

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY MANDELBROT CÜMLELERİ

DOKTORA TEZİ

İbrahim İNCE

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Soley ERSOY

Haziran 2022

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY MANDELBROT CÜMLELERİ

DOKTORA TEZİ

İbrahim İNCE

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ

Bu tez 20 / 06 /2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Soley ERSOY
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
Hakan YAKUT
Üye**

**Doç. Dr.
Selma ALTUNDAĞ
Üye**

**Doç. Dr.
Murat KİRİŞÇİ
Üye**

**Doç. Dr.
Fuat USTA
Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

İbrahim İNCE

20.06.2022

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak gelişimime katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Soley Ersoy’a çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatımın her anında yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, varlıklarından güç aldığım değerli aileme çok teşekkür ederim.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)’a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
TABLOLAR LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
SUMMARY.....	xi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
MANDELBROT CÜMLESİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MANDELBROT CÜMLELERİ.....	7
2.1. Julia Cümlesi.....	7
2.1.1. Julia cümlesinin yörüngeleri.....	11
2.2. Mandelbrot Cümlesi.....	15
2.3. Mandelbar Cümlesi.....	25
2.4. Genelleştirilmiş Mandelbrot Cümleleri.....	29
2.5. Genelleştirilmiş Mandelbar Cümleleri.....	35
BÖLÜM 3.	
FUZZY CÜMLELER, FUZZY REEL VE KARMAŞIK SAYILAR, FUZZY TOPOLOJİ.....	39
3.1. Fuzzy Cümleler.....	39
3.2. Fuzzy Reel Sayı.....	46

3.3. Fuzzy Karmaşık Sayı.....	49
3.4. Fuzzy Topolojik Uzay.....	50
BÖLÜM 4.	
FUZZY MANDELBROT VE FUZZY MANDELBAR CÜMLELERİ.....	55
4.1. Fuzzy Mandelbrot Cümlesi.....	56
4.2. Fuzzy Mandelbar Cümlesi.....	86
BÖLÜM 5.	
GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY MANDELBROT VE FUZZY MANDELBAR CÜMLELERİ.....	114
5.1. Genelleştirilmiş Fuzzy Mandelbrot Cümleleri.....	114
5.2. Genelleştirilmiş Fuzzy Mandelbar Cümleleri.....	134
BÖLÜM 6.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	153
KAYNAKLAR.....	154
ÖZGEÇMİŞ.....	161

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^α	: A fuzzy cümlesinin α – kesiti
$A(w)$	: Çekim havzası
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar cümlesi
$\mathcal{F}(X)$	: Fuzzy cümleler ailesi
$\mathcal{F}^*(\mathbb{C})$	: Fuzzy karmaşık sayılar uzayı
$\mathcal{F}^*(\mathbb{R})$	: Fuzzy reel sayılar uzayı
$J(f)$	: Julia cümlesi
$K(f)$	: Doldurulmuş Julia cümlesi
M	: Mandelbrot cümlesi
M_{BAR}	: Mandelbar cümlesi
M^p	: Genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesi
M_{BAR}^p	: Genelleştirilmiş Mandelbar cümlesi
$\tilde{M}$	: Fuzzy Mandelbrot cümlesi
$\tilde{M}_{BAR}$	: Fuzzy Mandelbar cümlesi
$\tilde{M}^p$	: Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi
$\tilde{M}_{BAR}^p$	: Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi
μ	: Üyelik fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\text{supp}(A)$	: A fuzzy cümlesinin destek cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. $c = i$ için Julia cümlesi.....	10
Şekil 2.2. $c = -1$ için Julia cümlesi.....	11
Şekil 2.3. Mandelbrot cümlesi içindeki bazı Julia cümleleri.....	16
Şekil 2.4. İterasyon adım sayısına bağlı olarak Mandelbrot cümlesi şekilleri.....	17
Şekil 2.5. Mandelbrot cümlesinin gövdesi ve kafası.....	24
Şekil 2.6. Mandelbar cümlesi.....	25
Şekil 2.7. Mandelbar ile Mandelbrot cümle grafikleri ve yakın görünüşleri.....	26
Şekil 2.8. K_n cümleleri.....	28
Şekil 2.9. Genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesinin farklı kuvvet gösterimleri.....	29
Şekil 2.10. Genelleştirilmiş Mandelbrot cümleleri.....	31
Şekil 2.11. Genelleştirilmiş Mandelbar cümleleri.....	36
Şekil 3.1. Reel sayılardaki iki fuzzy cümlelerin bileşimi ve kesişimi.....	43
Şekil 3.2. Reel sayılardaki konveks ve konveks olmayan fuzzy cümleler.....	44
Şekil 3.3. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu grafiği.....	47
Şekil 3.4. $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonu grafiği.....	48
Şekil 4.1. L bölgesindeki c karmaşık sayılarının Mandelbrot cümlesine aitlik algoritması.....	56
Şekil 4.2. Sonlu maksimum iterasyon sayısı n için fuzzy Mandelbrot cümlesinin yaklaşık görünüşleri.....	59
Şekil 4.3. [27]'de verilen üyelik fonksiyonu (ilk satır) ve Tanım 4.1.1.'de verilen üyelik fonksiyonu (ikinci satır).....	60
Şekil 4.4. Verilen bir c karmaşık sayısının fuzzy Mandelbrot cümlesine üyelik derecesi algoritması.....	61
Şekil 4.5. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin göbeğinin üç boyutlu görünümü.....	66
Şekil 4.6. $k = 1$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	66

Şekil 4.7. $k = 1$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	67
Şekil 4.8. $k = 2$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	69
Şekil 4.9. $k = 2$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	69
Şekil 4.10. $k = 3$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	70
Şekil 4.11. $k = 3$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	70
Şekil 4.12. $k = 4$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	71
Şekil 4.13. $k = 4$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	72
Şekil 4.14. $k = 5$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	73
Şekil 4.15. $k = 5$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	73
Şekil 4.16. $k = 6$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	74
Şekil 4.17. $k = 6$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	75
Şekil 4.18. $k = 7$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	76
Şekil 4.19. $k = 7$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	76
Şekil 4.20. n için fuzzy Mandelbrot cümlesi algoritması.....	77
Şekil 4.21. $n = 2000$ için fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	78
Şekil 4.22. CPU zamanına dayalı performans profili.....	78
Şekil 4.23. $\tilde{M} _{\mathbb{R}} = \{(c, \mu _{\mathbb{R}}(c)) \mid c \in \mathbb{R}\}$ fuzzy cümlesinin grafik gösterimi.....	81
Şekil 4.24. Sonlu maksimum iterasyon sayısı n için fuzzy Mandelbar cümlesinin yaklaşık görünümleri.....	88
Şekil 4.25. Verilen bir c karmaşık sayısının fuzzy Mandelbar cümlesine üyelik derecesi algoritması.....	89
Şekil 4.26. Fuzzy Mandelbar cümlesinin göbeğinin üç boyutlu görünümü.....	94
Şekil 4.27. $k = 1$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	94
Şekil 4.28. $k = 1$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	95
Şekil 4.29. $k = 2$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	96
Şekil 4.30. $k = 2$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	97
Şekil 4.31. $k = 3$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	98
Şekil 4.32. $k = 3$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	98

Şekil 4.33. $k = 4$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	99
Şekil 4.34. $k = 4$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	99
Şekil 4.35. $k = 5$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	100
Şekil 4.36. $k = 5$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	101
Şekil 4.37. $k = 6$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	102
Şekil 4.38. $k = 6$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	102
Şekil 4.39. $k = 7$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği.....	103
Şekil 4.40. $k = 7$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği.....	104
Şekil 4.41. n için fuzzy Mandelbar cümlesinin grafik algoritması.....	105
Şekil 4.42. $n = 2000$ için fuzzy Mandelbar cümlesi.....	106
Şekil 4.43. CPU zamanına dayalı performans profili.....	106
Şekil 5.1. $p = 3$ için fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	116
Şekil 5.2. $p = 4$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	116
Şekil 5.3. $p = 5$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	116
Şekil 5.4. $p = 6$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	117
Şekil 5.5. $p = 10$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	117
Şekil 5.6. $p = 100$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi.....	117
Şekil 5.7. Bazı yineleme adımları için fuzzy Mandelbrot cümlesinin grafikleri....	118
Şekil 5.8. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin farklı bakış açıları ile görünüşleri.....	119
Şekil 5.9. Verilen bir c karmaşık sayısının geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesine üyelik derecesi algoritması.....	129
Şekil 5.10. $n = 30$ yineleme adımı için bazı geliştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinin gri ölçekli grafikleri üzerindeki bazı noktalar.....	130
Şekil 5.11. $p = 3$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	135
Şekil 5.12. $p = 4$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	135
Şekil 5.13. $p = 5$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	136
Şekil 5.14. $p = 6$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	136
Şekil 5.15. $p = 10$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	136
Şekil 5.16. $p = 100$ için geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi.....	137

Şekil 5.17. Verilen bir c karmaşık sayısının genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesine üyelik derecesi algoritması.....	146
Şekil 5.18. $n = 30$ yineleme adımı için bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin gri ölçekli grafikleri üzerindeki bazı noktalar.....	147



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 5.1. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesindeki bazı karmaşık c noktalarının üyelik dereceleri.....	129
Tablo 5.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesindeki bazı karmaşık c noktalarının üyelik dereceleri.....	147



ÖZET

Anahtar kelimeler: Fuzzy cümle, Mandelbar cümlesi, Mandelbrot cümlesi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Julia cümlesi, Julia cümlesinin yörüngeleri, Mandelbrot cümlesi, Mandelbar cümlesi, genelleştirilmiş Mandelbrot cümleleri ve genelleştirilmiş Mandelbar cümlelerine ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy cümleler, fuzzy reel sayılar, fuzzy karmaşık sayılar ve fuzzy topolojik uzayların temel tanım ve teoremleri tanıtılmıştır. Bunlara ek olarak, herhangi fuzzy cümlenin bir fuzzy sayı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar ifade edilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölüm bu tez çalışmasının orijinal kısımlarını oluşturmaktadır. Dördüncü bölümün giriş kısmında fuzzy Mandelbrot cümlesi için yeni bir tanım verilmiştir. Bu yeni tanımın literatürdeki mevcut tanımın yetersizliğini nasıl ortadan kaldırdığı hem görsel hem de cebirsel olarak açıkça ifade edilmiştir. Ayrıca fuzzy Mandelbrot cümlesinin oluşum aşamaları farklı iterasyon adımları için ayrı ayrı incelenmiştir. Yeni tanımlanan fuzzy Mandelbrot cümlesinin topolojik özellikleri araştırılmıştır. Bu bölümün ikinci alt bölümünde ise fuzzy Mandelbar cümlesi tanıtılmış, geometrik, cebirsel ve topolojik açıdan incelenmiştir. Bu cümlenin fuzzy Mandelbrot cümlesiyle olan benzerlikleri ve farklılıkları da araştırılmıştır.

Beşinci bölümde tez çalışmasının temel hedefi doğrultusunda, dördüncü bölümde elde edilen yeni bilgiler göz önüne alınarak genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot ve genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümleleri tanıtılmıştır. Sahip oldukları özellikler ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilerek ilgili algoritmalar verilmiştir. Bu cümlelerin detaylı görselleri de sunulmuştur. Sonuç olarak, elde edilen veriler ile gelecekte yapılacak olan yeni araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

GENERALIZED FUZZY MANDELBROT SETS

SUMMARY

Keywords: Fuzzy set, Mandelbar set, Mandelbrot set

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic definitions and theorems related to the Julia set, the orbits of the Julia set, Mandelbrot set, Mandelbar set, the generalized Mandelbrot sets, and the generalized Mandelbar sets are given. In the third chapter, the basic definitions and theorems of fuzzy sets, fuzzy real numbers, fuzzy complex numbers, and fuzzy topological spaces are introduced. In addition to these, the necessary and sufficient conditions are expressed for any fuzzy set to be a fuzzy number.

The fourth and fifth chapters constitute the original parts of this thesis. In the introduction part of the fourth chapter, a new definition is given for the fuzzy Mandelbrot set. It is expressed both visually and algebraically in detail how this new definition removes the inadequacy of the existing definition in the literature. In addition, the formation stages of the fuzzy Mandelbrot set are examined separately for different iteration steps. The topological properties of the newly defined fuzzy Mandelbrot set are investigated. In the second subsection of this section, the fuzzy Mandelbar set is introduced and analyzed from geometric, algebraic, and topological aspects. The similarities and differences between this set and the fuzzy Mandelbrot set are also investigated.

In the fifth chapter, in accordance with the main purpose of this thesis, the generalized fuzzy Mandelbrot and generalized fuzzy Mandelbar sets are introduced under consideration of the new information acquired in the fourth chapter. By stating the basic definitions and theorems related to their properties and the relevant algorithms are given. Detailed images of these sets are also presented. Consequently, suggestions are expressed for new research to be done in the future with the obtained data.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematik bilimi ile gerçek dünya problemlerinin birbirinden ayrı düşünülmesi imkânsızdır. Dolayısıyla matematiksel keskinlikle açıklanamayan durumlar için de matematiğin kendini geliştirmesi ve yeni teorilerin inşa edilmesi kaçınılmazdır. Yaklaşık olarak M.Ö. 400 yıllarında klasik mantıkta bir önermenin sadece “doğru” veya “yanlış” olma değerlerine sahip olması durumunun yerine geçebilecek ilk söylem Heraclitus tarafından “Bir durum aynı anda doğru olma değerine sahip olmakla birlikte doğru olmama değerine de sahip olabilir” şeklinde ifade edilmiştir. Bu söylemle birlikte matematiğin mükemmel keskinliği törpülenmiş ve bulanık gerçek hayat problemlerini matematiksel olarak ifade edebilme araştırma sorusu olarak gündeme gelmiştir. Bu soruya bir örnek vermek için günlük hayatımızda karşılaştığımız bir durum ele alınsın. Bir odanın kapısının kapalı olma durumu “1” doğruluk değeri ile kapının ardına kadar açık olma durumu ise “0” doğruluk değeri ile ifade edilirse kapının biraz aralık olması durumu için hangi doğruluk değeri kullanabilir? Kapı tamamen kapalı olmadığından “1” doğruluk değerine sahip olamaz, bununla birlikte ardına kadar açık olmadığından “0” doğruluk değerine de sahip değildir. Bu durumu klasik mantık ile formüle etmek mümkün değildir. 19. yüzyılda Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) tarafından geliştirilen klasik cümle teorisine göre ise bir eleman bir cümleye ya aittir ya da ait değildir. Bunların dışındaki durumlar formüle edilememektedir ve Cantor’un cümle teorisi bir anlamda klasik mantığın ilkelerine dayanmaktadır. Sonuç olarak klasik cümle teorisi bulanık durumları ifade etmek için uygun değildir.

İşte bu noktada, klasik cümle teorisine alternatif olarak 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [1] tarafından üyelik fonksiyonunun tanıtılmasıyla fuzzy (bulanık) cümle teorisi için çalışmalar başlamıştır. Bir fuzzy cümle, her nesneye bir üyelik derecesi (0 ile 1 arasında değer alan bir sayı) atayan bir üyelik fonksiyonu ile karakterize

edilmektedir. Bu durum yukarıda verilen kapı örneği için yorumlanırsa odanın kapısının “açık, açığa çok yakın aralıklı,..., aralıklı,..., kapalıya çok yakın aralıklı, kapalı” gibi konumları için formüle etmek amacıyla kapının tamamen açık olduğu durumda kapıyla çakışık bir eksenle yaptığı açıları $[0, \pi/2]$ aralığından seçerek $[0,1]$ aralığına giden bir üyelik fonksiyonu tanımlanabilir ve böylece kapının her bir pozisyonuna karşılık bir doğruluk değeri verilebilir. Görüldüğü üzere fuzzy yaklaşım ile matematik için belirsiz olan durumlar da sayısal olarak ifade edilerek, ölçülebilecek hale dönüşürler. Bu yaklaşımın sağlayacağı faydalardan biri de, bilgisayarlara artık insan gibi düşünebilme ve insan gibi hissedebilme içgüdüleri kazandırmaktır. Hatta geçmiş yaşam tecrübelerimiz ve yeteneklerimiz makinelere aktarılıp bu bilgilerden maksimum verim alınabilir. Bu yaklaşımın hayata geçtiği yerlerden biri de Japonya’daki Sendai metrosudur. Bu metronun teknolojik altyapısında fuzzy cümle teorisi kullanılarak kalkış ve duruşların göreceli düzgünlüğünün hesaba katılması ile kusursuza yakın hareket etmesi sağlanmıştır. Böylece ayaktaki yolcular dahi hareketten etkilenmemektedir. Hatta ayaktaki yolcular hiçbir yere tutunmadan kahvelerini rahatlıkla yudumlayabilmektedir.

Fuzzy cümle ve fuzzy mantık teorilerinin inşasında Zadeh’in [1-5] makaleleri ve Yager’in [6] makalesi temel kabul edilmektedir. Cümle teorisinde yeni bir çıkış açan Zadeh’in [1] makalesi, çok sayıda bilim insanı arasında muazzam bir ilgi uyandırmış ve farklı yeni yaklaşımların da doğması için ilham kaynağı olmuştur. Fuzzy cümle teorisinin temel kavramlarının literatüre kazandırılmasının ardından, Běhounek, Cintula, Kandel, Kosko ve Tamir gibi birçok araştırmacı bu kavramlar için aksiyomatik bir çerçeve oluşturmuştur [7-12]. Mizumoto ve Tanaka üyelik fonksiyonu üzerindeki işlemleri tanıtmışlardır [13]. Diğer taraftan, fuzzy sayılar üzerinde işlemler 1978 ve 1980 yıllarında Dubois ve Prade tarafından [14, 15] makalelerinde çalışılmıştır. Ayrıca 1978 yılında Nguyen tarafından [16]’da fuzzy reel sayılar ele alınmıştır. Bununla birlikte 1994 yılında Gähler ve Gähler [17]’de fuzzy sayılar üzerine çalışmışlardır.

