ için

$$W_n(x) = pxW_{n-1}(x) + qW_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı yazılabilir. Bu rekürans bağıntısının $t^2 - pxt - q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha(x) = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}$, $\beta(x) = \frac{px - \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}$ için $A = \frac{bx - a\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$, $B = \frac{a\alpha(x) - bx}{\alpha(x) - \beta(x)}$ olmak üzere n -inci Horadam polinomu için Binet formülü

$$W_n(x) = A\alpha^{n-1}(x) + B\beta^{n-1}(x) \quad (3.19)$$

yazılabilir.

Tanım 3.21: $W_n(x)$, n -inci Horadam polinomu olmak üzere

$$i^2 = -1, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad h^2 = 1, \quad ih = -hi = \varepsilon + i$$

değerlerini sağlayan $\{1, i, \varepsilon, h\}$ tabanı ile n -inci Horadam hibrit polinomu, $HW_n(x)$

$$HW_n(x) = W_n(x) + iW_{n+1}(x) + \varepsilon W_{n+2}(x) + hW_{n+3}(x), \quad n \geq 1 \quad (3.20)$$

eşitliği ile tanımlanır (Kızılateş, 2022).

Genel olarak $W_1(x) = a$, $W_2(x) = bx$ keyfi başlangıç değerleri için n -inci Horadam polinomu $W_n(x) = W_n(x: a, bx; px, q)$ olmak üzere n -inci Horadam hibrit polinomu $HW_n(x) = HW_n(x: a, bx; px, q)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1 kullanılarak Horadam hibrit sayılarının özel durumları olan Fibonacci hibrit $\{HF_n\}$, Lucas hibrit $\{HL_n\}$, Pell hibrit $\{HP_n\}$, Pell-Lucas hibrit $\{HQ_n\}$, Jacobsthal hibrit $\{HJ_n\}$ ve Jacobsthal-Lucas hibrit $\{Hj_n\}$ polinomları gibi hibrit polinomları elde edilir. Bu hibrit polinomları Tablo 3.7 de verilmiştir.

Tablo 3.7. Polinom dizileri ile ilişkili bazı hibrit polinomları

Hibrit Polinomları	$HW_n(x: a, bx; px, q)$	Sembolü
Fibonacci hibrit polinomları	$HW_n(x: 1, x; x, 1)$	$HF_n(x)$
Lucas hibrit polinomları	$HW_n(x: 2, x; x, 1)$	$HL_{n-1}(x)$
Pell hibrit polinomları	$HW_n(x: 1, 2x; 2x, 1)$	$HP_n(x)$
Pell-Lucas hibrit polinomları	$HW_n(x: 2, 2x; 2x, 1)$	$HQ_{n-1}(x)$
Jacobsthal hibrit polinomları	$HW_n(x: 1, 1; 1, 2x)$	$HJ_n(x)$
Jacobsthal-Lucas hibrit polinomları	$HW_n(x: 2, 1; 1, 2x)$	$Hj_{n-1}(x)$

Tanım 3.21 kullanılarak Horadam hibrit polinomları bulunurken Horadam polinom dizilerinin terimlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu hibrit polinomları da Horadam polinom dizilerinin rekürans bağıntısına benzer bağıntılarla da sunulabilir.

Tanım 3.22: $n \geq 3$ için

$$HW_1(x) = a + ibx + \varepsilon(bpx^2 + aq) + h(bp^2x^3 + (apq + bq)x),$$

$$HW_2(x) = bx + i(bpx^2 + aq) + \varepsilon(bp^2x^3 + (apq + bq)x)$$

$$+ h(bp^3x^4 + (ap^2q + 2bpq)x^2 + aq^2)$$

başlangıç değerleriyle n -inci Horadam hibrit polinomu, $HW_n(x)$

$$HW_n(x) = pxHW_{n-1}(x) + qHW_{n-2}(x) \quad (3.21)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Kızılateş, 2022).

Horadam hibrit polinomları Tanım 3.21 ve Tanım 3.22 kullanılarak elde edilebileceği gibi bilinen sayı ve polinom dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci Horadam hibrit polinomu elde edilir. (3.21) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $t^2 - pxt - q = 0$ olup $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olmak üzere

$$\alpha(x) = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{px - \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}$$

şeklindedir. Buradan Horadam hibrit polinomları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.23: $n \geq 1$ için $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, $t^2 - pxt - q = 0$ denkleminin kökleri ve

$$A = \frac{bx - a\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad \text{ve} \quad B = \frac{a\alpha(x) - bx}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

olmak üzere n -inci Horadam hibrit polinomu için Binet formülü

$$HW_n(x) = A\alpha^{n-1}(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x))$$

$$+ B\beta^{n-1}(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))$$

şeklindedir (Kızılateş, 2022).

İspat: (3.19) eşitliği ile verilen n -inci Horadam polinomunun Binet formülünü (3.20) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
HW_n(x) &= W_n(x) + iW_{n+1}(x) + \varepsilon W_{n+2}(x) + hW_{n+3}(x) \\
&= (A\alpha^{n-1}(x) + B\beta^{n-1}(x)) + i(A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)) \\
&\quad + \varepsilon(A\alpha^{n+1}(x) + B\beta^{n+1}(x)) + h(A\alpha^{n+2}(x) + B\beta^{n+2}(x)) \\
&= A\alpha^{n-1}(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x)) + B\beta^{n-1}(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))
\end{aligned}$$

olup Horadam hibrit polinomlarının Binet formülü

$$\begin{aligned}
HW_n(x) &= A\alpha^{n-1}(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x)) \\
&\quad + B\beta^{n-1}(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Horadam hibrit polinomlarının özel durumlarının Binet formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.24: n -inci Horadam hibrit polinomu, $HW_n(x) = HW_n(x; a, bx; px, q)$ olmak üzere

- i. $HW_n(x; 1, x; x, 1) = HF_n(x)$ olmak üzere (Szynal Liana ve Wloch, 2020a) çalışmasında $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ için n -inci Fibonacci hibrit polinomunun, $HF_n(x)$ Binet formülü

$$\begin{aligned}
HF_n(x) &= \frac{\alpha^n(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
&\quad - \frac{\beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)}
\end{aligned}$$

