



T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FRANK MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Efruz Özlem MERSİN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mustafa BAHŞİ

ORTAK DANIŞMAN

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

AKSARAY, 2021

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 152309301 numaralı Doktora öğrencisi Efruz Özlem MERSİN tarafından hazırlanan “**GENELLEŞTİRİLMİŞ FRANK MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OYBİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAHŞI

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Ortak Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Selçuk Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Süleyman SOLAK

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Konya Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 08/06/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Doktora tezi olarak sunduđum bu çalıřmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı dűőecek bir yol ve yardıma bařvurmaksızın yazdıđımı, yararlandıđım eserlerin kaynakçada gűőterilenlerden olduđuunu, çalıřmamda kullandıđım verilerin orijinalliđini ve her tűrlű intihalden uzak olduđuunu beyan ederim.

Enstitű tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tűm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Efruz zlem MERSİN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında sabrını, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli danışman hocalarım Prof. Dr. Mustafa BAHŞI ve Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde bulunan kıymetli hocalarım Doç. Dr. Halis BİLGİL ve Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR'a katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca sevgi ve ilgilerini üzerimden eksik etmeyen, her zaman yanımda olan ve beni bugünlere getiren annem Zeynep UYGUN ve babam İbrahim UYGUN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Beni her konuda destekleyen ve cesaret veren sevgili eşim, meslektaşım Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali MERSİN'e tüm kalbimle teşekkür ederim.

Bu süreçte çalışmalarımın bitmesini sabırla bekleyerek büyük fedakârlık gösteren çocuklarım Çınar Dora MERSİN ve Ecem Derin MERSİN'e sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım ve bu çalışmayı onlara ithaf ettiğimi belirtirim.

Efruz Özlem MERSİN

AKSARAY, 2021

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	2
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER	4
2.1 Temel Kavramlar	4
2.2 Frank Matris ve Özellikleri	10
2.3 Sturm Dizisi	13
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	19
3.1 Genelleştirilmiş Frank Matrisler ve Cebirsel Özellikleri	19
3.2 Sturm Teoreminin Genelleştirilmiş Frank Matrislere Uygulanması	30
3.3 Genelleştirilmiş Frank Matrislerin Bazı Özel Halleri	30
3.3.1 Harmonik-Frank matris	41
3.3.2 Frank matrisin hemen hemen Hadamard tersi	48
3.3.3 Fibonacci-Frank matris	53
3.3.4 Lucas-Frank matris	61
3.4 Frank Matrislerin Graf Teoriye Uygulanması	68
3.4.1 Graf teori kavramları	68
3.4.2 Frank graf	75
3.4.3 Frank grafın en büyük özdeğeri için sınırlar	82
3.4.4 Frank grafın enerjisi için sınırlar	88
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	96
KAYNAKLAR	98
ÖZGEÇMİŞ	101

DOKTORA TEZİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FRANK MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Efruz Özlem MERSİN

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü**

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAHŞİ

Ortak Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

ÖZET

Bu çalışmada bilinen Frank matristen yola çıkarak genelleştirilmiş Frank matrisi tanımladık ve bu matrisin determinantını, tersini, karakteristik polinomunu hesapladık. Sturm Teoremini kullanarak belirli koşullar altında genelleştirilmiş Frank matrislerin tüm özdeğerlerinin farklı ve pozitif olduğunu elde ettik. Genelleştirilmiş Frank matrislerin ve Sturm Teoremi ile bulduğumuz sonuçların özel hallerini inceledik. Komşuluk matrisi Frank matris olan Frank graf kavramını ve buna ilaveten Frank enerji kavramını tanımladık. Frank grafın spektral yarıçapı ve ayrıca Frank enerji için bazı sınır değerleri elde ettik.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamızın amacı belirlenmiş ve literatür özetine yer verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızla ilgili bazı temel kavramlar, Frank matris ve özellikleri ile Sturm dizisi hakkında temel bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Frank matrisler ve cebirsel özellikleri, Sturm Teoreminin genelleştirilmiş Frank matrislere uygulanması, genelleştirilmiş Frank matrisin özel hallerini içeren bazı uygulamalara yer verilmiştir. Ayrıca Frank matrisin graf teori ile ilgili uygulamaları, Frank grafın spektral yarıçapı ve enerjisi için bulunan bazı sınırlar yine üçüncü bölümde yer almaktadır. Dördüncü bölüm ise sonuçlar ve önerilerden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Frank Matris, Determinant, LU Ayırışımı, Karakteristik Polinom, Sturm Dizisi, Frank Graf.

Haziran, 2021; 101 sayfa

PhD. THESIS

PROPERTIES OF GENERALIZED FRANK MATRICES

Efruz Özlem MERSİN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and
Applied Sciences**

**Selcuk University
Graduate School of Natural and
Applied Sciences**

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa BAHŞI

Co-Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

ABSTRACT

In this study, we have defined generalized Frank matrix based on the Frank matrix and have computed the determinant, inverse, characteristic polynomial of this matrix. Using the Sturm Theorem, we obtained that all eigenvalues of generalized Frank matrices are different and positive under certain conditions. We examined the special cases of generalized Frank matrices and the results we found with the Sturm Theorem. We have defined the Frank graph concept which its adjacency matrix equals to the Frank matrix and additionally concept of the Frank energy. We obtained some bounds for spectral radius of the Frank graph and also Frank energy.

This study consists of four sections. In the first section, the purpose of our study has been determined and a summary of the literature is included. In the second section, some basic concepts about our study, Frank matrix and its properties, and basic informations about Sturm series are included. In the third section, generalized Frank matrices and their algebraic properties, the application of the Sturm Theorem to the generalized Frank matrices, some applications involving the special cases of the generalized Frank matrix are given. In addition, the applications of the Frank matrix in graph theory, some bounds found for the spectral radius and energy of the Frank graph are also included in the third section. The fourth section consists of results and suggestions.

Keywords: Frank Matrix, Determinant, LU Decomposition, Characteristic Polynomial, Sturm Sequence, Frank Graph.

June, 2021; 101 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Frank graf G_{F_5}	77
---------------------------------------	----



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. $F_{h_{i \leq 5}}$ 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ ve $\lambda = 25$ için işaret değişim tablosu	47
Çizelge 3.2. $F_{f_{i \leq 5}}$ 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 15$ için işaret değişim tablosu	60
Çizelge 3.3. $F_{l_{i \leq 5}}$ 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ ve $\lambda = 20$ için işaret değişim tablosu	68
Çizelge 3.4. G_{F_n} 'in spektral yarıçapı için $k + M \leq 5$ ve $k + N \leq 5$ olacak şekilde Teorem 3.4.30 kullanılarak elde edilen sınır değerleri	95
Çizelge 3.5. G_{F_n} 'in spektral yarıçapı için Sonuç 3.4.41 kullanılarak elde edilen sınır değerleri	95

SİMGELER VE KISALTMALAR

$ A $	A Matrisinin Determinantı
A^{-1}	A Matrisinin Tersi
$A^{o(-1)}$	A Matrisinin Hadamard Tersi
$Adj(A)$	A Matrisinin Adjoint Matrisi
$A(G)$	G Grafının Komşuluk Matrisi
$A^k(G)$	G Grafının Komşuluk Matrisin k . Kuvveti
a_{ij}	A Matrisinin i . Satır j . Sütun Elemanı
$a_{ij}^{(k)}$	A^k Matrisinin i . Satır j . Sütun Elemanı
(a_n)	Reel Sayı Dizisi
$c(a)$	İşaret Değişim Sayısı
d_i	v_i Noktasının Derecesi
d_i^+	Bir Digrafın $v_i \in V$ Noktasının Dış Derecesi
d_i^{k+}	Bir Digrafın $v_i \in V$ Noktasının k -Dış Derecesi
$det(A)$	A Matrisinin Determinantı
$dim V$	V Vektör Uzayının Boyutu
E	G Grafının Kenar Kümesi
F_{a_n}	Genelleştirilmiş Frank Matris
F_{f_n}	Fibonacci-Frank Matris
F_{h_n}	Harmonik-Frank Matris
F_{l_n}	Lucas-Frank Matris
f_n	n . Fibonacci Sayısı
F_n	$n \times n$ Frank Matris
$F_n^{o(-1)}$	Frank Matris F_n 'in Hemen Hemen Hadamard Tersi
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Fibonacci Sayı Dizisi
G	Herhangi Bir Graf
G_{F_n}	Frank Graf
h_n	n . Harmonik Sayı
I	Birim Matris
izA	A Matrisinin İzi
l_n	n . Lucas Sayısı
$(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Lucas Sayı Dizisi
$M_n(F)$	F Cismi Üzerinde Tanımlı n -kare Matrislerin Kümesi
$p(x)$	Polinom Fonksiyon
$p'(x)$	$p(x)$ Polinomunun Türevi
$P_n(\lambda)$	n . Mertebeden Bir Matrisin Karakteristik Polinomu
S_n	Permutasyonlar Kümesi

$\text{Span } S$	S 'deki Vektörlerin Tüm Sonlu Lineer Kombinasyonlarının Kümesi
V	G Grafının Nokta Kümesi
v_i	G Grafının i . Noktası
$v_i v_j$	v_i Noktasından v_j Noktasına Giden Kenar
$w(i, j)$	$v_i v_j$ Kenarına Ait Ağırlık
w_i^+	Bir Ağırlıklı Digrafın v_i Noktasının Ağırlıklı Dış Derecesi
w_i^{k+}	Bir Ağırlıklı Digrafın v_i Noktasının Ağırlıklı k -Dış Derecesi
$\varepsilon(A)$	A Matrisinin Enerjisi
$\varepsilon(G)$	G Grafının Enerjisi
$\rho(A)$	A Matrisinin Spektral Yarıçapı
$\rho(G)$	G Grafının Spektral Yarıçapı
σ	Permutasyon
$\sigma(A)$	A Matrisinin Spektrumu

1. GİRİŞ

Matris kavramı matematikte diferensiyel denklemler, lineer cebir, graf teori gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, mühendislik ve istatistik gibi alanlarda bazı problemler, matris formunda yazılarak determinant, matris tersi ve özdeğer gibi matris kavramları kullanılarak daha kolay incelenebilmektedir. Matrislerde merteye büyüdükçe matrisin özelliklerini incelemek hayli zor olabilmektedir. Fakat matrisleri özel seçmek hem kolaylık sağlayacak hem de önemli sonuçlar elde edilmesine imkân tanıyacaktır. Bu yüzden literatürde Circulant, Hankel, Toeplitz, Pascal matrisleri gibi birçok özel matris tanımlanmış ve incelenmiştir. Hatta bu özel matrisler farklı şekillerde genelleştirilmiştir. Özel matrislerden biri de literatürde Frank matris olarak bilinen

$$F_n = \begin{bmatrix} n & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

matrisidir. Literatürde Frank matrisin determinantı, tersi, karakteristik polinomu gibi bazı özellikleri karakterize edilmiş ve özdeğerleri hakkında bazı bulgular verilmiştir.

Bizim bu çalışmadaki amacımız, (1.1) ile verilen Frank matrisi genelleştirerek özelliklerini incelemektir. Bu kapsamda esas olarak; genelleştirilmiş Frank matrisler kümesi nasıl bir cebirsel yapı oluşturur? Genelleştirilmiş Frank matrisin determinantını, tersini, karakteristik polinomunu ve özdeğerlerini hesaplayabilir miyiz? Eğer hesaplayabilirsek, bulduğumuz sonuçlar ile klasik Frank matris için literatürde bilinen bulgular arasında nasıl ilişkiler vardır? Sturm teoremi genelleştirilmiş Frank matrislerde kullanabilir miyiz? Komşuluk matrisi klasik Frank matris olan bir graf tanımlayabilir miyiz? gibi sorulara cevaplar arayacağız.

1.1 Literatür Özeti

Frank (1958), Frank matrisi tanımlayarak literatüre kazandırmıştır [1].

Hake (1985), Frank matrisin determinantını, LU ayrışımını karakterize etmiştir. Bunun yanında F_n matrisinin karakteristik polinomu için bir indirgeme bağıntısı elde etmiş ve karakteristik polinomların katsayıları arasındaki ilişkileri incelemiştir [2].

Varah (1986), Frank matrisleri genelleştirmiş ve elde ettiği bu matrisin özdeğer ve özvektörleri üzerine çalışmıştır [3].

Mattila ve Haukkanen (2016), $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ olmak üzere elemanlarını $\min(z_i, z_j)$ ve $\max(z_i, z_j)$ olarak elde ettikleri Max ve Min matrislerin özelliklerini incelemiştir [4].

Kılıç ve Arıkan (2019), Max ve Min matrisler üzerine çalışmış ve yeni genellemelere ulaşmışlardır [5].

Sturm (1829), katlı köklere sahip olmayan polinomlar için belli bir aralıktaki köklerin sayısını veren Sturm Teoremini ortaya koymuştur ve bir aralıktaki köklerin sayısı problemini, $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ Sturm dizinin işaret değişim sayısını kullanarak çözmüştür [6-8].

Greenberg (1989), $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = a_i(\lambda)$ ve $b_j = b_j(\lambda)$, (a, b) aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere, elemanları

$$\begin{cases} b_{i-1} + b_i - a_i, & i = j \text{ ise} \\ b_{\min(i,j)}, & |i - j| = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.2)$$

şeklinde $A(\lambda)$ simetrik üçgensel matrisini tanımlamış ve $1 \leq i \leq n-1$ için $S_i, A(\lambda)$ matrisinin i . esas minörü ve $S_0 = 1$ olmak üzere

$$S_{i+1} = (b_i + b_{i+1} - a_{i+1})S_i - b_i^2 S_{i-1} \quad (1.3)$$

indirgeme bağıntısını kullanarak $A(\lambda)$ matrisine Sturm Teoremini uygulamıştır [9].

Bapat vd. (2012), komşuluk matrisi kompleks birimler içeren bir Hermityen matris olan ağırlıklı digraf kavramını tanıtmışlardır ve de basit ve karışık (mixed) graflar ile ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır [10].

Lou ve Hong (2015), komşuluk matrisinin Hermityen matris olması gerekmeyen ağırlıklı digraflarla çalışmışlardır [11].

Dong ve Lin (2016), ilmek içermeyen kompleks ağırlıklı grafları çalışmışlar ve yönlendirilmiş bir döngünün (cycle) ağırlığını, tüm kenarların ağırlıklarının çarpımı olarak tanımlamışlardır. Ayrıca buna karşılık gelen yönlendirilmiş graf yapısı ile Laplasyan matris arasındaki ilişkiler ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir [12].

Zhang ve Li (2002), Xu ve Xu (2009) ile Güngör ve Das (2010), basit digrafların spektral yarıçapları hakkında bazı sınırlar belirlemişlerdir [13-15].

Butler ve Siegel (2013), n . mertebeden negatif olmayan A komşuluk matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğeri olan $\rho(A)$ spektral yarıçapı için sınırlar geliştirmişlerdir. Bu sınırlar negatif olmayan matrislerin büyük bir sınıfına uygulanabilir ve literatürde bulunan sınırlardan daha iyidir. Ayrıca bu sınırları yalnız basit digraflarla sınırlı kalmadan, dış-derece regülerlik ile ilişkili eşitlik koşulları ile birlikte sunmuşlardır [16].

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

Bu bölümde bazı temel kavramlar, Frank matris ve Sturm dizisi tanıtılacaktır.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 V boş olmayan bir küme ve $(F, +, \cdot)$ bir cisim olsun. Her $u, v \in V$ için $(u, v) \rightarrow u \oplus v$ şeklinde gösterilen ve adına vektör toplamı denen $V \times V \rightarrow V$ fonksiyonu ile her $a \in F$ ve her $v \in V$ için $(a, v) \rightarrow a \odot v$ şeklinde gösterilen ve skalerle çarpım veya dış çarpım olarak adlandırılan $F \times V \rightarrow V$ fonksiyonu,

- 1) Her $u, v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$,
- 2) Her $u, v, w \in V$ için $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$,
- 3) Her $u \in V$ için $u \oplus 0_V = 0_V \oplus u = u$ olacak şekilde bir $0_V \in V$ vardır,
- 4) Her $u \in V$ için $u \oplus u' = u' \oplus u = 0_V \in V$ olacak şekilde bir $u' \in V$ vardır,
- 5) Her $a \in F$ ve her $u, v \in V$ için $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$,
- 6) Her $a, b \in F$ ve her $u \in V$ için $(a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u)$,
- 7) Her $a, b \in F$ ve her $u \in V$ için $a \odot (b \odot u) = (a \cdot b) \odot u$,
- 8) 1_F , F cisminin birimi olmak üzere, her $u \in V$ için $1_F \odot u = u$

özelliklerine sahip olsunlar. Bu durumda $(V, \oplus, \odot)$ üçlüsüne veya kısaca V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [17].

Tanım 2.1.2 V bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subset V$ olsun. Eğer W kümesi, V 'deki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı ise W kümesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayı denir [18].

Teorem 2.1.3 V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $U \neq \emptyset$, V 'nin bir alt kümesi olsun. Buna göre U kümesinin V vektör uzayının bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şart

- i. Her $u_1, u_2 \in U$ için $u_1 + u_2 \in U$,
- ii. Her $\alpha \in F$ ve $u \in U$ için $\alpha u \in U$

olmasıdır [19].

Sonuç 2.1.4 V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $U \neq \emptyset$, V 'nin bir alt kümesi olsun. U kümesinin V vektör uzayının bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\forall c \in F, \forall u, v \in U \text{ için } u + cv \in U \quad (2.1)$$

önermesinin doğru olmasıdır [20].

Tanım 2.1.5 S, F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. S kümesindeki vektörlerin tüm sonlu lineer kombinasyonlarının kümesine S kümesinin gerdiği küme denir ve $Span S$ ile gösterilir [18]. Yani,

$$Span S = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_t v_t : c_i \in F, v_i \in S\} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır [18].

(2.2) ile verilen $Span S$ kümesi F üzerinde bir vektör uzayı olup, eğer $Span S = V$ ise bu durumda V vektör uzayındaki her vektör S kümesindeki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceğinden S kümesine V vektör uzayını gerer denir [18].

Tanım 2.1.6 S, F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $c_i \in F, v_i \in S$ olmak üzere $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$ eşitliği yalnızca $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ değerleri için sağlanıyorsa $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir [18].

Tanım 2.1.7 V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesinin elemanları lineer bağımsız ve V vektör uzayını geriyor ise bu durumda S kümesine V vektör uzayının bir tabanı veya bazı denir. Bazdaki vektör sayısına ise vektör uzayının boyutu denir. V vektör uzayının bir bazı n vektörden oluşan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi ise V uzayının boyutu n olup ve $\dim V = n$ şeklinde gösterilir [18].

Tanım 2.1.8 A , bir n -kare matris olsun. A matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamına A matrisinin izi denir ve $\text{iz}A$ ile gösterilir [21]. Yani, A matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad (2.3)$$

toplamına A matrisinin izi denir [21].

Tanım 2.1.9 $A = [a_{ij}]$, F cismi üzerinde bir n -kare matris olsun. $\sigma \in S_n$ bir permütasyon ve

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} -1, & \sigma \text{ tek ise} \\ +1, & \sigma \text{ çift ise,} \end{cases} \quad (2.4)$$

olmak üzere, $\det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilen

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (2.5)$$

ifadesine A matrisinin determinanı denir [17].

Tanım 2.1.10 $A = [a_{ij}]$, bir n -kare matris olsun. A matrisinde a_{ij} elemanının bulunduğu i . satır ve j . sütunun silinmesi ile elde edilen M_{ij} alt matrisinin determinantına a_{ij} elemanına karşılık gelen minör ve $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ determinantına da a_{ij} elemanının kofaktörü veya işaretli minörü denir [17].

Teorem 2.1.11 $A = [a_{ij}]$, bir n -kare matris olsun. A matrisinin determinanı işaretli minörlere bağılı olarak

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i. \text{ satır açılımı}) \quad (2.6)$$

veya

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j. \text{ sütun açılımı}) \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır [17].

Teorem 2.1.12 F cismi üzerinde tanımlı n -kare matrislerin kümesi $M_n(F)$ olmak üzere $A, B \in M_n(F)$ için

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (2.8)$$

eşitliği geçerlidir [21].

Tanım 2.1.13 $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı n -kare matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için

$$Ax = \lambda x \quad (2.9)$$

eşitliğini sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, x vektörüne de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir [21].

Tanım 2.1.14 $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine A matrisinin spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir [21]. A matrisinin spektral yarıçapı ise

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlı $\rho(A)$ reel sayıdır [21].

Tanım 2.1.15 A , bir n -kare matris ve I da aynı mertebeden birim matris olmak üzere $P_n(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir. A , n -kare matrisinin karakteristik polinomun açık ifadesi

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.11)$$

şeklindedir [22].

Bir A , n -kare matrisinin karakteristik polinomunun köklerinin A matrisinin özdeğerleri olduğu bilinen bir gerçektir.

Teorem 2.1.16 $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere, A matrisinin özdeğerleri, izi ve determinantı arasında

$$\text{iz}A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.12)$$

ve

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.13)$$

bağıntıları geçerlidir [21].

