

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS
SAYILARINI İÇEREN TOPLAMLAR**

Esra AKBAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜŐ**

ARALIK 2006

ANKARA

Esra AKBAŞ tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN TOPLAMLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Tarih :/...../.....

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esra AKBAŞ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS
SAYILARINI İÇEREN TOPLAMLAR
(Yüksek Lisans Tezi)**

Esra AKBAŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜŐÜ**

Aralık 2006

ÖZET

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları göz önüne alınarak bu sayıları içeren bazı formüller elde edilmiştir. Bu formüllerden yararlanılarak bu sayılar için bazı trigonometrik ve ters trigonometrik formülleri içeren sonlu ve sonsuz toplamlar elde edilmiştir. Ayrıca bu toplamaları kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren sonsuz çarpımlar elde edilmiştir. Son olarak Jacobstal ve Jacobstal-Lucas sayıları içinde bazı eşitlikler ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden çeœitli sonuçlar elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
**Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları,
trigonometrik fonksiyonlar**
Sayfa Adedi : 45
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

**SUMS INVOLVING GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS
NUMBERS**

(M.Sc. Thesis)

Esra AKBAŞ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

Aralık 2006

ABSTRACT

In this study, considering the generalized Fibonacci and Lucas numbers, some formulas for these numbers were obtained. For these numbers using these formulas, some trigonometric and inverse trigonometric formulas including finite and infinite sums were obtained. Also infinite products including generalized Fibonacci and Lucas numbers were obtained by using the sums. Finally, some equations and results in terms of trigonometric functions were obtained for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers.

Science Code : 204.1.025

Key Words : The Generalized Fibonacci and Lucas numbers, trigonometric functions

Page Number: 45

Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI 'ya yine tecrübelerinden faydalandığım Hocam Dr. Emrah KILIÇ 'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI FORMÜLLER	7
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI TOPLAMLAR	15
4. JACOBSTHAL SAYILARINI İÇEREN BAZI FORMÜLLER	32
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

$\{F_n\}$

Fibonacci dizisi

$\{L_n\}$

Lucas dizisi

$\{U_n\}$

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$\{V_n\}$

Genelleştirilmiş Lucas dizisi

F_n

n .ci Fibonacci sayısı

L_n

n .ci Lucas sayısı

U_n

n .ci genelleştirilmiş Fibonacci sayısı

V_n

n .ci genelleştirilmiş Lucas sayısı

$\{J_n\}$

Jacobsthal dizisi

$\{j_n\}$

Jacobsthal-Lucas dizisi

J_n

n .ci Jacobsthal sayısı

j_n

n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı

1. GİRİŞ

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas sayılarını ve Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayılarını göz önüne alacağız.

1.1. Tanım

F_n ; n .ci Fibonacci sayısını göstermek üzere $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları için ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Fibonacci sayıları

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.2. Tanım

L_n ; n .ci Lucas sayısını göstermek üzere $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları için ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Lucas sayıları

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Fibonacci ve Lucas dizilerinin değişik şekillerde genelleştirilmeleri yapılmıştır [1,2,3,4].

Biz ise bu çalışmada aşağıda tanımları verilen genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerini göz önüne alacağız.

1.3. Tanım

Her $n \geq 2$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci $\{U_n\}$ dizisi ve p sıfırdan farklı bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$U_n = pU_{n-1} + U_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ 'dir.

1.4. Tanım

Her $n \geq 2$ tamsayısı için genelleştirilmiş Lucas $\{V_n\}$ dizisi ve p sıfırdan farklı bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$V_n = pV_{n-1} + V_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $V_0 = 2$ ve $V_1 = p$ 'dir.

Eğer $p = 1$ alınırsa $\{U_n\}$ dizisi Fibonacci dizisine ve $\{V_n\}$ dizisi Lucas dizisine dönüşür.

Bugüne kadar Fibonacci sayılarını içeren birçok formül elde edilmiştir. Biz bunlardan bazı önemli formülleri verelim. Örneğin Simson ve Catalan tarafından aşağıdaki formüller bulunmuştur [5,6,7].

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

$$F_n^2 - F_{n+k}F_{n-k} = (-1)^{n-k} F_k^2$$

$$F_{n+2}^2 = F_n F_{n+4} + (-1)^n$$

$$F_{n+4} - F_n = L_{n+2}$$

$$F_{n+4} + F_n = 3F_{n+2}$$

Benzer olarak $\{U_n\}$ dizisi için

$$U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (1)^{n-1} \quad (1.1)$$

$$U_n^2 - U_{n+k}U_{n-k} = (-1)^{n-k}U_k^2 \quad (1.2)$$

eşitliklerini verebiliriz [8,9,10].

D.H. Lehmer tarafından aşağıdaki ilginç sonsuz toplam elde edilmiştir [11].