- ii. $HW_n(x; 2, x; x, 1) = HL_n(x)$ olmak üzere (Szynal Liana ve Wloch, 2020a) çalışmasında $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ için n -inci Lucas hibrit polinomunun, $HL_n(x)$ için Binet formülü

$$\begin{aligned}
HL_n(x) &= \alpha^{n-1}(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x)) \\
&\quad + \beta^{n-1}(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))
\end{aligned}$$

- iii. $HW_n(x: 1, 2x; 2x, 1) = HP_n(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2019) çalışmasında $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ için n -inci Pell hibrit polinomunun, HQ_n için Binet formülü

$$HP_n(x) = \frac{\alpha^n(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{\beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

- iv. $HW_n(x: 2, 2x; 2x, 1) = HQ_{n-1}(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2019) çalışmasında $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ için n -inci Pell-Lucas hibrit polinomunun, $HQ_n(x)$ için Binet formülü

$$HQ_n(x) = \alpha^{n-1}(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x)) + \beta^{n-1}(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))$$

- v. $HW_n(x: 1, 1; 1, 2x) = HJ_n(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2021) çalışmasında $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$ için n -inci Jacobsthal hibrit polinomunun, $HJ_n(x)$ için Binet formülü

$$HJ_n(x) = \frac{\alpha^n(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{\beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

- vi. $HW_n(x: 2, 1; 1, 2x) = HJ_{n-1}(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2021) çalışmasında $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$ için n -inci Jacobsthal-Lucas hibrit polinomunun, $HJ_n(x)$ için Binet formülü

$$HJ_{n-1}(x) = \alpha^{n-1}(x)(1 + ia(x) + \varepsilon a^2(x) + ha^3(x)) + \beta^{n-1}(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x))$$

şeklinde sunulmuştur.

Şimdi Horadam hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonunu verilecektir. n -inci Horadam hibrit polinomu $HW_n(x)$ olmak üzere $\{HW_n(x)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$HG(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HW_n(x)t^n \quad (3.22)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.25: Horadam hibrit polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HW_n(x)t^n = \frac{HW_0(x) + (HW_1(x) - pxHW_0(x))t}{1 - pxt + qt^2}$$

şeklindedir (Kızılateş, 2022).

İspat: (3.22) eşitliğinden Horadam hibrit polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} HG(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} HW_n(x)t^n \\ &= HW_0(x)t^0 + HW_1(x)t^1 + HW_2(x)t^2 + \dots + HW_n(x)t^n + \dots \end{aligned}$$

dir. Bu denklemin her iki yanını $-pxt$ ve qt^2 ile çarpılırsa

$$-pxtHG(t) = -pxHW_0(x)t^1 - pxHW_1(x)t^2 - pxHW_2(x)t^3 - \dots$$

$$-pxHW_n(x)t^{n+1} - \dots$$

$$-qt^2HG(t) = -qHW_0(x)t^2 - qHW_1(x)t^3 - qHW_2(x)t^4 - \dots - qHW_n(x)t^{n+2} - \dots$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - pxt - qt^2)HG(t) &= HW_0(x) + (HW_1(x) - pxHW_0(x))t \\ &\quad + (HW_2(x) - pxHW_1(x) + qHW_0(x))t^2 \\ &\quad + (HW_3(x) - pxHW_2(x) + qHW_1(x))t^3 + \dots \\ &\quad + (HW_n(x) - pxHW_{n-2}(x) + qHW_{n-3}(x))t^n + \dots \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan eşitlik (3.20) deki $HW_n(x) = pxHW_{n-1}(x) + qHW_{n-2}(x)$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - pxt - qt^2)HG(t) = HW_0(x) + (HW_1(x) - pxHW_0)t$$

olur. Buradan Horadam polinom dizileri için üreteç fonksiyonu

$$HG(x) = \frac{HW_0(x) + (HW_1(x) - pxHW_0)t}{1 - px + qx^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Horadam hibrit polinomlarının özel durumlarının üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.26: n -inci Horadam hibrit polinomu, $HW_n(x) = HW_n(x; a, bx; p, q)$ olmak üzere

- i. $HW_n(x; 1, x; x, 1) = HF_n(x)$ olmak üzere (Szynal Liana ve Wloch, 2020a) çalışmasında Fibonacci hibrit polinom dizilerinin, $\{HF_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} HF_n(x)t^n &= \frac{HF_0(x) + (HF_1(x) - xHF_0(x))t}{1 - xt + t^2} \\ &= \frac{i + \varepsilon x + (x^2 + 1)h + (1 + \varepsilon + xh)t}{1 - xt - t^2} \end{aligned}$$

- ii. $HW_n(x; 2, x; x, 1) = HL_n(x)$ olmak üzere (Szynal Liana ve Wloch, 2020a) çalışmasında Lucas hibrit polinom dizilerinin, $\{HL_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} HL_n(t) &= \frac{HL_0(x) + (HL_1(x) - xHL_0(x))t}{1 - xt - t^2} \\ &= \frac{(2 + ix + \varepsilon(x^2 + 2) + h(x^3 + 3k)) + (-x + 2i + \varepsilon x + h(x^2 + 2))t}{1 - xt + t^2} \end{aligned}$$

- iii. $HW_n(x: 1, 2x; 2x, 1) = HP_n(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2019) çalışmasında Pell hibrit polinom dizilerinin, $\{HP_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HP_n(x)t^n = \frac{HP_0(x) + (HP_1(x) - 2xHP_0(x))t}{1 - 2xt - t^2}$$

$$= \frac{i + \varepsilon(2x) + h(4x^2 + 1) + (1 + \varepsilon + h(2x))t}{1 - 2xt - t^2}$$

- iv. $HW_n(x: 2, 2x; 2x, 1) = HQ_{n-1}(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2019) çalışmasında Pell-Lucas hibrit polinom dizilerinin, $\{HQ_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HQ_n(x)t^n = \frac{HQ_0(x) + (HQ_1(x) - 2xHQ_0(x))t}{1 - 2xt - t^2}$$

- v. $HW_n(x: 1, 1; 1, 2x) = HJ_n(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2021) çalışmasında Jacobsthal hibrit polinom dizilerinin, $\{HJ_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} HJ_n(x)t^n = \frac{HJ_0(x) + (HJ_1(x) - HJ_0(x))t}{1 - t - 2xt^2}$$

$$= \frac{i + \varepsilon + h.(2x + 1) + (1 + \varepsilon(2x) + h(2x))t}{1 - t - 2xt^2}$$