Tanım 2.1.17 $A = [a_{ij}]$, bir n -kare matris olsun. A matrisinde, a_{ij} elemanının yerine A_{ji} işaretli minörü yazılarak elde edilen matrisin transpozuna, A matrisinin adjoint (ek) matrisi denir ve $\text{Adj}(A)$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.1.18 I , n . mertebeden birim matris olmak üzere $A \in M_n(F)$ olsun. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ olacak şekilde bir A^{-1} matrisi varsa, A matrisine tersinir matris, A^{-1} matrisine de A matrisinin tersi denir [21].

Bir A matrisin tersini bulmanın çeşitli yolları mevcuttur. Biz burada, bu çalışmamızda kullandığımız adjoint matris metodu ile bloklara ayırma metodunu vereceğiz.

Teorem 2.1.19 A , bir n -kare matris ve $\det(A) \neq 0$ ise bu durumda A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A) \quad (2.14)$$

biçimindedir [22].

Teorem 2.1.20 A , D , X ve V kare matrisler olmak üzere,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

bloklara ayrılmış (parçalı) matrisi tersinir olsun ve tersi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

parçalı matrisi olsun. Eğer A matrisi tersinir ise bu durumda

$$X = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}, \quad (2.17)$$

$$Y = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}, \quad (2.18)$$

$$U = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}, \quad (2.19)$$

$$V = (D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (2.20)$$

eşitlikleri geçerlidir [18].

Tanım 2.1.21 A , n -kare matrisinin bir L alt üçgen matrisi ile bir U üst üçgen matrisinin çarpımı olarak $A = LU$ biçiminde yazılmasına bu A matrisinin LU ayrışımı veya üçgen ayrışımı denir [20].

Tanım 2.1.22 $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} \neq 0$ olmak üzere n . mertebeden bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin Hadamard tersi

$$A^{(-1)} = \left[\frac{1}{a_{ij}} \right] \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.1.23 (a_n) bir reel sayı dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine artan dizi denir, $a_n \geq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine azalan dizi denir [24]. $a_n < a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine kesin artan, $a_n > a_{n+1}$ ise de kesin azalan dizi denir [25].

Tanım 2.1.24 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in A$ olsun. Verilen her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $|x - p| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ olmak üzere bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonuna p noktasında süreklidir denir. f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise bu durumda f fonksiyonuna A kümesi üzerinde süreklidir denir [24].

Lemma 2.1.25 $q = (q_i)$ pozitif reel sayıların bir dizisi, $a = (a_i)$ ve $b = (b_i)$ de $i = 1, 2, \dots, m$ için benzer monotonluğa sahip, negatif olmayan reel sayı dizileri olsunlar. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^m q_i \sum_{i=1}^m q_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^m q_i a_i \sum_{i=1}^m q_i b_i \quad (2.22)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $a = (a_i)$ ve $b = (b_i)$ zıt monotonluğa sahip diziler ise bu durumda eşitsizlik yön değiştirir [26].

2.2 Frank Matris ve Özellikleri

Frank matris, 1958 yılında Werner L. Frank tarafından literatüre kazandırılmıştır. Frank matrislerin determinantı, tersi, LU ayrışımı, karakteristik polinomu ve özdeğerleri ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu kısımda Frank matrisi tanıtarak literatürde var olan bazı özelliklerini ispatsız olarak vereceğiz.

Frank (1958),

$$F_n = \begin{bmatrix} n & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

matrisini tanımlamış [1] ve ona atfen bu matris Frank matris olarak adlandırılmıştır [2,3].

Ayrıca, $F_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisinin elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} n+1-\max(i, j) , & i > j-2 \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.24)$$

biçiminde karakterize edilir.

Buradan itibaren F_n matrisi (2.23) ile verilen matrisi temsil etmektedir.

Teorem 2.2.1 $n > 0$ için Frank matrisin determinanı

$$\det(F_n) = 1 \quad (2.25)$$

dir [2].

Teorem 2.2.2 $B_n = [\beta_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisi F_n matrisinin tersi olmak üzere

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1 \\ n + 2 - i, & i = j \neq 1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} n - i - k + 1, & i < j \\ -1, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

şeklinde karakterize edilir [2].

Teorem 2.2.3 $L = [\lambda_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisleri için

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \frac{n+1-i}{n+1-j}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.27)$$

ve

$$\rho_{ij} = \begin{cases} n, & i = j = 1 \\ \frac{n+1-i}{n+2-i}, & i = j \neq 1 \\ n - i, & i = j - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.28)$$

olmak üzere F_n matrisi,

$$F_n = LU \quad (2.29)$$

şeklinde yazılır [2].

Teorem 2.2.4 F_n matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)} \text{ için } P_1(\lambda) = 1 - \lambda \text{ ve } P_2(\lambda) = 1 - 3\lambda + \lambda^2$$

olmak üzere

$$P_n(\lambda) = (1 - \lambda)P_{n-1}(\lambda) - (n-1)\lambda P_{n-2}(\lambda) \quad (2.30)$$

indirgeme bağıntısı ile karakteristik polinomun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-1$ için

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_i^{(n-1)} - \gamma_{i-1}^{(n-1)} - (n-1)\gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (2.31)$$

bağıntısı mevcuttur [2].

Lemma 2.2.5 F_n matrisinin özdeğerleri birbirlerinin çarpımsal tersi şeklindedir [2].

Lemma 2.2.6 n tek doğal sayı olduğunda F_n matrisinin özdeğerlerinden bir tanesi 1'dir [2].

Lemma 2.2.7 F_n matrisinin özdeğerleri λ_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere,

$$\frac{2}{n(n+1)} < \lambda_i < \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.32)$$

eşitsizliği geçerlidir [2].

2.3 Sturm Dizisi

Reel katsayılı $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinomunun köklerinin bulunması problemi cebirin önemli bir problemidir. Ancak $n \geq 5$ olduğunda bu polinomun kökleri için kesin bir formül bulunmamaktadır. Bununla birlikte, ayrıntılı bilgileri [27] ile verdiğimiz kaynakta bulunan Cauchy sınırları, Descartes işaret kuralı ve Budan Fourier Teoremi bir aralıktaki köklerin sayısı için üst sınırlar vermektedirler. 1829 yılında Sturm'un çalışmalarıyla ortaya konan Sturm Teoremi ise katlı köklere sahip olmayan polinomlar için belli bir aralıktaki köklerin sayısını vermektedir [6-8]. Sturm, bir aralıktaki köklerin sayısı problemini $p(x)$ polinomundan elde ettiği

$p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ dizisinin işaret değişim sayısını kullanarak çözmüştür. Sturm, $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ dizisini $p(x)$ ve $p'(x)$ türevine sözde Öklid Algoritmasını uygulayarak

$$p_0(x) = p(x), \quad (2.33)$$

$$p_1(x) = p'(x), \quad (2.34)$$

$$p_2(x) = -\text{kalan}(p_0(x) / p_1(x)) = p_1(x)q_0(x) - p_0(x), \quad (2.35)$$

$$p_3(x) = -\text{kalan}(p_1(x) / p_2(x)) = p_2(x)q_1(x) - p_1(x), \quad (2.36)$$

$\vdots$

$$p_{n+1}(x) = -\text{kalan}(p_{n-1}(x) / p_n(x)) = 0 \quad (2.37)$$

şeklinde elde etmiştir. Burada elde edilen $p_n(x)$ polinomu sıfırdan farklı bir sabittir. Bu şekilde elde edilen $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ dizisine $p(x)$ polinomuna ilişkin Sturm dizisi denir [27-29]. Bu dizi,

- 1) $p_n(x)$ polinomunun kökü yoktur,
- 2) Dizinin herhangi ardışık iki teriminin ortak kökü yoktur,
- 3) Eğer $p_n(x) = 0$ ise $p_{n-1}(x)p_{n+1}(x) < 0$,
- 4) $p_0(x)$ ve $p_1(x)$ polinomları, $p_0(x)$ polinomunun bir kökünün bir yakın komşuluğunda kökten önce zıt işaretlere sahipken kökten sonra aynı işaretlere sahiptir

şartlarını sağlar [27].

Sturm, $p(x)$ polinomunun λ_0 'dan küçük köklerinin sayısının $p_0(\lambda_0), p_1(\lambda_0), \dots, p_n(\lambda_0)$ dizisinin işaret değişim sayısına eşit olduğunu belirtmiştir [27].

Örnek 2.3.1 $p(x) = x^4 - 20x^3 + 137x^2 - 370x + 336$ polinomunun $(1, 4)$ aralığındaki köklerinin sayısını bulalım.

Bunun için $p(x)$ ve $p'(x)$ türevine (2.33)-(2.37) denklemleri ile verilen sözde Öklid Algoritmasını uygularsak

$$p_0(x) = p(x) = x^4 - 20x^3 + 137x^2 - 370x + 336 \quad (2.38)$$

ve

$$p_1(x) = p'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 274x - 370 \quad (2.39)$$

olur. Buradan

$$p(x) = p_1(x) \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \right) + \left(-\frac{13}{2}x^2 + 65x - \frac{253}{2} \right) \quad (2.40)$$

yazılabilir. Böylece

$$p_2(x) = -\text{kalan}(p_0(x) / p_1(x)) = \frac{13}{2}x^2 - 65x + \frac{253}{2} \quad (2.41)$$

elde edilir.

$$p_1(x) = p_2(x) \left(\frac{8}{13}x - \frac{40}{13} \right) + \left(-\frac{50}{13}x + \frac{250}{13} \right) \quad (2.42)$$

olup

$$p_3(x) = -\text{kalan}(p_1(x) / p_2(x)) = \frac{50}{13}x - \frac{250}{13} \quad (2.43)$$

bulunur.

$$p_2(x) = p_3(x) \left(\frac{169}{100}x - \frac{169}{20} \right) - 36 \quad (2.44)$$

olup, buradan

$$p_4(x) = -\text{kalan}(p_2(x)/p_3(x)) = 36 \quad (2.45)$$

yazılır. Son olarak

$$p_3(x) = p_4(x) \left(\frac{25}{234}x - \frac{125}{234} \right) + 0 \quad (2.46)$$

olduğundan

$$p_5(x) = -\text{kalan}(p_3(x)/p_4(x)) = 0 \quad (2.47)$$

bulunur. Bu durumda dizi $p_4(x)$ ile bitmelidir. Şimdi, $p(x) = x^4 - 20x^3 + 137x^2 - 370x + 336$ polinomundan elde edilen $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ Sturm dizisinin $a=1$ ve $b=4$ noktalarındaki işaret değişim sayılarını tespit etmeliyiz:

$p_0(1) = 84$, $p_1(1) = -152$, $p_2(1) = 68$, $p_3(1) = -15.3846$, $p_4(1) = 36$ ve $p_0(4) = 24$, $p_1(4) = 22$, $p_2(4) = -29.5$, $p_3(4) = -3.8462$, $p_4(4) = 36$ olduğundan $a=1$ noktasındaki işaret değişim sayısı 4 ve $b=4$ noktasındaki işaret değişim sayısı 2 'dir. Dolayısıyla $p(x)$ polinomu $(1,4)$ aralığında $4-2=2$ tane köke sahiptir. Gerçekten, $p(x)$ polinomunun kökleri $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ ve $x_4 = 8$ olup, $(1,4)$ aralığındaki kökleri $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ olmak üzere 2 tanedir.

Rastgele verilen bir $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ polinomlar dizisi bazı şartlar altında incelenerek Sturm dizisinin farklı versiyonları elde edilmiştir. Sturm dizisi ve farklı versiyonları için [9, 29-31] kaynaklarını öneririz. Biz burada, hem matrislere uygulanmış olması hem de tezimizde kullanacağımızdan dolayı Leon Greenberg tarafından verilen versiyonu tanıtacağız.

1989 yılında Greenberg [9], $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = a_i(\lambda)$ ve $b_j = b_j(\lambda)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{bmatrix} (b_0 + b_1 - a_1) & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & (b_1 + b_2 - a_2) & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & (b_2 + b_3 - a_3) & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & (b_{n-2} + b_{n-1} - a_{n-1}) & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & (b_{n-1} + b_n - a_n) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

simetrik üçgensel $A(\lambda)$ matrisinin esas minörlerinden oluşan

$$S_0(\lambda) = 1, S_1(\lambda), S_2(\lambda), \dots, S_n(\lambda) \quad (2.49)$$

dizisini elde etmiş ve Sturm teoremi buraya uygulayarak $A(\lambda)$ matrisinin özdeğerlerini incelemiştir. Bunun için aşağıdaki tanım ve teoremleri vermiştir:

Tanım 2.3.2 $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ fonksiyonları (a, b) aralığında ($a = -\infty$, $b = \infty$ da olabilecek şekilde) sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer

- a) $p_0(\lambda)$ polinomunun (a, b) aralığında kökü yoktur,
- b) $1 \leq i \leq n$ için $p_i(\lambda)$ polinomlarının köklerinin kümesi ayrıktır,
- c) $1 \leq i \leq n-1$ için $p_i(\lambda_0) = 0$ ise bu durumda $p_{i-1}(\lambda_0) p_{i+1}(\lambda_0) < 0$ 'dır,
- d) $1 \leq i \leq n$ için $p_i(\lambda_0) = 0$ ise bu durumda yeterince küçük $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $p_{i-1}(\lambda_0)(p_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) - p_i(\lambda_0 - \varepsilon_1)) < 0$ 'dır

şartları sağlanıyorsa $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ dizisi Sturm dizisi özelliklerini sağlar denir [9].

Teorem 2.3.3 $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ dizisi (a, b) aralığı üzerinde Tanım 2.3.2 ile verilen Sturm dizisi özelliklerini sağlasın. $c(\lambda_0); p_0(\lambda_0), p_1(\lambda_0), \dots, p_n(\lambda_0)$ dizisinin ardışık terimleri arasındaki işaret değişim sayısı ve $\alpha < \beta$ sayıları (a, b) aralığında olmak üzere $p_n(\lambda)$ polinomu (α, β) aralığında $c(\beta) - c(\alpha)$ farklı köke sahiptir [9].

Teorem 2.3.4 $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ dizisi bir Sturm dizisi olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ için $p_i(\lambda)$ ve $p_{i-1}(\lambda)$ polinomlarının kökleri iç içe geçer [9].



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez çalışmamız boyunca elde ettiğimiz ana bulguları vereceğiz.

3.1 Genelleştirilmiş Frank Matrisler ve Cebirsel Özellikleri

Burada verdiğimiz bulgularımızdan bir kısmı Mersin vd. (2020) tarafından yapılan çalışmamız ile literatüre kazandırılmıştır [32].

Tanım 3.1.1 Elemanları $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ reel sayı dizisinden seçilerek elde edilen

$$F_{a_n} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

matrisine genelleştirilmiş Frank matris denir [32].

(3.1) ile verilen $F_{a_n} = \left[(f_{a_n})_{ij} \right]_{i,j=1}^n$ genelleştirilmiş Frank matrisinin elemanları

$$(f_{a_n})_{ij} = \begin{cases} a_{n+1-\max(i,j)}, & i > j-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.2)$$

biçiminde karakterize edilir [32].

Eğer (3.1) ile verilen F_{a_n} matrisinde $a_i = i$ seçilirse (2.23) ile verilen klasik Frank matris elde edilir.

Şimdi (3.1) ile verilen F_{a_n} genelleştirilmiş Frank matrisinin cebirsel özellikleri ile ilgili bulgularımızı verelim. Öncelikle belirtelim ki bulgularımızı karakterize ederken bazen a_0 terimine ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla tezimizde a_0 terimi $a_0 = 0$ kabulü altında kullanılmıştır. Bu durum her defasında tekrarlanmayacaktır.

Teorem 3.1.2 V_n , n . mertebeden tüm genelleştirilmiş Frank matrislerin kümesi olmak üzere, V_n bir vektör uzayıdır.

İspat. α, β reel sayıları ve $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ dizileri için

$$F_{a_n} = \left[(f_{a_n})_{ij} \right]_{i,j=1}^n, \quad F_{b_n} = \left[(f_{b_n})_{ij} \right]_{i,j=1}^n \in V_n \text{ olmak üzere, } D = \alpha F_{a_n} + \beta F_{b_n} = \left[d_{ij} \right]_{i,j=1}^n$$

olsun. Bu durumda $d_{ij} = \alpha (f_{a_n})_{ij} + \beta (f_{b_n})_{ij}$ olur. (3.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$d_{ij} = \alpha (f_{a_n})_{ij} + \beta (f_{b_n})_{ij} = \begin{cases} \alpha a_{n+1-\max(i,j)} + \beta b_{n+1-\max(i,j)}, & i > j-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3)$$

eşitliği yazılır. Ayrıca,

$$c_i = \alpha a_i + \beta b_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.4)$$

olmak üzere

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \dots, \alpha a_n + \beta b_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = c \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

olur. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ olmak üzere $F_{c_n} = \left[(f_{c_n})_{ij} \right]_{i,j=1}^n \in V_n$ matrisinin elemanları (3.2)

ve (3.4) eşitliğinden

$$(f_{c_n})_{ij} = \begin{cases} c_{n+1-\max(i,j)}, & i > j-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$= \begin{cases} \alpha a_{n+1-\max(i,j)} + \beta b_{n+1-\max(i,j)}, & i > j-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden

$$F_{c_n} = F_{\alpha a_n + \beta b_n} = \alpha F_{a_n} + \beta F_{b_n} \quad (3.8)$$

yazılır. Buradan $\alpha F_{a_n} + \beta F_{b_n} = F_{c_n} \in V_n$ elde edilir. Yani, V_n , n . mertebeden matrisler uzayının bir alt vektör uzayıdır. Böylece V_n bir vektör uzayıdır.

Sonuç 3.1.3 1_s , s. elemanı 1 diğer elemanları 0 olan sıralı n -li olmak üzere her $F_{a_n} \in V_n$ için,

$$F_{a_n} = \sum_{s=1}^n a_s F_{1_s} \quad (3.9)$$

yazılabilir. Burada $F_{1_1}, F_{1_2}, \dots, F_{1_n}$ matrislerinin kümesi lineer bağımsızdır, dolayısıyla V_n için baz teşkil eder.

Sonuç 3.1.4 V_n genelleştirilmiş Frank matrisler uzayının boyutu n 'dir.

Teorem 3.1.5 F_{a_n} matrisinin determinanı,

$$\det(F_{a_n}) = \prod_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat. P , $\tilde{I}$ ve Λ matrisleri

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ve

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} - a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_n - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$F_{a_n} = \tilde{I} \Lambda P \tilde{I} \quad (3.13)$$

olarak yazılır. (3.13) eşitliği ve determinant özelliklerinden

$$\det(F_{a_n}) = \det(\tilde{I}) \det(\Lambda) \det(P) \det(\tilde{I}) \quad (3.14)$$

yazılır. $\det(\tilde{I}) = \pm 1$ ve $\det(P) = 1$ olduğundan

$$\det(F_{a_n}) = \det(\Lambda) \quad (3.15)$$

$$= a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \quad (3.16)$$

$$= \prod_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \quad (3.17)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6 Teorem 3.1.5'te $a_i = i$ ($i=1, 2, \dots, n$) alınırsa $F_{a_n} = F_n$ olup F_n Frank matrisinin (2.25) ile verilen determinantı elde edilir.

Teorem 3.1.7 $\forall i=1, 2, \dots, n$ için $a_i - a_{i-1} \neq 0$ olmak üzere, F_{a_n} matrisinin tersi vardır

ve F_{a_n} matrisinin tersi $B_{a_n} = [\beta_{ij}]_{i,j=1}^n$ ise

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{a_n - a_{n-1}}, & i = j = 1 \\ \frac{a_{n+2-i}}{(a_{n+2-i} - a_{n+1-i})(a_{n+1-i} - a_{n-i})}, & i = j \neq 1 \\ -\frac{1}{a_{n+2-i} - a_{n+1-i}}, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{a_i} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{a_{n+1-i-k}}{(a_{n+1-i-k} - a_{n-i-k})}, & i < j \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

İspat. $\forall i=1,2,\dots,n$ için $a_i - a_{i-1} \neq 0$ ise Teorem 3.1.5'ten $\det(F_{a_n}) \neq 0$ olduğundan F_{a_n} matrisinin tersi vardır. (3.18) eşitliğinin ispatını n üzerinden tümevarım metodu ile yapalım.