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1} \left(\frac{1}{F_{2i+1}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Daha sonra Melham ve Shanon, Lehmer'in vermiş olduğu yukarıdaki ilginç sonsuz toplam formülünü göz önüne alarak benzer şekilde hem sonlu hem de sonsuz Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren aşağıdaki formülleri elde etmişlerdir [12,13].

n pozitif çift tamsayısı için

$$\tan^{-1} F_{n+4} - \tan^{-1} F_n = \tan^{-1} \left(\frac{L_{n+2}}{F_{n+2}^2} \right)$$

ve n pozitif tek tamsayısı için

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{n+4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{F_{n+2}}\right)$$

dir.

k çift pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{L_{k+4i+2}}{F_{k+4i-2}^2}\right) = \tan^{-1} F_{k+4n} - \tan^{-1} F_k$$

ve k tek pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tan^{-1}\left(\frac{3}{F_{k+4i-2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_k}\right) + (-1)^{n-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{k+4n}}\right)$$

dir.

k çift pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{L_{k+4i-2}}{F_{k+4i-2}^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} F_k$$

ve k tek pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tan^{-1}\left(\frac{3}{F_{k+4i-2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_k}\right)$$

dir. Yine

k çift tamsayı ve $k > 2$ ise

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{F_{k+4i-2} + (-1)^{i-1} 3}{F_{k+4i-2} + (-1)^i 3} = \frac{F_k + 1}{F_k - 1}$$

dir.

k tek tamsayı ve $k > 1$ ise

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{F_{k+4i-2}^2 + L_{k+4i-2}}{F_{k+4i-2}^2 - L_{k+4i-2}} = \frac{F_k + 1}{F_k - 1}$$

dir.

Melham ve Shannon yukarıdaki formüllerin birçoğunu elde etmek için aşağıdaki eşitliklerden yararlanmışlardır [14,15].

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right), \quad xy < 1 \quad (1.3)$$

$$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x-y}{1+xy} \right), \quad xy > -1 \quad (1.4)$$

$$\tanh^{-1} x + \tanh^{-1} y = \tanh^{-1} \left(\frac{x+y}{1+xy} \right), \quad (1.5)$$

$$\tanh^{-1} x - \tanh^{-1} y = \tanh^{-1} \left(\frac{x-y}{1-xy} \right), \quad (1.6)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1 \quad (1.7)$$

Fibonacci ve Lucas dizileri herkesçe bilinen diziler olup bunlara benzer olarak Jacobsthal türü olarak adlandırılan sayı dizileri de literatürde tanımlanmış ve halen incelenmektedir.

1.5. Tanım

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısını göstermek üzere $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ başlangıç koşulları için ve her $n \geq 2$ için Jacobsthal sayıları

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.6. Tanım

j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısını göstermek üzere $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ başlangıç koşulları için ve her $n \geq 2$ için Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Fibonacci ve Lucas dizileri için elde edilen eşitliklerin birçoğu Jacobsthal-Lucas sayıları içinde elde edilmiştir. Bunlardan bazılarını verelim [9,12].

$$J_{n+k}J_{n-k} - J_n^2 = 2^{n-k}J_k^2(-1)^{n-k-1} \quad (1.8)$$

$$J_n + 4J_{n-1} = j_n \quad (1.9)$$

$$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1} \quad (1.10)$$

$$j_n + 4j_{n-1} = 9J_n \quad (1.11)$$

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI FORMÜLLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız bize gerekli olan bazı formülleri elde edeceğiz.

2.1. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, Lucas dizisi $\{V_n\}$ ve her $n \geq 1$ için

$$V_n = pU_n + 2U_{n-1} \quad (2.1)$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ için iddianın doğruluğunu araştıralım. Başlangıç koşulları $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ için $V_1 = pU_1 + 2U_0 = p$ olup $n = 1$ için iddia doğrudur. Şimdi herhangi bir $n > 1$ sayısı için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim. Buna göre eşitliğin $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Burada $\{V_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$V_{n+1} = pV_n + V_{n-1}$$

olup kabulümüzden dolayı

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= p(pU_n + 2U_{n-1}) + pU_{n-1} + 2U_{n-2} \\
&= p^2U_n + 2pU_{n-1} + pU_{n-1} + 2U_{n-2} \\
&= p(pU_n + U_{n-1}) + 2(pU_{n-1} + U_{n-2})
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$V_{n+1} = pU_{n+1} + 2U_n$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

2.2. Teorem

$\{U_n\}$; genelleştirilmiş Fibonacci, $\{V_n\}$; genelleştirilmiş Lucas dizisi olmak üzere $n \geq 1$ için

$$V_{n+4} - V_n = p(p^2 + 4)U_{n+2} \quad (2.2)$$

dir.

İspat

Teorem 2.1'den $V_{n+4} = pU_{n+4} + 2U_{n+3}$ ve $V_n = pU_n + 2U_{n-1}$ olarak yazabiliriz.