- vi. $HW_n(x: 2, 1; 1, 2x) = Hj_{n-1}(x)$ olmak üzere (Liana, vd., 2021) çalışmasında Jacobsthal-Lucas hibrit polinom dizilerinin, $\{Hj_n(x)\}$ üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Hj_n(x)t^n = \frac{Hj_0(x) + (Hj_1(x) - Hj_0(x))t}{1 - t - 2xt^2}$$

şeklinde sunulmuştur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Tipli Hibrit Polinomları

Bu bölümde $n \geq 2$ için $\mathbb{Z}[x]$ kümesinde $p_0(x), p_1(x), d(x), g(x)$ sıfır olmayan sabit polinomlar ve $G_0(x) = p_0(x), G_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$G_n(x) = d(x)G_{n-1}(x) + g(x)G_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci polinomları ile hibrit sayılarının tanımı kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomları tanımlanmıştır. Bu hibrit polinomlarının dizileri oluşturulmuş ve n -inci terimin elde edilmesini sağlayan genel formüller elde edilmiştir. Ayrıca üreteç fonksiyonları ile matris temsilleri sunulmuştur. Daha sonra genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit, genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinomları olarak adlandırılan özel durumlar verilmiştir. Bu özel durumlarının da genel formüllerinin yanı sıra birçok özelliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1: $G_n(x)$ n -inci genelleştirilmiş Fibonacci polinomu ve i, ε, h hibrit birimleri için $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$ olmak üzere n -inci genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomu, $G_n H(x)$

$$G_n H(x) = G_n(x) + iG_{n+1}(x) + \varepsilon G_{n+2}(x) + hG_{n+3}(x) \quad (4.1)$$

ile tanımlanır. Genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizileri $\{G_n H(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

Tanım 4.1 literatürde rekürans bağıntılarla tanımlanan polinomları ile ilişkili birçok hibrit sayıları ve polinomlarının genel halidir. Tanım 3.1 de verilen $d(x), g(x)$ parametrelerine ve $G_0(x) = p_0(x), G_1(x) = p_1(x)$ başlangıç değerlerine göre genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomlarının özel durumları Tablo 4.1 de verilmiştir.

Çalışma boyunca verilen sonuçlar tüm genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomları için sağlandığından, Tablo 4.1 de verilen değerler genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit, genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit, $h(x)$ -Fibonacci ve $h(x)$ -Lucas polinom dizilerinin özel durumları olan herhangi bir hibrit polinom dizisi için ilgili teorem veya sonuçta kullanılabilir.

Tablo 4.1. $\{G_n H(x)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları

Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomları	$G_n H(x)$	$G_n H(x)(x: p_0(x), p_1(x); d(x), g(x))$
Fibonacci hibrit polinomları	$F_n H(x)$	$F_n H(x)(x: 0, 1; x, 1)$
İki değişkenli Fibonacci hibrit polinomları	$f_n H(x)$	$f_n H(x)(x: 0, 1; x, y)$
$h(x)$ -Fibonacci hibrit polinomları	$F_{h,n} H(x)$	$F_{h,n} H(x)(x: 0, 1; h(x), 1)$
Lucas hibrit polinomları	$L_n H(x)$	$L_n H(x)(x: 2, x; x, 1)$
İki değişkenli Lucas hibrit polinomları	$l_n H(x)$	$l_n H(x)(x: 2, x; x, y)$
$h(x)$ -Lucasi hibrit polinomları	$L_{h,n} H(x)$	$L_{h,n} H(x)(x: 2, h(x); h(x), 1)$
Pell hibrit polinomları	$P_n H(x)$	$P_n H(x)(x: 0, 1; 2x, 1)$
Pell-Lucas hibrit polinomları	$Q_n H(x)$	$Q_n H(x)(x: 2, 2x; 2x, 1)$
Pell-Lucas-prime hibrit polinomları	$Q'_n H(x)$	$Q'_n H(x)(x: 1, x; 2x, 1)$
Fermat hibrit polinomları	$\Phi_n H(x)$	$\Phi_n H(x)(x: 0, 1; 3x, -2)$
Fermat-Lucas hibrit polinomları	$\vartheta_n H(x)$	$\vartheta_n H(x)(x: 2, 3x; 3x, -2)$
Birinci çeşit Chebyshev hibrit polinomları	$T_n H(x)$	$T_n H(x)(x: 1, x; 2x, -1)$
İkinci çeşit Chebyshev hibrit polinomları	$U_n H(x)$	$U_n H(x)(x: 0, 1; 2x, -1)$
Jacobsthal hibrit polinomları	$J_n H(x)$	$J_n H(x)(x: 0, 1; 1, 2x)$
Jacobsthal-Lucas hibrit polinomları	$j_n H(x)$	$j_n H(x)(x: 2, 1; 1, 2x)$
Birinci çeşit Morgan-Voyce hibrit polinomları	$B_n H(x)$	$B_n H(x)(x: 0, 1; x + 2, -1)$
İkinci çeşit Morgan-Voyce hibrit polinomları	$C_n H(x)$	$C_n H(x)(x: 2, x + 2; x + 2, -1)$
Vieta hibrit polinomları	$V_n H(x)$	$V_n H(x)(x: 0, 1; x, -1)$
Vieta-Lucas hibrit polinomları	$v_n H(x)$	$v_n H(x)(x: 2, x; x, -1)$
Horadam hibrit polinomları	$H_n H(x)$	$H_n H(x)(x: a, bx; px, q)$

Genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizilerini, genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizileri, $\{GF_nH(x)\}_{n \geq 0}$ ve genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinom dizileri, $\{GL_nH(x)\}_{n \geq 0}$ olmak üzere iki tipte verebiliriz. Bu durumda genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizileri; Tablo 4.1 de verilen Fibonacci hibrit polinom dizilerini $\{F_nH(x)\}$, $h(x)$ -Fibonacci hibrit polinom dizilerini $\{F_{h,n}H(x)\}$, iki değişkenli Fibonacci hibrit polinom dizilerini $\{f_nH(x)\}$, Pell hibrit polinom dizilerini $\{P_nH(x)\}$, Fermat hibrit polinom dizilerini $\{\Phi_nH(x)\}$, Chebyshev ikinci tür hibrit polinom dizilerini $\{U_nH(x)\}$, Jacobsthal hibrit polinom dizilerini $\{J_nH(x)\}$, Morgan-Voyce birinci tür hibrit polinom dizilerini $\{B_nH(x)\}$ ve Vieta hibrit polinom dizilerini $\{V_nH(x)\}$ kapsamaktadır. Lucas tipli hibrit polinom dizileri; Tablo 4.1 de verilen Lucas hibrit polinom dizilerini $\{L_nH(x)\}$, iki değişkenli Lucas hibrit polinom dizilerini $\{l_nH(x)\}$, $h(x)$ -Lucas hibrit polinom dizilerini $\{L_{h,n}H(x)\}$, Pell-Lucas hibrit polinom dizilerini $\{Q_nH(x)\}$, Pell-Lucas-prime hibrit polinom dizilerini $\{Q'_nH(x)\}$, Fermat-Lucas hibrit polinom dizilerini $\{\vartheta_nH(x)\}$, Chebyshev birinci tür hibrit polinom dizilerini $\{T_nH(x)\}$, Jacobsthal-Lucas hibrit polinom dizilerini $\{j_nH(x)\}$ ve Morgan-Voyce ikinci tip hibrit polinom dizilerini $\{C_nH(x)\}$, Vieta-Lucas hibrit polinom dizilerini $\{v_nH(x)\}$ kapsamaktadır.

Tanım 4.2: $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$, $ih = -hi = \varepsilon + i$ ve $F_n(x)$ n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli polinomu, $L_n(x)$ n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli polinomu olmak üzere sırasıyla n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomu, $GF_nH(x)$ ve n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomu, $GL_nH(x)$

$$GF_nH(x) = F_n(x) + iF_{n+1}(x) + \varepsilon F_{n+2}(x) + hF_{n+3}(x) \quad (4.2)$$

$$GL_nH(x) = L_n(x) + iL_{n+1}(x) + \varepsilon L_{n+2}(x) + hL_{n+3}(x) \quad (4.3)$$

ile tanımlanır. Genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizileri $\{GF_nH(x)\}_{n \geq 0}$ ve genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinom dizileri $\{GL_nH(x)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

Tanım 4.2 kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomları bulunurken genelleştirilmiş Fibonacci tipli ve Lucas tipli polinom dizilerinin terimlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu hibrit polinomları da genelleştirilmiş

Fibonacci tipli ve Lucas tipli polinom dizilerinin rekürans bağıntısına benzer bağıntılarla da sunulabilir.

(4.1) eşitliği kullanılarak, genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizilerinin rekürans bağıntısı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.3: $n \geq 2$ için

$$G_0H(x) = p_0(x) + ip_1(x) + \varepsilon(d(x)p_1(x) + g(x)p_0(x)) \\ + h(d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0(x) + g(x)p_1(x))$$

$$G_1H(x) = p_1(x) + i(d(x)p_1(x) + g(x)p_0(x)) \\ + \varepsilon(d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0(x) + g(x)p_1(x)) \\ + h(d^3(x)p_1(x) + d^2(x)g(x)p_0(x) + 2d(x)g(x)p_1(x) + g^2(x)p_0(x))$$

başlangıç değerleri olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizilerinin rekürans bağıntısı

$$G_nH(x) = d(x)G_{n-1}H(x) + g(x)G_{n-2}(x)H(x) \quad (4.4)$$

ile tanımlanır (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: (3.1) ve (4.1.) eşitliklerinden

$$d(x)G_{n-1}H(x) + g(x)G_{n-2}(x)H(x) \\ = d(x)(G_{n-1}(x) + iG_n(x) + \varepsilon G_{n+1}(x) + hG_{n+2}(x)) \\ + g(x)(G_{n-2}(x) + iG_{n-1}(x) + \varepsilon G_n(x) + hG_{n+1}(x)) \\ = d(x)G_{n-1}(x) + g(x)G_{n-2}(x) + i(d(x)G_n(x) + g(x)G_{n-1}(x)) \\ = \varepsilon(d(x)G_{n+1}(x) + g(x)G_n(x)) + h(d(x)G_{n+2}(x) + g(x)G_{n+1}(x)) \\ = G_n(x) + iG_{n+1}(x) + \varepsilon G_{n+2}(x) + hG_{n+3}(x) \\ = G_nH(x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1 verilen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $d(x)$ ve $g(x)$ değerleri Teorem 4.3 de kullanılırsa genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizileri ve genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinom dizilerinin rekürans bağıntıları elde edilir.

Sonuç 4.4: $n \geq 2$ için $d(x)$ ve $g(x)$, $\mathbb{Q}[x]$ de sıfır olmayan sabit polinomlar olmak üzere

$$GF_0(x) = i + \varepsilon d(x) + h(d^2(x) + g(x)),$$

$$GF_1(x) = 1 + id(x) + \varepsilon(d^2(x) + g(x)) + h(d^3(x) + 2d(x)g(x))$$

başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizilerinin rekürans bağıntısı

$$GF_n H(x) = d(x)GF_{n-1} H(x) + g(x)GF_{n-2}(x)H(x)$$

şeklinde ve $|p_0| = 1$ veya 2, $p_1(x), d(x) = \alpha p_1(x)$, $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ içinde sıfır olmayan sabit polinomlar, $\alpha = 2/p_0$ olmak üzere

$$GL_0(x) = p_0 + ip_1(x) + \varepsilon(d(x)p_1(x) + g(x)p_0) \\ + h(d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0 + g(x)p_1(x)),$$

$$GL_1 H(x) = p_1(x) + i(d(x)p_1(x) + g(x)p_0) \\ + \varepsilon(d^2(x)p_1(x) + d(x)g(x)p_0 + g(x)p_1(x)) \\ + h(d^3(x)p_1(x) + d^2(x)g(x)p_0 + 2d(x)g(x)p_1(x) + g^2(x)p_0).$$

başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinom dizilerinin rekürans bağıntısı

$$GL_n H(x) = d(x)GL_{n-1} H(x) + g(x)GL_{n-2}(x)H(x)$$

şeklinde tanımlanır (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

4.2. Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomlarının Binet Formülleri ve Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinomları elde etmemizi sağlayan Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları sunulmuştur.