$n = 2$ için hipotezin doğruluğu açıktır, öyle ki

$$F_{a_2} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

olmak üzere

$$B_{a_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(a_2 - a_1)} & \frac{-a_1}{(a_2 - a_1)(a_1 - a_0)} \\ \frac{-1}{(a_2 - a_1)} & \frac{a_2}{(a_2 - a_1)(a_1 - a_0)} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

olur. $n-1$ için hipotezin doğruluğu kabul edilirse, $B_{a_{n-1}}$ matrisinin (i, j) . elemanı

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a_{n-1} - a_{n-2}}, & i = j = 1 \\ \frac{a_{n+1-i}}{(a_{n+1-i} - a_{n-i})(a_{n-i} - a_{n-1-i})}, & i = j \neq 1 \\ -\frac{1}{a_{n+1-i} - a_{n-i}}, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{a_{ii}} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{a_{n-i-k}}{(a_{n-i-k} - a_{n-1-i-k})}, & i < j \end{array} \right. \quad (3.21)$$

şeklinde karakterize edilir. Hipotezin n için doğruluğu göstermek üzere F_{a_n} matrisi;

$$A_{11} = [a_n], \quad (3.22)$$

$$A_{12} = [a_{n-1} \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0], \quad (3.23)$$

$$A_{21} = [a_{n-1} \ a_{n-2} \ a_{n-3} \ \cdots \ a_2 \ a_1]^T, \quad (3.24)$$

ve

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-3} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

olmak üzere

$$F_{a_n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

şeklinde ve B_{a_n} matrisi de

$$B_{a_n} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

şeklinde bloklara ayrılmış olsun. Bu durumda Teorem 2.1.20'ye göre,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}, \quad (3.28)$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}, \quad (3.29)$$

$$B_{21} = -(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}, \quad (3.30)$$

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \quad (3.31)$$

biçimindedir. Bu eşitliklerde verilen matris çarpımları yapıldığında

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} = \frac{1}{a_n - a_{n-1}}, \quad (3.32)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \text{ olmak üzere,}$$

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \quad (3.33)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{x_1 a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} & \frac{x_1 a_{n-1} a_{n-2}}{(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-2} - a_{n-3})} & \cdots & (-1)^{n-1} x_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n - a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

ve $x_s = \frac{a_{n+2-s}}{(a_{n+2-s} - a_{n+1-s})(a_{n+1-s} - a_{n-s})}$ olmak üzere

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \quad (3.36)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 & -\frac{x_2 a_{n-2}}{a_{n-2} - a_{n-3}} & \frac{x_2 a_{n-2} a_{n-3}}{(a_{n-2} - a_{n-3})(a_{n-3} - a_{n-4})} & \cdots & (-1)^{n-2} x_2 \prod_{i=1}^{n-2} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ -\frac{1}{a_{n-1} - a_{n-2}} & x_3 & -\frac{x_3 a_{n-3}}{a_{n-3} - a_{n-4}} & \cdots & (-1)^{n-3} x_3 \prod_{i=1}^{n-3} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ 0 & -\frac{1}{a_{n-2} - a_{n-3}} & x_4 & \cdots & (-1)^{n-4} x_4 \prod_{i=1}^{n-4} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

matrisleri elde edilir. Böylece

$$B_{a_n} = \begin{bmatrix} x_1 & -\frac{x_1 a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} & \frac{x_1 a_{n-1} a_{n-2}}{(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-2} - a_{n-3})} & \cdots & (-1)^{n-1} x_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ -\frac{1}{a_n - a_{n-1}} & x_2 & -\frac{x_2 a_{n-2}}{a_{n-2} - a_{n-3}} & \cdots & (-1)^{n-2} x_2 \prod_{i=1}^{n-2} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ 0 & -\frac{1}{a_{n-1} - a_{n-2}} & x_3 & \cdots & (-1)^{n-3} x_3 \prod_{i=1}^{n-3} \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.8 Teorem 3.1.7’de $a_i = i$ ($i=1,2,\dots,n$) alınırsa $F_{a_n} = F_n$ olup F_n Frank matrisinin (2.26) ile verilen tersi elde edilir.

Teorem 3.1.9 F_{a_n} matrisinin adjoint (ek) matrisi $Adj(F_{a_n}) = [\zeta_{ij}]_{i,j=1}^n$ ise

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i-1}), & i = j = 1 \\ \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq n+2-i \\ s \neq n+1-i}}^n (a_s - a_{s-1})(a_{n+2-i}), & i = j \neq 1 \\ \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq n+2-i}}^n -(a_s - a_{s-1}), & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \zeta_{a_{ii}} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{a_{n+1-i-k}}{(a_{n+1-i-k} - a_{n-i-k})}, & i < j \end{cases} \quad (3.39)$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 2.1.19'dan

$$Adj(F_{a_n}) = F_{a_n}^{-1} \det(F_{a_n}) \quad (3.40)$$

yazılır. Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.7 ile istenilen elde edilir.

Teorem 3.1.10 $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisleri F_{a_n} matrisinin LU ayrışımını oluşturan matrisler olsunlar. Bu durumda

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{a_{n+1-i}}{a_{n+1-j}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.41)$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} a_n, & i = j = 1 \\ \frac{(a_{n+1-i})(a_{n+2-i} - a_{n+1-i})}{a_{n+2-i}}, & i = j \neq 1 \\ a_{n-i}, & i = j - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.42)$$

olarak elde edilir.

İspat. $F_{a_n} = LU$ matris çarpımı istenilen sonucu verir.

Sonuç 3.1.11 Teorem 3.1.10'da $a_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) alınırsa $F_{a_n} = F_n$ olup F_n Frank matrisinin (2.27) ve (2.28) ile verilen LU ayrışımı elde edilir.

Teorem 3.1.12 F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomu $P_1(\lambda) = \lambda - a_1$ ve $P_2(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1a_2 - a_1^2$ olmak üzere, $n > 2$ için

$$P_n(\lambda) = (\lambda - a_n + a_{n-1})P_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}\lambda P_{n-2}(\lambda) \quad (3.43)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_n & -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-1} & \lambda - a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_2 & -a_2 & -a_2 & \cdots & \lambda - a_2 & -a_1 \\ -a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda - a_n) \begin{vmatrix} \lambda - a_{n-1} & -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & \lambda - a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-3} & -a_{n-3} & \lambda - a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_2 & -a_2 & -a_2 & \cdots & \lambda - a_2 & -a_1 \\ -a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (a_{n-1}) \begin{vmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & \lambda - a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-3} & -a_{n-3} & \lambda - a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_2 & -a_2 & -a_2 & \cdots & \lambda - a_2 & -a_1 \\ -a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

şeklinde yazılabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk determinant $P_{n-1}(\lambda)$ polinomuna karşılık gelmektedir. İkinci determinanta ise $q(\lambda)$ denilirse,

$$q(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{n-1} & -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & \lambda - a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 0 \\ -a_{n-3} & -a_{n-3} & \lambda - a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_2 & -a_2 & \cdots & -a_1 \\ -a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & \lambda - a_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{n-3} & \lambda - a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_2 & -a_2 & \cdots & \lambda - a_2 & -a_1 \\ 0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

$$= P_{n-1}(\lambda) - \lambda P_{n-2}(\lambda) \tag{3.47}$$

olur. Böylece

$$P_n(\lambda) = (\lambda - a_n) P_{n-1}(\lambda) + a_{n-1} (P_{n-1}(\lambda) - \lambda P_{n-2}(\lambda)) \tag{3.48}$$

$$= (\lambda - a_n + a_{n-1}) P_{n-1}(\lambda) - a_{n-1} \lambda P_{n-2}(\lambda) \tag{3.49}$$

elde edilir. Ayrıca, $P_1(\lambda) = \lambda - a_1$ ve $P_2(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 - a_1^2$ olduğu açıktır.

Sonuç 3.1.13 Teorem 3.1.12’de $a_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) alınırsa $F_{a_n} = F_n$ olup F_n Frank matrisinin karakteristik polinomunun (2.30) ile verilen indirgeme bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.1.14 F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)} \quad (3.50)$$

olmak üzere, karakteristik polinomun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\gamma_0^{(n)} = (a_{n-1} - a_n) \gamma_0^{(n-1)}, \quad (3.51)$$

$$\gamma_{n-1}^{(n)} = \gamma_{n-2}^{(n-1)} - a_n, \quad (3.52)$$

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} + (a_{n-1} - a_n) \gamma_i^{(n-1)} - a_{n-1} \gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.53)$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat. Teorem 3.1.12 ile verilen

$$P_n(\lambda) = (\lambda - a_n + a_{n-1}) P_{n-1}(\lambda) - a_{n-1} \lambda P_{n-2}(\lambda) \quad (3.54)$$

denkleminde

$$P_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} + \gamma_{n-2}^{(n-1)} \lambda^{n-2} + \cdots + \gamma_1^{(n-1)} \lambda + \gamma_0^{(n-1)} \quad (3.55)$$

ve

$$P_{n-2}(\lambda) = \lambda^{n-2} + \gamma_{n-3}^{(n-2)} \lambda^{n-3} + \cdots + \gamma_1^{(n-2)} \lambda + \gamma_0^{(n-2)} \quad (3.56)$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) = & (\lambda - a_n + a_{n-1}) \left(\lambda^{n-1} + \gamma_{n-2}^{(n-1)} \lambda^{n-2} + \cdots + \gamma_1^{(n-1)} \lambda + \gamma_0^{(n-1)} \right) \\ & - a_{n-1} \lambda \left(\lambda^{n-2} + \gamma_{n-3}^{(n-2)} \lambda^{n-3} + \cdots + \gamma_1^{(n-2)} \lambda + \gamma_0^{(n-2)} \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) = & \lambda^n + \left(\gamma_{n-2}^{(n-1)} - a_n \right) \lambda^{n-1} + \left(\gamma_{n-3}^{(n-1)} - a_n \gamma_{n-2}^{(n-1)} + a_{n-1} \gamma_{n-2}^{(n-1)} - a_{n-1} \gamma_{n-3}^{(n-2)} \right) \lambda^{n-2} + \cdots \\ & + \left(\gamma_0^{(n-1)} - a_n \gamma_1^{(n-1)} + a_{n-1} \gamma_1^{(n-1)} - a_{n-1} \gamma_0^{(n-2)} \right) \lambda - a_n \gamma_0^{(n-1)} + a_{n-1} \gamma_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir. (3.58) olarak elde edilen polinom ile $P_n(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1^{(n)}\lambda + \gamma_0^{(n)}$ polinomunun benzer terimlerinin katsayılarının karşılıklı eşitlenmesi ile

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} + (a_{n-1} - a_n)\gamma_i^{(n-1)} - a_{n-1}\gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.59)$$

ve

$$\gamma_0^{(n)} = -a_n\gamma_0^{(n-1)} + a_{n-1}\gamma_0^{(n-1)} \quad (3.60)$$

bulunur.

Sonuç 3.1.15 Teorem 3.1.14'te $a_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) alınırsa $F_{a_n} = F_n$ olup F_n Frank matrisinin karakteristik polinomunun katsayıları için (2.31) ile verilen ilişki elde edilir.

3.2 Sturm Teoreminin Genelleştirilmiş Frank Matrislere Uygulanması

Bu kısımda F_{a_n} genelleştirilmiş Frank matrisinin özdeğerlerini inceleyeceğiz. Bunun için $n \geq 1$ olmak üzere F_{a_n} genelleştirilmiş Frank matrisinin karakteristik polinomlarının bazı şartlar altında Sturm dizisi oluşturduğunu gösterip, özdeğerlerinin pozitif olduğunu elde edeceğiz. Öncelikle belirtelim ki F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomunu $\det(\lambda I - F_{a_n})$ ifadesinden elde edebileceğimiz gibi $\det(F_{a_n} - \lambda I)$ ifadesi ile de elde edebiliriz. Dolayısıyla çalışmamızın bu kısmında F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomu olarak $\det(F_{a_n} - \lambda I)$ ifadesi kullanılacaktır. Teorem 3.1.12 ile F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomunu $\det(\lambda I - F_{a_n})$ ifadesinden elde etmiştik. Oradaki yöntem veya determinantın özellikleri kullanılarak F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomu $\det(F_{a_n} - \lambda I)$ ifadesinden de kolaylıkla elde edilebilir. Bu yüzden aşağıdaki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.2.1 $P_0(\lambda)=1$ ve $P_1(\lambda)=a_1-\lambda$ olmak üzere $n \geq 2$ için F_{a_n} genelleştirilmiş Frank matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = \det(F_{a_n} - \lambda I) = (a_n - a_{n-1} - \lambda)P_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}\lambda P_{n-2}(\lambda) \quad (3.61)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

Şimdi, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere F_{a_i} matrisinin karakteristik polinomlarından elde edilen $P_0(\lambda)=1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_n(\lambda)$ dizisinin özelliklerini inceleyebiliriz.

Teorem 3.2.2 (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olsun. Bu durumda,

- a) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\lambda = 0$, $P_i(\lambda)$ polinomunun bir kökü değildir. Yani, $1 \leq i \leq n$ için F_{a_i} matrisinin bir özdeğeri 0 (sıfır) değildir,
- b) $1 \leq i \leq n-1$ için $P_i(\lambda)$ ve $P_{i+1}(\lambda)$ ardışık terimleri ortak bir köke sahip değildir.

İspat.

- a) (3.61) indirgeme bağıntısı ve $P_1(0) = a_1$ eşitliğinden

$$P_i(0) = (a_i - a_{i-1})P_{i-1}(0) = (a_i - a_{i-1})(a_{i-1} - a_{i-2}) \cdots (a_2 - a_1)a_1 \quad (3.62)$$

elde edilir.

(a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $P_i(0) \neq 0$ 'dır.

- b) $1 \leq i \leq n-1$ için $P_{i+1}(\lambda_0) = P_i(\lambda_0) = 0$ ise (3.61) indirgeme bağıntısından

$$P_{i-1}(\lambda_0) = P_{i-2}(\lambda_0) = \cdots = P_0(\lambda_0) = 0 \quad (3.63)$$

elde edilir ki bu $P_0(\lambda)=1$ olması ile çelişir. Böylece $1 \leq i \leq n-1$ için $P_i(\lambda)$ ve $P_{i+1}(\lambda)$ ardışık terimleri ortak bir köke sahip değildir.

Teorem 3.2.3 Kabul edelim ki

- 1) (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan,
- 2) $I_1 \subset (0, \infty)$, $1 \leq i \leq n$ için $P_{i-1}(\lambda)$ polinomunun köklerini içermeyen bir aralık,
- 3) $I_2 \subset (0, \infty)$, $1 \leq i \leq n$ için $P_i(\lambda)$ polinomunun köklerini içermeyen bir aralık,
- 4) $I_3 = (t, \infty)$, $1 \leq i \leq n$ için tüm $P_i(\lambda)$ polinomlarının köklerini içermeyen bir

aralık olsun. Bu durumda

- a) $\frac{P_i(\lambda)}{P_{i-1}(\lambda)}$ ifadesi, I_1 aralığı üzerinde kesin azalan,
- b) $\frac{\lambda P_{i-1}(\lambda)}{P_i(\lambda)}$ ifadesi, I_2 aralığı üzerinde kesin artan,
- c) $\lambda \in I_3$ için $(-1)^{i-2} P_i(\lambda) < (-1)^{i-1} \lambda P_{i-1}(\lambda)$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (a) ve (b) maddelerinin doğruluğunu i üzerinden tümevarım metodu ile eşzamanlı olarak ispatlayalım.

$i=1$ için

$$\frac{P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \frac{a_1 - \lambda}{1} = a_1 - \lambda \quad (3.64)$$

her aralıkta kesin azalandır ve

$$\frac{\lambda P_0(\lambda)}{P_1(\lambda)} = \frac{\lambda}{a_1 - \lambda} = \frac{1}{\frac{a_1}{\lambda} - 1} \quad (3.65)$$

ifadesi $P_1(\lambda)$ polinomunun tek kökü olan a_1 'i içermeyen herhangi bir aralıkta kesin artandır. Yani $i=1$ için (a) ve (b) maddeleri doğrudur. $i \leq k$ için (a) ve (b) doğru olsun. (a) ve (b) maddelerinin $k+1 \leq n$ için de doğru olduğunu gösterelim.

a) $J \subset (0, \infty)$, $P_k(\lambda)$ ve $P_{k-1}(\lambda)$ polinomlarının köklerini içermeyen bir aralık olsun. (3.61) indirgeme bağıntısından

$$\frac{P_{k+1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} = (a_{k+1} - a_k - \lambda) - a_k \lambda \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} \quad (3.66)$$

yazılabilir. $a_{k+1} - a_k - \lambda$ kesin azalan olduğundan ve kabulden ($i \leq k$ için)

$a_k > 0$ için $-a_k \lambda \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)}$ ifadesi J aralığında kesin azalandır. Böylece

$\frac{P_{k+1}(\lambda)}{P_k(\lambda)}$ ifadesi, J aralığında kesin azalandır. $P_{k-1}(y) = 0$ ve $(x, z) \subset (0, \infty)$

aralığı y 'yi içeren fakat $P_k(\lambda)$ polinomunun köklerini içermeyen bir aralık

olsun. Bu durumda $\frac{P_{k+1}(\lambda)}{P_k(\lambda)}$ ifadesi, (x, y) ve (y, z) aralıklarında kesin

azalandır. Süreklilikten dolayı $\frac{P_{k+1}(\lambda)}{P_k(\lambda)}$ ifadesi, (x, z) aralığında kesin

azalandır.

b) $K \subset (0, \infty)$, $P_k(\lambda)$ ve $P_{k+1}(\lambda)$ polinomlarının köklerini içermeyen bir aralık olsun. (3.61) indirgeme bağıntısından

$$\left(\frac{\lambda P_k(\lambda)}{P_{k+1}(\lambda)} \right)^{-1} = \frac{P_{k+1}(\lambda)}{\lambda P_k(\lambda)} = \frac{a_{k+1} - a_k - \lambda}{\lambda} - a_k \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} \quad (3.67)$$

$$= \frac{a_{k+1} - a_k}{\lambda} - 1 - a_k \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} \quad (3.68)$$

yazılabilir. $a_{k+1} > a_k$ ve $\frac{a_{k+1}-a_k}{\lambda}$ kesin azalan olduğundan, kabulden ($i \leq k$

için) ve de süreklilikten dolayı $-a_k \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)}$ ifadesi, $a_k > 0$ için K aralığında

kesin azalandır. Böylece $\left(\frac{\lambda P_k(\lambda)}{P_{k+1}(\lambda)}\right)^{-1}$ ifadesi K aralığında kesin azalandır.

Dolayısıyla $\frac{\lambda P_k(\lambda)}{P_{k+1}(\lambda)}$, K aralığında kesin artandır. Ayrıca K aralığı $P_k(\lambda)$

polinomunun köklerini içerse bile, süreklilikten dolayı $\frac{\lambda P_k(\lambda)}{P_{k+1}(\lambda)}$ ifadesi K

aralığında kesin artandır. Bu da (a) ve (b) maddelerinin ispatlarını tamamlar.

c) $P_i(\lambda)$ polinomunun derecesi i olup $P_i(\lambda)$ polinomu

$$P_i(\lambda) = (-1)^i \lambda^i + \dots \quad (3.69)$$

şeklindedir. Bundan dolayı

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda P_{i-1}(\lambda)}{P_i(\lambda)} = -1 \quad (3.70)$$

ve $P_i(\infty)$ ifadesinin işareti $(-1)^i$ olarak elde edilir. Buradan ve yukarıda

ispatladığımız (b) maddesinden $\frac{\lambda P_{i-1}(\lambda)}{P_i(\lambda)}$ ifadesi, $P_i(\lambda)$ polinomunun

köklerini içermeyen bir aralıkta kesin artan olduğundan $\lambda \in I_3$ için

$\frac{\lambda P_{i-1}(\lambda)}{P_i(\lambda)} < -1$ olur. Böylece

$$\frac{(-1)^{i-1} \lambda P_{i-1}(\lambda)}{(-1)^{i-2} P_i(\lambda)} > 1 \quad (3.71)$$

elde edilir. $P_i(\lambda)$ polinomunun I_3 aralığında kökü olmadığından, I_3 aralığında işareti değişmez. Bundan dolayı $P_i(\lambda)$ polinomunun I_3 aralığındaki işareti $P_i(\infty)$ ifadesinin işareti ile aynıdır. Yani, $\lambda \in I_3$ için

$$(-1)^i P_i(\lambda) > 0 \text{ (veya } (-1)^{i-2} P_i(\lambda) > 0) \quad (3.72)$$

olur. O halde (3.71) denkleminde

$$(-1)^{i-2} P_i(\lambda) < (-1)^{i-1} \lambda P_{i-1}(\lambda) \quad (3.73)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4 $P_n(\lambda)$, F_{a_n} matrisinin karakteristik polinomunu gösterebilir. Bu durumda, $P_0(\lambda) = 1$ olmak üzere $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda), P_n(\lambda)$ polinomları $(0, \infty)$ aralığında bir Sturm dizisi oluşturur.

İspat. Tanım 2.3.2 ile verilen şartların sağlandığını gösterelim.