Böylece

$$\begin{aligned}
V_{n+4} - V_n &= pU_{n+4} + 2U_{n+3} - (pU_n + 2U_{n-1}) \\
&= pU_{n+4} + 2U_{n+3} - pU_n - 2U_{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısı kullanılır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$V_{n+4} - V_n = p(p^2 + 4)U_{n+2}$$

elde ederiz.

2.3. Teorem

Her $n \geq 1$ tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$U_{n+2}^2 = U_n U_{n+4} + (-1)^n p^2 \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.2'de $k = 2$ alınırsa

$$U_n^2 - U_{n+2} U_{n-2} = (-1)^{n-2} U_2^2$$

elde edilir. Burada $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$U_2 = p \text{ olup buradan}$$

$$U_n^2 - U_{n+2} U_{n-2} = (-1)^{n-2} p^2$$

elde ederiz. Gerekli düzenlemeleri yapar ve $n \rightarrow n + 2$ alınırsa

$$U_{n+2}^2 = U_n U_{n+4} + (-1)^n p^2$$

elde edilir.

2.4. Teorem

Her $n \geq 1$ için

$$U_{n+4} - U_n = pV_{n+2} \quad (2.4)$$

dir.

İspat

$\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned} U_{n+4} &= pU_{n+3} + U_{n+2} \\ &= p(pU_{n+2} + U_{n+1}) + pU_{n+1} + U_n \\ &= p(pU_{n+2} + 2U_{n+1}) + U_n \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafına $-U_n$ 'i ekler ve Eş. 2.1 'den

$$U_{n+4} - U_n = pV_{n+2} + U_n - U_n = pV_{n+2}$$

sonucunu elde ederiz.

2.5. Teorem

Her $n \geq 1$ ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$U_{n+4} + U_n = (p^2 + 2)U_{n+2} \quad (2.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısını göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
 U_{n+4} + U_n &= pU_{n+3} + U_{n+2} + U_n \\
 &= p(pU_{n+2} + U_{n+1}) + U_{n+2} + U_n \\
 &= p^2U_{n+2} + U_{n+2} + pU_{n+1} + U_n \\
 &= p^2U_{n+2} + U_{n+2} + U_{n+2} \\
 &= (p^2 + 2)U_{n+2}
 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

2.6. Teorem

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci, $\{V_n\}$ genelleştirilmiş Lucas dizileri ve her n pozitif çift tamsayısı için

$$\tan^{-1}\left(\frac{U_{n+4}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_n}{p}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{n+2}}{U_{n+2}^2}\right) \quad (2.6)$$

dir.

İspat

Eş. 1.4 'te $x = \frac{U_{n+4}}{p}$ ve $y = \frac{U_n}{p}$ olarak alınırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{U_{n+4}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_n}{p}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{U_{n+4}}{p} - \frac{U_n}{p}}{1 + \frac{U_{n+4}U_n}{p^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \tan^{-1} \left[\left(\frac{U_{n+1} - U_n}{p} \right) \left(\frac{p^2}{p^2 + U_{n+4} U_n} \right) \right] \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{p(U_{n+4} - U_n)}{p^2 + U_{n+4} U_n} \right)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. n çift sayı olmak üzere Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 'ten

$$\tan^{-1} \left(\frac{U_{n+4}}{p} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{U_n}{p} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{p^2 V_{n+2}}{U_{n+2}^2} \right)$$

ifadesi elde edilir.

2.7. Teorem

Her n pozitif tek tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$\tan^{-1} \left(\frac{p}{U_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_{n+4}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{n+2}} \right) \quad (2.7)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Eş. 1.3'te $x = \frac{p}{U_n}$ ve $y = \frac{p}{U_{n+4}}$ alınırsa,

$$\tan^{-1} \left(\frac{p}{U_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_{n+4}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{p}{U_n} + \frac{p}{U_{n+4}}}{1 - \frac{p^2}{U_n U_{n+4}}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{p(U_{n+4} + U_n)}{U_n U_{n+4} - p^2} \right)$$

olarak bulunur. n pozitif tek tamsayı olmak üzere Eş. 2.3 ve Eş. 2.5 'ten

$$\tan^{-1} \left(\frac{p}{U_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_{n+4}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{n+2}} \right)$$

olduğu görülür.

2.8. Teorem

Her $n \geq 2$ çift tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$\tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{n+4}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{n+2}} \right) \quad (2.8)$$

dir.

İspat

Eş. 1.5 'te $x = \frac{p}{U_n}$ ve $y = \frac{p}{U_{n+4}}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{n+4}} \right) &= \tanh^{-1} \left(\frac{\frac{p}{U_n} + \frac{p}{U_{n+4}}}{1 + \frac{p^2}{U_n U_{n+4}}} \right) \\ &= \tanh^{-1} \left(\frac{p(U_{n+4} + U_n)}{U_n U_{n+4} + p^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere Eş. 2.3 ve Eş. 2.5 göz önüne alınırsa

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{n+2}}\right)$$

eşitliği elde edilir.

2.9. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, Lucas dizisi $\{V_n\}$ ve her $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{n+2}}{U_{n+2}^2}\right) \quad (2.9)$$

dir.