Teorem 4.5: $n \geq 0$ için $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ denkleminin kökleri $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$, olmak üzere

$$\hat{\sigma}(x) = 1 + i\sigma(x) + \varepsilon\sigma^2(x) + h\sigma^3(x)$$

$$\hat{\rho}(x) = 1 + i\rho(x) + \varepsilon\rho^2(x) + h\rho^3(x)$$

için genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomlarının Binet formülü

$$G_n H(x) = \frac{p_1(x)(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)) + p_0(x)g(x)(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n-1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n-1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: (3.2) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci polinomunun Binet formülünü (4.1) eşitliğinde kullanılırsa

$$G_n H(x) = G_n(x) + iG_{n+1}(x) + \varepsilon G_{n+2}(x) + hG_{n+3}(x)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{p_1(x)(\sigma^n(x) - \rho^n(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^{n-1}(x) - \rho^{n-1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &+ i \left(\frac{p_1(x)(\sigma^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^n(x) - \rho^n(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &+ \varepsilon \left(\frac{p_1(x)(\sigma^{n+2}(x) - \rho^{n+2}(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &+ h \left(\frac{p_1(x)(\sigma^{n+3}(x) - \rho^{n+3}(x)) + p_0(x)g(x)(\sigma^{n+2}(x) - \rho^{n+2}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\ &= \frac{p_1(x)(1 + i\sigma(x) + \varepsilon\sigma^2(x) + h\sigma^3(x))\sigma^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{p_1(x)(1 + i\rho(x) + \varepsilon\rho^2(x) + h\rho^3(x))\rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
& + \frac{p_0(x)g(x)(1 + i\sigma(x) + \varepsilon\sigma^2(x) + h\sigma^3(x))\sigma^{n-1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
& - \frac{p_0(x)g(x)(1 + i\rho(x) + \varepsilon\rho^2(x) + h\rho^3(x))\rho^{n-1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}
\end{aligned}$$

olup $\hat{\sigma}(x) = 1 + i\sigma(x) + \varepsilon\sigma^2(x) + h\sigma^3(x)$ ve $\hat{\rho}(x) = 1 + i\rho(x) + \varepsilon\rho^2(x) + h\rho^3(x)$ için genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomlarının Binet formülü

$$G_n H(x) = \frac{p_1(x)(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)) + p_0(x)g(x)(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n-1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n-1}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1 verilen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $d(x)$ ve $g(x)$ değerleri Teorem 4.5 te kullanılırsa genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomlarının Binet formülleri elde edilir.

Sonuç 4.6: $n \geq 0$ için $\alpha = 2/p_0$ ve $\sigma(x)$, $\rho(x)$, $t^2 - d(x)t - g(x) = 0$ denkleminin kökleri ve

$$\hat{\sigma}(x) = 1 + i\sigma(x) + \varepsilon\sigma^2(x) + h\sigma^3(x)$$

$$\hat{\rho}(x) = 1 + i\rho(x) + \varepsilon\rho^2(x) + h\rho^3(x)$$

olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$GF_n H(x) = \frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \quad (4.5)$$

$$GL_n H(x) = \frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\alpha} \quad (4.6)$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonu aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 4.7: Genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n H(x) t^n = \frac{G_0 H(x) + G_1 H(x) t - d(x) G_0 H(x) t}{1 - d(x) t - g(x) t^2}$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: Tanım 2.20 den genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n H(x) t^n$$

yazılabilir. Buradan (4.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n H(x) t^n \\ &= G_0 H(x) + G_1 H(x) t + \sum_{n=2}^{\infty} G_n H(x) t^n \\ &= G_0 H(x) + G_1 H(x) t + \sum_{n=2}^{\infty} (d(x) G_{n-1} H(x) + g(x) G_{n-2} H(x)) t^n \\ &= G_0 H(x) + G_1 H(x) t + d(x) t \sum_{n=0}^{\infty} G_n H(x) t^n - d(x) G_0 H(x) t \\ &\quad + g(x) t^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) H t^n \\ &= G_0 H(x) + G_1 H(x) t + d(x) t g(t) - d(x) G_0 H(x) t + g(x) t^2 g(t) \end{aligned}$$

olup

$$(1 - d(x) t - g(x) t^2) g(t) = G_0 H(x) + G_1 H(x) t - d(x) G_0 H(x) t$$

elde edilir.

Buradan genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{G_0H(x) + G_1H(x)t - d(x)G_0H(x)t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1 verilen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $d(x)$ ve $g(x)$ değerleri Teorem 4.7 de kullanılırsa genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinom dizileri için üreteç fonksiyonları elde edilir.

Sonuç 4.8: Genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_nH(x)t^n = \frac{F_0H(x) + F_1H(x)t - d(x)F_0H(x)t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

$$l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_nH(x)t^n = \frac{L_0H(x) + L_1H(x)t - d(x)G_0H(x)t}{1 - d(x)t - g(x)t^2}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

4.3. Genelleştirilmiş Fibonacci Hibrit Polinomlarının Matris Temsilleri ve Özellikleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomları için matris temsilleri sunulmuştur. Daha sonra Catalan, Cassini, d'Ocagne ve Honsberger eşitliği gibi önemli eşitlikler sunulmuştur. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomlarının bazı özellikleri ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Theorem 4.9: $n \geq 0$ bir tamsayı ve n -inci genelleştirilmiş Fibonacci hibrit polinomu $G_nH(x)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} G_{n+2}H(x) & G_{n+1}H(x) \\ G_{n+1}H(x) & G_nH(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2H(x) & G_1H(x) \\ G_1H(x) & G_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^n$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. $n = 0,1$ için iddianın doğru olduğu açıktır. Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\begin{bmatrix} G_{n+2}H(x) & G_{n+1}H(x) \\ G_{n+1}H(x) & G_nH(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2H(x) & G_1H(x) \\ G_1H(x) & G_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^n$$

olduğunu kabul edip

$$\begin{bmatrix} G_{n+3}H(x) & G_{n+2}H(x) \\ G_{n+2}H(x) & G_{n+1}H(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2H(x) & G_1H(x) \\ G_1H(x) & G_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^{n+1}$$

olduğunu gösterelim. Buradan (4.4) eşitliği kabulümüzde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_2H(x) & G_1H(x) \\ G_1H(x) & G_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} G_2H(x) & G_1H(x) \\ G_1H(x) & G_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{n+2}H(x) & G_{n+1}H(x) \\ G_{n+1}H(x) & G_nH(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d(x)G_{n+2}H(x) + g(x)G_{n+1}H(x) & G_{n+2}H(x) \\ d(x)G_{n+1}H(x) + g(x)G_nH(x) & G_{n+1}H(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{n+3}H(x) & G_{n+2}H(x) \\ G_{n+2}H(x) & G_{n+1}H(x) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1 verilen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $d(x)$ ve $g(x)$ değerleri Teorem 4.9 da kullanılırsa genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomlarının dizilerinin matris temsilleri elde edilir.