Bu süreçte fuzzy topoloji üzerine temel kavramlar 1988 yılında Eklund ve Gähler tarafından [18, 19]’da, fuzzy sayılar ve sistemler üzerine işlemler ve defuzzy

sayıların topolojik özellikleri de 1983 ve 1986 yıllarında Goetschel ve Voxman tarafından [20, 21]'de tanıtılmıştır. 1987 yılında Buckley [22] ve [23] makalelerinde fuzzy karmaşık cümleler fikrini ortaya atmıştır. Ayrıca Buckley fuzzy sayılar teorisinin geliştirilmesi üzerine çalışırken, Tamir de CFL (karmaşık fuzzy mantık) ve CFS (karmaşık fuzzy cümle) teorilerini inşa ederek fuzzy cümle teorisi ve fuzzy mantığın geliştirilmesi ile ilgilenmiştir [10-12]. Bu süreçte fuzzy cümlelerin birçok uygulaması ile bir yandan teknolojik ilerlemeler sürerken bir yandan da fuzzy cümleler üzerine teorik düşünceler Goguen [24], Brown [25] ve De Luca, Termini [26] gibi birçok bilim insanı tarafından geliştirilmeye devam etmiştir.

Sonuç olarak günümüzde belirsiz koşullar altında, bulanıklaştırmanın birçok alanda farklı teorik veya pratik problemleri analiz etmek için kullanıldığı bilinmektedir ve popüler alanlardan biri olan fraktal kuramındaki uygulamaları da [23, 27-29] çalışmalarında mevcuttur.

Diğer taraftan fraktallar, iterasyonlar sonucu oluşturulan dinamik sistemlerin görüntüleridir ve karmaşık dinamikler de karmaşık düzlemde tanımlı dönüşümlerin iterasyonları ile oluşan sonuçları incelemektedir. Karmaşık dinamik sistemler tarihte iki kısa periyotta yoğun bir şekilde ele alınmıştır. Temellerinin 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında atıldığı bilinmektedir. İlk periyot içerisinde Leau, Schröder, Koenings, Böttcher gibi matematikçiler iterasyonlar altında karmaşık fonksiyonların belli davranışları ile ilgilenmişlerdir. Çalışmaları öncelikli olarak sabit nokta etrafındaki iterasyonların davranışlarına odaklanmıştır. Bu köklü çalışma alanının temeli kabul edilen eser ise Devaney'in [30] tez çalışmasıdır.

Karmaşık dinamiklerin araştırılması sürecinde 1918-1920 yılları arasında iki Fransız matematikçi Julia ve Fatou'nun öncülüğünde çarpıcı bir gelişme meydana gelmiştir. Julia ve Fatou, sadece belli dinamiksel davranışlar yerine daha evrensel bir görüşe varmışlar ve sabit noktaların dışında da oldukça farklı dinamik davranışlar keşfetmişlerdir [31-33]. Douady ve Hubbard, kuadratik polinomların parametreler düzlemi üzerine çalışmalar yaparak kuadratik dinamiklerin mümkün olan tüm

çeşitlerini sınıflandırmış ve Douady tavşanı olarak anılan bir cümle keşfetmişlerdir [34-36].

Bu alanda ilk başlarda el yordamıyla çizilen grafikler, çok sınırlı ve dar açıdan çizilmiştir. Bu nedenle içlerindeki muhteşem hazine bu süreçte gizli kalmıştır. Ancak dinamik sistemlerin gelişiminde ikinci büyük periyodu başlatan, 1980'lerde karmaşık dinamikleri keşfetmek için bilgisayar grafiklerini ilk kullanan kişi Benoit Mandelbrot olmuştur. Mandelbrot bir gün Hendrik S. Houthakker tarafından yönetilen bir Harvard seminerine konuşmacı olarak davet edilmiş ve seminerde sunmak istediği finans diyagramının neredeyse bire bir aynısının tahtada çizilmiş bir halde durduğunu görmesinin verdiği şaşkınlıkla beraber yeni keşfetmiş olduğu bir diyagramın nasıl olur da burada çizilmiş halde durduğu gerçeğini etrafına sormasıyla öğrenmiştir. Bu diyagram Mandelbrot'tan önce pamuk fiyatları üzerine araştırma yapan araştırmacıların çizimidir ve diyagramdaki isimler, tarihler, değerler silindiği zaman geriye kalan inişli çıkışlı grafikler günlük, aylık, yıllık olarak bütünüyle ele alınırsa özünde aynıdır ve eşit derecede kıvrımlı yapıya sahiplerdir. İşte bu noktada ortaya çıkan durumun grafiksel yansıması fraktallardır. Sonuç olarak, diyagramların matematiksel ifadeleri aynıdır. Bu gelişme Benoit Mandelbrot'un fraktal geometrinin öncüsü olarak anılması ile sonuçlanmıştır. Günümüzde temel olarak iki adet fraktal üretim yöntemi bulunmaktadır. Bu araçlardan biri yinelenen fonksiyon sistemi (IFS) iken diğeri ise kaçış zamanı algoritması (ETA)'dır. Fraktalları tanımlamanın doğrudan yolu yinelenen fonksiyon sistemi (IFS) olmasına rağmen parametreleri kolayca hesaplanamayan karmaşık fraktal görüntülerinin çizdirilmesi için kaçış zamanı algoritması (ETA) daha kullanışlıdır.

Benoit Mandelbrot'a ithaf edilerek Douady tarafından Mandelbrot cümlesi olarak adlandırılan cümlenin keşfi, birçok matematikçiyi bu alanda yeni araştırmalar yapmaya yönlendirmiştir. Çünkü Mandelbrot cümlesi içinde birçok kaotik durumu içerse de matematiksel ifadesi itibarı ile oldukça basittir. Lyubich, McMullen ve Milnor gibi bilim insanları Mandelbrot cümlesinin dinamik yapısı üzerine araştırmalar yaparken Shishikura, Mandelbrot ve Julia cümlelerinin boyutlarını incelemiş, Yoccoz ise yerel bağlantılılık üzerine yoğunlaşmıştır [37-44]. Ayrıca

Mandelbrot cümlesinin birçok farklı özelliği uzun süre araştırmacıların ilgi odağı olmuştur [30, 34-36, 45-59].

Crowe, Hasson, Rippon ve Strain-Clark, Mandelbrot cümlesini başka bir açıdan ancak aynı metodolojiyi kullanarak incelemiş ve merak uyandıran bir akrabası olan Mandelbar cümlesini keşfetmişlerdir [60]. Bu çalışmada Mandelbrot cümlesiyle biçimsel bir benzerlik içinde değerlendirme yapılarak noktalardan ziyade yaylar boyunca çatallanmalara sahip olduğu gösterilen bu yapı için Mandelbar adı ilk olarak Crowe ve araştırmacı arkadaşları tarafından verilmiştir [60]. Ancak bu keşfe yakın bir zamanda Milnor tarafından “Tricorn” adı verilen ve anti-holomorfik polinomlar ile tanımlanan cümle için bağlantılılık özelliği önemli bir rol oynamaktadır [63]. Tricorn, Mandelbrot cümlesinde görülmeyen kübik bağlantılılık odağının birkaç temel özelliğine sahiptir. Bu özellikler, tek periyotlu hiperbolik bileşenlerinin sınırlarıyla ve özellikle yarı-uyumlu olarak eşdeğer parabolik Julia cümleleriyle ilgilidir. Mandelbrot cümlesi hakkındaki meşhur ispatlanamamış “Mandelbrot cümlesi yerel bağlantılıdır” varsayımının aksine “Tricorn yerel bağlantılı ve hatta yayla bağlantılı değildir” görüşü Winters [61], Lavaurs [62] ve Milnor [63]’un çalışmaları arasında bir varsayımdan ibarettir. Ancak [64] ve [65]’de Tricorn cümlesinin bağlantılı olduğunun kanıtları mevcuttur. Ayrıca Mandelbrot cümlesine paralel olarak Tricorn cümlesinin kendisi de, kritik noktanın tek periyotlu parametrelerinin yakınında kendisinin küçük kopyaları gibi görünebilecek benzerlerini içermektedir. Winters [61], Mandelbar cümlesinin sınırının düzgün bir yay içerdiğini göstermiştir.

Mandelbar cümlesi, karmaşık düzlemin kompakt bir alt cümlesi olduğundan Mandelbrot cümlesiyle pek çok benzerliği vardır. Mandelbrot cümlesi gibi, Mandelbar cümlesi de kompakttır ve 2 yarıçaplı merkezli çember içerisinde kalmaktadır. Dahası, reel eksene göre simetrik olmasının yanı sıra $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ aralığıyla kesişime sahip olması itibarı ile Mandelbrot cümlesiyle benzerdir. Bu özelliklere ek olarak orijin etrafında $2\pi/3$ dönme simetrisine sahip olması Mandelbar cümlesinin farklılığıdır.

Göreceli olarak yakın olduğu düşünülen tarihlerde de Mandelbrot cümlesinin genelleştirilme adımları atılmaya başlanmıştır. k pozitif tamsayı olmak üzere M^k genelleştirilmiş Mandelbrot (Multibrot) cümlesinin periyodik yörüngesini hesaplayabilmek adına bir polinom yöntemi Huang tarafından hazırlanmıştır [66]. Aynı zamanlarda Gujar ve Dhurandhar k gerçel sayısı için ve Shirriff k karmaşık sayısı için tanımlı M^k cümlesinin fraktal yapısını incelemiştir [50, 67, 68]. Genel olarak bu konu üzerine araştırma yapan bilim insanları yaşadıkları dönemin bilgisayarlarının sunduğu grafik programlarının gelişmişlik düzeylerine bağlı olarak birbirinden farklı k sayıları için ortaya çıkan M^k cümlelerinin dinamik özelliklerini matematiksel analiz kullanarak araştırmak zorunda kalmıştır. Ancak teknolojinin sınırlarını aştığı milenyum çağı ile birlikte bilgisayar grafik tasarım programlarının gelişmesi, M^k cümlesinin de ayrıntılı çizimlerini sunarak daha detaylı biçimde araştırılmasına olanak vermiştir. Bu alanda çalışan araştırmacılar arasında Wang, M^k cümlesinin kaçış zamanlı bölen periyodik noktalarını incelerken, Noah da k çift tamsayısı için M^k cümlesinin yarıçapını hesaplamıştır [69, 70]. Bu keşiflere ek olarak, Andreadis M^k cümlesine sayısal bir yaklaşım hesabı geliştirmiş ve Singh, genel fraktallar için yeni bir iterasyon yaklaşımı ortaya çıkarmıştır [71, 72].

Bu tez çalışmasında da karmaşık düzlemin fraktal alt cümleleri olan genelleştirilmiş Mandelbrot ve Mandelbar cümlelerinin, fuzzy cümle kuramının sağladığı yeni bakış açısıyla incelenmesi hedeflenmektedir. Daha açık bir deyişle, bu tez çalışmasının bilim insanlarının yoğun ilgi odağı olan fraktallara ait olmayan noktaların da cümlelere ait olmaya ne kadar yakın olduklarını belirleyen üyelik dereceleri ile birlikte ele alınmasının bu kaotik yapıların matematiksel ve görsel açıdan anlaşılmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

BÖLÜM 2. MANDELBROT CÜMLESİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MANDELBROT CÜMLELERİ

2.1. Julia Cümlesi

Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere $z = a + ib$ sayısına bir karmaşık sayı denir ve karmaşık sayılar cümlesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Bir z karmaşık sayısının reel kısmı a ve sanal kısmı b ise $a = \text{Re}(z)$ ve $b = \text{Im}(z)$ ile gösterilir. $z = a + ib$ karmaşık sayısının $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ile gösterilen mutlak değeri (a, b) vektörünün Öklidyen uzaklığıdır. Karmaşık sayılar cümlesi üzerinde tanımlı dönüşümlerin tekrarlama ile oluşan karmaşık dinamik sistemler, 20. yüzyılın başlarında Pierre Fatou [34, 35] ve Gaston Julia [33] çalışmaları öncülüğünde popüler olan nispeten yeni bir çalışma alanıdır. Özellikle $f_c(z) = z^2 + c$ karmaşık kuadratik polinomunun davranışını ayrıntılı bir şekilde inceleyen [30, 46, 47, 73, 74] çalışmalarındaki temel tanım, teorem ve ispatlar bu bölümde özetlenmektedir.

$\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, genişletilmiş karmaşık düzlemi göstermek üzere $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu altında bir z_0 sayısının yörüngesi

$$z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f^2(z_0), \dots, z_n = f^n(z_0) = f(z_{n-1}), \dots$$

şeklindeki sayı dizisidir. Burada f^n ile f fonksiyonunun n . iterasyonu temsil edilir yani fonksiyon kendisiyle n defa bileşke işlemine girer. z_0 noktası yörüngenin çekirdeği olarak adlandırılır. Her bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası için sayı dizisinin davranışı incelenir. Özellikle n sonsuza gittiğinde dizinin ıraksak ya da yakınsak olmasıyla ilgilenilir [51]. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ karmaşık sayı dizisi sonsuza yaklaşıyor ise $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ yani

herhangi $r > 0$ olmak üzere $\forall n > N$ için $|z_n| > r$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla tüm z_n değerleri yeterince büyük n değerleri için r yarıçaplı bir açık yuvarın dışında bulunur. z_n değerlerinin bir doğru veya eğri boyunca yaklaşması gerekmez. Sadece mutlak değerleri büyür. $n \geq 2$, $a_n \neq 0$ ve $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ katsayıları karmaşık sayılar olmak üzere n . dereceden bir polinom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ olsun. Bu şekildeki f fonksiyonu yardımıyla oluşan Julia cümlesi

$$J(f) = \partial \left\{ z \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f^n(z) \rightarrow \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Böylece Julia cümlesi, yineleme fonksiyonu altında sonsuza kaçan z noktaları cümlesinin sınırıdır. Julia cümlesi adını Fransız matematikçi Gaston Julia'dan alır.

Julia cümlesinin en basit örneği $f(z) = z^2$ için oluşur. Burada $f^n(z) = z^{(2^n)}$ ile gösterilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $f^n(z) \rightarrow \infty$ olması için gerek ve yeter şart $|z| > 1$ olmasıdır. Dolayısıyla Julia cümlesinin sınırı $\{z \mid |z| = 1\}$ olan orijin merkezli birim çemberdir. Bu özel Julia cümlesi bir fraktal olmamasına rağmen Julia cümleleri genellikle birer fraktaldır. Ancak $f(z) = z^2$ fonksiyonunun orijin merkezli birim çembere kısıtlanması kaotik bir davranış sergiler. Özellikle f fonksiyonunun iterasyonları altında sınırlı kalan yörüngelerin cümlesi

$$K(f) = \left\{ z \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f^n(z) \not\rightarrow \infty \right\}$$

olarak tanımlanır ve doldurulmuş Julia cümlesi olarak adlandırılır [75]. Doldurulmuş Julia cümlesi, gerçek Julia cümlesinin sadece sınırının aksine yörüngeleri sıkıştırılmış noktalardan oluşur. Julia cümleleri ikinci dereceden özel fonksiyonlardır. c , karmaşık sayılar cümlesinde bir sabit olmak üzere iterasyon

fonksiyonu $f_c(z) = z^2 + c$ olarak tanımlı f_c ile oluşturulan Julia cümlesi yatay eksene göre simetriktir. Aşağıdaki teoremden de görüleceği gibi, $|c| < 2$ olması durumunda, f_c yinelemesi ile elde edilen değerlerin normu 2 sonucuna hiç ulaşmaz, aksi halde yörüngelerin sonsuza kaçacağı kesin olacağından iterasyon işlemi sonlandırılır.

Teorem 2.1.1. $|c| < 2$ verilsin. $z \in \mathbb{C}$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için $z_n = f_c^n(z)$ olsun. $|z_{n_0}| \geq 2$ olacak şekilde bir n_0 varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ yani $\{f_c^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ yörüngesi sonsuza kaçır ve z noktası $J(f_c)$ Julia cümlesinin elemanı değildir [74].

İspat. $|z| \geq 2$ olsun.

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \\ &\geq |z^2| - |c| \\ &= |z| \cdot \left(|z| - \frac{|c|}{|z|} \right). \end{aligned}$$

δ sayısı $|c| = 2 - 2\delta$ eşitliğini sağlasın. $[2, \infty)$ aralığı üzerinde $\phi(x) = x - \frac{|c|}{x}$ reel değerli fonksiyonun türevi dikkate alınırsa $\phi(x) \geq \phi(2)$ olur ve

$$|z| \cdot \left(|z| - \frac{|c|}{|z|} \right) \geq |z| \cdot \left(2 - \frac{|c|}{2} \right) = |z| \cdot (1 + \delta)$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece

$$|f_c(z)| \geq (1 + \delta) \cdot |z|,$$

$$|f_c^2(z)| \geq (1 + \delta) \cdot |f_c(z)| \geq (1 + \delta)^2 \cdot |z|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böyle devam edilerek yineleme fonksiyonu

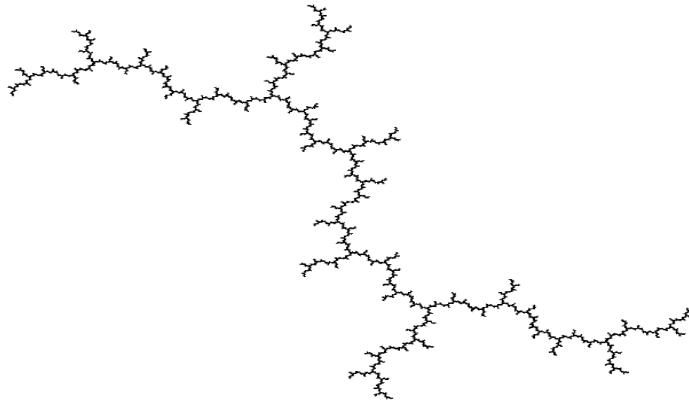
$$|f_c^n(z)| \geq (1+\delta)^n \cdot |z|$$

olarak bulunur ve n büyüdükçe bu ifade sonsuza yaklaşır.