İspat

Eş. 1.6 'da $x = \frac{p}{U_n}$ ve $y = \frac{p}{U_{n+4}}$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{n+4}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{p}{U_n} - \frac{p}{U_{n+4}}}{1 - \frac{p^2}{U_n U_{n+4}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{p(U_{n+4} - U_n)}{U_n U_{n+4} - p^2}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \geq 1$ tek tamsayı olmak üzere Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 'ten

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{n+2}}{U_{n+2}^2}\right)$$

eşitliği sağlanır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI TOPLAMLAR

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren hem sonlu hem de sonsuz toplamlar elde edeceğiz. İlk olarak sonlu toplamları vereceğiz.

3.1. Teorem

$\{U_n\}$; genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve $\{V_n\}$; genelleştirilmiş Lucas dizisi olmak üzere her k çift tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_k}{p}\right) \quad (3.1)$$

dir.

İspat

Teorem 2.6 'da n yerine $k, k+4, k+8, \dots, k+4n-4$ alınırsa

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_k}{p}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+2}}{U_{k+2}^2}\right) \\ \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+8}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4}}{p}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+6}}{U_{k+6}^2}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n-4}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n-8}}{p}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4n-6}}{U_{k+4n-6}^2}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n-4}}{p}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4n-2}}{U_{k+4n-2}^2}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\tan^{-1}\left(\frac{U_{k+4n}}{p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{U_k}{p}\right) = \sum_{i=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

3.2. Teorem

U_n ; n .ci genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve her k pozitif tek tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + (-1)^{n-1} \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlar.

İspat

Teorem 2.7 'de n yerine $k, k+4, k+8, \dots, k+4n-4$ alalım. Bu durumda

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+2}}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+8}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+6}}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+8}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+12}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+10}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-8}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4n-6}}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-4}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4n-2}}\right)$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + (-1)^{n-1} \tan^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tan^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}}\right)$$

elde edilir.

3.3. Teorem

U_n ; n .ci genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve her $k > 2$ çift tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + (-1)^{n-1} \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.8 'de n yerine $k, k+4, k+8, \dots, k+4n-4$ olarak alınırsa

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+2}}\right)$$

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+8}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+6}}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-8}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4n-6}}\right) \\
& \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-4}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4n-2}}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) + (-1)^{n-1} \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tanh^{-1}\left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}}\right)$$

elde ederiz.

3.4. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları, her $k > 1$ tek tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^n \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) \quad (3.4)$$

eşitliğini sağlar.

İspat

Eş. 2.9 'da n yerine $k, k+4, k+8, \dots, k+4n-4$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+2}}{U_{k+2}^2}\right) \\
& \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+8}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+6}}{U_{k+6}^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n-4}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4n-2}}{U_{k+4n-2}^2}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa.

$$\sum_{i=1}^n \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_k}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{p}{U_{k+4n}}\right)$$

elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bazı sonsuz toplamaları vereceğiz.

3.5. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, Lucas dizisi $\{V_n\}$ ve her k çift tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tanh^{-1}\left(\frac{U_k}{p}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$n \rightarrow \infty$ için Eş. 3.1 'in limiti alınır ve $\tanh^{-1} x$ 'in ∞ 'daki değeri $\frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tanh^{-1}\left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \tanh^{-1}\left(\frac{U_{k+4n}}{p}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{U_k}{p}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left(\frac{U_{k+4n}}{p} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{p} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{p} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1} \left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{p} \right)$$

eşitliğini verir.

3.6. Teorem

Her k tek tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tan^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$n \rightarrow \infty$ için Eş. 3.2 'nin limitini alırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tan^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) + (-1)^{n-1} \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

ifadesini elde ederiz.

3.7. Teorem

Her $k > 2$ çift tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) \quad (3.5)$$

dir.

İspat

$n \rightarrow \infty$ için Eş. 3.3 'ün limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) + (-1)^{n-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

olur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

eşitliği elde edilir.

3.8. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, Lucas dizisi $\{V_n\}$ ve her $k > 1$ tek tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) \quad (3.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$n \rightarrow \infty$ için Eş. 3.4 'ün limiti alınır

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tanh^{-1} \left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_{k+4n}} \right) = 0$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tanh^{-1} \left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{P}{U_k} \right)$$

olur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tanh^{-1} \left(\frac{p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

.

Şimdi de Eş. 3.5 ve Eş 3.6 'yı kullanarak sonsuz çarpımları elde edeceğiz.

3.9. Teorem

Her $k > 2$ çift tamsayısı ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ için

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{U_{k+4i-2} + (-1)^{i-1} p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2} + (-1)^i p(p^2 + 2)} = \frac{U_k + p}{U_k - p}$$

dir.