- a) $P_0(\lambda) = 1$ olduğundan $P_0(\lambda)$ bir köke sahip değildir.
- b) $P_1(\lambda) = a_1 - \lambda$, $\lambda_0 = a_1$ olmak üzere yalnızca bir köke sahiptir. Yani $P_1(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrıktır. $i \leq k$ için $P_k(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrık olsun. (3.61) indirgeme bağıntısından

$$P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda) \left((a_{k+1} - a_k - \lambda) - a_k \lambda \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} \right) \quad (3.74)$$

elde edilir. Teorem 3.2.2 (b)'den $P_k(\lambda)$ ve $P_{k+1}(\lambda)$ polinomları ortak bir köke sahip değildir. Teorem 3.2.3 (a)'dan

$$\frac{P_{k+1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} = (a_{k+1} - a_k - \lambda) - a_k \lambda \frac{P_{k-1}(\lambda)}{P_k(\lambda)} \quad (3.75)$$

ifadesi $P_k(\lambda)$ polinomunun herhangi ardışık iki kökü arasında kesin azalandır. Böylece $P_{k+1}(\lambda)$ polinomu, $P_k(\lambda)$ polinomunun ardışık iki kökü arasında en fazla bir köke sahiptir. Bundan dolayı $P_{k+1}(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrıktır.

c) $1 \leq i \leq n-1$ için (3.61) indirgeme bağıntısından

$$P_{i+1}(\lambda) = (a_{i+1} - a_i - \lambda)P_i(\lambda) - a_i \lambda P_{i-1}(\lambda) \quad (3.76)$$

yazılabilir. $1 \leq i \leq n-1$ için $P_i(\lambda) = 0$ ise, bu durumda $P_{i+1}(\lambda) = -a_i \lambda P_{i-1}(\lambda)$ olur. $a_i > 0$ olduğundan $\lambda \in (0, \infty)$ için $P_{i+1}(\lambda)P_{i-1}(\lambda) < 0$ elde edilir.

d) $1 \leq i \leq n$ için $P_i(\lambda_0) = 0$ olsun ve yeterince küçük $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sayıları için $[\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0 + \varepsilon_2]$ aralığı $P_{i-1}(\lambda)$ polinomunun köklerini içermeyen bir aralık olsun. Bu durumda bu aralıkta $P_{i-1}(\lambda)$ polinomunun işareti değişmez ve Teorem 3.2.3 (a)'dan $\frac{P_i(\lambda)}{P_{i-1}(\lambda)}$ ifadesi kesin azalandır. Böylece $\frac{P_i(\lambda)}{P_{i-1}(\lambda)}$ ifadesinin işareti (ya da eşdeğer olarak $P_{i-1}(\lambda)P_i(\lambda)$ ifadesinin işareti) $[\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0)$ ve $(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_2]$ aralıklarında sırasıyla (+) ve (-)'dir. Yani,

$$P_{i-1}(\lambda_0 - \varepsilon_1)P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1) > 0 > P_{i-1}(\lambda_0 + \varepsilon_2)P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2). \quad (3.77)$$

$P_{i-1}(\lambda)$ polinomunun $[\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0 + \varepsilon_2]$ aralığında işareti değişmediğinden

$$P_{i-1}(\lambda_0)P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1) > 0 > P_{i-1}(\lambda_0)P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) \quad (3.78)$$

yazılır ve buradan

$$P_{i-1}(\lambda_0)(P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) - P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1)) < 0 \quad (3.79)$$

elde edilir. Tanım 2.3.2 ile verilen (a)-(d) şartları sağlandığından $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda), P_n(\lambda)$ polinomları $(0, \infty)$ aralığında bir Sturm dizisi oluşturur.

Teorem 3.2.5 (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olmak üzere $n \geq 1$ için F_{a_n} matrisinin tüm özdeğerleri farklı ve pozitifdir.

İspat. $1 \leq i \leq n$ için $P_i(\lambda)$ polinomlarının tümünün kökleri arasında en küçüğü λ' ve en büyüğü λ'' olsun. 0 , $P_i(\lambda)$ polinomunun bir kökü olmadığından, $[0, \lambda')$ aralığında $P_i(\lambda)$ polinomunun işareti değişmez. Bu durumda $x \in (0, \lambda')$ için $P_i(x)$ polinomunun işareti, $P_i(0)$ polinomunun işaretine eşittir. Böylece $c_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq n$ için $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{i-1}(\lambda), P_i(\lambda)$ dizisinin işaret değişim sayısı olmak üzere $c_i(x) = c_i(0)$ eşitliği geçerlidir. Benzer şekilde $P_i(\lambda)$ polinomunun işareti (λ'', ∞) aralığında değişmediğinden, $y \in (\lambda'', \infty)$ için $c_i(y) = c_i(\infty)$ yazılır. Teorem 2.3.3 ve Teorem 3.2.4'ten $x \in (0, \lambda')$ ve $y \in (\lambda'', \infty)$ için (x, y) aralığında, $P_i(\lambda)$ polinomunun farklı köklerinin sayısı $c_i(y) - c_i(x)$ 'dir. Böylece $c_i(y) - c_i(x) = c_i(\infty) - c_i(0)$ olup, $c_i(\infty)$ ve $c_i(0)$ değerleri hesaplanmalıdır. $P_i(\lambda)$ polinomunun derecesi i ve

$$P_i(\lambda) = (-1)^i \lambda^i + \dots \quad (3.80)$$

olduğundan, $P_i(\infty)$ ifadesinin işareti $(-1)^i$ 'dir. Böylece $c_i(\infty) = i$ olur. (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olduğundan

$$P_i(0) = (a_i - a_{i-1})(a_{i-1} - a_{i-2}) \cdots (a_2 - a_1) a_1 > 0 \quad (3.81)$$

yazılır. Bu durumda $c_i(0) = 0$ elde edilir. Böylece $x \in (0, \lambda')$ ve $y \in (\lambda'', \infty)$ için (x, y) aralığında, $P_i(\lambda)$ polinomunun farklı köklerinin sayısı $c_i(y) - c_i(x) = c_i(\infty) - c_i(0) = i$ olarak bulunur. $P_i(\lambda)$ polinomunun köklerinin sayısı i olduğundan, $P_i(\lambda)$ polinomunun tüm kökleri $x \in (0, \lambda')$ ve $y \in (\lambda'', \infty)$

olmak üzere (x, y) aralığında bulunur. Bundan dolayı $1 \leq i \leq n$ için $P_i(\lambda)$ polinomunun tüm kökleri farklı ve pozitifdir, yani $n \geq 1$ için F_{a_n} matrisinin tüm özdeğerleri farklı ve pozitifdir.

Teorem 3.2.6 (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için F_{a_i} ile $F_{a_{i-1}}$ matrislerinin tüm özdeğerleri iç içe geçer, yani $\lambda_s^{(i)} (s=1, 2, \dots, i)$, F_{a_i} matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\lambda_1^{(i)} > \lambda_1^{(i-1)} > \lambda_2^{(i)} > \lambda_2^{(i-1)} > \dots > \lambda_{i-1}^{(i-1)} > \lambda_i^{(i)} \quad (3.82)$$

yazılır.

İspat. Teorem 3.2.4'e göre $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda), P_n(\lambda)$ bir Sturm dizisi olup, Teorem 2.3.4'e göre F_{a_i} ile $F_{a_{i-1}}$ matrislerinin tüm özdeğerleri iç içe geçer.

Sonuç 3.2.7 (a_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artan olsun. Bu durumda λ_n ve λ_1 , $n \geq 2$ için F_{a_n} matrisinin sırasıyla en küçük ve en büyük özdeğerleri olmak üzere

a) $\lambda_n < a_1,$

b) $a_n < \lambda_1$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat.

a) Bu ispatı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n=2$ için $\lambda_2^{(2)}$ ve $\lambda_1^{(2)}$, F_{a_2} matrisinin sırasıyla en küçük ve en büyük özdeğerleri olsun. Teorem 3.2.6'ya göre

$$\lambda_1^{(2)} > \lambda_1^{(1)} > \lambda_2^{(2)} = \lambda_2 \quad (3.83)$$

olup, burada $\lambda_1^{(1)}$, F_{a_1} 'in tek özdeğeri a_1 'dir. Böylece $\lambda_1^{(1)} = a_1 > \lambda_2^{(2)} = \lambda_2$ olduğundan $n = 2$ için eşitsizlik sağlanır.

$n = k$ için eşitsizlik doğru olsun, yani

$$\lambda_k = \lambda_k^{(k)} < a_1 \quad (3.84)$$

olsun. Teorem 3.2.6'ya göre

$$\lambda_1^{(k+1)} > \lambda_1^{(k)} > \dots > \lambda_k^{(k)} > \lambda_{k+1}^{(k+1)} = \lambda_{k+1} \quad (3.85)$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.84) ve (3.85) eşitsizlikleri birlikte değerlendirilirse

$$a_1 > \lambda_{k+1}^{(k+1)} = \lambda_{k+1} \quad (3.86)$$

elde edilir. Yani iddiamız $n = k + 1$ için de doğrudur.

b) μ_1 , $F_{a_{n-1}}$ matrisinin özdeğerlerinin en büyüğü olsun. Yani, μ_1 , $P_{n-1}(\lambda)$ polinomunun köklerinin en büyüğü olsun. Bu durumda, μ_1 , $0 \leq k \leq n-1$ için $P_k(\lambda)$ polinomunun tüm köklerinden büyüktür ve $P_k(\lambda)$ polinomunun (μ_1, ∞) aralığında işareti $(-1)^k$ 'dır.

Eğer $a_n > \mu_1$ ise bu durumda $0 \leq k \leq n-1$ için $P_k(a_n)$ ifadesinin işareti $(-1)^k$ 'dır. Bunun sonucunda $c_{n-1}(a_n) = n-1$ 'dir. (3.61) indirgeme bağıntısından

$$P_n(a_n) = -a_{n-1}P_{n-1}(a_n) - a_{n-1}a_nP_{n-2}(a_n) \quad (3.87)$$

$$= -a_{n-1}(P_{n-1}(a_n) + a_nP_{n-2}(a_n)) \quad (3.88)$$

olur. Teorem 3.2.3 (c)'den,

$$(-1)^{n-3}P_{n-1}(a_n) < (-1)^{n-2}a_nP_{n-2}(a_n), \quad (3.89)$$

$$(-1)^{n-3}(P_{n-1}(a_n) + a_nP_{n-2}(a_n)) < 0 \quad (3.90)$$

elde edilir ve buradan $P_{n-1}(a_n) + a_n P_{n-2}(a_n)$ ifadesinin işaretinin $(-1)^{n-2}$ olduğu anlaşılr. O halde $P_n(a_n) = -a_{n-1}(P_{n-1}(a_n) + a_n P_{n-2}(a_n))$ ifadesinin işareti $(-1)^{n-1}$ olur. Yani $P_n(a_n)$ ve $P_{n-1}(a_n)$ aynı işarete sahiptirler. Böylece, $c_n(a_n) = c_{n-1}(a_n) = n-1$ olur. Ayrıca $c_n(\infty) = n$ ve $P_n(a_n) \neq 0$ 'dır. Bu durumda Teorem 2.3.3 ve Teorem 3.2.4'den, $P_n(\lambda)$ polinomu (a_n, ∞) aralığında $c_n(\infty) - c_n(a_n) = n - (n-1) = 1$ reel köke sahiptir. Bir başka deyişle $F_{a_n}, (a_n, \infty)$ aralığında 1 özdeğere sahiptir. Böylece $a_n < \lambda_1$ 'dir.

Eğer $a_n \leq \mu_1$ ise bu durumda Teorem 3.2.6'dan $\mu_1 = \lambda_1^{(n-1)} < \lambda_1^{(n)} = \lambda_1$ olup, böylece $a_n < \lambda_1$ 'dir.

Uyarı 3.2.8 Burada verilen sonuçlar, (a_i) reel sayı dizisi negatif elemanlı ve kesin azalan olduğu durumda da geçerlidir. Örneğin, eğer $b_i = -a_i$ ise bu durumda (b_i) reel sayı dizisi pozitif elemanlı ve kesin artandır. $F_{a_n} = -F_{b_n}$ 'dir. F_{b_n} matrisinin tüm özdeğerleri pozitif olduğundan, F_{a_n} matrisinin tüm özdeğerleri negatiftir.

3.3 Genelleştirilmiş Frank Matrislerin Bazı Özel Halleri

Bu alt bölümde genelleştirilmiş Frank matrisin; harmonik sayılar, Hadamard tersi, Fibonacci ve Lucas sayıları açısından özel halleri incelenecektir. Elde edilen matrislere sırasıyla Harmonik-Frank matris, Frank matrisin hemen hemen Hadamard tersi, Fibonacci-Frank matris ve Lucas-Frank matris isimleri verilecektir. Ayrıca, bu tez çalışması esnasında Harmonik-Frank matris ve Frank matrisin hemen hemen Hadamard tersi ile ilgili bazı bulgular kaynaklar listesinde [33] ve [34] ile verilen çalışmalarımızla tam metin bildiri olarak yayımlanmıştır. Fakat bu bulgular 3.1 ve 3.2 bölümlerinde elde edilen bulguların özel hali olduğundan, bu alt bölümde ispatsız olarak 3.1 ve 3.2 bölümlerinde elde edilen bulguların sonucu olarak arka arkaya verilecektir.

3.3.1 Harmonik-Frank matris

Tanım 3.3.1 $n \geq 1$ için $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ şeklinde tanımlı h_n sayısına n . harmonik sayı denir [35].

Tanım 3.3.2 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisinin terimleri $a_i = h_i$ şeklinde harmonik sayılardan seçilirse elde edilen $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisine karşılık gelen

$$F_{h_n} = \begin{bmatrix} h_n & h_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-2} & h_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_2 & h_2 & h_2 & \cdots & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_1 & h_1 & \cdots & h_1 & h_1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

matrisine Harmonik-Frank matris denir [33]. Ayrıca $F_{h_n} = [h_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisinin elemanları

$$h_{ij} = \begin{cases} h_{n+1-\max(i,j)} , & i > j-2 \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.92)$$

şeklinde karakterize edilir [33].

Burada, F_{h_n} matrisinin determinantı, karakteristik polinomu, LU ayrışımı ve özdeğerleri için sınırlar gibi bazı özellikleri, 3.1 ve 3.2 bölümlerinde elde edilen bulguların sonucu olarak verilecektir. Yani,

F_{h_n} matrisinin determinantı

$$\det(F_{h_n}) = \frac{1}{n!}, \quad (3.93)$$

F_{h_n} matrisinin tersinin elemanları

$$\beta_{ij} = \begin{cases} n, & i = j = 1 \\ (n+2-i)(n+1-i)h_{n+2-i}, & i = j \neq 1 \\ -(n+2-i), & i = j+1 \\ 0, & i > j+1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} (n+1-i-k)h_{n+1-i-k}, & i < j, \end{cases} \quad (3.94)$$

F_{h_n} matrisinin adjoint matrisinin elemanları

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}, & i = j = 1 \\ \frac{(n+2-i)(n+1-i)h_{n+2-i}}{n!}, & i = j \neq 1 \\ \frac{-(n+2-i)}{n!}, & i = j+1 \\ 0, & i > j+1 \\ (-1)^{j-i} \zeta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} (n+1-i-k)h_{n+1-i-k}, & i < j, \end{cases} \quad (3.95)$$

F_{h_n} matrisinin LU ayrışımında $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{h_{n+1-i}}{h_{n+1-j}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.96)$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} h_n, & i = j = 1 \\ \frac{(h_{n+1-i})}{(n+2-i)(h_{n+2-i})}, & i = j \neq 1 \\ h_{n-i}, & i = j - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.97)$$

şeklinde karakterize edilirken, F_{h_n} matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)} \quad \text{için} \quad P_1(\lambda) = 1 - \lambda \quad \text{ve}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2} \lambda + \frac{1}{2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$P_n(\lambda) = \left(\frac{1}{n} - \lambda \right) P_{n-1}(\lambda) - h_{n-1} \lambda P_{n-2}(\lambda), \quad (3.98)$$

indirgeme bağıntısı ile karakteristik polinomun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} - \frac{1}{n} \gamma_i^{(n-1)} - h_{n-1} \gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.99)$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.3.3 $n = 5$ için Harmonik-Frank matris

$$F_{h_5} = \begin{bmatrix} \frac{137}{60} & \frac{25}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{25}{12} & \frac{25}{12} & \frac{11}{6} & 0 & 0 \\ \frac{11}{6} & \frac{11}{6} & \frac{11}{6} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

şeklinde olup, determinanı

$$\det(F_{h_5}) = \frac{1}{120}, \quad (3.101)$$

tersi

$$(F_{h_5})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{125}{3} & \frac{1375}{6} & -\frac{1375}{2} & \frac{1375}{2} \\ -5 & \frac{137}{3} & -\frac{1507}{6} & \frac{1507}{2} & -\frac{1507}{2} \\ 0 & -4 & 25 & -75 & 75 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

adjoint matrisi

$$Adj(F_{h_5}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{25}{72} & \frac{275}{144} & -\frac{275}{48} & \frac{275}{48} \\ -\frac{1}{24} & \frac{43}{113} & -\frac{1507}{720} & \frac{1507}{240} & -\frac{1507}{240} \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{5}{24} & -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{40} & \frac{11}{120} & -\frac{11}{120} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{60} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

LU ayrışımındaki L ve U matrisleri

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{125}{137} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{110}{137} & \frac{22}{25} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{90}{137} & \frac{18}{25} & \frac{9}{11} & 1 & 0 \\ \frac{60}{137} & \frac{12}{25} & \frac{6}{11} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} \frac{137}{60} & \frac{25}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{137} & \frac{11}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{50} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca $F_{h \leq 5}$ matrisinin $P_{i \leq 5}(\lambda)$ karakteristik polinomları (3.98) indirgeme bağıntısına göre

$$P_0(\lambda) = 1, \quad (3.105)$$

$$P_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad (3.106)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \quad (3.107)$$

$$P_3(\lambda) = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right) \left(\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\lambda(1 - \lambda) = -\lambda^3 + \frac{13}{3}\lambda^2 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}, \quad (3.108)$$

$$P_4(\lambda) = \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) \left(-\lambda^3 + \frac{13}{3}\lambda^2 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}\right) - \frac{11}{6}\lambda \left(\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) \quad (3.109)$$

$$= \lambda^4 - \frac{77}{12}\lambda^3 + \frac{17}{2}\lambda^2 - \frac{43}{24}\lambda + \frac{1}{24}, \quad (3.110)$$

$$P_5(\lambda) = \left(\frac{1}{5} - \lambda\right) \left(\lambda^4 - \frac{77}{12}\lambda^3 + \frac{17}{2}\lambda^2 - \frac{43}{24}\lambda + \frac{1}{24}\right) - \frac{25}{12}\lambda \left(-\lambda^3 + \frac{13}{3}\lambda^2 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}\right) \quad (3.111)$$

$$= -\lambda^5 + \frac{87}{10}\lambda^4 - \frac{1693}{90}\lambda^3 + \frac{1691}{180}\lambda^2 - \frac{269}{360}\lambda + \frac{1}{120} \quad (3.112)$$

şeklinde olup $F_{h \leq 5}$ matrisinin $\lambda_s^{(i)}$, ($s=1, 2, \dots, i$) özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) ise

$$\lambda_1^{(1)} = 1, \quad (3.113)$$

$$\lambda_1^{(2)} = 2.2807, \lambda_2^{(2)} = 0.2192, \quad (3.114)$$

$$\lambda_1^{(3)} = 3.5480, \lambda_2^{(3)} = 0.7201, \lambda_3^{(3)} = 0.0652, \quad (3.115)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 4.6828, \lambda_2^{(4)} = 1.4808, \lambda_3^{(4)} = 0.2265, \lambda_4^{(4)} = 0.0265, \quad (3.116)$$

$$\lambda_1^{(5)} = 5.6709, \lambda_2^{(5)} = 2.3606, \lambda_3^{(5)} = 0.5736, \lambda_4^{(5)} = 0.0814, \lambda_5^{(5)} = 0.0133 \quad (3.117)$$

olarak elde edilir. Böylece aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz:

- 1) $\lambda = 0$ için $P_{i \leq 5}(\lambda) \neq 0$ 'dır,
- 2) $P_{i \leq 4}(\lambda)$ ve $P_{i+1}(\lambda)$ polinomları ortak bir köke sahip değildir,
- 3) $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrıktır,
- 4) Eğer $P_{i \leq 4}(\lambda) = 0$ ise bu durumda $P_{i-1}(\lambda)P_{i+1}(\lambda) < 0$ eşitsizliği sağlanır.
Örneğin, $P_3(0.7201) = 0$, $P_2(0.7201) = -0.7817$ ve $P_4(0.7201) = 1.0319$
olduğundan $P_2(0.7201)P_4(0.7201) = -0.80663623 < 0$ olur,
- 5) $1 \leq i \leq 5$ için eğer $P_i(\lambda_0) = 0$ ise, bu durumda yeterince küçük $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için

$$P_{i-1}(\lambda_0)(P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) - P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1)) < 0 \quad (3.118)$$

eşitsizliği sağlanır. Örneğin, $P_3(0.7201) = 0$, $P_2(0.7201) = -0.7817$,
 $P_3(0.7201 + 0.0001) = 0.0005$ ve $P_3(0.7201 - 0.001) = -0.0014$ olduğundan
 $\varepsilon_1 = 0.001$ ve $\varepsilon_2 = 0.0001$ için
 $P_2(0.7203)(P_3(0.7201 + 0.0001) - P_3(0.7201 - 0.001)) = -0.0014 < 0$ olur,

- 6) Yukarıdaki gözlemlerden (3.105)-(3.112) ile verilen $P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda), P_4(\lambda), P_5(\lambda)$ polinomlarının dizisi bir Sturm dizisi oluşturur,
- 7) $F_{h_{i \leq 5}}$ matrisinin özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) birbirinden farklı ve pozitiftir,
- 8) $F_{h_{i \leq 5}}$ ile $F_{h_{i-1}}$ matrislerinin özdeğerleri iç içe geçer. Örneğin,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(5)} = 5.6709 > \lambda_1^{(4)} = 4.6828 > \lambda_2^{(5)} = 2.3606 > \lambda_2^{(4)} = 1.4808 > \\ \lambda_3^{(5)} = 0.5736 > \lambda_3^{(4)} = 0.2265 > \lambda_4^{(5)} = 0.0814 > \lambda_4^{(4)} = 0.0265 > \lambda_5^{(5)} = 0.0133 \end{aligned} \quad (3.119)$$

olur,

- 9) λ_1 ve λ_n , $F_{h_{i \leq 5}}$ matrisinin sırasıyla en büyük ve en küçük özdeğerleri olmak üzere $\lambda_n = \lambda_n^{(i)} < h_1$ ve $h_n < \lambda_1 = \lambda_1^{(i)}$ eşitsizlikleri geçerlidir. Yani

$$\lambda_1^{(2)} = 2.2807 > h_2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_1^{(3)} = 3.5480 > h_3 = \frac{11}{6}, \quad (3.120)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 4.6828 > h_4 = \frac{25}{12}, \quad \lambda_1^{(5)} = 5.6709 > h_5 = \frac{137}{60} \quad (3.121)$$

ve

$$\lambda_2^{(2)} = 0.2192 < h_1 = 1, \quad \lambda_3^{(3)} = 0.0652 < h_1 = 1, \quad (3.122)$$

$$\lambda_4^{(4)} = 0.0265 < h_1 = 1, \quad \lambda_5^{(5)} = 0.0133 < h_1 = 1 \quad (3.123)$$

olur.