Örnek 2.1.1. $c=i$ olmak üzere $f_i(z)=z^2+i$ yineleme fonksiyonu altında $z=0$ noktasının yörüngesi

$$\begin{aligned} f_i^0(0) &= 0 \\ f_i^1(0) &= i \\ f_i^2(0) &= -1+i \\ f_i^3(0) &= -i \\ f_i^4(0) &= -1+i \\ &\vdots \end{aligned}$$

olup $\{0, i, -1+i, -i, -1+i, -i, \dots\}$ dizisinin sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca $c=i$ için oluşan Julia cümlesi bağlantılıdır.

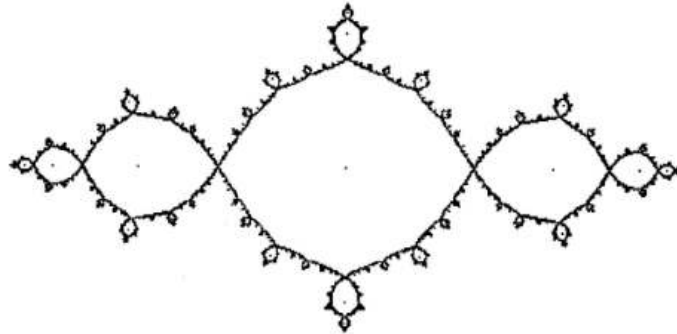


Şekil 2.1. $c=i$ için Julia cümlesi [41]

Örnek 2.1.2. $c = -1$ olmak üzere $f_{-1}(z) = z^2 - 1$ yineleme fonksiyonu altında $z = 0$ noktasının yörüngesi

$$\begin{aligned} f_{-1}^0(0) &= 0 \\ f_{-1}^1(0) &= -1 \\ f_{-1}^2(0) &= 0 \\ f_{-1}^3(0) &= -1 \\ f_{-1}^4(0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olup $\{0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ dizisinin sınırlı olduğu açıktır ve $c = -1$ için oluşan Julia cümlesi bağlantılıdır.



Şekil 2.2. $c = -1$ için Julia cümlesi [76]

2.1.1. Julia cümlesinin yörüngeleri

z , $J(f)$ Julia cümlesinin bir noktası ve $f(z)$ bir polinom olsun. $f^p(z) = z$ ise z noktasına periyodik nokta denir ve periyodu p ile gösterilir. λ ile gösterilen $(f^p)'(z)$ türev değerine bağlı olarak z periyodik noktasına

i. $\lambda = 0$ ise aşırı çeken periyodik nokta,

- ii. $|\lambda| < 1$ ise çeken periyodik nokta,
- iii. $|\lambda| = 1$ ise nötr periyodik nokta,
- iv. $|\lambda| > 1$ ise iten periyodik nokta adı verilir.

Bir periyotlu bir periyodik nokta f fonksiyonunun sabit noktası olarak adlandırılır. Yani $f(z) = z$ ise f fonksiyonunun sabit noktası z olur [74].

w noktası çeken veya aşırı çeken bir sabit nokta ise w için çekim havzası

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f^n(z) \rightarrow w\}$$

olarak tanımlanır [8]. Ayrıca ∞ noktası bu yolla sınıflandırılabilir. Karmaşık değişken teorisinde herhangi $z \in \mathbb{C}$ için $\frac{z}{\infty} = 0$ denklemi sağlanır. Bazı $r > 0$ için sonsuzun bir komşuluğu $\infty \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$ cümlesi olarak tanımlanır.

Sonsuzun w komşuluğunda tanımlanan karmaşık bir f fonksiyonunun dinamik davranışı, z noktasının $\frac{1}{z}$ ile değiştirilmesi, $f(z)$ fonksiyonunun da

$$F(z) = \frac{1}{f(1/z)}$$

ile değiştirilmesi ve f fonksiyonunun sonsuzdaki davranışının 0 noktasındaki F fonksiyonunun davranışına aktarılması aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ {}^1/z \downarrow & & \downarrow {}^1/z \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array}$$

Eğer F fonksiyonunun çeken periyodik bir noktası 0 ise f fonksiyonunun çeken periyodik noktası ∞ olur.

Örneğin, $f(z) = z^2 + c$ ise

$$F(z) = \frac{1}{f(1/z)} = \frac{z^2}{1+c \cdot z^2} \text{ ve } F'(z) = \frac{2z}{(1+c \cdot z^2)^2}$$

olmak üzere $z=0$ noktasında 0 değerine sahiptir. $f(z) = z^2 + c$ iterasyonunun aşırı çeken sabit noktası ∞ olur.

Teorem 2.1.1.1. f , $n \geq 2$ dereceli bir polinom olsun. $J(f)$ Julia cümlesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i. $J(f)$, ∞ noktası da dahil olmak üzere f fonksiyonunun her çeken sabit noktası için çekim havzasının sınırıdır.
- ii. Her iten periyodik nokta $J(f)$ cümlesinin elemanıdır ve $J(f)$, f fonksiyonunun bütün iten periyodik noktalarının kapanışıdır.
- iii. $w \in J(f)$ ve $(f^n)^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) = w\}$ olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^n)^{-1}(w)$ cümlesinin kapanışı $J(f)$ Julia cümlesidir [74].

Dahası, $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemindeki en fazla bir w noktası haricinde $J(f)$ Julia cümlesi

$$J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ (f^k)^{-1}(w) \right\}$$

şartını sağlar.

Birinci özellik, bir polinomun Julia cümlesi için daha önce verilen

$$J(f) = \partial \left\{ z \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f^{(n)}(z) \rightarrow \infty \right\} \quad (2.1)$$

tanımını içerir. Bunun nedeni, $+\infty$ noktasının çeken sabit bir noktası olmasıdır. Özel olarak $f_c(z) = z^2 + c$ durumu için gösterilmişti. İten periyodik noktaların yoğunluğu hakkındaki ikinci özellik, sıklıkla Julia cümlesinin tanımı olarak alınır. Birinci özellik her zaman geçerli değil iken ikinci özellik polinomlardan daha fazlası için geçerlidir. İkinci özellik bir kaotik dinamik sistem için gereksinimlerden biri olan periyodik noktaların yoğunluğunu geçerli kılar. Üçüncü özellik ve (2.1) denklemi sıklıkla Julia cümlesinin grafiksel temsillerini hesaplamak için kullanılır.

Bölüm başındaki $f(z) = z^2$ örneğine devam edilirse, sonlu düzlemde $z = 0$ ve $z = 1$ olmak üzere iki adet sabit nokta vardır. Ayrıca ∞ noktası da bir sabit noktadır. 0 ve ∞ noktaları aşırı çeken ve $z = 1$ iten noktadır. $z = 0$ ve $z = \infty$ için çekim havzaları, sırasıyla

$$A(0) = \{ z \mid |z| < 1 \}$$

$$A(\infty) = \{ z \mid |z| > 1 \}$$

şeklindedir. Birinci özelliğe göre

$$J(z^2) = \partial A(0) = \partial A(\infty)$$

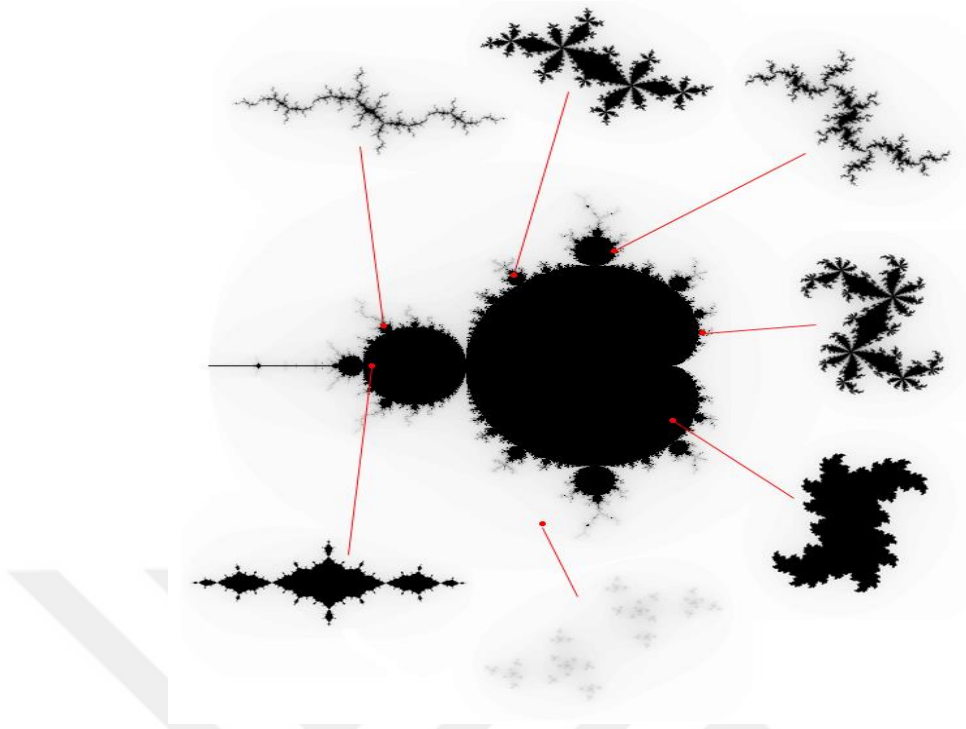
eşitliği elde edilir. $z^{2^p} = z$ denklemini sağlayan z noktaları $p = 1, 2, 3, \dots$ derecelerinin periyodik noktalarıdır. $z \neq 0$ olması durumunda ise $z^{2^p-1} = 1$ olur. Bu durumda bütün noktalar birim çember üzerinde yatar ve çevresine eşit olarak yerleşir.

$$\left| \left(f^p \right)'(z) \right| > 1$$

olduğundan sıfırdan farklı periyodik noktaların hepsi iten noktadır ve bu noktaların koleksiyonu birim çemberin yoğun bir alt cümlesini oluşturur. Bu $f(z) = z^2$ özel seçimi için ikinci durumu doğrular. $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemindeki $w=0$ durumu hariç tutularak w noktasının geriye kalan yörüngeleri birim çembere yani $J(z^2)$ cümlesine dönüşür.

2.2. Mandelbrot Cümlesi

Julia cümlelerinin iki farklı türü vardır. $f_c(z) = z^2 + c$ iterasyonu için oluşan her Julia cümlesi ya bağlantılı ya da tamamen bağlantısızdır. Ayrıca bu türlerin görünüşleri de birbirinden farklıdır. Bağlantılı olanların bazıları fraktal yapıda olan basit bağlantılı eğrilerdir öyle ki $0 < |c| < \frac{1}{4}$ eşitsizliği sağlanır. Dahası $c = -1$ için oluşan basit kapalı eğri olmayan bağlantılı Julia cümleleri de vardır. Diğer taraftan tamamen bağlantısız Julia cümleleri Cantor tozu özelliğine sahiptir. Bu bölümde tanıtacağımız Mandelbrot cümlesi, $z^2 + c$ için oluşan Julia cümlesinin iki türü için bir yer bulucu olarak görev yapar. Mandelbrot cümlesindeki her bir nokta, $J(f_c)$ Julia cümlesinin bağlantılı olduğu bir c değerini temsil eder. Bu durumla alakalı olarak aşağıdaki şekil verilmiştir.



Şekil 2.3. Mandelbrot cümlesi içindeki bazı Julia cümleleri [77]

Mandelbrot cümlesinden seçilen c değerlerinin oluşturduğu Julia cümleleri bağlantılı iken Mandelbrot cümlesinin dışından seçilenlerin oluşturduğu Julia cümleleri ise bağlantısızdır. Bağlantısız Julia cümleleri “toz” olarak adlandırılır ve hangi çözünürlükte görüntülendiğine bakılmaksızın ayrı ayrı noktalardan oluşur.

Tanım 2.2.1. $f_c(z) = z^2 + c$ iterasyon fonksiyonu olmak üzere 0 noktasının oluşturduğu dizinin sınırlı olduğu bütün $c \in \mathbb{C}$ noktalarının cümlesi

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \left\{ f_c^{(n)}(0) \right\}_{n=0}^{\infty} \text{ sınırlıdır} \right\}$$

olarak gösterilir ve Mandelbrot cümlesi olarak adlandırılır [74].

Bu tanıma denk olarak

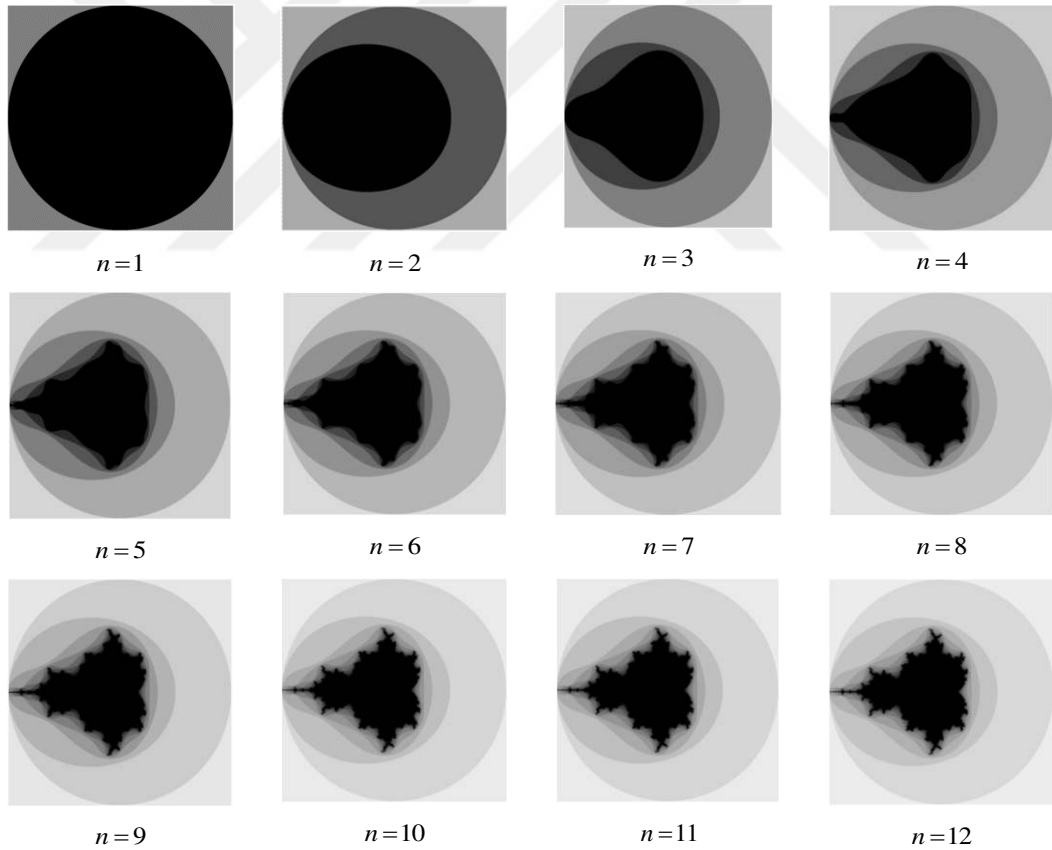
$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f_c^{(n)}(0) \not\rightarrow \infty \right\}$$

cümlesi verilir. Bu denkliği görebilmek için $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + c}{z} = \infty$ olduğuna dikkat etmek gerekir. Böylece $|z| > R$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı vardır öyle ki bu durum $|f_c(z)| > 2 \cdot |z|$ olduğunu gösterir. Bazı n_0 noktaları için

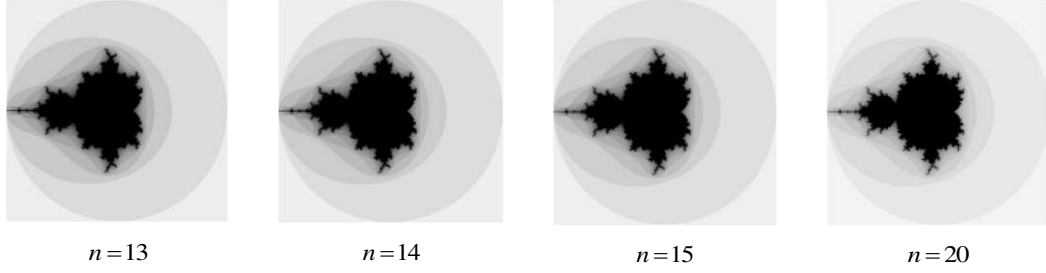
$$|f_c^{(n_0)}(z)| > 2^{n-n_0} \cdot R$$

elde edilir ve bu durumun bir sonucu olarak $f_c^{(n)}(0) \rightarrow \infty$ olduğu görülür.

İterasyon sayısına bağlı olarak Mandelbrot cümlesinin şekilleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4. İterasyon adım sayısına bağlı olarak Mandelbrot cümlesi şekilleri



Şekil 2.4. (Devamı)

Yörüngelerin sınırlı ya da sınırsız olmasına karar verebilmek için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.2.1. Eğer $|c| > 2$ ve $|z| \geq |c|$ ise z noktasının yörüngesi sonsuza kaçar. Özellikle c noktası M cümlesinin elemanı değildir [74].