İspat

Eş. 3.5 'in sol tarafında Eş. 1.7 kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}}}{1 - \frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \log_e \left(\frac{U_{k+4i-2} + p(p^2+2)}{U_{k+4i-2} - p(p^2+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \log_e \left(\frac{U_{k+2} + p(p^2+2)}{U_{k+2} - p(p^2+2)} \right) - \log_e \left(\frac{U_{k+6} + p(p^2+2)}{U_{k+6} - p(p^2+2)} \right) + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \log_e \left\{ \left(\frac{U_{k+2} + p(p^2+2)}{U_{k+2} - p(p^2+2)} \right) \left(\frac{U_{k+6} - p(p^2+2)}{U_{k+6} + p(p^2+2)} \right) + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \log_e \prod_{i=1}^{\infty} \frac{U_{k+4i-2} + (-1)^{i-1} p(p^2+2)}{U_{k+4i-2} + (-1)^i p(p^2+2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer tarafında da Eş. 1.7 kullanırsak

$$\begin{aligned}
\tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right) &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \frac{p}{U_k}}{1 - \frac{p}{U_k}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{U_k + p}{U_k - p} \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \tanh^{-1} \left(\frac{p(p^2+2)}{U_{k+4i-2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p}{U_k} \right)$$

eşitliği sağlandığından

$$\frac{1}{2} \log_e \prod_{i=1}^{\infty} \frac{U_{k+4i-2} + (-1)^{i-1} p(p^2+2)}{U_{k+4i-2} + (-1)^i p(p^2+2)} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{U_k + p}{U_k - p} \right)$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan logaritmanın özelliği kullanılarak

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{U_{k+4i-2} + (-1)^{i-1} p(p^2 + 2)}{U_{k+4i-2} + (-1)^i p(p^2 + 2)} = \frac{U_k + p}{U_k - p}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.10. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ olmak üzere her $k > 1$ tek tamsayısı için

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{U_{k+4i-2} + p^2 V_{k+4i-2}}{U_{k+4i-2}^2 - p V_{k+4i-2}} = \frac{U_k + p}{U_k - p}$$

dir.

İspat

Teorem 3.9 'un ispatına benzer biçimde Eş. 3.6 'yı kullanarak ispatı yapılabilir.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için bazı sonuçlar vereceğiz.

3.11. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas dizileri sırasıyla $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ olmak üzere

$$U_n^2 + \frac{4}{p^2} U_{n-1} U_{n+1} = \frac{V_n^2}{p^2} \quad (3.7)$$

dir.

İspat

Eş. 2.1 'i kullanarak

$$\begin{aligned} V_n^2 &= (pU_n + 2U_{n-1})^2 \\ &= p^2U_n^2 + 4pU_nU_{n-1} + 4U_{n-1}^2 \\ &= p^2U_n^2 + 4U_{n-1}(pU_n + U_{n-1}) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$V_n^2 = p^2U_n^2 + 4U_{n-1}U_{n+1}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\frac{V_n^2}{p} = U_n^2 + \frac{4}{p^2}U_{n-1}U_{n+1}$$

elde ederiz.

3.12. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$V_n^2 + \frac{4}{p^2}V_{n-1}V_{n+1} = \frac{(p^2 + 4)^2}{p^2}U_n^2 \quad (3.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.8 'in ispatında $pV_n + 2V_{n-1} = (p^2 + 4)U_n$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bundan dolayı Eş. 2.1 kullanarak

$$\begin{aligned} pV_n + 2V_{n-1} &= p(pU_n + 2U_{n-1}) + 2(pU_{n-1} + 2U_{n-2}) \\ &= p^2U_n + 4(pU_{n-1} + U_{n-2}) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned} pV_n + 2V_{n-1} &= p^2U_n + 4U_n \\ &= (p^2 + 4)U_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.13. Teorem

$\{U_n\}$; genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve $\{V_n\}$; genelleştirilmiş Lucas dizisi olmak üzere

$$\tan^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{V_n^2}{2p^2U_n^2}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş.1.3 'te $x = \frac{2U_{n-1}}{pU_n}$ ve $y = \frac{pU_n}{2U_{n+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2U_{n-1}}{pU_n} + \frac{pU_n}{2U_{n+1}}}{1 - \frac{2pU_{n-1}U_n}{2pU_nU_{n+1}}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{4U_{n+1}U_{n-1} + p^2U_n^2}{2pU_nU_{n+1} - 2pU_{n-1}U_n}\right)\end{aligned}$$

olur. Burada Eş. 3.7 'yi ve $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısı kullanırsak

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{V_n^2}{2pU_n(pU_n + U_{n-1} - U_{n+1})}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{V_n^2}{2p^2U_n^2}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz.