Şimdi de F_{h_5} matrisinin $(0,3)$ ve $(3,25)$ aralıklarındaki özdeğerlerinin sayısını Sturm teorisine göre inceleyelim. Bunun için $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ ve $\lambda = 25$ değerleri için $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomlarının işaret değişim sayılarını tespit etmeliyiz. Çizelge 3.1 bu amaca hizmet etmektedir.

Çizelge 3.1. F_{h_5} 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ ve $\lambda = 25$ için işaret değişim tablosu.

	$P_i(0)$ 'in işareti	$P_i(3)$ 'ün işareti	$P_i(25)$ 'in işareti
$P_0(\lambda) = 1$	+	+	+
$P_1(\lambda) = 1 - \lambda$	+	-	-
$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}$	+	+	+
$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{13}{3}\lambda^2 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}$	+	+	-
$P_4(\lambda) = \lambda^4 - \frac{77}{12}\lambda^3 + \frac{17}{2}\lambda^2 - \frac{43}{24}\lambda + \frac{1}{24}$	+	-	+
$P_5(\lambda) = -\lambda^5 + \frac{87}{10}\lambda^4 - \frac{1693}{90}\lambda^3 + \frac{1691}{180}\lambda^2 - \frac{269}{360}\lambda + \frac{1}{120}$	+	+	-
İşaret değişim sayısı	$c_5(0) = 0$	$c_5(3) = 4$	$c_5(25) = 5$

Çizelge 3.1'de, $c_5(\alpha)$; $P_{i \leq 5}(\alpha)$ polinomunun işaret değişim sayısını göstermek üzere $c_5(0) = 0$, $c_5(3) = 4$ ve $c_5(25) = 5$ olduğu görülmektedir. Böylece F_{h_5} matrisinin $(0,3)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(3) - c_5(0) = 4$ ve $(3,25)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(25) - c_5(3) = 1$ olur. Gerçekten F_{h_5} matrisinin özdeğerleri

5.6709 , 2.3606 , 0.5736 , 0.0814 ve 0.0133 şeklinde olup (0,3) aralığındaki özdeğerleri 2.3606 , 0.5736 , 0.0814 , 0.0133 ve (3,25) aralığındaki özdeğeri 5.6709'dur.

3.3.2 Frank matrisin hemen hemen Hadamard tersi

Tanım 3.3.4 $F_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ Frank matrisinden elde edilen

$$F_n^{(-1)} = \begin{cases} \frac{1}{a_{ij}}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3.124)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

matrisine F_n Frank matrisinin hemen hemen Hadamard tersi denir [34].

Burada, $F_n^{(-1)}$ matrisinin determinanı, tersi, LU ayrışımı, karakteristik polinomu ve özdeğerleri için sınırlar gibi bazı özellikleri, 3.1 ve 3.2 bölümlerinde elde edilen bulguların sonucu olarak verilecektir. Yani,

$F_n^{(-1)}$ matrisinin determinanı

$$\det(F_n^{(-1)}) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!(n-1)!}, \quad (3.126)$$

$F_n^{(-1)}$ matrisinin tersinin elemanları

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -n(n-1) , & i = j = 1 \\ -1 , & i = j = n \\ (n-i)(n+1-i)^2 , & i = j, \quad i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ (n+1-i)(n+2-i) , & i = j+1 \\ 0 , & i > j+1 \\ \beta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} (n-i-k) , & i < j < n \\ -\beta_{i,n-1} , & i < j = n, \end{cases} \quad (3.127)$$

$F_n^{(-1)}$ matrisinin adjoint matrisinin elemanları

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{(n-1)!(n-2)!} , & i = j = 1 \\ (-1)^n \frac{1}{n!(n-1)!} , & i = j = n \\ (-1)^{n-1} \frac{(n-i)(n+1-i)^2}{n!(n-1)!} , & i = j, \quad i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ (-1)^{n-1} \frac{(n+1-i)(n+2-i)}{n!(n-1)!} , & i = j+1 \\ 0 , & i > j+1 \\ \zeta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} (n-i-k) , & i < j < n \\ -\zeta_{i,n-1} , & i < j = n, \end{cases} \quad (3.128)$$

$F_n^{(-1)}$ matrisinin LU ayrışımında $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{n+1-j}{n+1-i}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.129)$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = j = 1 \\ -\frac{1}{(n+1-i)^2}, & i = j \neq 1 \\ \frac{1}{n-i}, & i = j-1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.130)$$

şeklinde karakterize edilirken, $F_n^{(-1)}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)} \quad \text{için} \quad P_1(\lambda) = 1 - \lambda \quad \text{ve}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda - \frac{1}{2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$P_n(\lambda) = \left(-\frac{1}{n(n-1)} - \lambda \right) P_{n-1}(\lambda) - \frac{1}{n-1} \lambda P_{n-2}(\lambda), \quad (3.131)$$

indirgeme bağıntısı ile $F_n^{(-1)}$ matrisinin karakteristik polinomunun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} \gamma_i^{(n-1)} - \frac{1}{n-1} \gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.132)$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.3.5 $n = 5$ için klasik Frank matrisin hemen hemen Hadamard tersi

$$F_5^{(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

şeklinde olup, determinanı

$$\det(F_5^{(-1)}) = \frac{1}{2880}, \quad (3.134)$$

tersi

$$(F_5^{(-1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & -60 & -120 & -120 & 120 \\ 20 & 48 & 96 & 96 & -96 \\ 0 & 12 & 18 & 18 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.135)$$

adjoint matrisi

$$Adj(F_5^{(-1)}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{144} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{144} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{240} & \frac{1}{160} & \frac{1}{160} & -\frac{1}{160} \\ 0 & 0 & \frac{1}{480} & \frac{1}{720} & -\frac{1}{720} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1440} & -\frac{1}{2880} \end{bmatrix}, \quad (3.136)$$

LU ayrışımındaki L ve U matrisleri

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca $F_{i \leq 5}^{(-1)}$ matrisinin $P_{i \leq 5}(\lambda)$ karakteristik polinomları (3.131) indirgeme bağıntısına göre

$$P_0(\lambda) = 1, \quad (3.138)$$

$$P_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad (3.139)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}, \quad (3.140)$$

$$P_3(\lambda) = \left(-\frac{1}{6} - \lambda\right) \left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda) = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{12}, \quad (3.141)$$

$$P_4(\lambda) = \left(-\frac{1}{12} - \lambda\right) \left(-\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{3}\lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) \quad (3.142)$$

$$= \lambda^4 - \frac{25}{12}\lambda^3 + \frac{7}{72}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{144}, \quad (3.143)$$

$$P_5(\lambda) = \left(-\frac{1}{20} - \lambda\right) \left(\lambda^4 - \frac{25}{12}\lambda^3 + \frac{7}{72}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda - \frac{1}{144}\right) - \frac{1}{4}\lambda \left(\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{12}\right) \quad (3.144)$$

$$= -\lambda^5 + \frac{137}{60}\lambda^4 - \frac{65}{144}\lambda^3 - \frac{187}{1440}\lambda^2 - \frac{49}{2880}\lambda + \frac{1}{2880} \quad (3.145)$$

şeklinde olup $F_{i \leq 5}^{(-1)}$ matrisinin $\lambda_s^{(i)}$, ($s=1,2,...,i$) özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) ise

$$\lambda_1^{(1)} = 1, \quad (3.146)$$

$$\lambda_1^{(2)} = 1.780776406, \lambda_2^{(2)} = -0.2807764060, \quad (3.147)$$

$$\lambda_1^{(3)} = 1.980785378, \lambda_2^{(3)} = -0.0737260224 + 0.1914035740i, \quad (3.148)$$

$$\lambda_3^{(3)} = -0.0737260224 - 0.1914035740i,$$

$$\lambda_1^{(4)} = 2.020757497, \lambda_2^{(4)} = 0.1256606176 + 0.04916062819i, \quad (3.149)$$

$$\lambda_3^{(4)} = 0.1256606176 - 0.04916062819i, \lambda_4^{(4)} = -0.1887453987,$$

$$\lambda_1^{(5)} = 2.027019531, \lambda_2^{(5)} = 0.4479738180, \lambda_3^{(5)} = 0.01784139266, \quad (3.150)$$

$$\lambda_4^{(5)} = -0.1047507041 + 0.1022719959i, \lambda_5^{(5)} = -0.1047507041 - 0.1022719959i$$

şeklindedir. $F_5^{(-1)}$ matrisinin terimlerini oluşturan dizi artan olmadığından Sturm teorisi yardımıyla elde ettiğimiz sonuçlar $F_5^{(-1)}$ matrisinin (3.138)-(3.145) ile verilen karakteristik polinomları için sağlanmaz. $F_5^{(-1)}$ matrisinin bazı özdeğerleri komplekstir. Örneğin $\lambda_4^{(5)} = -0.1047507041 + 0.1022719959i$ ve $\lambda_5^{(5)} = -0.1047507041 - 0.1022719959i$.

3.3.3 Fibonacci-Frank matris

Tanım 3.3.6 $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olmak üzere

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (3.151)$$

şeklinde tanımlanan diziye Fibonacci sayı dizisi denir ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ile gösterilir [36].

Tanım 3.3.7 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisinin terimleri yerine $a_i = f_i$ şeklinde Fibonacci sayılarından seçilirse, elde edilen $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ Fibonacci sayı dizisine karşılık gelen

$$F_{f_n} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{n-1} & f_{n-1} & f_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{n-2} & f_{n-2} & f_{n-2} & f_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_2 & f_2 & f_2 & f_2 & \cdots & f_2 & f_1 \\ f_1 & f_1 & f_1 & f_1 & \cdots & f_1 & f_1 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

F_{f_n} matrisine Fibonacci-Frank matrisi denir. $F_{f_n} = [f_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisinin elemanları

$$f_{ij} = \begin{cases} f_{n+1-\max(i,j)} , & i > j-2 \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.153)$$

şeklinde karakterize edilir.

(3.152) ile verdiğimiz F_{f_n} matrisinin determinanı 0 (sıfır) olacağından tersi de yoktur. Dolayısıyla biz determinantını ve tersini karakterize etmek için Fibonacci-Frank matrisi

$$F_{f_n} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_n & f_n & f_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{n-1} & f_{n-1} & f_{n-1} & f_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_3 & f_3 & f_3 & f_3 & \cdots & f_3 & f_2 \\ f_2 & f_2 & f_2 & f_2 & \cdots & f_2 & f_2 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

olarak ele alacağız. Yani, buradan itibaren F_{f_n} matrisi (3.154) ile verdiğimiz Fibonacci-Frank matrisi temsil edecektir.

Şimdi, F_{f_n} matrisinin determinanı, tersi, LU ayrışımı, karakteristik polinomu ve özdeğerleri için sınırlar gibi bazı özellikleri, 3.1 ve 3.2 bölümlerinden elde edilen bulguların sonucu olarak verilecektir. Yani,

F_{f_n} matrisinin determinanı

$$\det(F_{f_n}) = \prod_{i=2}^n f_{i-1}, \quad (3.155)$$

F_{f_n} matrisinin tersinin elemanları

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{f_{n-1}}, & i = j = 1 \\ \frac{f_{n+3-i}}{f_{n+1-i} f_{n-i}}, & i = j, \quad i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ 2, & i = j = n \\ -\frac{1}{f_{n+1-i}}, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{f_{n+2-i-k}}{f_{n-i-k}}, & i < j < n \\ -\beta_{i,n-1}, & i < j = n, \end{cases} \quad (3.156)$$

F_{f_n} matrisinin adjoint matrisinin elemanları

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \prod_{i=2}^{n-1} f_{i-1}, & i = j = 1 \\ f_{n+3-i} \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1-i \\ k \neq n+2-i}}^n f_{k-1}, & i = j, \quad i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ 2 \prod_{i=2}^n f_{i-1}, & i = j = n \\ -\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq n+2-i}}^n f_{k-1}, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \zeta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{f_{n+2-i-k}}{f_{n-i-k}}, & i < j < n \\ -\zeta_{i,n-1}, & i < j = n, \end{cases} \quad (3.157)$$

F_{f_n} matrisinin LU ayrışımında $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{f_{n+2-i}}{f_{n+2-j}}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.158)$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} f_{n+1}, & i = j = 1 \\ \frac{f_{n+2-i} f_{n+1-i}}{f_{n+3-i}}, & i = j \neq 1 \\ f_{n+1-i}, & i = j - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.159)$$

şeklinde karakterize edilirken, F_{f_n} matrisinin karakteristik polinomu $P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)}$ için $P_1(\lambda) = 1 - \lambda$ ve $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$ olmak üzere

$$P_n(\lambda) = (f_{n-1} - \lambda)P_{n-1}(\lambda) - f_n \lambda P_{n-2}(\lambda), \quad (3.160)$$

indirgeme bağıntısı ile karakteristik polinomun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} - f_{n-1} \gamma_i^{(n-1)} - f_n \gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.161)$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.3.8 $n=5$ için Fibonacci-Frank matrisi

$$F_{f_5} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

şeklinde olup, determinanti

$$\det(F_{f_5}) = 6, \quad (3.163)$$

tersi

$$(F_{f_5})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{2} & -5 & 5 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -4 & 8 & -8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.164)$$

adjoint matrisi

$$Adj(F_{f_5}) = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 15 & -30 & 30 \\ -2 & 8 & -24 & 48 & -48 \\ 0 & -3 & 15 & -30 & 30 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix}, \quad (3.165)$$

LU ayrışımı

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

şeklinde. $F_{f_{i \leq 5}}$ matrisinin $P_{i \leq 5}(\lambda)$ karakteristik polinomları (3.160) indirgeme bağıntısına göre

$$P_0(\lambda) = 1, \quad (3.167)$$

$$P_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad (3.168)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1, \quad (3.169)$$

$$P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - 2\lambda(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda + 1, \quad (3.170)$$

$$P_4(\lambda) = (2 - \lambda)(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda + 1) - 3\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1) \quad (3.171)$$

$$= \lambda^4 - 11\lambda^3 + 27\lambda^2 - 16\lambda + 2, \quad (3.172)$$

$$P_5(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^4 - 11\lambda^3 + 27\lambda^2 - 16\lambda + 2) - 5\lambda(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \quad (3.173)$$

$$= -\lambda^5 + 19\lambda^4 - 90\lambda^3 + 127\lambda^2 - 55\lambda + 6 \quad (3.174)$$

şeklinde ve $F_{f_{i \leq 5}}$ matrisinin $\lambda_s^{(i)}$, ($s=1, 2, \dots, i$) özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) ise

$$\lambda_1^{(1)} = 1, \quad (3.175)$$

$$\lambda_1^{(2)} = 2.6180, \lambda_2^{(2)} = 0.3819, \quad (3.176)$$

$$\lambda_1^{(3)} = 4.7912, \lambda_2^{(3)} = 1, \lambda_3^{(3)} = 0.2087, \quad (3.177)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 7.7955, \lambda_2^{(4)} = 2.4109, \lambda_3^{(4)} = 0.6226, \lambda_4^{(4)} = 0.1709, \quad (3.178)$$

$$\lambda_1^{(5)} = 12.6537, \lambda_2^{(5)} = 4.3316, \lambda_3^{(5)} = 1.3615, \lambda_4^{(5)} = 0.4883, \lambda_5^{(5)} = 0.1646 \quad (3.179)$$

olarak elde edilir. Böylece aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz:

- 1) $\lambda = 0$ için $P_{i \leq 5}(\lambda) \neq 0$ 'dır,
- 2) $P_{i \leq 4}(\lambda)$ ve $P_{i+1}(\lambda)$ polinomları ortak bir köke sahip değildir,
- 3) $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrıktır,
- 4) Eğer $P_{i \leq 4}(\lambda) = 0$ ise bu durumda $P_{i-1}(\lambda)P_{i+1}(\lambda) < 0$ eşitsizliği geçerlidir.
Örneğin, $P_3(1) = 0$, $P_2(1) = -1$, ve $P_4(1) = 3$ olduğundan
 $P_2(1)P_4(1) = -3 < 0$ olur,
- 5) $1 \leq i \leq 5$ için eğer $P_i(\lambda_0) = 0$ ise, bu durumda yeterince küçük $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için

$$P_{i-1}(\lambda_0)(P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) - P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1)) < 0 \quad (3.180)$$

eşitsizliği sağlanır. Örneğin $P_3(1) = 0$, $P_2(1) = -1$, $P_3(1 + 0.0001) = 0.0003$ ve

$P_3(1 - 0.001) = -0.0029$ olduğundan $\varepsilon_1 = 0.001$ ve $\varepsilon_2 = 0.0001$ için

$$P_2(1)(P_3(1 + 0.0001) - P_3(1 - 0.001)) = -0.0032 < 0 \text{ olur,}$$

- 6) Yukarıdaki gözlemlerden (3.167)-(3.174) ile verilen $P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda), P_4(\lambda), P_5(\lambda)$ polinomlarının dizisi bir Sturm dizisi oluşturur,
- 7) $F_{f \leq 5}$ matrisinin özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) birbirinden farklı ve pozitifdir,

8) $F_{f_{i \leq 5}}$ ile $F_{f_{i-1}}$ matrislerinin özdeğerleri iç içe geçer. Örneğin,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(5)} = 12.6537 > \lambda_1^{(4)} = 7.7955 > \lambda_2^{(5)} = 4.3316 > \lambda_2^{(4)} = 2.4109 > \\ \lambda_3^{(5)} = 1.3615 > \lambda_3^{(4)} = 0.6226 > \lambda_4^{(5)} = 0.4883 > \lambda_4^{(4)} = 0.1709 > \lambda_5^{(5)} = 0.1646 \end{aligned} \quad (3.181)$$

olur,

9) λ_1 ve λ_n , $F_{f_{i \leq 5}}$ matrisinin sırasıyla en büyük ve en küçük özdeğerleri olmak

üzere $\lambda_n = \lambda_n^{(i)} < f_2$ ve $f_{n+1} < \lambda_1 = \lambda_1^{(i)}$ eşitsizlikleri geçerlidir. Yani

$$\lambda_1^{(2)} = 2.6180 > f_3 = 2, \quad \lambda_1^{(3)} = 4.7912 > f_4 = 3, \quad (3.182)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 7.7955 > f_5 = 5, \quad \lambda_1^{(5)} = 12.6537 > f_6 = 8 \quad (3.183)$$

ve

$$\lambda_2^{(2)} = 0.3819 < f_2 = 1, \quad \lambda_3^{(3)} = 0.2087 < f_2 = 1, \quad (3.184)$$

$$\lambda_4^{(4)} = 0.1709 < f_2 = 1, \quad \lambda_5^{(5)} = 0.1646 < f_2 = 1 \quad (3.185)$$

olur.

Şimdi de F_{f_5} matrisinin $(0,5)$ ve $(5,15)$ aralıklarındaki özdeğerlerinin sayısını Sturm teorisine göre inceleyelim. Bunun için $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 15$ değerleri için $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomlarının işaret değişim sayılarını tespit etmeliyiz. Çizelge 3.2 bu amaca hizmet etmektedir.

Çizelge 3.2. $F_{f_{i \leq 5}}$ 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 15$ için işaret değişim tablosu.

	$P_i(0)$ 'in işareti	$P_i(5)$ 'ün işareti	$P_i(15)$ 'in işareti
$P_0(\lambda) = 1$	+	+	+
$P_1(\lambda) = 1 - \lambda$	+	-	-
$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$	+	+	+
$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda + 1$	+	-	-
$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 11\lambda^3 + 27\lambda^2 - 16\lambda + 2$	+	-	+
$P_5(\lambda) = -\lambda^5 + 19\lambda^4 - 90\lambda^3 + 127\lambda^2 - 55\lambda + 6$	+	+	-
İşaret değişim sayısı	$c_5(0) = 0$	$c_5(5) = 4$	$c_5(15) = 5$

Çizelge 3.2’de, $c_5(\alpha)$, $P_{i \leq 5}(\alpha)$ polinomunun işaret değişim sayısını göstermek üzere $c_5(0)=0$, $c_5(5)=4$ ve $c_5(15)=5$ olduğu görülmektedir. Böylece F_{f_5} matrisinin $(0,5)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(5)-c_5(0)=4$ ve $(5,15)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(15)-c_5(5)=1$ olur. Gerçekten F_{f_5} matrisinin özdeğerleri 12.6537, 4.3316, 1.3615, 0.4883 ve 0.1646 şeklinde olup $(0,5)$ aralığındaki özdeğerleri 0.1646, 0.4883, 1.3615, 4.3316 ve $(5,15)$ aralığındaki özdeğeri 12.6537’dir.