Sonuç 4.10: $n \geq 0$ bir tamsayı, n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomu $GF_nH(x)$ ve n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomu $GL_nH(x)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} GF_{n+2}H(x) & GF_{n+1}H(x) \\ GF_{n+1}H(x) & GF_nH(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GF_2H(x) & GF_1H(x) \\ GF_1H(x) & GF_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^n$$

$$\begin{bmatrix} GL_{n+2}H(x) & GL_{n+1}H(x) \\ GL_{n+1}H(x) & GL_nH(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GL_2H(x) & GL_1H(x) \\ GL_1H(x) & GL_0H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{bmatrix}^n$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

Aşağıdaki teoremlerle genelleştirilmiş Fibonacci tipli ve Lucas tipli hibrit polinomları için Catalan, Cassini, d'Ocagne ve Honsberger eşitliği gibi önemli eşitlikler, özellikler ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir

Teorem 4.11: (Catalan Eşitliği): $0 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & GF_{n+r}H(x)GF_{n-r}H(x) - (GF_nH(x))^2 = \\ & \frac{(-g(x))^n [\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)(1 - \sigma^r(x)\rho^{-r}(x)) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)(1 - \rho^r(x)\sigma^{-r}(x))]}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\ \text{ii.} \quad & GL_{n+r}H(x)GL_{n-r}H(x) - (GL_nH(x))^2 = \\ & \frac{(-g(x))^n [\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)(\sigma^r(x)\rho^{-r}(x) - 1) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)(\rho^r(x)\sigma^{-r}(x) - 1)]}{\alpha^2} \end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: i. (4.5) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & GF_{n+r}H(x)GF_{n-r}H(x) - (GF_nH(x))^2 \\ &= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n+r}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n+r}(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n-r}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n-r}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\ &= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\ &= \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^n(x)(1 - \sigma^r(x)\rho^{-r}(x)) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^n(x)(1 - \rho^r(x)\sigma^{-r}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\ &= \frac{(-g(x))^n [\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)(1 - \sigma^r(x)\rho^{-r}(x)) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)(1 - \rho^r(x)\sigma^{-r}(x))]}{(\sigma(x) - \rho(x))^2}. \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. İspat i. şikkın ispatındaki düşünceye benzer olarak, (4.6) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılarak yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Cassini eşitliği Catalan eşitliğinin özel bir durumudur. Teorem 4.11 de $r = 1$ alınır, genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit ve Lucas tipli hibrit polinomları için Cassini eşitlikleri elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.12 (Cassini's Eşitliği): $1 \leq n$ için

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & GF_{n+1}H(x)GF_{n-1}H(x) - (GF_nH(x))^2 \\ &= \frac{(-g(x))^n [\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)(1 - \sigma(x)\rho^{-1}(x)) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)(1 - \rho(x)\sigma^{-1}(x))]}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\ \text{ii.} \quad & GL_{n+1}H(x)GL_{n-1}H(x) - (GL_nH(x))^2 \\ &= \frac{(-g(x))^n [\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)(\sigma(x)\rho^{-1}(x) - 1) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)(\rho(x)\sigma^{-1}(x) - 1)]}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

Teorem 4.13 (Honsberger Eşitliği): $n, m \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & GF_nH(x)GF_mH(x) + GF_{n+1}H(x)GF_{m+1}H(x) = \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{n+m}(x)(1+\sigma^2(x))}{(\sigma(x)-\rho(x))^2} \\ &+ \frac{(g(x)-1)(\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^m(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^m(x))}{(\sigma(x)-\rho(x))^2} \\ &+ \frac{(\hat{\rho}^2(x)\rho^{n+m}(x)(1+\rho^2(x))}{(\sigma(x)-\rho(x))^2} \\ \text{ii.} \quad & GL_nH(x)GL_mH(x) + GL_{n+1}H(x)GL_{m+1}H(x) = \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{n+m}(x)(1-\sigma^2(x))}{\alpha^2} \\ &+ \frac{(1+g(x))(\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^m(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^m(x))}{\alpha^2} \\ &+ \frac{(\hat{\rho}^2(x)\rho^{n+m}(x)(1-\rho^2(x))}{\alpha^2} \end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: i. (4.5) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& GF_n H(x) GF_m H(x) + GF_{n+1} H(x) GF_{m+1} H(x) \\
&= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^m(x) - \hat{\rho}(x)\rho^m(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&+ \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n+1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n+1}(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^{m+1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{m+1}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{n+m}(x)(1 + \sigma^2(x)) - \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^m(x)(1 + \sigma(x)\rho(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&- \frac{\hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^m(x)(1 + \rho(x)\sigma(x)) - \rho^2(x)\rho^{n+m}(1 + \rho^2(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{n+m}(x)(1 + \sigma^2(x)) + (g(x) - 1)(\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^m(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^m(x)) + (\hat{\rho}^2(x)\rho^{n+m}(x)(1 + \rho^2(x)))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. İspat i. şikkın ispatındaki düşünceye benzer olarak, (4.6) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılarak yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.14 (d'Ocagne's Eşitliği): $n < m$ için