3.14. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$\tan^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)^2U_n^2}{2p^2V_n^2}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.3 'te $x = \frac{2V_{n-1}}{pV_n}$ ve $y = \frac{pV_n}{2V_{n+1}}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2V_{n-1}}{pV_n} + \frac{pV_n}{2V_{n+1}}}{1 - \frac{2pV_{n-1}V_n}{2pV_nV_{n+1}}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{4V_{n-1}V_{n+1} + p^2V_n^2}{2pV_n(V_{n+1} - V_{n-1})}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem Eş. 3.8 ve $\{V_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)^2 U_n^2}{2pV_n(pV_n + V_{n-1} - V_{n+1})}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)^2 U_n^2}{2p^2 V_n^2}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

3.15. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{V_n}{2pU_n}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.5 'te $x = \frac{2U_{n-1}}{pU_n}$ ve $y = \frac{pU_n}{2U_{n+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\tanh^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{2U_{n-1}}{pU_n} + \frac{pU_n}{2U_{n+1}}}{1 + \frac{2pU_{n-1}U_n}{2pU_nU_{n+1}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{4U_{n-1}U_{n+1} + p^2U_n^2}{2pU_n(U_{n+1} + U_{n-1})}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.7 'yi kullanarak ve $\{U_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısından

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{V_n^2}{2pU_n(pU_n + 2U_{n-1})}\right)$$

yazabiliriz. Burada Eş. 2.1 'i kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2U_{n-1}}{pU_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pU_n}{2U_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{V_n^2}{2pU_n}\right)$$

3.16. Teorem

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)U_n}{2pV_n}\right)$$

dir.

İspat

Teorem 3.15 'in ispatına benzer şekilde Eş. 1.5 'te $x = \frac{2V_{n-1}}{pV_n}$ ve $y = \frac{pV_n}{2V_{n+1}}$ alalım.

Buna göre

$$\begin{aligned}\tanh^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{2V_{n-1}}{pV_n} + \frac{pV_n}{2V_{n+1}}}{1 + \frac{2pV_{n-1}V_n}{2pV_nV_{n+1}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{4V_{n-1}V_{n+1} + p^2V_n^2}{2pV_n(V_{n+1} + V_{n-1})}\right)\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitlikte Eş. 3.8 ve $\{V_n\}$ dizisinin indirgeme bağıntısını kullanarak

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)^2 U_n^2}{2pV_n(pV_n + 2V_{n-1})}\right)$$

elde ederiz. Teorem 3.12 'den

$$pV_n + 2V_{n-1} = (p^2 + 4)U_n$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak ve gerekli düzenlemeleri yaparak

$$\tanh^{-1}\left(\frac{2V_{n-1}}{pV_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{pV_n}{2V_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(p^2 + 4)^2 U_n}{2pV_n}\right)$$

elde ederiz.

4. JACOBSTHAL SAYILARINI İÇEREN BAZI FORMÜLLER

4.1. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere

$$J_{n+2}^2 = J_n J_{n+4} + 2^n (-1)^n \quad (4.1)$$

$$J_{n+4} - 4J_n = j_{n+2} \quad (4.2)$$

$$J_{n+4} + 4J_n = 5J_{n+2} \quad (4.3)$$

dir.

İspat

İlk olarak Eş. 4.1 'in doğru olduğunu gösterelim. Bunun için Eş. 1.8 'de $k = 2$ olarak alınırsa

$$J_{n+2}J_{n-2} - J_n^2 = 2^{n-2}J_2^2(-1)^{n-3}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $n \rightarrow n+2$ alınır ve $J_2 = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$J_{n+4}J_n - J_{n+2}^2 = 2^n(-1)^{n-1}$$

eşitliğini ve dolayısı ile

$$J_{n+2}^2 = J_nJ_{n+4} + 2^n(-1)^n$$

ifadesini elde ederiz.

Şimdi Eş. 4.2 'nin doğruluğunu gösterelim. Tanım 1.5 'i göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} J_{n+4} - 4J_n &= J_{n+3} + 2J_{n+2} - 4J_n \\ &= J_{n+3} + 2(J_{n+1} + 2J_n) - 4J_n \\ &= J_{n+3} + 2J_{n+1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada Eş. 1.10 'u kullanırsak

$$J_{n+4} - 4J_n = J_{n+2}$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi de Eş. 4.3 'ün ispatını yapalım. Tanım 1.5 'i göz önüne alarak

$$\begin{aligned} J_{n+4} + 4J_n &= J_{n+3} + 2J_{n+2} + 4J_n \\ &= J_{n+2} + 2J_{n+1} + 2J_{n+2} + 4J_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3J_{n+2} + J_{n+1} + 2J_n + J_{n+1} + 2J_n \\
&= 5J_{n+2}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.2. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve her $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5J_{n+2}}{J_{n+2}^2 + 2^n - 4}\right)$$

dir.

İspat

Eş. 1.3 'te $x = \frac{1}{J_n}$ ve $y = \frac{4}{J_{n+4}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{J_n} + \frac{4}{J_{n+4}}}{1 - \frac{4}{J_n J_{n+4}}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{J_{n+4} + 4J_n}{J_n J_{n+4} - 4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. n tek sayı olmak üzere Eş. 4.1 ve Eş. 4.3 kullanılırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5J_{n+2}}{J_{n+2}^2 + 2^n - 4}\right)$$

elde edilir.