3.3.4 Lucas-Frank matrisler

Tanım 3.3.9 $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ olmak üzere

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad (3.186)$$

şeklinde tanımlı sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir ve $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ile gösterilir [36].

Tanım 3.3.10 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisinin terimleri $a_i = l_i$ şeklinde Lucas sayılarından seçilirse, elde edilen $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisine karşılık gelen

$$F_{l_n} = \begin{bmatrix} l_n & l_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{n-1} & l_{n-1} & l_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{n-2} & l_{n-2} & l_{n-2} & l_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_2 & l_2 & l_2 & l_2 & \cdots & l_2 & l_1 \\ l_1 & l_1 & l_1 & l_1 & \cdots & l_1 & l_1 \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

matrisine Lucas-Frank matris denir. Ayrıca, $F_{l_n} = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisinin elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} l_{n+1-\max(i,j)} , & i > j - 2 \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.188)$$

şeklinde karakterize edilir.

Burada, F_{l_n} matrisinin determinanı, tersi, LU ayrışımı, karakteristik polinomu ve özdeğerleri için sınırlar gibi bazı özellikleri, 3.1 ve 3.2 bölümlerinde elde edilen bulguların sonucu olarak verilecektir. Yani,

F_{l_n} matrisinin determinanı

$$\det(F_{l_n}) = \prod_{i=2}^n l_{i-2}, \quad (3.189)$$

F_{l_n} matrisinin tersinin elemanları

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_{n-2}}, & i = j = 1 \\ \frac{l_{n+2-i}}{l_{n-i} l_{n-1-i}}, & i = j, \ i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ \frac{3}{2}, & i = j = n \\ -\frac{1}{l_{n-i}}, & i = j + 1 \\ 0, & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \beta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{l_{n+1-i-k}}{l_{n-1-i-k}}, & i < j < n \\ -\beta_{i,n-1}, & i < j = n, \end{cases} \quad (3.190)$$

F_{l_n} matrisinin adjoint matrisinin elemanları

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \prod_{i=2}^{n-1} l_{i-2} , & i = j = 1 \\ l_{n+2-i} \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1-i \\ k \neq n+2-i}}^n l_{k-2} , & i = j, \quad i, j \neq 1 \text{ ve } i, j \neq n \\ \frac{3}{2} \prod_{i=2}^n l_{i-2} , & i = j = n \\ - \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq n+2-i}}^n l_{k-2} , & i = j + 1 \\ 0 , & i > j + 1 \\ (-1)^{j-i} \zeta_{ii} \prod_{k=1}^{j-i} \frac{l_{n+1-i-k}}{l_{n-1-i-k}} , & i < j < n \\ -\zeta_{i,n-1} , & i < j = n, \end{cases} \quad (3.191)$$

F_{l_n} matrisinin LU ayrışımında $L = [l_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 , & i < j \\ 1 , & i = j \\ \frac{l_{n+1-i}}{l_{n+1-j}} , & \text{diğer durum} \end{cases} \quad (3.192)$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} l_n , & i = j = 1 \\ \frac{l_{n+1-i} l_{n-i}}{l_{n+2-i}} , & i = j \neq 1 \\ l_{n-i} , & i = j - 1 \\ 0 , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.193)$$

şeklinde karakterize edilirken F_{l_n} matrisinin karakteristik polinomu

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \gamma_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1^{(n)} \lambda + \gamma_0^{(n)} \quad \text{için} \quad P_1(\lambda) = 1 - \lambda \quad \text{ve}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$P_n(\lambda) = (l_{n-2} - \lambda) P_{n-1}(\lambda) - l_{n-1} \lambda P_{n-2}(\lambda), \quad (3.194)$$

indirgeme bağıntısı ile karakteristik polinomun katsayıları arasında $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\gamma_i^{(n)} = \gamma_{i-1}^{(n-1)} - l_{n-2} \gamma_i^{(n-1)} - l_{n-1} \gamma_{i-1}^{(n-2)} \quad (3.195)$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.3.11 $n=5$ için Lucas-Frank matris F_{l_5}

$$F_{l_5} = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

şeklinde olup, determinanı

$$\det(F_{l_5}) = 24, \quad (3.197)$$

tersi

$$F_{l_5}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{7}{12} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{12} & -\frac{11}{3} & \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.198)$$

adjoint matrisi

$$Adj(F_{l_5}) = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 56 & -84 & 84 \\ -6 & 22 & -88 & 132 & -132 \\ 0 & -8 & 56 & -84 & 84 \\ 0 & 0 & -24 & 48 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 36 \end{bmatrix}, \quad (3.199)$$

LU ayrışımındaki L ve U matrisleri

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{11} & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{28}{11} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (3.200)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca $F_{l_{i \leq 5}}$ matrisinin $P_{i \leq 5}(\lambda)$ karakteristik polinomları (3.194) indirgeme bağıntısına göre

$$P_0(\lambda) = 1, \quad (3.201)$$

$$P_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad (3.202)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 2, \quad (3.203)$$

$$P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) - 3\lambda(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 9\lambda + 2, \quad (3.204)$$

$$P_4(\lambda) = (3 - \lambda)(-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 9\lambda + 2) - 4\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2) \quad (3.205)$$

$$= \lambda^4 - 15\lambda^3 + 49\lambda^2 - 37\lambda + 6, \quad (3.206)$$

$$P_5(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda^4 - 15\lambda^3 + 49\lambda^2 - 37\lambda + 6) - 7\lambda(-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 9\lambda + 2) \quad (3.207)$$

$$= -\lambda^5 + 26\lambda^4 - 165\lambda^3 + 296\lambda^2 - 168\lambda + 24 \quad (3.208)$$

şeklinde olup $F_{l_{i \leq 5}}$ matrisinin $\lambda_s^{(i)}$, ($s=1, 2, \dots, i$) özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) ise

$$\lambda_1^{(1)} = 1, \quad (3.209)$$

$$\lambda_1^{(2)} = 3.4142, \lambda_2^{(2)} = 0.5857, \quad (3.210)$$

$$\lambda_1^{(3)} = 6.7015, \lambda_2^{(3)} = 1, \lambda_3^{(3)} = 0.2984, \quad (3.211)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 10.7613, \lambda_2^{(4)} = 3.2492, \lambda_3^{(4)} = 0.7651, \lambda_4^{(4)} = 0.2242, \quad (3.212)$$

$$\lambda_1^{(5)} = 17.5121, \lambda_2^{(5)} = 6.0305, \lambda_3^{(5)} = 1.5670, \lambda_4^{(5)} = 0.6756, \lambda_5^{(5)} = 0.2146 \quad (3.213)$$

olarak elde edilir. Böylece aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz:

- 1) $\lambda = 0$ için $P_{i \leq 5}(\lambda) \neq 0$ 'dır,
- 2) $P_{i \leq 4}(\lambda)$ ve $P_{i+1}(\lambda)$ polinomları ortak bir köke sahip değildir,
- 3) $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun köklerinin kümesi ayrıktır,
- 4) Eğer $P_{i \leq 4}(\lambda) = 0$ ise bu durumda $P_{i-1}(\lambda)P_{i+1}(\lambda) < 0$ eşitsizliği sağlanır.
Örneğin, $P_3(1) = 0$, $P_2(1) = -1$ ve $P_4(1) = 4$ olduğundan
 $P_2(1)P_4(1) = -4 < 0$ olur,
- 5) $1 \leq i \leq 5$ için eğer $P_i(\lambda_0) = 0$ ise, bu durumda yeterince küçük $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için

$$P_{i-1}(\lambda_0)(P_i(\lambda_0 + \varepsilon_2) - P_i(\lambda_0 - \varepsilon_1)) < 0 \quad (3.214)$$

eşitsizliği sağlanır. Örneğin $P_3(1) = 0$, $P_2(1) = -1$, $P_3(1 + 0.0001) = 0.0004$ ve

$P_3(1 - 0.001) = -0.0039$ olduğundan $\varepsilon_1 = 0.001$ ve $\varepsilon_2 = 0.0001$ için

$P_2(1)(P_3(1 + 0.0001) - P_3(1 - 0.001)) = -0.0043 < 0$ bulunur,

- 6) Yukarıdaki gözlemlerden (3.201)-(3.208) ile verilen $P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda), P_4(\lambda), P_5(\lambda)$ polinomlarının dizisi bir Sturm dizisi oluşturur,
- 7) $F_{l_{i \leq 5}}$ matrisinin özdeğerleri (veya $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomunun kökleri) birbirinden farklı ve pozitifdir,
- 8) $F_{l_{i \leq 5}}$ ile $F_{l_{i-1}}$ matrislerinin özdeğerleri iç içe geçer. Örneğin,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(5)} = 17.5121 > \lambda_1^{(4)} = 10.7613 > \lambda_2^{(5)} = 6.0305 > \lambda_2^{(4)} = 3.2492 > \\ \lambda_3^{(5)} = 1.5670 > \lambda_3^{(4)} = 0.7651 > \lambda_4^{(5)} = 0.6756 > \lambda_4^{(4)} = 0.2242 > \lambda_5^{(5)} = 0.2146 \end{aligned} \quad (3.215)$$

olur,

- 9) λ_1 ve λ_n , $F_{l_{i \leq 5}}$ matrisinin sırasıyla en büyük ve en küçük özdeğerleri olmak üzere $\lambda_n = \lambda_n^{(i)} < l_1$ ve $l_n < \lambda_1 = \lambda_1^{(i)}$ eşitsizlikleri geçerlidir. Yani

$$\lambda_1^{(2)} = 3.4142 > l_2 = 3, \quad \lambda_1^{(3)} = 6.7015 > l_3 = 4, \quad (3.216)$$

$$\lambda_1^{(4)} = 10.7613 > l_4 = 7, \quad \lambda_1^{(5)} = 17.5121 > l_5 = 11 \quad (3.217)$$

ve

$$\lambda_2^{(2)} = 0.5857 < l_1 = 1, \quad \lambda_3^{(3)} = 0.2984 < l_1 = 1, \quad (3.218)$$

$$\lambda_4^{(4)} = 0.2242 < l_1 = 1, \quad \lambda_5^{(5)} = 0.2146 < l_1 = 1 \quad (3.219)$$

olur.

Şimdi de F_{l_5} matrisinin $(0, 4)$ ve $(4, 20)$ aralıklarındaki özdeğerlerinin sayısını Sturm teorisine göre inceleyelim. Bunun için $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ ve $\lambda = 20$ değerleri için $P_{i \leq 5}(\lambda)$ polinomlarının işaret değişim sayılarını tespit etmeliyiz. Çizelge 3.3 bu amaca hizmet etmektedir.

Çizelge 3.3. $F_{l_{\leq 5}}$ 'in karakteristik polinomları $P_{i \leq 5}(\lambda)$ 'ların $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ ve $\lambda = 20$ için işaret değişim tablosu.

	$P_i(0)$ 'ın işareti	$P_i(4)$ 'ün işareti	$P_i(20)$ 'in işareti
$P_0(\lambda) = 1$	+	+	+
$P_1(\lambda) = 1 - \lambda$	+	-	-
$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 2$	+	+	+
$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 9\lambda + 2$	+	+	-
$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 15\lambda^3 + 49\lambda^2 - 37\lambda + 6$	+	-	+
$P_5(\lambda) = -\lambda^5 + 26\lambda^4 - 165\lambda^3 + 296\lambda^2 - 168\lambda + 24$	+	-	-
İşaret değişim sayısı	$c_5(0) = 0$	$c_5(4) = 3$	$c_5(20) = 5$

Çizelge 3.3'de, $c_5(\alpha)$, $P_{i \leq 5}(\alpha)$ polinomunun işaret değişim sayısını göstermek üzere $w_5(0) = 0$, $c_5(4) = 3$ ve $c_5(20) = 5$ olduğu görülmektedir. Böylece F_{l_5} matrislerinin $(0, 4)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(4) - c_5(0) = 3$ ve $(4, 20)$ aralığındaki özdeğerlerinin sayısı $c_5(20) - c_5(4) = 2$ olur. Gerçekten F_{l_5} matrisinin özdeğerleri 17.5121, 6.0305, 1.5670, 0.6756 ve 0.2146 şeklinde olup, $(0, 4)$ aralığındaki özdeğerleri 0.2146, 0.6756, 1.5670 ve $(4, 20)$ aralığındaki özdeğerleri 17.5121, 6.0305'tir.

3.4 Frank Matrislerin Graf Teoriye Uygulanması

3.4.1 Graf teori kavramları

Tanım 3.4.1 V boş olmayan bir küme ve E , her elemanı V kümesinin farklı elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan çiftlerinden oluşan bir küme olmak üzere bu iki kümeden oluşan matematiksel yapıya graf denir ve $G = (V, E)$ biçiminde gösterilir. V kümesinin elemanlarına noktalar, E kümesinin elemanlarına kenarlar adı verilir ve her kenar iki uç noktasına sahiptir [37].

Tanım 3.4.2 Bir $G=(V,E)$ grafi verilsin. $v_i, v_j \in V$ olsun. G grafında, v_i ile v_j noktalarını birleştiren bir kenar varsa yani, $v_i v_j \in E$ oluyorsa v_i ile v_j noktalarına komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir [38].

Tanım 3.4.3 G grafında bir nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara çoklu kenar (multiple edge), bir noktayı kendisine birleştiren kenara ise ilmek (loop) denir [38].

Tanım 3.4.4 Çoklu kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf, çoklu kenara sahip olan ancak ilmeği olmayan grafa çoklu graf (multi graph), çoklu kenar ve ilmek içeren graflara ise sahte graf (pseudo graph) denir [38].

Tanım 3.4.5 G bir basit graf olsun. Elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.220)$$

biçiminde tanımlı $A(G) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisine G basit grafının komşuluk matrisi denir [37].

Tanım 3.4.6 G , komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda $A(G)$ matrisinin özdeğerlerine ve spektral yarıçapına sırasıyla G grafının özdeğerleri ve spektral yarıçapı denir. G grafının spektral yarıçapı $\rho(G)$ ile gösterilir [39].

Tanım 3.4.7 $G=(V,E)$ grafi verisin. $v_i \in V$ noktasına komşu olan noktaların sayısına v_i noktasının derecesi denir ve d_i ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya izole nokta denir [40].

Tanım 3.4.8 Tüm noktaların eşit dereceye sahip olduğu bir grafa regüler graf denir. Ortak derecesi k olan regüler grafa k -regüler graf denir [37].

Tanım 3.4.9 $G=(V,E)$ grafinın nokta kümesi $V=\{a,b,c,d,e,f,\dots,k,l,m\}$ olsun. Ardı ardına t kenarın dizilmesiyle elde edilen

$$\underbrace{ab, bc, cd, de, \dots, kl, lm}_t \quad (3.221)$$

formuna G de t uzunluğunda bir yürüme denir. Bu yürüme $abcde\dots klm$ şeklinde gösterilir. Yürümedeki kenar sayısına ise yürümenin uzunluğu denir [38].

Tanım 3.4.10 Herhangi bir G grafinde, başlangıç ve bitiş noktaları hariç tüm noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye yol denir [37].

Tanım 3.4.11 Bir $G=(V,E)$ grafi verilsin. V nokta kümesinin v_i ile v_j noktaları arasında bir yol varsa bu noktalara bağlantılıdır denir. Eğer V nokta kümesinin tüm nokta çiftleri arasında bir yol varsa G grafinde bağlantılı graf (connected graph) denir [38].

Tanım 3.4.12 Uç noktalarından biri başlangıç noktası olarak, bir diğeri de varış noktası olarak belirlenmiş kenara yönlendirilmiş kenar denir [37].

Tanım 3.4.13 Her bir kenarı yönlendirilmiş olan grafa bir yönlendirilmiş graf denir. Yönlendirilmiş grafa kısaca digraf denir [37].

Tanım 3.4.14 Bir $G=(V,E)$ digrafındaki her $v_i, v_j \in V$ nokta çifti için v_i 'den v_j noktasına bir yönlendirilmiş yol mevcutsa bu grafa güçlü bağlantılı digraf (strongly connected digraph) denir [41].

Tanım 3.4.15 $G=(V,E)$ digrafı verilsin. a_{ij} elemanı, v_i noktasından v_j noktasına yönlendirilmiş kenarların sayısı olarak tanımlanan $A(G)=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisine $G=(V,E)$ digrafının komşuluk matrisi denir [37].

Tanım 3.4.16 G bir digraf olmak üzere G 'de bir yürümeye yönlendirilmiş yürüme ve yönlendirilmiş yürümedeki kenar sayısına da yönlendirilmiş yürümenin uzunluğu denir [16].

Bir G digrafında başlangıç noktası v_i ve varış noktası v_j olan kenarların sayısı, yani 1-uzunluklu yönlendirilmiş yürümelerin sayısı $W(i, j)$ ile gösterilir ve bu $W(i, j)$ sayısı $A(G)$ komşuluk matrisinin a_{ij} elemanına eşittir. Başlangıç noktası v_i ve varış noktası v_j olan k -uzunluklu farklı yönlendirilmiş yürümelerin sayısı ise $A(G)$ komşuluk matrisinin k . kuvveti olan $A^k(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı $a_{ij}^{(k)}$ 'ya eşit olup $W_k(i, j)$ ile gösterilir [16].

Tanım 3.4.17 Bir $G=(V, E)$ digrafında başlangıç (varış) noktası $v_i \in V$ olan yönlendirilmiş kenarların sayısına v_i noktasının dış (iç) derecesi denir ve d_i^+ (d_i^-) ile gösterilir [16].

Buradan itibaren yalnızca dış derece ile ilgili tanım ve teoremlere yer vereceğiz, ancak belirtelim ki iç derece ile ilgili benzer tanım ve teoremler literatürde mevcuttur.

Tanım 3.4.18 Bir $G=(V, E)$ digrafında dış derecesi sıfır ($d_i^+ = 0$) olan bir v_i noktasına sink (dış-izole nokta) denir [37].

Lemma 3.4.19 Bir $G=(V, E)$ digrafında $A(G)$ komşuluk matrisinin i . satır elemanlarının toplamı $v_i \in V$ noktasının dış derecesine eşittir [37].

Tanım 3.4.20 Bir $G=(V, E)$ digrafında başlangıç noktası v_i olan k -uzunluklu yönlendirilmiş yürümelerin sayısına v_i noktasının k -dış derecesi denir ve d_i^{k+} ile gösterilir [16]. $k > 0$ ve $d_i^{0+} = 1$ olmak üzere d_i^{k+} ,

$$d_i^{k+} = \sum_{j=1}^n W_k(i, j) \quad (3.222)$$

formülü ile hesaplanır [16].

Tanım 3.4.21 $k \geq 1$ olmak üzere her $v_i \in V$ için eğer $\frac{d_i^{k+}}{d_i^{(k-1)+}} = c$ oluyorsa $G=(V, E)$ digrafına ortalama k -dış derece regüler digraf denir [16].

Teorem 3.4.22 A matrisi, satır toplamları sıfırdan farklı olan ve spektral yarıçapı

$\rho(A)$ olan bir n -kare matris olsun. A matrisinin i . satır toplamı $r_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$

olmak üzere, herhangi $M > 0$, $N \geq 0$ ve $k \geq 0$ tamsayıları için

$$\min_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{r_i(A^{k+M}) r_j(A^{k+N})}{r_i(A^k) r_j(A^k)} \right)^{\frac{1}{M+N}} : a_{ij}^{(M)} > 0 \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{r_i(A^{k+M}) r_j(A^{k+N})}{r_i(A^k) r_j(A^k)} \right)^{\frac{1}{M+N}} : a_{ij}^{(M)} > 0 \right) \quad (3.223)$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

Butler ve Siegel (2013), Teorem 3.4.22'den yararlanarak digraflar için aşağıdaki sonucu elde etmiştir [16].

Teorem 3.4.23 Eğer $G = (V, E)$, spektral yarıçapı $\rho(G)$ olan ve dış-izole nokta içermeyen n noktalı bir digraf ise bu durumda, $M > 0$, $N \geq 0$ ve $k \geq 0$ tamsayıları için

$$\min_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{d_i^{(k+M)+} d_j^{(k+N)+}}{d_i^{k+} d_j^{k+}} \right)^{\frac{1}{M+N}} : W_M(i, j) > 0 \right) \leq \rho(G) \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{d_i^{(k+M)+} d_j^{(k+N)+}}{d_i^{k+} d_j^{k+}} \right)^{\frac{1}{M+N}} : W_M(i, j) > 0 \right) \quad (3.224)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bununla birlikte eğer G güçlü bağlantılı ise (3.224) denkleminde eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şart G digrafının ortalama $(k+1)$ -dış derece regüler olmasıdır [16].

Tanım 3.4.24 Her bir $v_i v_j$ kenarı, ağırlık adı verilen negatif olmayan bir $w(i, j)$ reel sayısı ile ağırlıklandırılmış olan basit grafa bir ağırlıklı graf denir [38].

Tanım 3.4.25 G bir digraf olsun. Eğer G digrafındaki her $v_i v_j$ yönlendirilmiş kenarı, ağırlık adı verilen negatif olmayan bir $w(i, j)$ sayısı ile işaretlenirse G 'ye ağırlıklı digraf denir [42].