İspat. $\delta > 0$ olmak üzere $|c| = 2 + \delta$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
 |f_c(z)| &= |z^2 + c| \\
 &\geq |z|^2 - |c| \\
 &\geq |z|^2 - |z| \\
 &= |z| \cdot (|z| - 1) \\
 &\geq |z| \cdot (|c| - 1) \\
 &\geq |z| \cdot (1 + \delta)
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Özellikle $|f_c(z)| > |c|$ iken bu sonuca iterasyon adımları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 |f_c^{(2)}(z)| &\geq |f_c(z)| \cdot (1 + \delta) \geq |z| \cdot (1 + \delta)^2, \\
 &\vdots \\
 |f_c^{(n)}(z)| &\geq |z| \cdot (1 + \delta)^n
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $f_c^n(z) \rightarrow \infty$ olur. Ayrıca $f_c(0)=c$ olduğundan ve c noktasının yörüngesi sonsuza kaçtığından dolayı sıfır noktasının yörüngesi de sonsuza kaçır. Teorem 2.2.1. göz önüne alınırsa sadece $|c| \leq 2$ olan c noktalarının kontrol edilmesi gerekir ve $|c| < 2$ için ortaya çıkan yörünge dizisinde norm değerinin aşıldığı bir durum varsa o yörünge sonsuza kaçır ve söz konusu nokta M cümlesine ait değildir. $c = -2$ noktası ise Mandelbrot cümlesinin elemanıdır ancak bu özelliğe sahip norm değeri 2 olan tek noktasıdır.

Lemma 2.2.1. Orijin merkezli ve $\frac{1}{4}$ yarıçaplı $S_{\frac{1}{4}}(0)$ çemberi içindeki bütün noktalar Mandelbrot cümlesi tarafından kapsanır [74].

İspat. Varsayalım ki $c \in S_{\frac{1}{4}}(0)$, yani $|c| \leq \frac{1}{4}$ olsun. f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesi,

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \left\{ (c^2 + c)^2 + c \right\}^2 + c, \dots$$

dizisidir. f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesinin sınırlı olduğunu göstermek için tümevarım uygulayalım.

$$|f_c(0)| = |c| \leq \frac{1}{4},$$

$$|f_c^2(0)| = |f_c(c)| = |c^2 + c| \leq |c^2| + |c| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

⋮

Herhangi r doğal sayısı için $|f_c^r(0)| < \frac{1}{2}$ olduğunu kabul edelim.

$$|f_c^{r+1}(0)| = |f_c^r(f_c^r(0))| = \left| \{f_c^r(0)\}^2 + c \right| \leq |f_c^r(0)|^2 + |c| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Şu halde f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesi sınırlıdır. Böylece $c \in M$ bulunur.

Lemma 2.2.2. M Mandelbrot cümlesi sınırlıdır [74].

İspat.

$$|f_c(0)| = |c|,$$

$$|f_c^2(0)| = |f_c(c)| = |c^2 + c| \geq |c^2| - |c| = |c| \cdot (|c| - 1)$$

olduğu biliniyor. $|c| > 2$ için $\delta = |c| - 1 > 1$ olmak üzere $|f_c(c)| \geq |c| \cdot \delta$ bulunur. Bu şekilde

$$|f_c^3(0)| = |f_c(f_c(c))| \geq |f_c(c)| \cdot \delta \geq |c| \cdot \delta^2$$

elde edilir. Kabul edelim ki bazı $m \in \mathbb{N}$ sayıları için $|f_c^m(0)| \geq |c| \cdot \delta^{m-1}$ olsun. O halde

$$|f_c^{m+1}(0)| = |f_c(f_c^m(0))| \geq |f_c^m(0)| \cdot \delta \geq |c| \cdot \delta^m$$

olduğu görülür. Tümevarım ilkesine göre $|f_c^n(0)| \geq |c| \cdot \delta^{n-1}$ sonucuna ulaşılır. Böylece $|c| > 2$ için f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesi sonsuza ıraksar. Dolayısıyla $c \notin M$ olur.

Bu durum Mandelbrot cümlesinin tamamının merkezi orijinde olan 2 yarıçaplı bir çember tarafından kapsandığını gösterir. Sonuç olarak Mandelbrot cümlesi sınırlıdır.

Lemma 2.2.3. Mandelbrot cümlesi kompakttır [78].

İspat. $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ olmak üzere Mandelbrot cümlesi her $n \in \mathbb{N}$ için

$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(K)$ şeklinde yazılabilir. $f_n^{-1}(K)$ cümlesi kapalı ve sınırlıdır. Böylece

Mandelbrot cümlesi kompakt cümleler ailesinin kesişimi olarak bulunur. Dolayısıyla Mandelbrot cümlesi kompakttır.

Douady ve Hubbard, Mandelbrot cümlesinin bağlantılı olduğunu [34, 35] çalışmalarında göstermiştir. Mandelbrot cümlesinin tümleyeninden dairenin tümleyenine direkt olarak bir Riemann dönüşümü tanımlayarak yaptıkları analitik bir ispat vardır. Ancak Kahn, Mandelbrot cümlesinin bağlantılı olduğunun topolojik bir ispatını vermiştir.

Lemma 2.2.4. Mandelbrot cümlesi bağlantılıdır [79].

İspat. $\forall n \geq 1$ için $P_n(c) = f_c^n(0)$ olsun. $R > 2$ sayısını transandantal sayı seçelim ve R yarıçaplı (açık) daire D_R ve sınırı C_R olsun. $X \subset \mathbb{C}$ cümlesinin kapanışını $\bar{X}$ ile göstermek üzere

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(\bar{D}_R)$$

cümlesi kompakt cümlelerin iç içe bir kesişim cümlesidir. Dolayısıyla $\forall n \geq 1$ için $P_n^{-1}(\bar{D}_R)$ cümlesinin bağlantılı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu yüzden bazı $n \geq 1$ doğal sayıları için $P_n^{-1}(\bar{D}_R)$ cümlesinin bağlantılı olduğunu varsayalım. $0 \in \bar{U}$ olacak şekilde $P_n^{-1}(\bar{D}_R)$ cümlesinin bir bileşeni U olsun. $1 \leq k \leq n$ için

$$0 \notin P_k(\bar{U}) \quad (2.2)$$

olduğu [54]'de kanıtlanmıştır. Ancak P_n dallanmış bir örtüdür. Böylece $P_n(U) = D_R$ olur ki bu iddia ile çelişir. Sonuç olarak Mandelbrot cümlesi bağlantılıdır.

Lemma 2.2.5. Mandelbrot cümlesi reel eksene göre simetriktir [74].

İspat. Karmaşık düzlemin herhangi bir alt cümlesinin reel eksene göre simetrik olması için gerek ve yeter şart bu cümlemin her bir elemanının eşleniğinin de bu cümleye ait olmasıdır. İlk olarak

$$\overline{f_c^n(0)} = f_{\bar{c}}^n(0)$$

olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\overline{f_c(0)} = \overline{0+c} = \bar{0} + \bar{c} = f_{\bar{c}}(0),$$

$$\overline{f_c^2(0)} = \overline{c^2+c} = \bar{c}^2 + \bar{c} = f_{\bar{c}}^2(0)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Tümevarım uygulayabilmek için bazı $m \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$\overline{f_c^m(0)} = f_{\bar{c}}^m(0)$$

olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{f_c^{m+1}(0)} &= \overline{f_c(f_c^m(0))} \\ &= \overline{\left(f_c^m(0)\right)^2 + c} \\ &= \overline{\left(f_c^m(0)\right)^2} + \bar{c} \\ &= \left(\overline{f_c^m(0)}\right)^2 + \bar{c} \\ &= \left(f_{\bar{c}}^m(0)\right)^2 + \bar{c} \\ &= f_{\bar{c}}^{m+1}(0) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla tümevarıma göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{f_c^n(0)} = f_{\bar{c}}^n(0)$$

elde edilir.

Ayrıca $c \in M$ ise $\left\{ \left| f_c^n(0) \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır. $\left| f_c^n(0) \right| = \left| \overline{f_c^n(0)} \right|$ olduğundan $\left\{ \left| \overline{f_c^n(0)} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi de sınırlıdır. O halde $\left\{ \left| f_{\bar{c}}^n(0) \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır. Yani $\bar{c} \in M$ olur. Sonuç olarak M cümlesi reel eksene göre simetriktir.

Lemma 2.2.6. M Mandelbrot cümlesinin reel eksenle kesişimi $\left[-2, \frac{1}{4} \right]$ kapalı aralıktır, yani $\mathbb{R} \cap M = \left[-2, \frac{1}{4} \right]$ ’dir [80, 96].

İspat. f_{-2} iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesi $\{0, -2, 2, 2, 2, \dots\}$ sınırlı dizi olduğundan $-2 \in M$ bulunur. Ayrıca Lemma 2.2.1.’e göre, Mandelbrot cümlesi orijin merkezli ve 2 yarıçaplı çember tarafından kapsandığından -2 ’den daha küçük M cümlesine ait hiçbir reel sayı yoktur. $c > \frac{1}{4}$ olmak üzere herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f_c^{n+1}(0) - f_c^n(0) &= f_c(f_c^n(0)) - f_c^n(0) \\ &= (f_c^n(0))^2 - f_c^n(0) + c \\ &= \left(f_c^n(0) - \frac{1}{2} \right)^2 + c - \frac{1}{4} \\ &\geq c - \frac{1}{4} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_c^{n+1}(0) > f_c^n(0)$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $f_c^n(0) \rightarrow \infty$ olur.

Bu durum $c \notin M$ olduğunu gösterir. f_c iterasyon fonksiyonunun sabit noktası $f_c(z) = z$, yani $z^2 - z + c = 0$ ile verilir. Bu denklem çözülürse

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c}) \text{ ve } z_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$$

elde edilir.

Ayrıca $-2 < c < 0$ için $1 < \sqrt{1-4c} < 3$ olup $-1 < z_1 < 0$ ve $1 < z_2 < 2$ olması $0 \in [z_1, z_2]$ olduğunu gösterir. Bu durumda

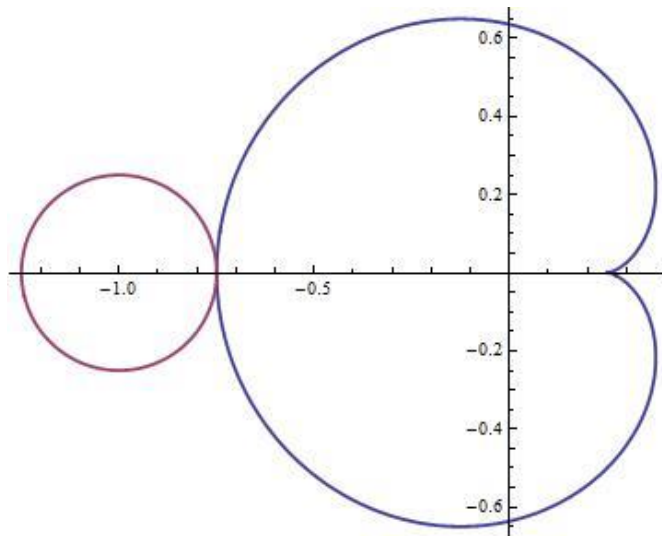
$$f_c^2[z_1, z_2] = f_c[c, z_2] \subseteq [c, z_2]$$

bulunur. f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesinin sınırlı olduğuna dikkat edilirse $c \in M$ olduğu görülür. $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ için $0 \leq z_1 \leq \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} \leq z_2 \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda ise

$$f_c[0, z_2] = [c, z_2] \subseteq [0, z_2]$$

olmak üzere f_c iterasyonu altında 0 noktasının yörüngesi yine sınırlı olduğundan $c \in M$ elde edilir.

Sonuç olarak $\mathbb{R} \cap M = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ olduğu görülür.



Şekil 2.5. Mandelbrot cümlesinin gövdesi ve kafası

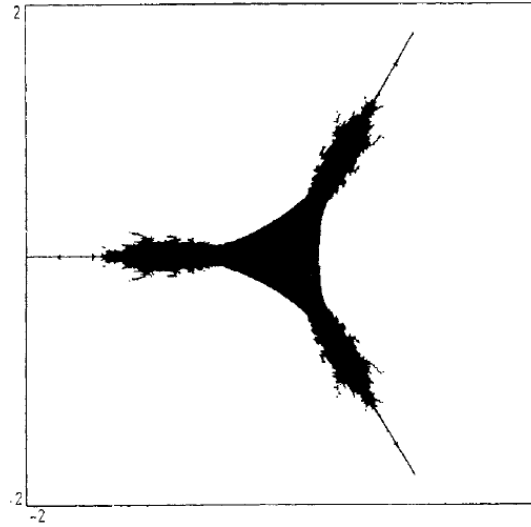
2.3. Mandelbar Cümlesi

Bu bölümde, Mandelbrot cümlesinin ilgi çekici bir akrabası olan Mandelbar cümlesi tanıtılarak Mandelbrot cümlesine benzeyen ve ayrılan yönleri ifade edilecektir. Bu cümlelerin Mandelbar veya Tricorn cümlesi olarak literatürde yer almasının sebebi aynı zaman dilimleri içerisinde Crowe [60] ve Milnor [63] tarafından ayrı ayrı çalışılmış olmasıdır. Bu bölümde literatürdeki kronolojik sıralamada ilk sırayı alan Mandelbar cümlesi isimlendirmesi kullanılacaktır.

Tanım 2.3.1. $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$ iterasyon fonksiyonu olmak üzere bütün $c \in \mathbb{C}$ noktalarının cümlesi

$$M_{BAR} = \{c \in \mathbb{C} \mid n \rightarrow \infty \text{ iken } f_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$$

olarak gösterilir ve Mandelbar cümlesi olarak adlandırılır [60].



Şekil 2.6. Mandelbar cümlesi [60].

Mandelbrot cümlesinde olduğu gibi M_{BAR} cümlesi de kompakttır ve 2 yarıçaplı merkezli çember içerisinde yer alır. Ayrıca Şekil 2.6.'dan da görüldüğü üzere, M_{BAR} cümlesi Mandelbrot cümlesinde olduğu gibi reel eksenle kesişimi $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ kapalı

aralığıdır ve reel eksene göre simetriktir. Olağan dışı bir şekilde M_{BAR} cümlesi, Mandelbrot cümlesinden farklı bir simetri özelliğine daha sahiptir.

Teorem 2.3.1. M_{BAR} cümlesi, orijin etrafında $2\pi/3$ radyan açısı altında bir dönme simetrisine sahiptir [60].

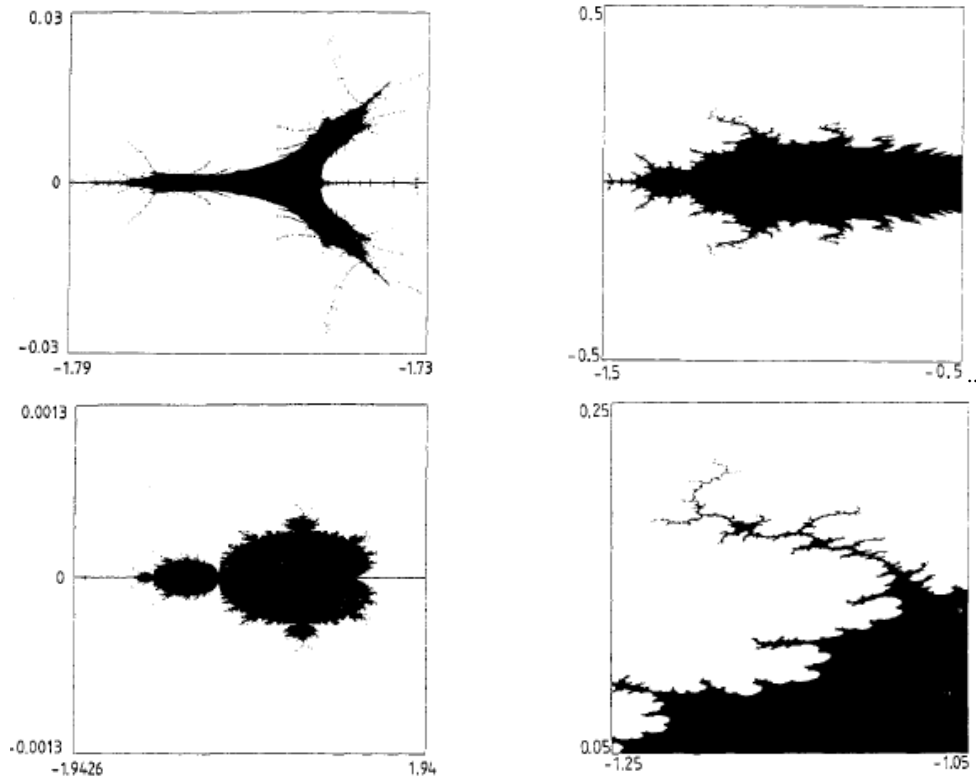
İspat. $w = e^{(2\pi i/3)}$ olsun. O halde $\bar{w}^2 = w$ ve böylece c ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$f_{wc}(w \cdot z) = w \cdot f_c(z)$$

olduğu görülür. Tümevarım yöntemine göre c ve $z \in \mathbb{C}$ sayıları için

$$f_{wc}^n(w \cdot z) = w \cdot f_c^n(z)$$

bulunur. Dolayısıyla $f_{wc}^n(0)$ dizisi basit olarak $f_c^n(0)$ dizisinin 0 etrafında $2\pi/3$ radyan açılık bir dönüşüdür. Bu durum ispatı tamamlar.



Şekil 2.7. Mandelbar ile Mandelbrot cümle grafikleri ve sırasıyla yakın görünüşleri [60].

Teorem 2.3.2. M_{BAR} cümlesi kompakttır ve $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}$ cümlesi içinde kalır [60].