4.3. Teorem

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları her $n \geq 2$ çift tamsayı için

$$\tan^{-1}\left(\frac{J_{n+4}}{4}\right) - \tan^{-1}(J_n) = \tan^{-1}\left(\frac{J_{n+2}}{J_{n+2}^2 - 2^n + 4}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.4 'te $x = \frac{J_{n+4}}{4}$ ve $y = J_n$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{J_{n+4}}{4}\right) - \tan^{-1}(J_n) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{J_{n+4}}{4} - J_n}{1 + \frac{J_n J_{n+4}}{4}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{J_{n+4} - 4J_n}{4 + J_n J_{n+4}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. n çift sayı olmak üzere Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 'yi kullanarak

$$\tan^{-1}\left(\frac{J_{n+4}}{4}\right) - \tan^{-1}(J_n) = \tan^{-1}\left(\frac{J_{n+2}}{J_{n+2}^2 - 2^n + 4}\right)$$

elde ederiz.

4.4. Teorem

Her $n \geq 2$ çift tamsayısı ve J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{5J_{n+2}}{J_{n+2}^2 - 2^n + 4}\right)$$

dir.

İspat

Eş. 1.5 'te $x = \frac{1}{J_n}$ ve $y = \frac{4}{J_{n+4}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{J_n} + \frac{4}{J_{n+4}}}{1 + \frac{4}{J_n J_{n+4}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{J_{n+4} + 4J_n}{J_n J_{n+4} + 4}\right) \end{aligned}$$

olur. $n \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere Eş. 4.1 ve Eş. 4.3 kullanılırsa

$$\tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{5J_{n+2}}{J_{n+2}^2 - 2^n + 4}\right)$$

elde edilir.

4.5. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{j_{n+2}}{J_{n+2}^2 + 2^n - 4}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.6 'da $x = \frac{1}{J_n}$ ve $y = \frac{4}{J_{n+4}}$ alalım. O halde

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{J_n} - \frac{4}{J_{n+4}}}{1 - \frac{4}{J_n J_{n+4}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{J_{n+4} - 4J_n}{J_n J_{n+4} - 4}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. n tek sayı olmak üzere Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 'i kullanarak

$$\tanh^{-1}\left(\frac{1}{J_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{4}{J_{n+4}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{j_{n+2}}{J_{n+2}^2 + 2^n - 4}\right)$$

buluruz.

4.6. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı için

$$J_n^2 + 8J_{n-1}J_{n+1} = j_n^2 \quad (4.4)$$

$$j_n^2 + 8j_{n-1}j_{n+1} = 81J_n^2 \quad (4.5)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş. 1.9 'un her iki tarafının karesi alınır

$$\begin{aligned} j_n^2 &= (J_n + 4J_{n-1})^2 \\ &= J_n^2 + 8J_{n-1}J_n + 16J_{n-1}^2 \\ &= J_n^2 + 8J_{n-1}(J_n + 2J_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeleri yapar ve Tanım 1.5 'i kullanırsak

$$j_n^2 = J_n^2 + 8J_{n-1}J_{n+1}$$

elde ederiz.

Eş. 4.5 'in ispatı için $j_n + 4j_{n-1} = 9J_n$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü

$$\begin{aligned} (j_n + 4j_{n-1})^2 &= j_n^2 + 8j_nj_{n-1} + 16j_{n-1}^2 \\ &= j_n^2 + 8j_{n-1}(j_n + 2j_{n-1}) \end{aligned}$$

olup Tanım 1.6 göz önüne alınır

$$j_n^2 + 8j_{n-1}j_{n+1} = 81J_n^2$$

olarak bulunur. O halde Eş.1.9 ve Tanım 1.5 'i göz önüne alırsak

$$j_n + 4j_{n-1} = J_n + 4J_{n-1} + 4(J_{n-1} + 4J_{n-2})$$

$$\begin{aligned}
&= J_n + 8J_{n-1} + 16J_{n-2} \\
&= J_n + 8(J_{n-1} + 2J_{n-2}) \\
&= 9J_n
\end{aligned}$$

elde ederiz.

4.7. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$\tan^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{j_n^2}{2J_n^2}\right)$$

dir.

İspat

Eş.1.3 'te $x = \frac{4J_{n-1}}{J_n}$ ve $y = \frac{J_n}{2J_{n+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{4J_{n-1}}{J_n} + \frac{J_n}{2J_{n+1}}}{1 - \frac{4J_{n-1}J_n}{2J_nJ_{n+1}}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{8J_{n-1}J_{n+1} + J_n^2}{2J_n(J_{n+1} - 2J_{n-1})}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.4 ve Tanım 1.5 'i göz önüne alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{j_n^2}{2J_n^2}\right)$$

eşitliğini buluruz.