Tanım 3.4.26 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi ile verilen bir G ağırlıklı digrafında $w(i, j)$, v_i noktasından v_j noktasına yönlendirilmiş kenarın ağırlığı olmak üzere, elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i, j), & v_i \text{ 'den } v_j \text{ 'ye bir yönlendirilmiş kenar varsa} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.225)$$

şeklinde tanımlı $A(G) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisine G ağırlıklı digrafının komşuluk matrisi denir [43].

Tanım 3.4.27 G , komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir ağırlıklı digraf ve $w(i, j)$, $v_i v_j \in E$ yönlendirilmiş kenarına ait ağırlık olsun. v_i noktasını başlangıç (varış) kabul eden yönlendirilmiş kenarların ağırlıkları toplamına v_i noktasının ağırlıklı dış (iç) derecesi denir ve w_i^+ (w_i^-) ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$w_i^+ = \sum_{j=1}^n w(i, j), \quad \left(w_i^- = \sum_{j=1}^n w(j, i) \right) \quad (3.226)$$

olup w_i^+ (w_i^-) değeri aslında $A(G)$ komşuluk matrisinin i . satır (sütun) toplamıdır [44].

Buradan itibaren sonuçlarımızı ağırlıklı dış-derece kavramına bağlı olarak vereceğiz, ancak belirtelim ki bu sonuçlar benzer şekilde ağırlıklı iç derece kavramına bağlı olarak da verilebilir.

G , komşuluk matrisi $A(G) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ olan bir ağırlıklı digraf olmak üzere v_i noktasından v_j noktasına giden k -uzunluklu bir yönlendirilmiş yürümede bulunan yönlendirilmiş kenarların ağırlıklarının çarpımını göz önüne alalım. Bu şekilde farklı k -uzunluklu yönlendirilmiş yürümelerden elde edilen çarpımların toplamını $w_k(i, j)$

ile gösterelim. Bu durumda, $A(G)$ komşuluk matrisinin k . kuvveti $A^k(G)$ 'nin (i, j) . elemanı $w_k(i, j)$ olur.

Şimdi, G ağırlıklı digrafındaki v_i noktasının ağırlıklı dış derece kavramını ağırlıklı k -dış derece kavramına genelleştirebiliriz.

Tanım 3.4.28 G ağırlıklı digrafında v_i noktasını başlangıç kabul eden k -uzunluklu farklı yönlendirilmiş yürümelerden elde edilen $w_k(i, j)$ değerlerinin toplamına v_i noktasının ağırlıklı k -dış derecesi denir. Yani, $k > 0$, $w_i^{0+} = 1$ olmak üzere

$$w_i^{k+} = \sum_{j=1}^n w_k(i, j) \quad (3.227)$$

değerine v_i noktasının ağırlıklı k -dış derecesi denir. Aslında w_i^{k+} değeri G ağırlıklı digrafının $A(G)$ komşuluk matrisinin k . kuvveti $A^k(G)$ 'nin i . satır elemanları toplamıdır.

Tanım 3.4.29 $k \geq 1$ olmak üzere her $v_i \in V$ için $\frac{w_i^{k+}}{w_i^{(k-1)+}} = c$ eşitliği sağlanıyor ise

$G = (V, E)$ ağırlıklı digrafına ortalama ağırlıklı k -dış derece regüler ağırlıklı digraf denir.

Butler ve Siegel (2013)'in digraflar için yaptığına benzer şekilde Teorem 3.4.22 kullanılarak ağırlıklı digraflar için aşağıdaki sonucu elde ederiz [16].

Teorem 3.4.30 G , spektral yarıçapı $\rho(G)$ olan, n noktalı ve dış-izole nokta içermeyen bir ağırlıklı digraf olsun. Bu durumda $M > 0$, $N \geq 0$ ve $k \geq 0$ tamsayıları için

$$\min_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{w_i^{(k+M)+} w_j^{(k+N)+}}{w_i^{k+} w_j^{k+}} \right)^{\frac{1}{M+N}} : w_M(i, j) > 0 \right) \leq \rho(G) \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{w_i^{(k+M)+} w_j^{(k+N)+}}{w_i^{k+} w_j^{k+}} \right)^{\frac{1}{M+N}} : w_M(i, j) > 0 \right) \quad (3.228)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bununla birlikte, eğer G güçlü bağlantılı ise (3.228) denkleminde eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafinin ortalama ağırlıklı $k+1$ -dış derece regüler olmasıdır.

İspat. [16, Teorem 4.1] ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.4.31 $\lambda_k, (k=1,2,\dots,n)$ $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\varepsilon(A) = \sum_{k=1}^n \left| \lambda_k - \frac{\text{iz}(A)}{n} \right| \quad (3.229)$$

şeklinde tanımlı $\varepsilon(A)$ değerine A matrisinin enerjisi denir. Eğer A matrisi bir G grafinin komşuluk matrisi ise bu durumda (3.229) ifadesi G grafinin enerjisi olarak adlandırılır ve $\varepsilon(G)$ ile gösterilir [45].

3.4.2 Frank graf

Bu bölümde komşuluk matrisi Frank matris olan Frank graf kavramını tanıttacağız. Ardından bir ağırlıklı yönlendirilmiş graf olan Frank grafın spektral yarıçapı (en büyük özdeğeri) ve enerjisi için bazı sınırlar elde edeceğiz. Son olarak da Frank grafın spektral yarıçapı için bulduğumuz sınır değerlerini karşılaştırmak amacıyla sayısal bir örnek vereceğiz.

Tanım 3.4.32 G bir ağırlıklı digraf ve $i, j=1,2,\dots,n$ için $v_i v_j$ yönlendirilmiş kenarının ağırlığı $w(i, j) = n+1 - \max(i, j)$ olsun. Komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{cases} w(i, j), & i > j-2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.230)$$

olan ağırlıklı yönlendirilmiş grafa Frank graf denir.

(3.230) ile verilen komşuluk matrisi aslında (2.23) ile verilen Frank matrisin ta kendisidir. Dolayısıyla Frank grafi, komşuluk matrisi Frank matris olan ağırlıklı digrafa Frank graf denir şeklinde tanımlayabiliriz. n noktalı bir Frank grafi G_{F_n} ile

göstereceğiz. Ayrıca, buradan itibaren F_n Frank matrisi, G_{F_n} Frank grafinin komşuluk matrisini temsil edecektir.

Frank grafin komşuluk matrisi Frank matris olduğundan, Frank matris için 2.2 bölümünde verdiğimiz özelliklerin bazılarını Frank grafa taşıyabiliriz. Örneğin Frank grafin özdeğerleri birbirinin çarpımsal tersi, reel ve pozitifdir. Ayrıca, n tek doğal sayı olmak üzere n noktalı bir Frank grafin özdeğerlerinden bir tanesi 1'dir. Yine, Frank grafin özdeğerleri için

$$\frac{2}{n(n+1)} < \lambda_i < \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.231)$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 3.4.33 Frank graf G_{F_n} 'in v_i noktasının ağırlıklı dış derecesi

$$w_i^+ = \sum_{\substack{j=1 \\ i>j-2}}^n w(i, j) = (i+1)n - i^2 \quad (3.232)$$

şeklindedir.

İspat. Tanım 3.4.32'den

$$w_i^+ = \sum_{\substack{j=1 \\ i>j-2}}^n w(i, j) = \sum_{\substack{j=1 \\ i>j-2}}^n (n+1 - \max(i, j)) \quad (3.233)$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} (n+1 - \max(i, j)) \quad (3.234)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^i (n+1 - \max(i, j)) \right) + (n+1 - \max(i, i+1)) \quad (3.235)$$

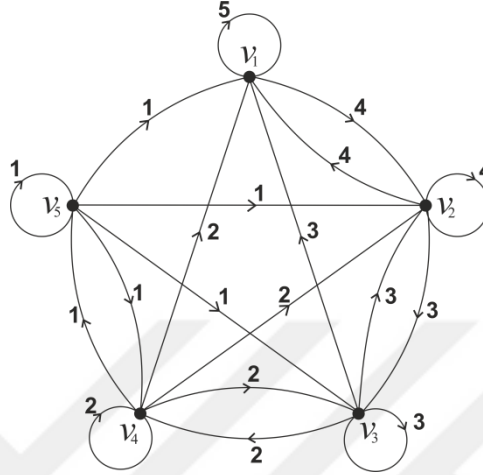
$$= i(n+1) - i^2 + (n+1 - i - 1) \quad (3.236)$$

$$= (i+1)n - i^2 \quad (3.237)$$

elde edilir.

Şimdi, Frank graf kavramını, ağırlıklı dış derece ve ağırlıklı k -dış derece kavramlarını sayısal olarak bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 3.4.34. $n = 5$ için Frank graf Şekil 3.1’deki gibi çizilebilir.



Şekil 3.1. Frank graf G_{F_5} .

v_1 noktasından v_1 noktasına yönlendirilmiş kenarın ağırlığı $w(1,1)=5$, v_1 noktasından v_2 noktasına yönlendirilmiş kenarın ağırlığı $w(1,2)=4$ şeklindedir. v_1 noktasından v_3 , v_4 ve v_5 noktalarına yönlendirilmiş kenar bulunmadığından $w(1,3)=w(1,4)=w(1,5)=0$ olur. Benzer şekilde diğer yönlendirilmiş kenarların ağırlıkları göz önüne alınırsa G_{F_5} Frank grafın komşuluk matrisi

$$F_5 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.238)$$

şeklinde olur.

Başlangıç noktası v_1 olan yönlendirilmiş kenarlar v_1v_1 ve v_1v_2 olup, v_1 noktasının ağırlıklı dış derecesi bu kenarların ağırlıkları toplamıdır. Yani,

$$w_1^+ = w(1,1) + w(1,2) = 5 + 4 = 9 \quad (3.239)$$

şeklindedir. Benzer şekilde v_2, v_3, v_4, v_5 noktalarının ağırlıklı dış dereceleri

$$w_2^+ = w(2,1) + w(2,2) + w(2,3) = 4 + 4 + 3 = 11, \quad (3.240)$$

$$w_3^+ = w(3,1) + w(3,2) + w(3,3) + w(3,4) = 3 + 3 + 3 + 2 = 11, \quad (3.241)$$

$$w_4^+ = w(4,1) + w(4,2) + w(4,3) + w(4,4) + w(4,5) = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9, \quad (3.242)$$

$$w_5^+ = w(5,1) + w(5,2) + w(5,3) + w(5,4) + w(5,5) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \quad (3.243)$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse w_i^+ , F_5 komşuluk matrisinin i . satır elemanları toplamıdır. Ayrıca bu değerler Lemma 3.4.33 ile de elde edilebilir.

v_1 noktasından v_1 noktasına 2 uzunluklu (2 kenar kullanılarak) yönlendirilmiş yürümeler $v_1v_2v_1$ ve $v_1v_1v_1$ olup 2 uzunluklu 2 farklı yürüme vardır. Her bir farklı yürüme için elde edilen ağırlıklar çarpımının toplamı $w_2(1,1) = (4 \times 4) + (5 \times 5) = 41$ olarak elde edilir. v_1 noktasından v_2 noktasına 2 uzunluklu $v_1v_2v_2$ ve $v_1v_1v_2$ yönlendirilmiş yürümelerindeki ağırlıkların çarpımlarının toplamı $w_2(1,2) = (4 \times 4) + (5 \times 4) = 36$ şeklindedir. Benzer şekilde v_1 noktasından v_3 noktasına 2 uzunluklu yalnızca $v_1v_2v_3$ yönlendirilmiş yürümesi mevcuttur. Dolayısıyla $w_2(1,3)$ bu yürümedeki ağırlıkların çarpımına eşittir. Yani, $w_2(1,3) = 4 \times 3 = 12$ olur. v_1 noktasından v_4 ve v_5 noktalarına ise 2 uzunluklu yönlendirilmiş yürüme mevcut değildir. Böylece

$$w_1^{2+} = w_2(1,1) + w_2(1,2) + w_2(1,3) = 41 + 36 + 12 = 89 \quad (3.244)$$

olur. Bu bize v_1 noktasının ağırlıklı 2 -dış derecesinin 89 olduğunu belirtir. Ayrıca,

$$F_5^2 = \begin{bmatrix} 41 & 36 & 12 & 0 & 0 \\ 45 & 41 & 21 & 6 & 0 \\ 40 & 37 & 22 & 10 & 2 \\ 29 & 27 & 17 & 9 & 3 \\ 15 & 14 & 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.245)$$

olup, ilk satır elemanlarının $w_2(1,1)$, $w_2(1,2)$ ve $w_2(1,3)$ olduğu görülmektedir.

Yine ilk satır elemanları toplamının 89 yani w_1^{2+} olduğu da görülmektedir.

Lemma 3.4.35 Frank grafin komşuluk matrisi F_n matrisinin izi için

$$izF_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.246)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bir matrisin izi tanımından F_n komşuluk matrisinin izi,

$$izF_n = \sum_{i=1}^n w(i,i) = \sum_{i=1}^n (n+1 - \max(i,i)) \quad (3.247)$$

$$= \sum_{i=1}^n (n+1-i) \quad (3.248)$$

$$= n(n+1) - \sum_{i=1}^n i \quad (3.249)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.250)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.4.36 G_{F_n} Frank grafinin özdeğerleri λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) ve komşuluk matrisi

$F_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ olmak üzere

$$1) \quad \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) = 0,$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$3) \quad \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right)^2 = \frac{3}{4}n^3 - n^2 + \frac{1}{4}n$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat.

1) (2.12) ifadesinden

$$\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^n \frac{izF_n}{n} = izF_n - n \frac{izF_n}{n} = 0, \quad (3.251)$$

elde edilir.

2) F_n^2 matrisinin özdeğerleri λ_i^2 olmak üzere, bir matrisin izi tanımından

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = izF_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} \right) \quad (3.252)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca

$$a_{ik} = \begin{cases} n+1-\max(i, k), & i > k-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.253)$$

ve

$$a_{ki} = \begin{cases} n+1-\max(k, i), & k > i-2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.254)$$

eşitliklerinden eğer $|i-k| < 2$ ise, $a_{ik} a_{ki} \neq 0$ diğer durumlarda $a_{ik} a_{ki} = 0$ olduğu sonucu çıkmaktadır. $1 < i < n$ için $|i-k| < 2$ olması üç şekilde mümkündür. Bunlar $i = k$, $i = k-1$ ve $i = k+1$ 'dir. Ayrıca $a_{11}^{(2)} = n^2 + (n-1)^2$ ve $a_{nn}^{(2)} = 1^2 + 1^2$ olduğundan

$$iz(F_n^2) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)} = n^2 + (n-1)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\sum_{k=i-1}^{i+1} a_{ik} a_{ki} \right) + 1^2 + 1^2 \quad (3.255)$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left(2(n+1-i)^2 + (n-i)^2 \right) + n^2 + (n-1)^2 + 2 \quad (3.256)$$

elde edilir. Buradan

$$iz(F_n^2) = \sum_{i=2}^{n-1} (3n^2 - 6ni + 3i^2 + 4n - 4i + 2) + n^2 + (n-1)^2 + 2 \quad (3.257)$$

$$= (3n^2 + 4n + 2)(n-2) - (6n+4) \sum_{i=2}^{n-1} i + 3 \sum_{i=2}^{n-1} i^2 + 2n^2 - 2n + 3 \quad (3.258)$$

$$= 3n^3 - 2n^2 - 6n - 4 - (6n+4) \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 3 \left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n - 6}{6} \right) + 2n^2 - 2n + 3 \quad (3.259)$$

olur. Buradan gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = iz(F_n^2) = n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad (3.260)$$

bulunur.

3) (3.246) ve (3.260) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{izF_n}{n} \right)^2 \quad (3.261)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{(izF_n)^2}{n} + n \left(\frac{izF_n}{n} \right)^2 \quad (3.262)$$

$$= \frac{3}{4}n^3 - n^2 + \frac{1}{4}n \quad (3.263)$$

elde edilir.

3.4.3 Frank grafın en büyük özdeğeri için sınırlar

Teorem 3.4.37 G_{F_n} Frank grafının özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{2} \left((n-1)(3n-1)^{\frac{1}{2}} + n+1 \right) \quad (3.264)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Frank grafın özdeğerleri için

$$\lambda_1 - \frac{izF_n}{n} = - \sum_{i=2}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) \quad (3.265)$$

eşitliğinin doğruluğu açıktır. Buradan

$$\left| \lambda_1 - \frac{izF_n}{n} \right| = \left| \sum_{i=2}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) \right| \quad (3.266)$$

olup

$$\left| \lambda_1 - \frac{izF_n}{n} \right| \leq \sum_{i=2}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \quad (3.267)$$

ifadesi yazılabilir. Buna göre (3.267) eşitsizliğinin sağ tarafına $a_i = \frac{1}{\left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|}$ ve

$b_i = q_i = \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|$ alınarak Lemma 2.1.25 uygulanırsa

$$\left| \lambda_1 - \frac{izF_n}{n} \right| \leq \sum_{i=2}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \leq (n-1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=2}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.268)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\lambda_1 - \frac{izF_n}{n}\right)^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n}\right)^2 - \left(\lambda_1 - \frac{izF_n}{n}\right)^2 \right), \quad (3.269)$$

$$\frac{n}{n-1} \left(\lambda_1 - \frac{izF_n}{n}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n}\right)^2, \quad (3.270)$$

$$\lambda_1 - \frac{izF_n}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.271)$$

olup Teorem 3.4.36 (3) yardımıyla

$$\lambda_1 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}n^3 - n^2 + \frac{1}{4}n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2}, \quad (3.272)$$

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{2} \left((n-1)(3n-1)^{\frac{1}{2}} + n+1 \right) \quad (3.273)$$

bulunur.

Sonuç 3.4.38 $n \geq 2$ olmak üzere Frank grafın en büyük özdeğeri için (3.231) ve (3.273) denklemleri ile verilen sınırlar arasında

$$\frac{1}{2} \left((n-1)(3n-1)^{\frac{1}{2}} + n+1 \right) < \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.274)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$ için

$$\frac{\sqrt{5}+3}{2} < 3 \quad (3.275)$$

olup eşitsizlik doğrudur.

Eşitsizlik $n = k$ için doğru olsun, yani

$$\frac{1}{2} \left((k-1)(3k-1)^{\frac{1}{2}} + k+1 \right) < \frac{k(k+1)}{2} \quad (3.276)$$

olsun. Bu durumda

$$(k-1)(3k-1)^{\frac{1}{2}} + k+1 - k(k+1) < 0, \quad (3.277)$$

$$(k-1)(3k-1)^{\frac{1}{2}} - (k+1)(k-1) < 0, \quad (3.278)$$

$$(k-1) \left((3k-1)^{\frac{1}{2}} - (k+1) \right) < 0, \quad (3.279)$$

$$(3k-1)^{\frac{1}{2}} < k+1 \quad (3.280)$$

olur ve buradan

$$3k-1 < (k+1)^2 \quad (3.281)$$

elde edilir.

İspatın son adımı için eşitsizliğin $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$k > 0$ için

$$(k+2)^2 - (k+1)^2 = 2k+3 > 3 \quad (3.282)$$

ve

$$(k+1)^2 + 3 < (k+2)^2 \quad (3.283)$$

olduğundan ve (3.281) eşitsizliğinden

$$3k+2 = 3k-1+3 < (k+1)^2 + 3 < (k+2)^2 \quad (3.284)$$

ve

$$(3k+2)^{\frac{1}{2}} - (k+2) < 0 \quad (3.285)$$

bulunur. O halde,

$$k \left((3k+2)^{\frac{1}{2}} - (k+2) \right) < 0, \quad (3.286)$$

$$k(3k+2)^{\frac{1}{2}} - k(k+2) < 0, \quad (3.287)$$

$$k(3k+2)^{\frac{1}{2}} + (k+2)(1-(k+1)) < 0, \quad (3.288)$$

$$k(3k+2)^{\frac{1}{2}} + k+2 - (k+1)(k+2) < 0, \quad (3.289)$$

$$\frac{1}{2} \left(k(3k+2)^{\frac{1}{2}} + k+2 \right) - \frac{(k+1)(k+2)}{2} < 0 \quad (3.290)$$

$$\frac{1}{2} \left(k(3k+2)^{\frac{1}{2}} + k+2 \right) < \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (3.291)$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin $n=k+1$ için doğruluğu gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.38'e göre Teorem 3.4.37 ile elde ettiğimiz sınırın literatürde Frank matris için var olan (2.32) eşitsizliğinden ve Frank grafa uyarladığımız (3.231) eşitsizliğinden daha iyi bir üst sınır olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.4.39 G_{F_n} Frank grafının özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. Bu durumda, $n \geq 3$ ve n tek doğal sayı olmak üzere

$$\lambda_1 > n+1 \quad (3.292)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. n tek doğal sayı olduğunda Frank grafın özdeğerlerinden bir tanesinin 1 olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_i + 1 + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \quad (3.293)$$

yazılabilir. Frank grafın özdeğerleri birbirlerinin çarpımsal tersi olduğundan, (3.293) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur.

Ayrıca $\lambda_1 > \lambda_i$ olduğundan,

$$iz(F_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i < \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_1 + 1 + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n 1 \quad (3.294)$$

$$< \left(\frac{n-1}{2} \right) \lambda_1 + 1 + \frac{n-1}{2} \quad (3.295)$$

ve buradan

$$\lambda_1 > \frac{2}{n-1} \left(izF_n - \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.296)$$

elde edilir. (3.246) eşitliği (3.296) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 > \frac{2}{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.297)$$

ve böylece

$$\lambda_1 > n+1 \quad (3.298)$$

bulunur.