$$\begin{aligned}
\text{i.} \quad & GF_m H(x) GF_{n+1} H(x) - GF_{m+1} H(x) GF_n H(x) \\
&= (-g(x))^n \left[\frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^{m-n}(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^{m-n}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right] \\
\text{ii.} \quad & GL_m H(x) GL_{n+1} H(x) - GL_{m+1} H(x) GL_n H(x) \\
&= (-g(x))^n (\sigma(x) - \rho(x)) \left[\frac{-\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^{m-n}(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^{m-n}(x)}{\alpha^2} \right]
\end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: (4.5) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& GF_m H(x) GF_{n+1} H(x) - GF_{m+1} H(x) GF_n H(x) \\
&= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^m(x) - \hat{\rho}(x)\rho^m(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n+1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n+1}(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&\quad - \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^{m+1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{m+1}(x))(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{m+n+1}(x) - \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^m(x)\rho^{n+1}(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^m(x)\sigma^{n+1}(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{m+n+1}(x)}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&\quad - \frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{m+n+1}(x) - \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^{m+1}(x)\rho^n(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^{m+1}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{m+n+1}(x)}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^m(x)\rho^n(x)(-\rho(x) + \sigma(x)) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^m(x)\sigma^n(x)(\sigma(x) - \rho(x))}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \\
&= \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^m(x)\rho^n(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^m(x)\sigma^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
&= (-g(x))^n \left[\frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^{m-n}(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^{m-n}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. İspat i. şıkkın ispatındaki düşünceye benzer olarak, (4.6) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılarak yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinom dizileri $\{GF_n H(x)\}_{n \geq 0}$ ve genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinom dizileri, $\{GL_n H(x)\}_{n \geq 0}$ için diğer bağıntılar aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 4.15: m ve n pozitif tamsayıları için n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomu, $GF_n H(x)$ ve n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomu, $GL_n H(x)$ olmak üzere

- i. $g(x)GF_{n-1}H(x) + GF_{n+1}H(x) = \alpha GL_n H(x)$
- ii. $(\sigma(x) - \rho(x))^2 GF_n^2 H(x) + \sigma^2 GL_n^2 H(x) = 2(\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x))$
- iii. $(\sigma(x) - \rho(x))^2 GF_n^2 H(x) - \sigma^2(x)GL_n^2 H(x) = 2(-g(x))^n(-\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x))$
- iv. $GF_{n+2}H(x) + g^2 GF_{n-2}H(x) = (\sigma^2(x) + \rho^2(x))GF_n H(x)$
- v. $\alpha(GL_m H(x)GF_n H(x) + GF_m(x)GL_n H(x)) = \frac{2\hat{\sigma}(x)^2\sigma^{n+m}(x) - 2\hat{\rho}^2(x)\rho^{n+m}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}$

bağıntıları sağlanır (Taşyurdu ve Şahin, 2022).

İspat: $\sigma(x)\rho(x) = -g(x)$ olmak üzere

- i. (4.5) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& g(x)GF_{n-1}H(x) + GF_{n+1}H(x) \\
&= g(x) \left(\frac{\hat{\alpha}(x)\sigma^{n-1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n-1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) + \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^{n+1}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n+1}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \\
&= \frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x)(g(x)\sigma^{-1}(x) + \sigma(x)) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x)(-g(x)\rho^{-1}(x) - \rho(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
&= \hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x) \\
&= \alpha GL_n H(x)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

- ii. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri ile verilen sırasıyla n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun ve n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\sigma(x) - \rho(x))^2 GF_n^2 H(x) + \sigma^2 GL_n^2 H(x) \\
&= (\sigma(x) - \rho(x))^2 \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\alpha} \right)^2 \\
&= (\sigma(x) - \rho(x))^2 \left(\frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) - \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^n(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x)}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \right) \\
&\quad + \sigma^2 \left(\frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) + \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^n(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x)}{\alpha^2} \right) \\
&= 2(\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x))
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

- iii. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri ile verilen sırasıyla n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun ve n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\sigma(x) - \rho(x))^2 GF_n^2 H(x) - \sigma^2 GL_n^2 H(x) \\
&= (\sigma(x) - \rho(x))^2 \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right)^2 - \sigma^2 \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\alpha} \right)^2 \\
&= (\sigma(x) - \rho(x))^2 \left(\frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) - \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^n(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x)}{(\sigma(x) - \rho(x))^2} \right) \\
&\quad - \sigma^2 \left(\frac{\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{2n}(x) + \hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x)\sigma^n(x)\rho^n(x) + \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x)\rho^n(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}^2(x)\rho^{2n}(x)}{\alpha^2} \right) \\
&= 2(-g(x))^n (-\hat{\sigma}(x)\hat{\rho}(x) - \hat{\rho}(x)\hat{\sigma}(x))
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

- iv. (4.5) eşitliği ile verilen n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& GF_{n+2}H(x) + g^2 GF_{n-2}H(x) \\
&= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n+2}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n+2}(x)) + g^2(x)(\hat{\sigma}(x)\sigma^{n-2}(x) - \hat{\rho}(x)\rho^{n-2}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
&= \frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x)(\sigma^2(x) + g^2\sigma^{-2}(x)) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)(\rho^2(x) + g^2\rho^{-2}(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
&= \frac{(\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x))(\sigma^2(x) + \rho^2(x))}{\sigma(x) - \rho(x)} \\
&= (\sigma^2(x) + \rho^2(x))GF_nH(x)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir

- v. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri ile verilen sırasıyla n -inci genelleştirilmiş Lucas tipli hibrit polinomunun ve n -inci genelleştirilmiş Fibonacci tipli hibrit polinomunun Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \alpha(GL_mH(x)GF_nH(x) + GF_mH(x)GL_nH(x)) \\
&= \alpha \left[\left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^m(x) + \hat{\rho}(x)\rho^m(x)}{\alpha} \right) \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) - \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^n(x) + \hat{\rho}(x)\rho^n(x)}{\alpha} \right) \left(\frac{\hat{\sigma}(x)\sigma^m(x) - \hat{\rho}(x)\rho^m(x)}{\sigma(x) - \rho(x)} \right) \right] \\
&= \frac{2\hat{\sigma}^2(x)\sigma^{n+m}(x) - 2\hat{\rho}^2(x)\rho^{n+m}(x)}{\sigma(x) - \rho(x)}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada öncelikle genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının rekürans bağıntıları ile hibrit sayılarının tanımları kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların dizileri oluşturmuş ve bu dizilerin rekürans bağıntısı tanımlanmıştır. Bu dizilerin herhangi bir terimini elde etmek için kendisinden önceki terimlerin bilinmesine ihtiyaç bırakmayan ve kapalı formül olarak bilinen Binet formülleri ve dizinin terimleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit polinomları için üreteç fonksiyonları, matris temsilleri ve özellikleri elde edilmiştir.