4.8. Teorem

j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı ve J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$\tan^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{81J_n^2}{2j_n^2}\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Eş. 1.3 'te $x = \frac{4j_{n-1}}{j_n}$ ve $y = \frac{j_n}{2j_{n+1}}$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{4j_{n-1}}{j_n} + \frac{j_n}{2j_{n+1}}}{1 - \frac{4j_{n-1}j_n}{2j_nj_{n+1}}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{8j_{n-1}j_{n+1} + j_n^2}{2j_n(j_{n+1} - 2j_{n-1})}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Eş. 4.5 ve Tanım 1.6 göz önüne alarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tan^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{81j_n^2}{2j_n^2}\right)$$

elde edilir.

4.9. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{2J_n}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 1.5 'te $x = \frac{4J_{n-1}}{J_n}$ ve $y = \frac{J_n}{2J_{n+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{4J_{n-1}}{J_n} + \frac{J_n}{2J_{n+1}}}{1 + \frac{4J_{n-1}J_n}{2J_nJ_{n+1}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{8J_{n-1}J_{n+1} + J_n^2}{2J_n(J_{n+1} + 2J_{n-1})}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 1.10 ve Eş. 4.4 'ü kullanarak

$$\tanh^{-1}\left(\frac{4J_{n-1}}{J_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{J_n}{2J_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{2J_n}\right)$$

elde ederiz.

4.10. Teorem

J_n ; n .ci Jacobsthal sayısı ve j_n ; n .ci Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$\tanh^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{9J_n}{2j_n}\right)$$

dir.

İspat

Eş. 1.5 'te $x = \frac{4j_{n-1}}{j_n}$ ve $y = \frac{j_n}{2j_{n+1}}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) &= \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{4j_{n-1}}{j_n} + \frac{j_n}{2j_{n+1}}}{1 + \frac{4j_{n-1}j_n}{2j_nj_{n+1}}}\right) \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{8j_{n-1}j_{n+1} + j_n^2}{2j_n(j_{n+1} + 2j_{n-1})}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada Tanım 1.6 göz önüne alınırsa

$$\tanh^{-1}\left(\frac{4j_{n-1}}{j_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{2j_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{8j_{n-1}j_{n+1} + j_n^2}{2j_n(j_n + 2j_{n-1} + 2j_{n+1})}\right)$$

$$= \tanh^{-1} \left(\frac{8j_{n-1}j_{n+1} + j_n^2}{2j_n(j_n + 4j_{n-1})} \right)$$

elde edilir Burada Eş. 4.5 ve Eş. 1.11 göz önüne alınarak

$$\tanh^{-1} \left(\frac{4j_{n-1}}{j_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{j_n}{2j_{n+1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{9j_n}{2j_n} \right)$$

eşitliği bulunur.

KAYNAKLAR

1. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section", **Halsted Press**, New York, 10-100 (1989).
2. Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence", **Amer. Math. Monthly**, 68: 455-459, (1961).
3. Robbins, N., "Beginning Number Theory", **Wm. C. Brown Publishers**, Oxford, 200-240 (1993).
4. Vorob'yev, N.N., "Fibonacci Numbers", **Blaisdell**, New York, 120-190 (1961).
5. Jarden, D., "Recurring sequences", **Riveon Lematematika**, Jerusalem, 10-20 (1966).
6. Bicknel, M., "A Primer of the Pell Sequence and Related Sequences", **The Fibonacci Quarterly**, 13(4): 345-349 (1975).
7. Ward, M., "The Algebra of Recurring Series", **Annals of Mathematics**, Second Series, 32(1): 1-9 (1931).
8. Hardy, G.H., and Wright, E.M., "An Introduction to the Theory of Numbers 5th ed.", **Oxford University Press**, Oxford, England, 65-100 (1979).
9. Hogatt Jr., V. E., "The Fibonacci and Lucas Numbers", **Houghton Mifflin**, Boston, 1-70 (1969).
10. Rosen, K., "Elementary Number Theory and Its Applications 3rd ed.", **Addison-Wesley**, Reading Mass, 20-50 (1992).
11. Lehmer, D.H., "Problem 3801", **The American Mathematical Monthly**, 632 (1936).
12. Melham, R.S. and Shannon, A.G., "Inverse Trigonometric and Hyperbolic Summation Formulas Involving Generalized Fibonacci Numbers", **The Fibonacci Quarterly**, 33(1): 32-40 (1995).
13. Melham, R.S. and Shannon, A.G., "On Reciprocal Sums of Second Order Sequences", **Applications of Fibonacci Numbers**, 6: 355-364 (1996).
14. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions", **New York: Dover**, 290-321 (1972).

15. Edwards JR., C.H. and Penny, D.E., "Calculus with Analytic Geometry",
New Jersey: Prentice Hall, 254-320 (1994).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKBAŞ, Esra
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 10.08.1982 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 360 65 17
e-mail : esrkbs@hotmail.com

Eğitim

Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Lisans

Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü

2004

Lise

Fatih Sultan Mehmet Lisesi

2000

Yabancı Dil

İngilizce