Teorem 3.4.40 G_{F_n} Frank grafinın özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. Bu durumda, n çift doğal sayı olmak üzere

$$\lambda_1 > n \quad (3.299)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bir matrisin izi özdeğerleri toplamına eşit olduğundan

$$izF_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.300)$$

yazılır. Frank grafin özdeğerleri birbirlerinin çarpımsal tersi olduğundan, (3.300) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur. (3.300) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplamda λ_i yerine 1 yazılırsa

$$izF_n < \frac{n}{2} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.301)$$

elde edilir. $\lambda_1 > \lambda_i$ olduğundan

$$izF_n < \frac{n}{2} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_1 \quad (3.302)$$

yazılır. Böylece

$$izF_n < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \lambda_1 \quad (3.303)$$

olur. Burada (3.246) denklemi kullanılarak

$$\frac{n(n+1)}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \lambda_1 \quad (3.304)$$

ve buradan

$$\lambda_1 > n \quad (3.305)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.37, Teorem 3.4.39 ve Teorem 3.4.40 spektral yarıçap açısından değerlendirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.4.41 Spektral yarıçap tanımı göz önüne alınırsa G_{F_n} Frank grafının spektral yarıçapı için

$$\begin{cases} n, & n \text{ çift ise} \\ n+1, & n \text{ tek ise} \end{cases} \leq \rho(G_{F_n}) \leq \frac{1}{2} \left((n-1)(3n-1)^{\frac{1}{2}} + n+1 \right) \quad (3.306)$$

yazılır.

3.4.4 Frank grafın enerjisi için sınırlar

Tanım 3.4.42 λ_i 'ler G_{F_n} grafının özdeğerleri olmak üzere, G_{F_n} grafının enerjisi

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{n+1}{2} \right| \quad (3.307)$$

şeklinde tanımlanır ve bu enerjiyi Frank enerji olarak adlandırırız.

Teorem 3.4.43 G_{F_n} Frank grafının özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. n tek doğal sayı olmak üzere, Frank enerji için

$$\begin{aligned} \varepsilon(G_{F_n}) &< \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \frac{3n+1}{2n^2} (izF_n)^2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) izF_n - \frac{2(n-1)}{n^2(n+1)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{n+1}{2n} izF_n - \frac{n^2+2n-1}{n(n+1)} \end{aligned} \quad (3.308)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. n tek doğal sayı olduğunda Frank grafın özdeğerlerinden bir tanesinin 1 olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| + \left| 1 - \frac{izF_n}{n} \right| + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \quad (3.309)$$

yazılır. Frank grafın özdeğerleri birbirlerinin çarpımsal tersi olduğundan, (3.309) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur. İlk

olarak (3.309) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplamda $a_i = \frac{1}{\left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|}$ ve

$b_i = q_i = \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|$ alınarak Lemma 2.1.25 uygulanırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \right)^2 \leq \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|^2 \quad (3.310)$$

elde edilir. Buradan ve (3.309) eşitliğinden

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{n} - 1 + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) \quad (3.311)$$

yazılır. (3.311) ifadesi

$$= \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_i^2 + 1 - 1 + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i^2 - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_i - 2 \frac{izF_n}{n} \right. \\ \left. + 2 \frac{izF_n}{n} - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i + 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{izF_n}{n} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{izF_n}{n} - 1 + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \left(\frac{izF_n}{n} - \lambda_i \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.312)$$

şeklinde düzenlenip, buradan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - 1 - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{(izF_n)^2}{n} + 2 \frac{izF_n}{n} + 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \right. \\ \left. + \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{izF_n}{n} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{izF_n}{n} - 1 + \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{izF_n}{n} - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.313)$$

elde edilir. Burada (3.231) eşitsizliği kullanılırsa

$$\varepsilon(G_{F_n}) < \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - 1 - \frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2n^2} - \frac{2}{n}\right) (izF_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{izF_n}{n} + 2 \frac{izF_n}{n} \left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{izF_n}{n} - 1 + \frac{n-1}{2n} izF_n - \frac{n-1}{2} \frac{2}{n(n+1)} \quad (3.314)$$

olur ve böylece

$$\varepsilon(G_{F_n}) < \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \frac{3n+1}{2n^2} (izF_n)^2 + \frac{n+1}{n} izF_n - \frac{2(n-1)}{n^2(n+1)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2n} izF_n - \frac{n^2+2n-1}{n(n+1)} \quad (3.315)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.44 G_{F_n} Frank grafının özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. n çift doğal sayı olmak üzere, Frank enerji için

$$\varepsilon(G_{F_n}) < \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \frac{2}{n(n+1)^2} - \frac{3(izF_n)^2}{2n} + izF_n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \frac{1}{n+1} \quad (3.316)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. n çift doğal sayı ise

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \quad (3.317)$$

yazılır. Frank grafın özdeğerleri birbirinin çarpımsal tersi olduğundan (3.317) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur.

(3.317) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplamda $a_i = \frac{1}{\left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|}$ ve $b_i = q_i = \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|$

alınarak Lemma 2.1.25 uygulanırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \right)^2 \leq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|^2 \quad (3.318)$$

elde edilir. (3.317) ve (3.318) ifadelerinden

$$\varepsilon(G_{F_n}) \leq \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left(\frac{izF_n}{n} - \lambda_i \right) \quad (3.319)$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i^2 - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{izF_n}{n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left(\frac{izF_n}{n} - \lambda_i \right) \quad (3.320)$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i^2 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i - 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i + 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i + \frac{(izF_n)^2}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.321)$$

bulunur. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\varepsilon(G_{F_n}) \leq \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i^2 - 2 \frac{(izF_n)^2}{n} + 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i + \frac{(izF_n)^2}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.322)$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i^2 - 3 \frac{(izF_n)^2}{2n} + 2 \frac{izF_n}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.323)$$

elde edilir. (3.231) eşitsizliği burada kullanılırsa

$$\varepsilon(G_{F_n}) < \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n(n+1)} \right)^2 - 3 \frac{(izF_n)^2}{2n} + 2 \frac{izF_n}{n} \frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \frac{n}{2} \frac{2}{n(n+1)} \quad (3.324)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(izF_n^2 - \frac{2}{n(n+1)^2} - 3 \frac{(izF_n)^2}{2n} + izF_n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{izF_n}{2} - \frac{1}{n+1} \quad (3.325)$$

olur.

Teorem 3.4.45 G_{F_n} Frank grafının özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. n tek doğal sayı olmak üzere, Frank enerji için

$$\varepsilon(G_{F_n}) > \left(1 + \frac{1}{n}\right) izF_n - n - 1 \quad (3.326)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. n tek doğal sayı olduğunda Frank matrisin özdeğerlerinden bir tanesinin 1 olduğu bilindiğinden

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| + \left| 1 - \frac{izF_n}{n} \right| + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \quad (3.327)$$

eşitliği yazılır. Frank grafın özdeğerleri birbirlerinin çarpımsal tersi olduğundan (3.327) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur. (3.327) eşitliğinin sağ tarafındaki mutlak değerler kaldırılırsa

$$\varepsilon(G_{F_n}) > \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\lambda_i - \frac{iz(F_n)}{n} \right) + \left(\frac{izF_n}{n} - 1 \right) + \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \left(\frac{izF_n}{n} - \lambda_i \right) \quad (3.328)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\varepsilon(G_{F_n}) > \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_i - \frac{n-1}{2} \frac{izF_n}{n} + \frac{izF_n}{n} - 1 + \frac{n-1}{2} \frac{izF_n}{n} - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \quad (3.329)$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_i + \frac{izF_n}{n} - 1 - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \quad (3.330)$$

$$= \left(izF_n - 1 - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \right) + \frac{izF_n}{n} - 1 - \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \quad (3.331)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right) izF_n - 2 - 2 \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n \lambda_i \quad (3.332)$$

$$> \left(1 + \frac{1}{n} \right) izF_n - 2 - 2 \sum_{i=\frac{n+3}{2}}^n 1 \quad (3.333)$$

$$> \left(1 + \frac{1}{n} \right) izF_n - 2 - 2 \frac{n-1}{2} \quad (3.334)$$

bulunur. Böylece

$$\varepsilon(G_{F_n}) > \left(1 + \frac{1}{n} \right) izF_n - n - 1 \quad (3.335)$$

olur.

Teorem 3.4.46 G_{F_n} Frank grafinın özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ şeklinde olsun. n çift doğal sayı olmak üzere, Frank enerji için

$$\varepsilon(G_{F_n}) > izF_n - n \quad (3.336)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. λ_i 'ler Frank grafın özdeğerleri olmak üzere, n çift doğal sayı olduğundan

$$\varepsilon(G_{F_n}) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left| \lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right| \quad (3.337)$$

eşitliği yazılır. Frank grafın özdeğerleri birbirinin çarpımsal tersi şeklinde olduğundan (3.337) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk toplam için $\lambda_i > 1$, ikinci toplam için ise $\lambda_i < 1$ olur. (3.337) eşitliğinin sağ tarafındaki mutlak değerler kaldırılırsa

$$\varepsilon(G_{F_n}) > \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\lambda_i - \frac{izF_n}{n} \right) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \left(\frac{izF_n}{n} - \lambda_i \right) \quad (3.338)$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i - \frac{n}{2} \frac{izF_n}{n} + \frac{n}{2} \frac{izF_n}{n} - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.339)$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.340)$$

$$= \left(izF_n - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \right) - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.341)$$

$$= izF_n - 2 \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \lambda_i \quad (3.342)$$

$$> izF_n - 2 \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n 1 \quad (3.343)$$

$$= izF_n - 2 \frac{n}{2} \quad (3.344)$$

elde edilir. Böylece

$$\varepsilon(G_{F_n}) > izF_n - n \quad (3.345)$$

bulunur.

Şimdi, Frank grafin spektral yarıçapı (veya en büyük özdeğeri) için bulunan sınır değerlerini karşılaştırmak üzere sayısal bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.4.47 $n = 3, 4, 5$ için Frank grafin spektral yarıçapları sırasıyla $\rho(G_{F_3}) = 4.7912$, $\rho(G_{F_4}) = 7.3127$ ve $\rho(G_{F_5}) = 10.0629$ şeklindedir. Bu değerler için Teorem 3.4.30 ile bulunan sınır değerleri ile Sonuç 3.4.41 ile verilen sınır değerleri Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5’de verilmiştir.

Çizelge 3.4. G_{F_n} ’in spektral yarıçapı için $k + M \leq 5$ ve $k + N \leq 5$ olacak şekilde Teorem 3.4.30 kullanılarak elde edilen sınır değerleri.

n	k	M	N	Alt sınır (3.228)	Üst sınır (3.228)
3	0	1	0	3	5
3	4	1	1	4.7869	4.7934
4	0	1	1	4	8
4	4	1	1	7.2978	7.3215
5	0	1	3	6.8603	10.5844
5	4	1	0	10.0431	10.0741

Çizelge 3.5. G_{F_n} ’in spektral yarıçapı için Sonuç 3.4.41 kullanılarak elde edilen sınır değerleri.

n	Alt sınır (3.306)	Alt sınır (3.306)	Üst sınır (3.306)
3	4	—	4.8284
4	—	4	7.4749
5	6	—	10.4833

Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5 incelendiğinde ve bazı durumlarda Teorem 3.4.30 ile verilen sınırların, bazı durumlarda ise Sonuç 3.4.41 ile verilen sınırların daha iyi olduğunu gözlenmiştir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak literatürde Frank matris olarak bilinen

$$F_n = \begin{bmatrix} n & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

matrisini a_i 'ler reel sayılar olmak üzere

$$F_{a_n} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde genelleştirdik. F_{a_n} matrisinin determinantı, tersi, karakteristik polinomu gibi bazı özelliklerini inceleyerek dikkate değer bulgular elde ettik. Elde ettiğimiz bu bulgular literatürde bulunan klasik Frank matris için elde edilmiş olan bulguların genel halini oluşturmaktadır. Çalışmamızın en önemli kısmı bazı şartlar altında Sturm teorisinin genelleştirilmiş Frank matrislere uygulanabilir olduğunun gösterilmesi olmuştur. Bu kapsamda Sturm teoriiyi uygulayarak bazı şartlar altında F_{a_n} genelleştirilmiş Frank matrisinin karakteristik polinomları dizisinin bir Sturm dizisi oluşturduğu ve özdeğerlerinin birbirinden farklı ve pozitif olduğunu gösterdik. Ayrıca Fibonacci-Frank, Lucas-Frank ve Harmonik-Frank matrisleri genelleştirilmiş Frank matrislerin özel hali olarak tanımladık ve bu matrisleri göz önüne alarak elde ettiğimiz bulguların özel hallerini verdik. Son olarak komşuluk matrisi klasik Frank matris olan bir graf tanımlayarak bu grafın enerjisi ve spektral yarıçapı için sınırlar elde ettik.

Biz bu çalışmada genelleştirilmiş Frank matrisin özdeğerlerinin pozitifliğini, (a_n) reel sayı dizisinin pozitif terimli ve kesin artan dizi olması şartı altında elde ettik. Bu şart

kaldırıldığında genelleştirilmiş Frank matrisin özdeğerlerinin incelenmesi araştırmaya açıktır. Fibonacci-Frank ve Lucas-Frank matrislerin daha başka özellikleri incelenerek dikkate değer bulgular elde edilebileceği gibi bunlardan başka özel haller tanımlanarak elde edilen matrislerin özelliklerinin incelenebileceği kanısındayız. Ayrıca, bu çalışmamızın, Sturm teorisinin Max ve Min matrisler gibi bazı özel matrislere uygulanması noktasında ilham vereceği kanısındayız.



KAYNAKLAR

- [1] Frank, W.L., 1958. Computing eigenvalues of complex matrices by determinant evaluation and by methods of Danilewski and Wielandt, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6, 378-392.
- [2] Hake, J.-Fr. ve Juelich, 1985. A remark on Frank matrices, *Computing* 35, Springer-Verlag, 375-379.
- [3] Varah, J.M., 1986. A generalization of the Frank matrix, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7, 3, 835-839.
- [4] Mattila, M. ve Haukkanen, P., 2016. Studying the various properties of Min and Max matrices - elementary vs. more advanced methods, *Special Matrices*, 4, 1, 101-109.
- [5] Kılıç, E. ve Arıkan, T., 2019. Studying new generalizations of Max-Min matrices with a novel approach, *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 2010-2024 .
- [6] Sturm, C., 2009. Analyse d' un Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Collected Works of Charles François Sturm*, Birkhäuser Basel, 323-326.
- [7] Sturm, C., 2009. Extrait d'un Mémoire sur L'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, présenté à l'Académie des sciences, *Collected Works of Charles François Sturm*, Birkhäuser Basel, 334-342.
- [8] Sturm, C., 2009. Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Collected Works of Charles François Sturm*, Birkhäuser Basel, 345-390.
- [9] Greenberg, L., 1989. Sturm sequences for nonlinear eigenvalue problems, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20, 1, 182-199.
- [10] Bapat, R.B., Kalita, D. ve Pati, S., 2012. On weighted directed graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 436, 99-111.
- [11] Lou, Y. ve Hong, Y., 2015. Distributed surrounding design of target region with complex adjacency matrices, *IEEE Transactions Automatic Control*, 1, 60, 283-288.
- [12] Dong, J.G. ve Lin, L., 2016. Laplacian matrices of general complex weighted directed graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 510, 1-9.
- [13] Zhang, X.D. ve Li, J., 2002. Spectral radius of non-negative matrices and digraphs, *Acta Mathematica Sinica*, 18, 293-300.
- [14] Xu, G.H. ve Xu, C.Q., 2009. Sharp bounds for the spectral radius of digraphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 430, 1607-1612.

- [15] Maden (Güngör), A.D. ve Das, K.Ch., 2010. Improved upper and lower bounds for the spectral radius of digraphs, *Applied Mathematics and Computation*, 791-799.
- [16] Butler, B.K. ve Siegel, P.H., 2013. Sharp bounds on the spectral radius of nonnegative matrices and digraphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 439, 1468-1478.
- [17] Çallıalp, F., 2012. Çözümlü lineer cebir problemleri, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [18] Zhang, F., 2011. Matrix theory basic results and techniques, Second Edition, Springer, Newyork.
- [19] Taşcı, D., 2005. Lineer cebir, Gazi Kitapevi, Ankara.
- [20] Sabuncuoğlu, A., 2008. Lineer cebir, Nobel Yayınevi.
- [21] Horn, R.A. ve Johnson, C.R., 1985. Matrix analysis, Cambridge University Press.
- [22] Kolman, B. ve Hill, D.R., 2010. Uygulamalı lineer cebir, Palme Yayıncılık, Ankara.
- [23] Horn, R.A. ve Johnson, C.R., 1991. Topics in matrix analysis, Cambridge University Press.
- [24] Dernek, A., 2010. Çözümlü analiz problemleri, Nobel Yayınevi.
- [25] Özer, O., Çoker, D. ve Taş K., 1999. Soyut matematik, Bilim Yayınları.
- [26] Milovanović, I.Z., Milovanović, E. I. ve Matejić, M., 2018. Some inequalities for general sum-connectivity index, *MATCH Communications in Mathematical in Computer Chemistry*, 79, 477-489.
- [27] Ciarlet, P.G. ve Lions, J.L., 1994. Handbook of numerical analysis, Vol III: Solution of equations in $\mathbb{R}^n$ (Part 2), Elsevier, Amsterdam, 625-778.
- [28] Jain, M.K., Iyengar, S.R.K ve Jain, R.K, 2004. Numerical methods: problems and solutions, New Delhi:New Age International.
- [29] Mostowski, A. ve Stark, M., 1964. Introduction to higher algebra, Pergamon Press, London.
- [30] Isaacson, E. ve Keller, H.I., 1966. Analysis of numerical methods, John Wiley, New York.
- [31] Stoer, J. ve Bulirsch, R., 1980. Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, Newyork.

- [32] Mersin, E.Ö., Bahşi, M. ve Maden, A.D, 2020. Some properties of generalized Frank matrices, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 8(2), 170-177.
- [33] Mersin, E.Ö., Bahşi, M. ve Maden, A.D., 2018. Harmono-Frank matrix, *International Conference on Mathematical Studies and Applications, Proceedings*, Karaman, Turkey, 29-34.
- [34] Mersin, E.Ö., Bahşi, M. ve Maden, A.D., 2018. Almost Hadamard inverse of Frank matrix, *International Conference on Mathematical Studies and Applications, Proceedings*, Karaman, Turkey, 29-34.
- [35] Graham, R.L., Knuth, D.E. ve Patashnik, O., 1994. *Concrete mathematics*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company.
- [36] Koshy, T., 2001. *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, New York: Wiley.
- [37] Gross, J.L. ve Yellen, J., 2006. *Graph theory and its applications*, Second Edition, CRC Press, New York.
- [38] Harary, F., 1969. *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- [39] Cvetković, D., Doob, M. ve Sachs, H., 1980. *Spectra of graphs-theory and application*, Academic Press, Newyork.
- [40] Bondy, J.A. ve Murty, U.S.R., 1976. *Graph theory with applications*, North-Holland, New York Amsterdam Oxford.
- [41] Xi, W. ve Wang, L., 2019. On the signless Laplacian spectral radius of weighted digraphs, *Discrete Optimization*, 32, 63-72.
- [42] Li, B. ve Zhang, S., 2012. Notes on heavy cycles in weighted digraphs, *Applied Mathematics Letters*, 25, 1629–1631.
- [43] Bhat, M.A., 2017. Energy of weighted digraphs, *Discrete Applied Mathematics*, 223, 1-14.
- [44] Yang, Y., Xie, G. ve Xie, J., 2017. Mining important nodes in directed weighted complex networks, *Discrete Dynamics in Nature and Society* Vol. 2017, Article ID: 9741824.
- [45] Bravo, D., Cubría, F. ve Rada, J., 2017. Energy of matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 312, 149-157.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Efruz Özlem Mersin

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Anadolu Üniversitesi, 2001-2006

Yüksek Lisans (Tezsiz) : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2006-2007

Yüksek Lisans : Niğde Üniversitesi, 2010-2014

Doktora : Niğde Üniversitesi, 2014-2015

(Yatay geçiş) : Aksaray Üniversitesi, 2015-2021

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Üniversitesi / Öğretim Görevlisi / 2009-Halen

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Mersin, E.Ö., Bahşi, M. ve Maden, A.D., 2020. Some Properties of Generalized Frank Matrices, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 8, 2, 170-177 (TR Dizin).
2. Mersin, E.Ö., Bahşi, M., 2021. Sturm Theorem for the generalized Frank matrix, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (Kabul edildi, SCI-Expanded)

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Mersin, E.Ö., Maden, A.D. ve Bahşi, M., 2018. Harmono-Frank Matrix, International Conference on Mathematical Studies and Applications, Proceedings, Karaman, Turkey, 305-310.
2. Mersin, E.Ö., Bahşi, M. ve Maden, A.D., 2018. Almost Hadamard Inverse of Frank Matrix, International Conference on Mathematical Studies and Applications, Proceedings, Karaman, Turkey, 29-34.