İspat. $M_{BAR} \subseteq \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}$ olduğunu ispatlamak için $|c| > 2$ olduğunu varsayalım ve $n \rightarrow \infty$ iken $|f_c^n(c)| = |f_c^{n+1}(0)| \rightarrow \infty$ olduğunu gösterelim.

$$|f_c^{n+1}(0)| = \left| \overline{(f_c^n(0))^2} + c \right| \geq |f_c^n(0)|^2 - |c| \quad (2.3)$$

eşitsizliğinden dolayı $n = 1, 2, \dots$ için tümevarıma göre $|f_c^n(0)| > |c|$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece, $n = 1, 2, \dots$ için $\alpha_n = |f_c^n(0)/c|$ ise $\alpha_n > 1$ bulunur. (2.3) denkleminde göre $n = 1, 2, \dots$ için

$$\alpha_{n+1} > 2\alpha_n - 1 \quad (2.4)$$

olur. O halde istenildiği gibi $n \rightarrow \infty$ iken $\alpha_n \rightarrow \infty$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi ise

$$M_{BAR} \subseteq \left\{ c \mid |f_c^n(0)| \leq 2, n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

olduğu ispatlanırsa Mandelbar cümlesinin kompakt olma özelliği kolaylıkla görülür. Eğer $c \in M_{BAR}$ ve bazı n sayıları için $|f_c^n(0)| > 2$ ise $\alpha_n = |f_c^n(0)/c| > 1$ olur. Bununla birlikte $|c| \leq 2$ olmasının yanında (2.4) denkleminde göre $n \rightarrow \infty$ iken $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$ olduğu görülür. Bu durum $c \in M_{BAR}$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.3.1. $K_n = \{c \mid |f_c^n(0)| \leq 2, n = 0, 1, 2, \dots\}$ cümleleri, $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}$ cümlesi içinde kalır [60].

İspat. (2.1) denkleminde dolayı iç içe geçmiş sıralı cümlelerdir. $|c| > 2$ olduğundan

$$K_1 = \{c \mid |\bar{c}^2 + c| \leq 2\} \subseteq \{c \mid |c| \leq 2\} = K_0$$

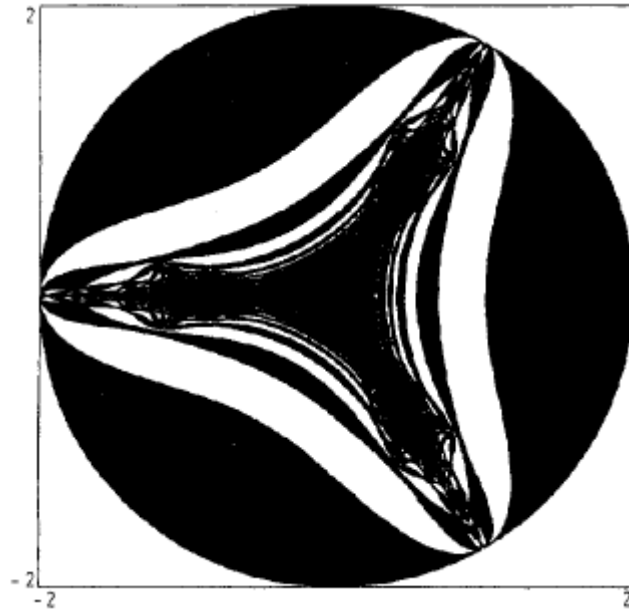
ifadesinden yola çıkarak

$$|\bar{c}^2 + c| \geq |\bar{c}^2| - |c| = |c| \cdot (|c| - 1) > 2$$

eşitsizliğine ulaşılır. $n = 1, 2, \dots$ için $K_{n+1} \subseteq K_n$ olduğunu görmek için $|c| \leq 2$ ve $|f_c^n(0)| > 2$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$|f_c^{n+1}(0)| \geq |f_c^n(0)|^2 - |c| > 2$$

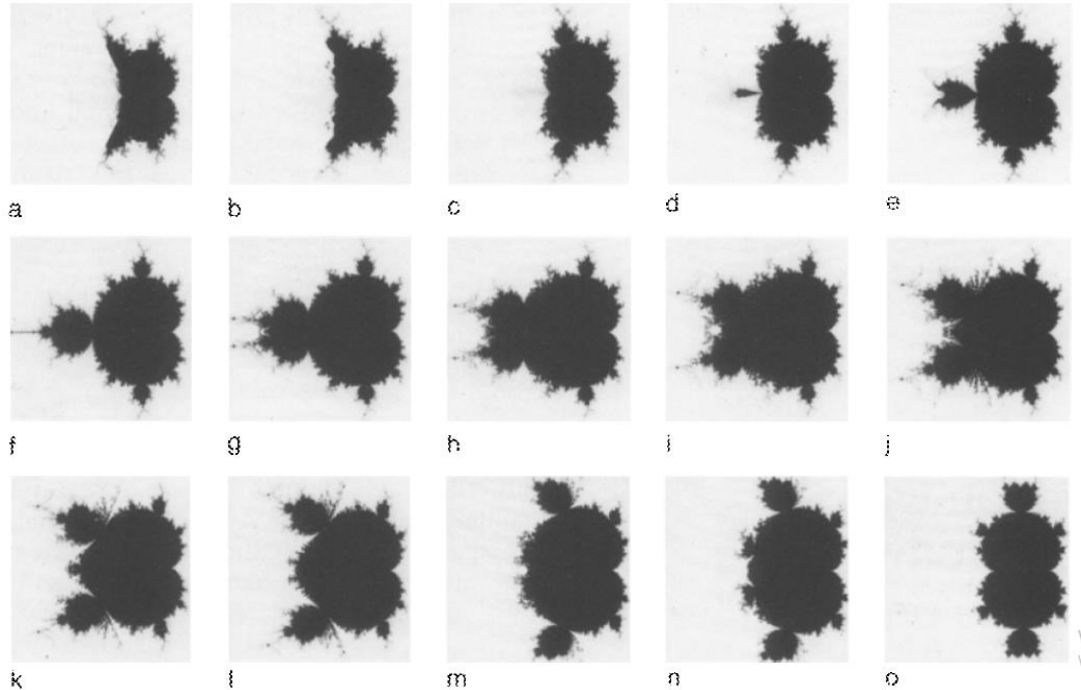
sonucuna ulaşılır.



Şekil 2.8. K_n cümleleri [60].

2.4. Genelleştirilmiş Mandelbrot Cümleleri

Teknolojinin gelişimi ile birlikte Mandelbrot cümlelerinin grafik çizimleri de daha net ve keskin hatlara sahip olmasına rağmen değişimi sadece bu durumla sınırlı kalmamıştır. Mandelbrot cümlesinin topolojik ve cebirsel özelliklerini araştırmak derin bir çalışma konusudur, dahası bu cümleyi araştırmanın ve geliştirmenin farklı bir yolunun ise genelleştirmek olduğu konusunda bilim insanları fikir birliğine varmış olacaklar ki bu amaçla yapılmış literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Başta Olivier-Parisé ve Rochon [57], Riedl [81], Wang ve Song [82] gibi bilim insanları iterasyon başlangıç adımında karmaşık sayılar ile başlamak yerine bi-karmaşık sayılar, tri-karmaşık sayılar, quadri-karmaşık sayılar veya hiper-karmaşık sayıları tercih ederek genelleştirme yolunu takip etmiştir. Yani $z_n \rightarrow (z_{n-1})^2 + c$ iterasyon adımları uygulanırken z ve c karmaşık sayıları yerine bahsi geçen sayıları kullanmışlardır. Ancak bu yöntemin kullanılmasından önce akıllara düşen ilk soru kuadratik iterasyon fonksiyonunun kuvvetinin değiştirilmesinin Mandelbrot cümlesi grafiklerinde hangi değişimlere sebep olacağıdır. Bu düşüncenin ilk uygulamaları ise grafik üzerine olmuştur [56].



Şekil 2.9. Genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesinin farklı kuvvet gösterimleri: a) 1.76, b) 1.8, c) 1.88, d) 1.92, e) 1.96, f) 2, g) 2.04, h) 2.08, i) 2.12, j) 2.16, k) 2.24, l) 2.32, m) 2.6, n) 2.64, o) 3 [56].

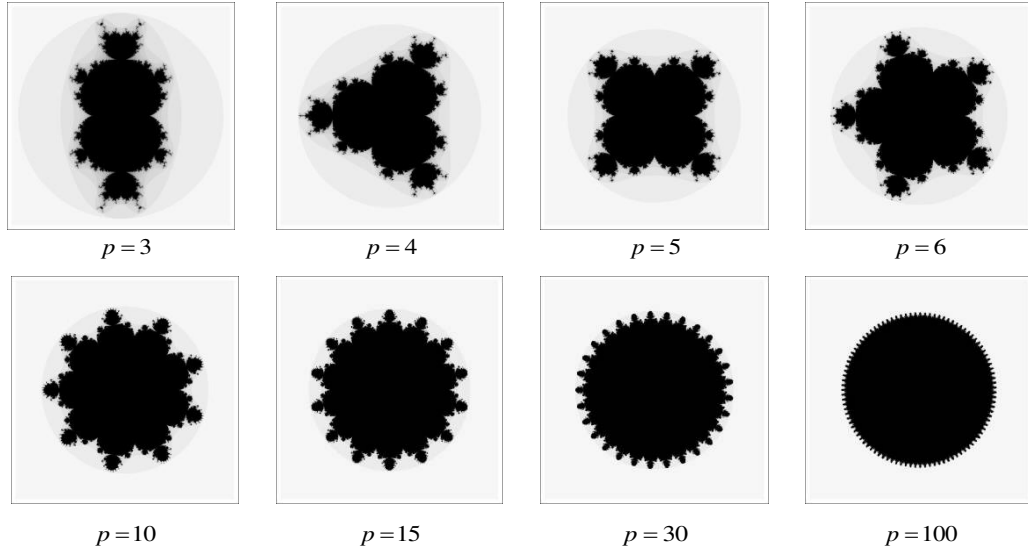
Böylece kuvveti artırmanın ana kardiyod sayısının artımına neden olduğu görülmüştür. Sonuç olarak bu yeni cümlelere ilk olarak genelleştirilmiş Mandelbrot adı [34] tarafından verilmiştir. Daha sonrasında da Avila [83], Kahn, Lyubich ve Shen, Baribeau ve Ransford [84], Bridy ve Pérez [85], Schleicher [86], Dhurandhar, Bhavsar ve Gujar [48-50, 67], Dominik, Sabyasachi ve Schleicher [87], McMullen [40] gibi bilim insanları da iterasyon fonksiyonunun kuvvetinin değişimini kullanarak genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesi üzerine çalışmışlardır.

Tanım 2.4.1. $f_{(p,c)}(z) = z^p + c$ $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$, $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$M^p = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \left\{ f_{(p,c)}^k \right\}_{k=1}^{\infty} \text{ sınırlı} \right\}$$

cümlesine genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesi veya Multibrot cümlesi adı verilir [56]. Burada $p = 2$ seçilirse klasik Mandelbrot cümlesi elde edilir. Ayrıca üs olarak negatif veya rasyonel sayılar seçilerek farklı genelleştirilmiş Mandelbrot cümleleri de tanımlanabilir.

$z_n \rightarrow (z_{n-1})^p + c$ iterasyonunda p doğal sayısının özel seçimleri sonucu oluşan genelleştirilmiş Mandelbrot cümlelerinin grafikleri Şekil 2.10.'da verilmiştir.



Şekil 2.10. Genelleştirilmiş Mandelbrot kümeleri

Lemma 2.4.1. $p \geq 2$ tamsayı olmak üzere $|c|^{p-1} > 2$ olsun. $\forall m \geq 1$ doğal sayıları için $|f_{(p,c)}^m(0)| \geq |c| \cdot (|c|^{p-1} - 1)^{m-1}$ sağlanır [57].

İspat. $m = 1$ için $f_{(p,c)}(0) = |c| = |c| \cdot (|c|^{p-1} - 1)^{1-1}$ yazılabilir. Kabul edelim ki $k \geq 1$ için doğru olsun. $k + 1$ için

$$|f_{(p,c)}^{k+1}(0)| = \left| \left(f_{(p,c)}^k(0) \right)^p + c \right| \geq |f_{(p,c)}^k(0)| - |c|$$

eşitsizliği vardır. Tümevarıma göre ve $|c|^{p-1} > 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 |f_{(p,c)}^{k+1}(0)| &\geq |c|^p \cdot \left| |c|^{p-1} - 1 \right|^{p(k-1)} - |c| \\
 &\geq |c|^p \cdot \left| |c|^{p-1} - 1 \right|^{(k-1)} - |c| \cdot \left| |c|^{p-1} - 1 \right|^{(k-1)} \\
 &\geq |c| \cdot \left| |c|^{p-1} - 1 \right|^k
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $k + 1$ için eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla $\forall m \geq 1$ doğal sayıları için eşitsizlik sağlanır. Sonuç olarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.1. Her $c \in M^p$ karmaşık sayısı için $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ sağlanır [57].

İspat. Varsayalım ki, $|c| > 2^{1/(p-1)}$ olacak şekilde bir $c \in M^p$ karmaşık sayısı var olsun. O halde $|c|^{p-1} > 2$ olur. Lemma 2.4.1.'e göre $\forall m \geq 1$ için

$$|f_{(p,c)}^m(0)| \geq |c| \cdot (|c|^{p-1} - 1)^{m-1}$$

sağlanır. Öyleyse $m \rightarrow \infty$ iken $|c|^{p-1} - 1 > 1$ olduğundan $|f_{(p,c)}^m(0)|$ sonsuza gider.

Böylece $\{f_{(p,c)}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla Tanım 2.4.1.'e göre $c \notin M^p$ elde edilir.

Lemma 2.4.2. $p \geq 2$ olmak üzere $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$|f_{(p,c)}^n(0)| = 2^{1/(p-1)} + \delta$ olacak şekilde $n \geq 1$ tamsayısı var olsun. $\forall m \geq 1$ için $|f_{(p,c)}^{n+m}(0)| \geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^m \cdot \delta$ sağlanır [57].

İspat. $m = 1$ için $|f_{(p,c)}^{n+1}(0)| \geq |f_{(p,c)}^n(0)| - |c|$ elde edilir. Hipoteze göre

$$|f_{(p,c)}^{n+1}(0)| \geq (2^{1/(p-1)} + \delta)^p - 2^{1/(p-1)}$$

olmasına karşın

$$(2^{1/(p-1)} + \delta)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} 2^{\frac{p-i}{p-1}} \cdot \delta^i$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(2^{1/(p-1)} + \delta\right)^p - 2^{1/(p-1)} &\geq 2^{p/(p-1)} + 2p\delta - 2^{1/(p-1)} \\
&= 2^{1/(p-1)} \cdot (2^{p-1}) + 2p\delta \\
&\geq 2^{1/(p-1)} + 2p\delta
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\left|f_{(p,c)}^{n+1}(0)\right| \geq 2^{1/(p-1)} + 2p\delta$ bulunur ve $m=1$ için eşitsizlik sağlanır.

Şimdi, varsayalım ki $k \geq 1$ için eşitsizlik doğru olsun. $k+1$ için

$$\left|f_{(p,c)}^{n+k+1}(0)\right| \geq \left|f_{(p,c)}^{n+k}(0)\right|^p - |c|$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
\left|f_{(p,c)}^{n+k}(0)\right|^p - |c| &\geq \left(2^{1/(p-1)} + (2p)^k \cdot \delta\right)^p - |c| \\
&\geq 2^{p/(p-1)} + 2p \cdot (2p)^k \cdot \delta - 2^{1/(p-1)} \\
&\geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^{k+1} \cdot \delta
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak herhangi $m \geq 1$ doğal sayısı için eşitsizlik sağlanır.

Teorem 2.4.2. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\left|f_{(p,c)}^m(0)\right| \leq 2^{1/(p-1)}$ olması için gerek ve yeter şart $c \in M^p$ olmasıdır [57].

İspat. Öncelikle, $c \in M^p$ olsun. Teorem 2.4.1.'e göre $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ geçerlidir. Kabul edelim ki $\left|f_{(p,c)}^n(0)\right| > 2^{1/(p-1)}$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ sayısı var olsun. Yani $\delta > 0$ olmak üzere $\left|f_{(p,c)}^n(0)\right| = 2^{1/(p-1)} + \delta$ olsun. Lemma 2.4.2.'ye göre $\forall m \geq 1$ için

$$\left|f_{(p,c)}^{n+m}(0)\right| \geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^m \cdot \delta$$

bulunur. Öyleyse $2p > 1$ olduğundan $m \rightarrow \infty$ iken $\left| f_{(p,c)}^{n+m}(0) \right| \rightarrow \infty$ elde edilir. Böylece $c \notin M^p$ olduğu görülür ki bu bir çelişkidir.

Ayrıca $\forall m \geq 1$ doğal sayısı için $\left\{ f_{(p,c)}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $2^{1/(p-1)}$ tarafından sınırlandırıldığından $c \in M^p$ olması durumu genelleştirilmiş Mandelbrot cümlesinin tanımının doğrudan bir sonucudur.

Genelleştirilmiş Mandelbrot cümleleri $(p-1)$ -kat dönme simetrisine göre değişmez kalır. Yani $w \in \mathbb{C}$ ve $w^{p-1} = 1$ olmak üzere $M^p = w \cdot M^p$ eşitliği sağlanır [88].

Lemma 2.4.3. $c = |c| \cdot e^{i\theta_c}$ ve $p \geq 2$ tamsayı olmak üzere $c \in M^p$ olsun. Herhangi $k \in \mathbb{Z}$ için

$$c_k := |c| \cdot e^{i\left(\theta_c + \frac{2k\pi}{p-1}\right)}$$

noktası M^p cümlesinin elemanıdır [57].