Literatürde ikinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan polinom dizileri ile hibrit sayıları üzerine birçok özel hibrit polinom dizileri vardır. Bu çalışmada sunulan tanımlar ve buna bağlı elde edilen sonuçlar ile hem literatürdeki birçok hibrit polinomları genelleştirilmiş hem de ikinci mertebeden rekürans bağıntılarıyla ilişkili yeni hibrit polinomları ve sonuçlar kazandırılmıştır.

5.2. Öneriler

Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara önerileri olarak, üçüncü mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan genelleştirilmiş polinom dizileri için hibrit polinomlarının tanımlanabileceğini, bunların dizilerinin oluşturulabileceğini ve bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların araştırılabileceğini ifade edebiliriz.

KAYNAKLAR

- Catarino, P. and Bilgici, G., (2020) “A note on modified k -Pell hybrid numbers”, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 229-233.
- Catarino, P. (2019) “On k -Pell hybrid numbers”, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 22(1), 83.
- Cerda-Morales, G. (2018) “Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties”, *arXiv preprint arXiv:1806.02231*.
- Deveci, Ö. and Saraçoğlu Eskiyyapar, E. (2016) “On The Pell polynomials and the Pell sequences in groups”, *Chiang Mai J. Sci.*, 43, 247-256.
- Erkan, E. and Dağdeviren, A. (2021) “ k -Fibonacci and k -Lucas hybrid numbers” *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*, Article ID 125, 1-11.
- Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. and Ward, T. (2003) *Recurrence Sequences*, American Mathematical Society, USA, 323 p.
- Florez, R., Higuaita, R. A. and Mukherjee, A. (2014) “Alternating sums in the Hosoya polynomial triangle”, *Journal of Integer Sequences*, 17 Article ID 14.9.5, 1-17.
- Florez, R., Higuaita, R. A. and Mukherjee, A. (2018a) “Characterization of the strong divisibility property for generalized Fibonacci polynomials”, *Integers*, 18, Article ID A14, 1-28.
- Florez, R., McAnally, N. and Mukherjee, A. (2018b) “Identities for the generalized Fibonacci polynomial”, *Integers*, 18B, Article ID A12, 1-13.
- Horadam, A.F. (1965) “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.
- Horzum, T. and Kocer, E.G. (2009) “On some properties of Horadam polynomials”, *Int Math Forum.*, 25(4), 1243.1252.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M. (2003) “Genel Matematik”, *Bakanlar Matbaacılık*, Erzurum, 491 s.
- Kızılateş, C. (2020) “A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 130, 109449.
- Kızılateş, C. (2022). “A note on Horadam hybridomials”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 5(1) (2022), 1-9,
- Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, *WileyInterscience Publications, Canada*, 641 p.
- Liana, M., Szynal-Liana, A. and Wloch, I. (2019) “On Pell hybridomials”, *Miskolc Mathematical Note*, 20(2), 1051-1062.

- Liana, M., Szynal-Liana, A. and Wloch, I. (2021) "Jacobsthal Representation Hybrinomials", *Annales Mathematicae Silesianae*, 36(1), 14 p..
- Nalli, A. and Haukkanen, P. (2009) "On generalized Fibonacci and Lucas polynomials", *Chaos, Solitons&Fractals*, 42(5), 3179-3186.
- Özdemir, M. (2018) "Introduction to hybrid numbers", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(11).
- Polatlı, E. (2021) "A note on ratios of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers", *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(3), 73 – 78
- Soykan, Y., and Taşdemir, E. (2020) "Generalized Tetranacci hybrid numbers", *In Annales Mathematicae Silesianae* (Vol. 1, No. ahead-of-print). Sciendo.
- Szynal-Liana, A. (2018) "The Horadam hybrid numbers", *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 38(1), 91-98.
- Szynal-Liana, A. and Włoch, I. (2018) "On Pell and Pell-Lucas hybrid number". *Commentationes Mathematicae*, 58, 11-17.
- Szynal-Liana, A. and Włoch, I. (2019a) "The Fibonacci hybrid numbers", *Utilitas Math.*, 110, 3-10.
- Szynal-Liana, A. and Włoch, I. (2019b) "The Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers", *In Annales Mathematicae Silesianae*, 33(1), 276-283.
- Szynal-Liana, A. and Włoch, I. (2020a) "Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials", *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(10), 1736-1747.
- Szynal-Liana, A. and Włoch, I. (2020b) "Generalized Fibonacci-Pell hybrinomials", *Online Journal of Analytic Combinatorics*, 15, 1-12.
- Şentürk, T. D., Bilgici, G., Daşdemir, A., and Ünal, Z. (2020) "A study on Horadam hybrid numbers", *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1212-1221.
- Taşçı, D. (2010) Soyut Cebir, *Alp Yayınevi*, Ankara, 671 p.
- Taşçı, D. (2011) Lineer Cebir, *Gazi Kitapevi Yayınevi*, Ankara, 585 p.
- Taşyurdu, Y. and Deveci, Ö. (2017) The Fibonacci polynomials in rings. *Ars Combinatoria*, 133, 355-366.
- Taşyurdu, Y., Ciftci, D. and O. Deveci, (2018) Applications of Pell polynomials in rings, *J. Math. Res.*, 10(3), 35-41
- Taşyurdu, Y. and Şahin, A. (2022) "On Generalized Fibonacci hybrinomials", *Communications in Mathematics and Applications*, 13(2), 737-751.
- Taşyurdu, Y. (2019) "Tribonacci and Tribonacci-Lucas hybrid numbers", *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 14(4), 245-254.

- Tan, E., and Ait-Amrane, N. R. (2006) “On a new generalization of Fibonacci hybrid numbers”, *arXiv preprint arXiv:2006.0*.
- Vajda, S., (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.
- Vorobyov, N., (1976) “Elementary Numbers Theory”, ***Allyn and Bacon inc, Boston***, 285-299.
- Yaglom, I. M. (1968) Complex Numbers in Geometry, ***Academic Press***, New York.
- Yağmur, T. (2020) “A Note on Generalized Hybrid Tribonacci Numbers”, ***Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications***, 40(2), 187-199.



EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Taşyurdu, Y. and Şahin, A. (2022) “On Generalized Fibonacci Hybrinomials”,
Communications in Mathematics and Applications, 13(2), 737-751.