İspat. Varsayalım ki $c \in M^p$ olsun. $\forall m \geq 1$ için

$$f_{(p,c_k)}^m(0) = e^{i\frac{2k\pi}{p-1}} \cdot f_{(p,c)}^m(0)$$

ifadesine tümevarım uygulayalım. İlk olarak, birinci tümevarım adımında

$$f_{(p,c_k)}^1(0) = c_k = |c| \cdot e^{i\left(\theta_c + \frac{2k\pi}{p-1}\right)} = e^{i\frac{2k\pi}{p-1}} \cdot c$$

elde edilir. Şimdi, $m \geq 1$ tamsayısı için varsayım doğru olsun. O halde

$$\begin{aligned}
f_{(p,c_k)}^{m+1}(0) &= \left(f_{(p,c_k)}^m(0)\right)^p + c_k \\
&= e^{i\left(\frac{2kp\pi}{p-1}\right)} \cdot \left(f_{(p,c)}^m(0)\right)^p + e^{i\left(\frac{2k\pi}{p-1}\right)} \cdot c \\
&= e^{i2k\pi} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{p-1}\right)} \cdot \left(f_{(p,c)}^m(0)\right)^p + e^{i\left(\frac{2k\pi}{p-1}\right)} \cdot c \\
&= e^{i\left(\frac{2k\pi}{p-1}\right)} \cdot f_{(p,c)}^{m+1}(0)
\end{aligned}$$

bulunur. Dahası, Teorem 2.4.2.'ye göre $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\left|f_{(p,c)}^m(0)\right| \leq 2^{1/(p-1)}$ olduğu görülür. Böylece, $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\left|f_{(p,c_k)}^m(0)\right| = \left|f_{(p,c)}^m(0)\right|$ olduğundan $c \in M^p$ elde edilir.

2.5. Genelleştirilmiş Mandelbar Cümleleri

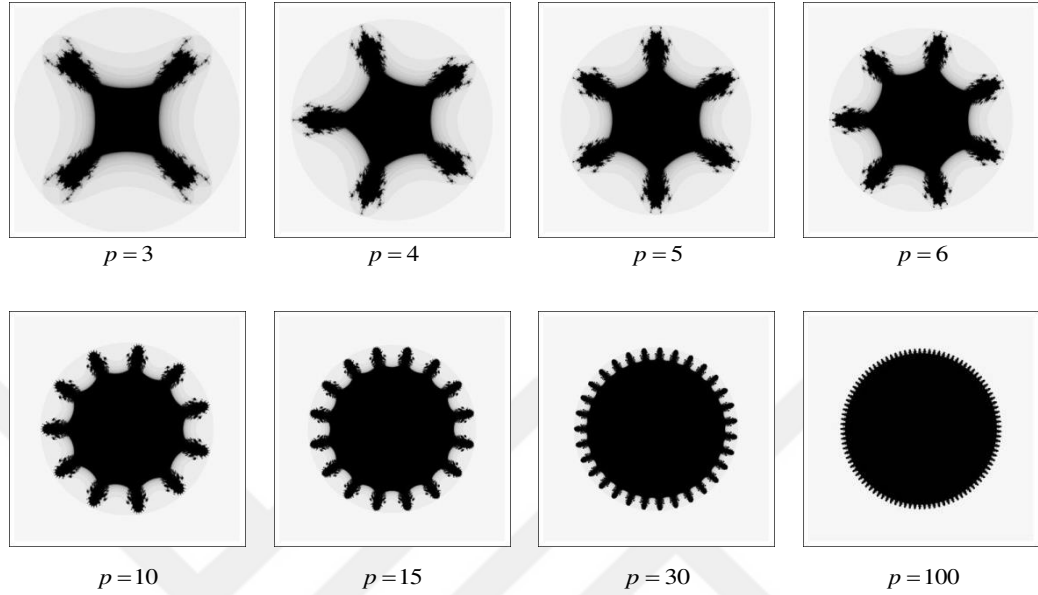
Mandelbar ve Tricorn cümlelerinin ortaya çıkış hikâyesinin etkisi bu yapıların genelleştirilmesi ile devam etmiş olup her iki cümleyi de çalışmış olan bilim insanlarının bu cümlelere genelleştirilmiş Mandelbar cümlesi ve Multicorn cümlesi adını vermelerine neden olmuştur.

Tanım 2.5.1. $f_{(p,c)}(z) = \bar{z}^p + c$ $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$, $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$M_{BAR}^p = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \left\{ f_{(p,c)}^k \right\}_{k=1}^{\infty} \text{ sınırlı} \right\}$$

cümlesine genelleştirilmiş Mandelbar cümlesi veya Multicorn cümlesi denir. Burada $p=2$ seçilirse klasik Mandelbar cümlesi elde edilir. Ayrıca üs olarak negatif veya kesirli değerler seçilerek farklı genelleştirilmiş Mandelbar cümleleri de elde edilir [46].

$z_n \rightarrow (\overline{z_{n-1}})^p + c$ iterasyonunda p doğal sayısının özel seçimleri sonucu oluşan genelleştirilmiş Mandelbar cümlelerinin grafikleri Şekil 2.11.'de verilmiştir.



Şekil 2.11. Genelleştirilmiş Mandelbar cümleleri

Her bir kar tanesi benzeri genelleştirilmiş Mandelbar cümlesinin merkezinden geçen simetri çizgileri vardır. Dolayısıyla dönme simetrilerinin varlığı açıkça görülmektedir. M_{BAR}^p bir $2\pi/(p+1)$ radyan açıyla döndürülürse orijinal M_{BAR}^p cümlesine karşılık gelir.

Şimdi M_{BAR}^p cümlesinin izometrisini bulmak için $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu kullanalım. $c \in \mathbb{C}$ için $z_0 = 0$ başlangıç noktası ile birlikte $n > 0$ olmak üzere $z_{n+1} = f(\overline{z_n}) + c$ iterasyon fonksiyonunun dizisi $\{z_n\}$ olur.

Ayrıca sürekli bir $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu ele alalım. s fonksiyonunun tüm $z \in \mathbb{C}$ ve $c \in \mathbb{C}$ noktaları için

$$f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c)$$

dönüşümü yinelemeli olarak f iterasyon fonksiyonu ile yer değiştirir. Böylelikle, orijin etrafında sabit bir nokta ile birlikte yinelenen değişmeli homeomorfizmalar M_{BAR}^p cümlesini değişmez bırakır.

Teorem 2.5.1. s fonksiyonu f ve $s(0)=0$ ile yinelemeli olarak yer değiştirirse, $s(M) \subseteq M$ olur. Ayrıca s bir homeomorfizma olması durumunda $s(M)=M$ sağlanır [89].

İspat. $c \in M$ için c noktasının iterasyon dizisi $\{z_n\}$ ve $s(c)$ noktasının iterasyon dizisi $\{w_n\}$ olsun. $s(0)=0$ ve $f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c)$ olduğundan dolayı basit bir tümevarım ile $w_n = s(z_n)$ gösterilir. s fonksiyonu sürekli ve $\{z_n\}$ sınırlı olduğundan, $\{w_n\}$ dizisi de sınırlı olmalıdır. Böylece, $s(c) \in M$ elde edilir.

Ayrıca s fonksiyonu bir homeomorfizma ise $\{z_n\}$ sınırlıdır ancak ve ancak $\{w_n\}$ dizisi de sınırlıdır. Dolayısıyla, $c \in M$ olması için gerek ve yeter şart $s(c) \in M$ olmasıdır.

Bu genel teoreme göre Mandelbar cümlesinin izometreleri hakkında iki sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 2.5.1. Reel eksene göre yansıma, M_{BAR}^p cümlesinin bir izometrisidir [89].

İspat. $s(z) = \bar{z}$ olarak tanımlansın. Böylece $s(0)=0$ olur ve açık bir şekilde s bir homeomorfizmadır. Dahası,

$$\bar{z}^p + \bar{c} = \overline{(z^p + c)},$$

$$z^p + \bar{c} = \overline{(\bar{z}^p + c)}$$

olduğundan Teorem 2.5.1.'e göre $s(M_{BAR}^p) = M_{BAR}^p$ elde edilir. s fonksiyonu uzaklığı koruduğundan dolayı M_{BAR}^p cümlesi için bir izometridir.

Sonuç 2.5.2. $p+1$ mertebesinin orijin etrafındaki dönmeleri M_{BAR}^p cümlesinin izometrilere [89].

İspat. $a = e^{2\pi i/k}$ olmak üzere s fonksiyonu $s(z) = a \cdot z$ dönmesi olarak tanımlansın.

Açık bir şekilde s homeomorfizm ve $s(0) = 0$ olur. Böylece,

$$(\overline{a \cdot z})^p + a \cdot c = a \cdot (\bar{z}^p + c)$$

değişim özelliği ortaya çıkar. Bu yüzden $\bar{a}^p = a$, yani $a^{p+1} = 1$ olduğu gösterilmelidir. Tekrardan, döndürmelerin mesafeleri koruduğuna dikkat edilirse, $s(M_{BAR}^p) = M_{BAR}^p$ eşitliğinin M_{BAR}^p cümlesinin izometrilere oldukları anlamına gelir.

BÖLÜM 3. FUZZY CÜMLELER, FUZZY REEL VE KARMAŞIK SAYILAR, FUZZY TOPOLOJİ

3.1. Fuzzy Cümleler

Klasik cümle teorisi bir varlık bir cümle için “üyesidir” ya da “üyesi değildir” temeli üzerine inşa edilmiştir. Bu cümle teorisindeki varlıkların herhangi iyi tanımlı “cümle” için bir eleman olmak ile olmamak arasında aşikâr, tam ve keskin bir ayrım vardır. Diğer bir ifadeyle, “Bu varlık bu cümle için elemanı mı?” sorusuna karşılık “evet” ya da “hayır” cevabı verilir. Hem belirgin hem de olasılıksal durumlar için bu doğrudur. Olasılık ve istatistikte “Bir varlığın bu cümle için elemanı olma yüzdesi nedir?” sorusuna karşılık verilecek bir cevap “% 90” olmasına rağmen nihai sonuç “Varlığın, cümle için elemanı olup olmamasıdır”. Bu cevap “% 90 olasılıkla elemanıdır” olduğunu gösterirken “% 10 olasılıkla elemanı değildir” olduğunu gösterir. Bu yüzden, pek çok gerçek dünya uygulama problemi klasik cümle teorisi yardımıyla modellenemez.

Lotfi A. Zadeh tarafından 1965’te ilk defa tanımlanan temel fuzzy cümle kavramı, gerçek dünyamızda bulunan doğal olayları matematiksel olarak ele almak ve fuzzy matematiğin yeni dallarını oluşturmak için bir temel sağlamaktadır. Nesneler uzayı X olmak üzere, X uzayının genel terimi x ile gösterilsin. X uzayındaki bir A fuzzy cümlesi, X ’deki her bir noktayı $[0,1]$ kapalı aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir öyle ki $\mu_A(x)$ değeri, $x \in A$ noktasının “üyelik derecesini” göstermektedir. Böylece $\mu_A(x)$, 1 değerine ne kadar yakın olursa $x \in A$ noktasının üyelik derecesi o kadar yüksek olur. Georg Cantor’un ortaya koyduğu klasik cümle teorisine göre bir A cümlesinin üyelik fonksiyonu yalnızca 0 ve 1 derecelerini alabilir öyle ki sırasıyla $x \notin A$ ve $x \in A$

olur. Aşağıda [1]'de literatüre kazandırılan fuzzy cümle kavramını ve fuzzy cümleler üzerindeki temel kavramları ve işlemleri sırasıyla incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. $A \subset X$ ve $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

cümlesine fuzzy cümle denir. X uzayındaki bütün fuzzy cümlelerin ailesi $\mathcal{F}(X)$ ile gösterilir [1].

Tanım 3.1.2. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 0$ ise $A \subset X$ fuzzy cümlesi boştur [1].

Tanım 3.1.3. $A, B \subset X$ fuzzy cümleleri birbirine eşit (yani $A = B$) olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ olmasıdır [1].

Tanım 3.1.4. $A \subset X$ fuzzy cümlesinin tümleyeni A' ile gösterilmek üzere $\forall x \in X$ için üyelik fonksiyonu $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 3.1.5. $A \subset X$ fuzzy cümlesi $B \subset X$ fuzzy cümlesi tarafından kapsanır (denk olarak, $A \subset X$ fuzzy cümlesi $B \subset X$ fuzzy cümlesinin alt cümlesidir) olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olmasıdır [1].

Tanım 3.1.6. $A, B \subset X$ fuzzy cümlelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olmak üzere $C = A \cup B$ bileşim cümlesi yine bir fuzzy cümledir öyle ki $\forall x \in X$ için üyelik fonksiyonu $\mu_C(x) = \max_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)]$ veya kısaca $\mu_C = \mu_A \vee \mu_B$ şeklindedir [1].

Not 3.1.1. $\cup$ işlemi bileşim özelliğine sahiptir, yani $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sağlanır [1].

Lemma 3.1.1. $A, B \subset X$ fuzzy cümlelerinin bileşimi hem A hem de B cümlesini kapsayan en küçük cümledir [1].

İspat. Tanım 3.1.6.'ya göre $\forall x \in X$ için

$$\max_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_A(x),$$

$$\max_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_B(x)$$

olduğundan $C = A \cup B$ cümlesi hem A hem de B fuzzy cümlelerini kapsar. Ayrıca hem A hem de B fuzzy cümlelerini kapsayan herhangi bir D fuzzy cümlesi alınsın. O halde $\forall x \in X$ için

$$\mu_D(x) \geq \mu_A(x) \text{ ve } \mu_D(x) \geq \mu_B(x)$$

olduğundan

$$\mu_D(x) \geq \max_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_C(x)$$

bulunur. Bu ise $C \subset D$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.7. $A, B \subset X$ fuzzy cümlelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olmak üzere $C = A \cap B$ kesişim cümlesi yine bir fuzzy cümledir öyle ki $\forall x \in X$ için üyelik fonksiyonu $\mu_C(x) = \min_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)]$ veya kısaca $\mu_C = \mu_A \wedge \mu_B$ şeklindedir [1].

Lemma 3.1.2. $A, B \subset X$ fuzzy cümlelerinin kesişimi hem A hem de B cümlesi tarafından kapsanan en büyük cümledir [1].

İspat. Tanım 3.1.7.'ye göre $\forall x \in X$ için

$$\min_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq \mu_A(x) \text{ ve } \min_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq \mu_B(x)$$

olduğundan $C = A \cap B$ cümlesi hem A hem de B fuzzy cümleleri tarafından kapsanır. Ayrıca hem A hem de B fuzzy cümleleri tarafından kapsanan herhangi bir D fuzzy cümlesi alınsın. O halde $\forall x \in X$ için

$$\mu_D(x) \leq \mu_A(x) \text{ ve } \mu_D(x) \leq \mu_B(x)$$

olduğundan

$$\mu_D(x) \leq \min_{x \in X} [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_C(x)$$

bulunur. Bu ise $D \subset C$ olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.8. $A \cap B$ boş cümle ise A ve B fuzzy cümleleri ayrıktır [1].

Not 3.1.2. $\cap$ işlemi bileşim özelliğine sahiptir. Yani $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ sağlanır [1].

Örnek 3.1.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel cümlesi üzerinde tanımlı fuzzy cümleleri $A = \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.6), (x_3, 0.2)\}$ ve $B = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.8), (x_3, 0.3)\}$ olsun. Bu takdirde, kesişim, birleşim, tümleyen cümleleri sırasıyla;

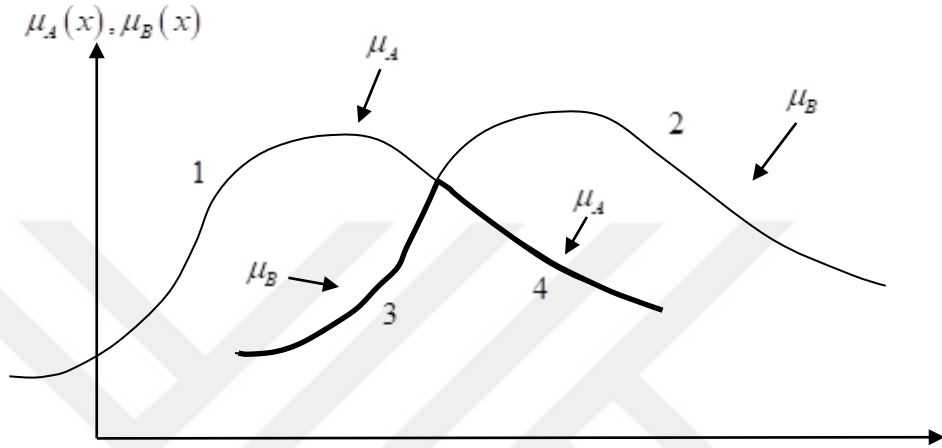
$$A \cap B = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.6), (x_3, 0.2)\},$$

$$A \cup B = \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.8), (x_3, 0.3)\},$$

$$A' = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 0.8)\}$$

olacaktır.

$\mathbb{R}$ reel sayılardaki iki fuzzy cümlenin bileşimi ve kesişimi Şekil 3.1. ile gösterilmektedir. Bileşim işleminin üyelik fonksiyonu 1 ve 2 eğrileri yardımıyla, kesişim işleminin üyelik fonksiyonu 3 ve 4 eğrileri yardımıyla gösterilmektedir.

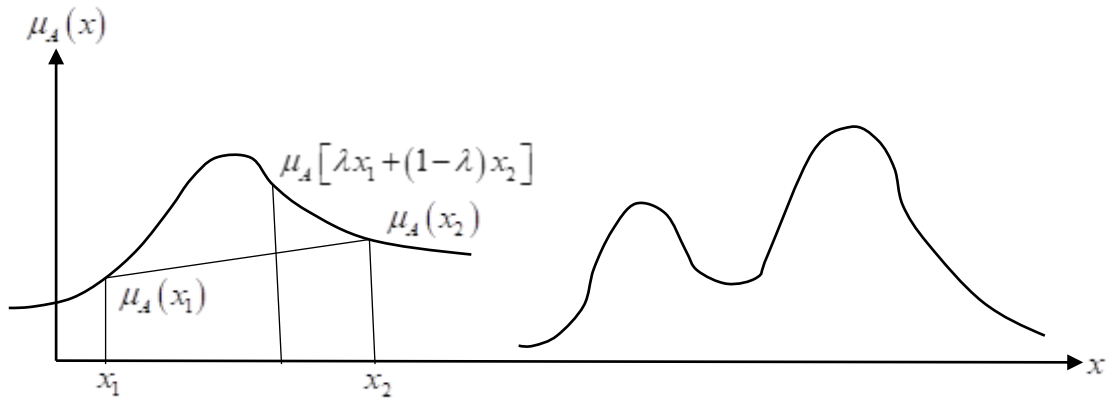


Şekil 3.1. Reel sayılardaki iki fuzzy cümlenin bileşimi ve kesişimi [1]

Aşağıda verilen iki tanım birbirine denktir.

Tanım 3.1.9. A fuzzy cümlesi konvektir ancak ve ancak $(0,1]$ aralığındaki her α için $A^\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanan A^α cümleleri konvektir [1].

Tanım 3.1.10. A fuzzy cümlesi konvektir ancak ve ancak $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$ 'dir [1].



Şekil 3.2. Reel sayılardaki konveks ve konveks olmayan fuzzy cümleler [1]

Tanım 3.1.11. A fuzzy cümlesinin destek cümlesi $\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$ olarak tanımlıdır [1].

Tanım 3.1.12. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere A fuzzy cümlesinin sırasıyla α -kesiti ve kesin α -kesiti, $A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ve $A^{\alpha+} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$ ile gösterilir [1].

Tanım 3.1.13. A fuzzy cümle olmak üzere $\exists x_0 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ise A fuzzy cümlesi normaldir [1].

Lemma 3.1.3. Sırasıyla $\vee$ ve $\wedge$ sembolleri max ve min operatörlerini temsil etmek üzere üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A \leq \mu_A,$$

$$\mu_A \leq \mu_B, \mu_B \leq \mu_A \Rightarrow \mu_A = \mu_B,$$

$$\mu_A \leq \mu_B, \mu_B \leq \mu_C \Rightarrow \mu_A \leq \mu_C,$$

$$\mu_A \vee \mu_A = \mu_A,$$

$$\mu_A \wedge \mu_A = \mu_A,$$

$$\mu_A \vee \mu_B = \mu_B \vee \mu_A,$$

$$\mu_A \wedge \mu_B = \mu_B \wedge \mu_A,$$

$$(\mu_A \vee \mu_B) \vee \mu_C = \mu_A \vee (\mu_B \vee \mu_C),$$

$$(\mu_A \wedge \mu_B) \wedge \mu_C = \mu_A \wedge (\mu_B \wedge \mu_C),$$

$$\mu_A \wedge (\mu_A \vee \mu_B) = \mu_A,$$

$$\mu_A \vee (\mu_A \wedge \mu_B) = \mu_A,$$

$$\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) = (\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_A \wedge \mu_C),$$

$$\mu_A \vee (\mu_B \wedge \mu_C) = (\mu_A \vee \mu_B) \wedge (\mu_A \vee \mu_C),$$

$$\mu_{\bar{A}} = \mu_A,$$

$$\overline{\mu_A \vee \mu_B} = \mu_{\bar{A}} \wedge \mu_{\bar{B}},$$

$$\overline{\mu_A \wedge \mu_B} = \mu_{\bar{A}} \vee \mu_{\bar{B}},$$

$$\mu_A \vee 0 = \mu_A,$$

$$\mu_A \wedge 1 = \mu_A,$$

$$\mu_A \vee 1 = 1,$$

$$\mu_A \wedge 0 = 0,$$

$$\mu_A \vee \mu_{\bar{A}} \neq 1,$$

$$\mu_A \wedge \mu_{\bar{A}} \neq 0$$

eşitliklerini sağlar [13].

3.2. Fuzzy Reel Sayı

Fuzzy sayılar, klasik gerçek sayılar cümlesinin bir genelleştirmesi olarak ya da bazı ek özelliklere sahip bir reel sayı doğrusunun bir fuzzy alt cümlesi olarak ifade edilebilir. Bazı yazarlar pozitif ve negatif olmayan fuzzy sayılar arasında ayrım yapmadıklarından dolayı literatürde fuzzy sayıları tanımlamada bazı eksiklikler vardır. Ancak fuzzy sayılar, belirgin olmayan bilgilerin hem işlenmesinde hem de kullanımında çok önemli bir role sahiptir ve hesaplamalarının yapılmasında büyük kolaylık sağlar. Böylece, fuzzy sayıların tanımlanması ile birlikte fuzzy analiz ve fuzzy diferansiyel denklemlerin de temeli atılmıştır.

Tanım 3.2.1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathbb{R}$ üzerindeki A fuzzy cümlesine bir fuzzy reel sayı denir;

- i. A fuzzy cümlesi normaldir, yani $\mu_A(x) = 1$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$ vardır,
- ii. A fuzzy cümlesi konvektir, yani $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\mu_A[\lambda x + (1 - \lambda)y] \geq \min[\mu_A(x), \mu_A(y)]$ olmalıdır,
- iii. $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde üst yarı-süreklidir, yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x - y| < \delta$ iken $|\mu_A(x) - \mu_A(y)| < \varepsilon$ olmalıdır,

iv. $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu kompakt bir şekilde desteklidir. Yani A cümlesinin kapanışını $cl(A)$ ile göstermek üzere $cl\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) > 0\}$ kompaktır.

Fuzzy reel sayıların uzayı $\mathcal{F}^*(\mathbb{R})$ ile gösterilmek üzere $A \in \mathcal{F}^*(\mathbb{R})$ 'dir [17].

Örnek 3.2.1. Her bir $r \in \mathbb{R}$ için $\tilde{r}$ bir fuzzy reel sayıdır öyle ki

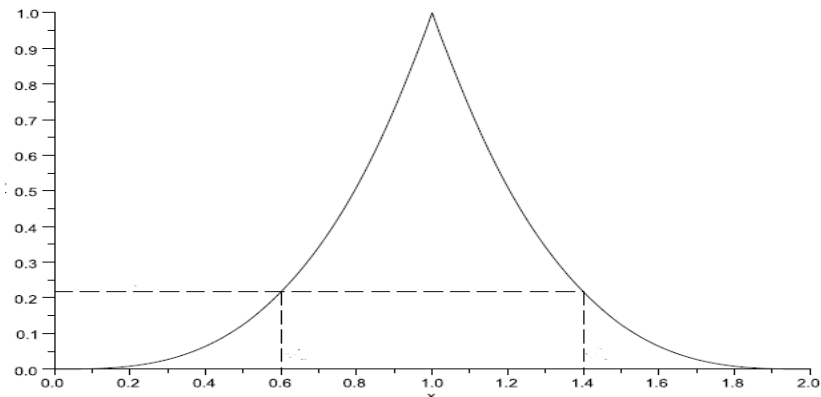
$$\mu_{\tilde{r}}(t) = \begin{cases} 1 & , t = r \\ 0 & , t \neq r \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [17].

Örnek 3.2.2. A fuzzy cümle olsun ve $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^3 & , 0 \leq x < 1 \\ (2-x)^3 & , 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Böylece A cümlesi bir fuzzy sayıdır [90].

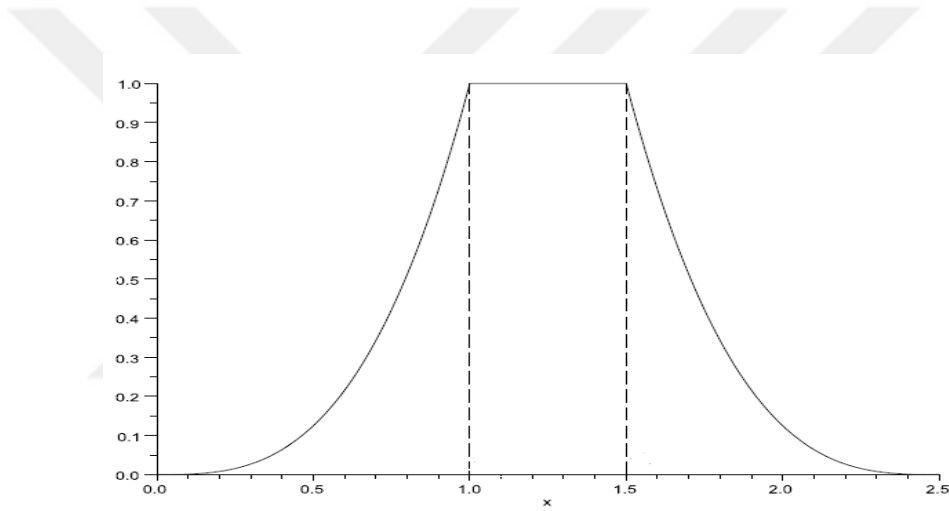


Şekil 3.3. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu grafiği [90].

Örnek 3.2.3. B fuzzy cümle olsun ve $\mu_B : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^3 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , 1 \leq x \leq 1.5 \\ (2.5-x)^3 & , 1.5 \leq x \leq 2.5 \\ 0 & , x > 2.5 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Böylece B cümlesi bir fuzzy sayıdır [90].



Şekil 3.4. $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonu grafiği [90].

Tanım 3.2.2. $A, B \in \mathcal{F}^*(\mathbb{R})$ ve $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\mu_{A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$,
- ii. $\mu_{A-B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$,
- iii. $\mu_{A \cdot B}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$,
- iv. $\mu_{A:B}(z) = \bigvee_{z=x:y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$ şeklindedir [17].

3.3. Fuzzy Karmaşık Sayı

Yıllar boyunca Zadeh ve onu takip eden diğer araştırmacılar, fuzzy cümleler ve fuzzy mantık teorisini ileriye taşımak için uğraş verdiler. Bu girişimlerden birkaçı olarak tip-2 fuzzy cümleler, fuzzy karmaşık sayılar ve Z – sayılar en önemlileri arasındadır. Teorinin önemli genelleştirmelerinden karmaşık fuzzy mantık ve fuzzy karmaşık cümle kavramları, tip-1 veya tip-2 fuzzy cümleler aracılığıyla kolayca formüle edilemeyen karmaşık olaylarla ilgili kontrol ve değerlendirme için temel teşkil eder.

Tanım 3.3.1. $\tilde{Z}$ sayısı fuzzy karmaşık sayıdır ancak ve ancak

- i. $\mu_{\tilde{Z}} : \mathbb{C} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu sürekli,dir,
- ii. $0 \leq \alpha < 1$ için $\tilde{Z}^{\alpha+} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mu_{\tilde{Z}}(z) > \alpha\}$ cümlesi açık, sınırlı, bağlantılı ve basit bağlantılıdır,
- iii. $\tilde{Z}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mu_{\tilde{Z}}(z) = 1\}$ cümlesi boştan farklı, kompakt, yayla bağlantılı ve basit bağlantılıdır.

Fuzzy karmaşık sayıların uzayı $\mathcal{F}^*(\mathbb{C})$ olmak üzere $\tilde{Z} \in \mathcal{F}^*(\mathbb{C})$ ile gösterilir [22, 91].

Tanım 3.3.2. Karmaşık sayılar cümlesi $\mathbb{C}$ ve fuzzy karmaşık sayılar cümlesi $\mathbb{C}$ olsun. $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olarak verilen herhangi bir dönüşüm $f(z_1, z_2) = w$ şeklinde tanımlansın. Genişleme ilkesini kullanarak, $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diyelim.

$$\prod(z_1, z_2) = \min\{\mu_{\tilde{z}_1}(z_1), \mu_{\tilde{z}_2}(z_2)\}$$

olmak üzere

$$\mu_{\tilde{w}}(w) = \sup\{\prod(z_1, z_2) \mid f(z_1, z_2) = w\}$$

ise $f(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = \tilde{W}$ olur.

Burada

i. $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ ise $\tilde{W} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$,

ii. $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ ise $\tilde{W} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2$,

iii. $f(z_1, z_2) = z_1 - z_2$ ise $-\tilde{Z}$ sayısı için üyelik fonksiyonu $\mu_{-\tilde{Z}}(z) = \mu_{\tilde{Z}}(-z)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{W} = \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_1 + (-\tilde{Z}_2)$,

iv. $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$ ise $\tilde{Z}^{-1}$ sayısı için üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{Z}^{-1}}(z) = \mu_{\tilde{Z}}(z^{-1})$ olarak tanımlanırsa $\tilde{W} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^{-1}$ elde edilir [22, 91].

Tanım 3.3.3. Fuzzy karmaşık $\tilde{Z}$ sayısının eşleniği $\tilde{Z}^*$ sayısının üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{Z}^*}(z) = \mu_{\tilde{Z}}(\bar{z})$ ile tanımlanmaktadır öyle ki $z = x + iy$ karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z} = x - iy$ 'dir [22, 91].

Tanım 3.3.4. Fuzzy karmaşık $\tilde{Z}$ sayısının modülü $|\tilde{Z}|$ sayısının üyelik fonksiyonu

$$\mu_{|\tilde{Z}|}(r) = \sup \{ \mu_{\tilde{Z}}(z) \mid |z| = r \}$$

ile tanımlanmaktadır öyle ki r , $z = x + iy$ karmaşık sayısının modülüdür [22, 91].

3.4. Fuzzy Topolojik Uzay

[1]'de tanıtilan fuzzy cümle kavramı, klasik topoloji kavramlarının fuzzy topolojik uzaylara genelleştirilmesi için uygun bir olanak sağlar. Böylelikle fuzzy topoloji tanımıyla birlikte fuzzy cümleler üzerine bir topolojik yapı inşa edilir.

Tanım 3.4.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan X uzayındaki fuzzy cümlelerin bir T ailesine bir fuzzy topoloji denir öyle ki

- i. $\emptyset, X \in T$,
- ii. $A, B \in T$ ise $A \cap B \in T$,
- iii. Her $i \in I$ için $A_i \in T$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$ sağlanır [92].

T fuzzy topoloji olmak üzere (X, T) ikilisine fuzzy topolojik uzay denir. T 'nin her bir üyesine T –açık fuzzy cümlesi denir. Bir fuzzy cümlesi T –kapalıdır ancak ve ancak tümleyeni T –açıktır. Ayırık olmayan fuzzy topoloji sadece $\emptyset$ ve X fuzzy cümlelerini kapsarken, ayırık topoloji bütün fuzzy cümlelerini kapsar. $W \subset T$ olması için gerek ve yeter şart W fuzzy topolojisinin T fuzzy topolojisinden daha kaba olmasıdır [92].

Tanım 3.4.2. (X, T) fuzzy topolojik uzayındaki bir U fuzzy cümlesi bir A fuzzy cümlesinin komşuluğudur ancak ve ancak $A \subset O \subset U$ olacak şekilde bir O fuzzy açık cümlesi vardır [92].

Bir noktanın komşuluğu yerine bir fuzzy cümlelerin komşuluğu dikkate alındığından dolayı yukarıdaki tanım bir şekilde sıradan komşuluk tanımından ayrılmaktadır.

Teorem 3.4.1. Bir A fuzzy cümlesi T –açıktır ancak ve ancak A tarafından kapsanan her bir B fuzzy cümlesi için A, B 'nin bir komşuluğudur [92].

İspat. Yeterlilik şartı açıktır. Gereklilik şartı incelendiğinde $A \subset A$ olduğundan $A \subset O \subset A$ olacak şekilde bir O fuzzy açık cümlesi vardır. Böylece $A = O$ ve A cümlesi T –açıktır.

Bir fuzzy cümlelerin komşuluk sistemi fuzzy cümlelerin bütün komşuluklarının ailesidir.

Tanım 3.4.3. Boştan farklı iki cümle X ve Y olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\mu_B(y)$ üyelik fonksiyonu ile birlikte $B \subset Y$ fuzzy cümlesi için f altında B cümlesinin ters görüntüsü $f^{-1}(B)$, X cümlesinde bir fuzzy cümledir öyle ki $\forall x \in X$ için üyelik fonksiyonu $\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır [92].

Aksine, $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile birlikte $A \subset X$ fuzzy cümlesi için f altında A cümlesinin görüntüsü $f(A)$, Y cümlesinde bir fuzzy cümledir öyle ki $\forall y \in Y$ için üyelik fonksiyonu

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}(y)} \mu_A(z), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olmak üzere $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.2. Boştan farklı iki cümle X ve Y olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. O halde;

- i. Herhangi $B \subset Y$ fuzzy cümlesi için $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$,
- ii. Herhangi $A \subset X$ fuzzy cümlesi için $f(A') \supset (f(A))'$,
- iii. Herhangi $B_1, B_2 \subset Y$ fuzzy cümleleri için $B_1 \subset B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
- iv. Herhangi $A_1, A_2 \subset X$ fuzzy cümleleri için $A_1 \subset A_2$ ise $f(A_1) \subset f(A_2)$,
- v. Herhangi $B \subset Y$ fuzzy cümlesi için $B \supset f(f^{-1}(B))$,
- vi. Herhangi $A \subset X$ fuzzy cümlesi için $A \subset f^{-1}(f(A))$,
- vii. f , X 'den Y 'ye bir fonksiyon ve g , Y 'den Z 'ye bir fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonlarının bileşimi $g \circ f$ olmak üzere herhangi $C \subset Z$ fuzzy cümlesi için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ şeklindedir [92].

İspat.

i. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f^{-1}(B')}(x) = \mu_{B'}(f(x)) = 1 - \mu_B(f(x)) = 1 - \mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_{(f^{-1}(B))'}(x)$$

elde edilir.

ii. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ boştan farklı ise

$$\mu_{f(A')}(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} (\mu_{A'}(z)) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} (1 - \mu_A(z)) = 1 - \inf_{z \in f^{-1}(y)} (\mu_A(z))$$

ve

$$\mu_{(f(A))'}(y) = 1 - \mu_{f(A)}(y) = 1 - \sup_{z \in f^{-1}(y)} (\mu_A(z))$$

olduğundan dolayı

$$\mu_{f(A')}(y) \geq \mu_{(f(A))'}(y)$$

elde edilir.

iii. Her $x \in X$ için $\mu_{f^{-1}(B_1)}(x) = \mu_{B_1}(f(x))$ ve $\mu_{f^{-1}(B_2)}(x) = \mu_{B_2}(f(x))$ olur.

Dolayısıyla her $x \in X$ için $B_1 \subset B_2$ olduğundan $\mu_{f^{-1}(B_1)}(x) \leq \mu_{f^{-1}(B_2)}(x)$ bulunur.

Böylece $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ elde edilir.

iv. $\mu_{f(A_1)}(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} (\mu_{A_1}(z))$ ve $\mu_{f(A_2)}(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} (\mu_{A_2}(z))$ olur. Dolayısıyla her

$y \in Y$ için $A_1 \subset A_2$ olduğundan $\mu_{f(A_1)}(y) \leq \mu_{f(A_2)}(y)$ bulunur. Böylece

$f(A_1) \subset f(A_2)$ elde edilir.

v. $f^{-1}(y)$ boştan farklı ise $\mu_{f(f^{-1}(B))}(y)=0$ olur. Böylece her $x, y \in Y$ için

$\mu_{f(f^{-1}(B))}(y) \leq \mu_B(y)$ elde edilir.

vi. Her $x \in X$ için $\mu_{f^{-1}(f(A))}(x) = \mu_{f(A)}(f(x)) = \sup_{z \in f^{-1}(f(x))} (\mu_A(z)) \geq \mu_A(x)$ elde

edilir.

vii. Her $x \in X$ için

$$\mu_{(g \circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_C(g \circ f(x)) = \mu_C(g(f(x))) = \mu_{g^{-1}(C)}(f(x)) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x)$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. FUZZY MANDELBROT VE FUZZY MANDELBAR CÜMLELERİ

Fraktallar farklı ölçeklerde aynı karmaşık desenlere sahip olan ve keyfi olarak küçük ölçeklerde de benzer karmaşık durumları görselleştirmeye devam eden matematiksel yapılardır. Fraktalların pek çoğu matematiksel olarak basit formlarda ifade edilebilir ancak fraktal formüllerinin basit ve matematiksel yapısının düzenli olmasına karşın, oluşturdukları muhteşem görsel şölen sadece bilimsel açıdan değil, sanatsal açıdan da etkileyici kabul edilmektedir ve bazıları halen gizemini korumaktadır.

Bu fraktallar içerisinde en çok ilgi çeken ve keşfedildiği günden bu yana popülerliği günden güne artan Mandelbrot cümlesi, $f_c(z) = z^2 + c$ iterasyon fonksiyonunun yinelenmesi sonucu ortaya çıkan dizide $z = 0 + 0i$ başlangıç noktası ile birlikte yörüngesi sonsuza ıraksamayan tüm c karmaşık sayılarından oluşmaktadır. Bu basit formül hayranlık uyandıran bir karmaşıklık üretmektedir. Mandelbrot cümlesi, sonsuz tekrarlama adımlarının uygulanmasından kaynaklanan dizi davranışlarının bir sonucudur. Birinci iterasyon adımı sonucunda oluşan cümlenin şekli, $r = 2$ yarıçaplı ve orijin merkezli dairedir. Sonraki adımlarda bu merkezli daire daralır ve iterasyon sonsuz defa tekrarlandığında Mandelbrot cümlesi şeklini alır. İterasyon fonksiyonunun yinelenmesi esnasında, seçilen noktanın davranışını belirlemek için geri besleme döngüsünün maksimum sayıda, örneğin n defa çalışması gerekir. $n \rightarrow \infty$ iken $|f_c^n(0)| \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan noktalar bu iterasyon altında sonsuza ıraksayacaktır ancak farklı hızlarla ıraksıyor olmaları dikkate değerdir. Bu nedenle, Mandelbrot cümlesinden farklı hızlarla sonsuza ıraksayan elemanların durumlarının kademeli olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorusu ortaya çıkmaktadır.

Böyle bir sorunun cevabı için başvurulacak olan bulanıklaştırmanın birçok farklı alanda çeşitli teorik veya pratik problemlerin analizinde kullanıldığı bilinmektedir.

Değişen kaotik dinamik modellerin açıklanmasında da fuzzy (bulanık) cümle teorisine başvurulmaktadır [1-5]. Fuzzy cümle teorisi yaklaşımı, cümleye ait olma durumunu derecelendirerek daha zengin bir bakış açısı sunmaktadır.

4.1. Fuzzy Mandelbrot Cümlesi

Literatürde fuzzy cümle teorisi yardımıyla karmaşık sayılar cümlesinin elemanlarının Mandelbrot cümlesine aitlik durumunu belirlenmesini hedefleyen [27] numaralı çalışma mevcuttur. Ancak bu çalışmadaki yetersizlik aşağıda açıklanmaktadır. Dolayısıyla tez çalışmamızın bu alt bölümünde yeni bir üyelik fonksiyonu tanımlanacak ve mevcut üyelik fonksiyonu ile karşılaştırılacaktır.

[27]'de Mandelbrot cümlesini içine alan bir L bölgesindeki c parametrelerini belirlemek için fuzzy bilgiye dayalı aşağıdaki algoritma üretilmiştir. Bu algoritmada karmaşık sayıların bir L bölgesini seçmek zorunluluktur, çünkü sadece belli bir bölgedeki karmaşık sayıların değerlerine karşılık gelen sonlu çözünürlüklü bir ağ oluşturulabilir.

```

1 begin
2 read ( $k_{\max}, R$ );
3  $z = 0 + 0i, k = 0$ ;
4 for  $\forall c \in L$  do
5   repeat
6      $z := z^2 + c$ ,
7      $k := k + 1$ ;
8   until ( $k > k_{\max}$ ) or ( $|z| > R$ );
9   write ( $c$ ; "Mandelbrot cümlesinin elemanıdır.");
10 end
11 end

```

Şekil 4.1. L bölgesindeki c karmaşık sayılarının Mandelbrot cümlesine aitlik algoritması [27]

Burada $k(c)$ yineleme sayaç değişkeninin değerini belirtmek üzere c noktasının üyelik derecesini tanımlayan bir $\mu(c) = \frac{k(c)}{k_{\max}}$ üyelik fonksiyonu tanıtılmıştır.

Böylece $c \in L$ değerlerinin cümlesi bir fuzzy cümleye karşılık gelmektedir. Ancak bu algorithmada maksimum yineleme değeri $k_{\max}$ keyfî olarak seçilmektedir. Buna göre fuzzy Mandelbrot cümlesine ait olan noktaların üyelik derecelerini belirleyen fonksiyon, $k_{\max}$ değerinin seçimine göre farklılık gösterdiğinden işlevsel değildir. Aşağıdaki ilk örnekte Mandelbrot cümlesinin tam üyesi olan bir nokta için istendiği gibi çalışan algoritmanın ikinci örnekte üyelik derecesini kesin olarak belirlemekte yetersiz kaldığı görülmektedir.

Örnek 4.1.1. $k = 0$ için $z = 0 + 0i$ ile başlayalım. $k_{\max} = 100$ seçelim ve algoritmayı $c = i$ noktasına uygulayalım.

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 \\
 z_1 &= 0^2 + i = i \\
 z_2 &= i^2 + i = -1 + i \\
 z_3 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_4 &= (-i)^2 + i = -1 + i \\
 z_5 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_6 &= (-i)^2 + i = -1 + i \\
 z_7 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\
 &\vdots \\
 z_{100} &= (-i)^2 + i = -1 + i
 \end{aligned}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n| \leq 2$ olduğundan iterasyon adım sayısı maksimum iterasyon sayısını aşmaz. Böylece $\mu(i) = \frac{100}{100} = 1$ bulunur. Yani $c = i$ noktası üyelik derecesine bağlı olarak Mandelbrot cümlesinin tam üyesidir.

Örnek 4.1.2. $k = 0$ için $z = 0 + 0i$ ile başlayalım. $k_{\max} = 100$ seçelim ve algoritmayı $c = 1$ noktasına uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\ z_5 &= 26^2 + 1 = 677 \\ &\vdots \end{aligned}$$

İterasyon sayısı $k = 3$ olduğu anda $|z_3| = 5 > 2$ şartı döngünün durmasına sebep olacaktır. O halde $\mu(1) = 0.03$ bulunur ve $c = 1$ noktasının üyelik derecesinin 0.03 olduğu söylenilebilir. Ancak maksimum iterasyon adım sayısı olan $k_{\max}$ değeri sırasıyla 10, 100, 1000, ... olarak seçilirse $c = 1$ noktasının üyelik dereceleri $\mu(1) = 0.3$, $\mu(1) = 0.03$, $\mu(1) = 0.003$, ... olarak değişir. Sonuç olarak, $\mu(c) = k(c) / k_{\max}$ üyelik fonksiyonu ile kesin bir üyelik derecesi belirlenmemektedir.

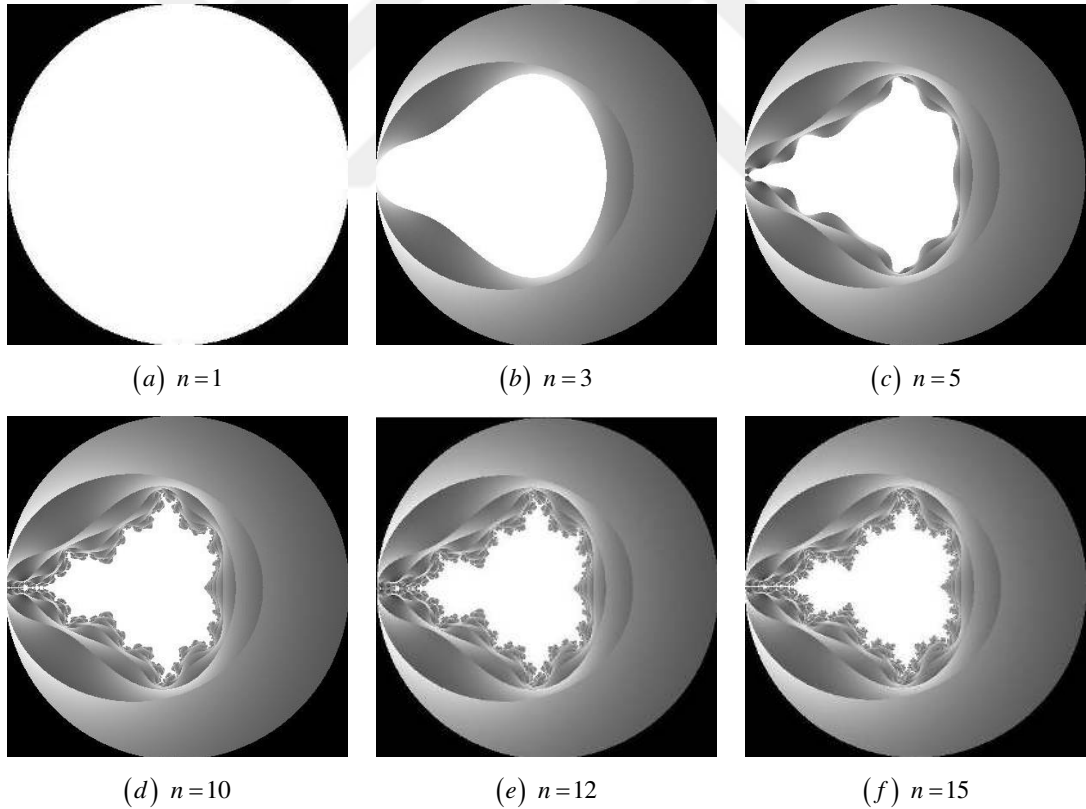
Mandelbrot cümlesinin fraktalların ünlü örneklerinden biri olmasına rağmen karmaşık sayılar cümlesinin elemanlarının Mandelbrot cümlesine aitlik durumunu bulanıklık yaklaşımı ile belirlenmesi üzerine [27] numaralı kaynak hariç başka bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu bağlamda tezimizin bu bölümünde, fuzzy Mandelbrot cümlesi ve karmaşık sayıların iterasyon altında yörüngeleri sınırlı olmasa bile fuzzy Mandelbrot cümlesine ait olma derecelerini belirleyen yeni bir üyelik fonksiyonu aşağıda şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1. $z = 0 + 0i$ başlangıç noktası ile birlikte $f_c^n(0) = [f_c^{n-1}(0)]^2 + c$ iterasyonu altında $\mu: \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu

$$\mu(c) = \begin{cases} 1 & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_c^n(0)| \leq 2, \\ \frac{|f_c^{k-1}(0)|}{|f_c^k(0)|} & , \quad |f_c^k(0)| > 2 \text{ ve } |f_c^{k-1}(0)| \leq 2 \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases}$$

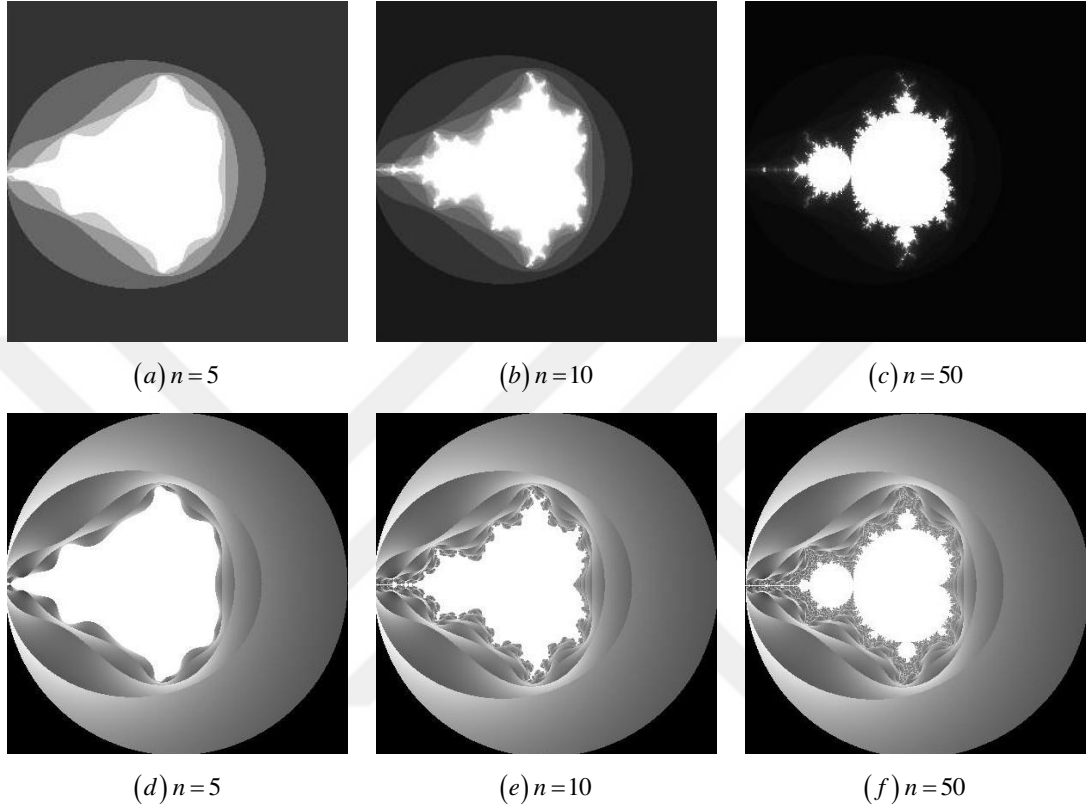
olmak üzere $\tilde{M} = \{(c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C}\}$ fuzzy cümlesine, fuzzy Mandelbrot cümlesi denir.

Fuzzy Mandelbrot cümlesinin yaklaşık görünümlerinin gri ölçekli grafikleri Şekil 4.2.'de verilmiştir. Burada bilgisayar programlarının sonsuzluğu işleyemediği göz önüne alınarak bazı artan sonlu iterasyon sayıları seçilip maksimum yineleme sayısı artırılmış ve fuzzy Mandelbrot cümlesinin art arda daha ayrıntılı görünümleri elde edilmiştir. Bu grafiklerde parlak pikseller daha yüksek üyelik derecelerine sahiptir.



Şekil 4.2. Sonlu maksimum iterasyon sayısı n için fuzzy Mandelbrot cümlesinin yaklaşık görünümleri

Ayrıca [27] tarafından verilen $\mu(c)=k(c)/k_{\max}$ üyelik fonksiyonu ile Tanım 4.1.1.'de yeni tanımlanan üyelik fonksiyonumuzla karşılaştırılmaları Şekil 4.3.'deki grafiklerde görülmektedir.



Şekil 4.3. [27]'de verilen üyelik fonksiyonu (ilk satır) ve Tanım 4.1.1.'de verilen üyelik fonksiyonu (ikinci satır)

Açık bir şekilde, ikinci satıra göre birinci satırdaki görüntülerde piksellerin parlaklığı daha hızlı azalmaktadır. Çünkü noktaların üyelik dereceleri ($\mu(c)=1$ durumu hariç), maksimum yineleme sayısı artırıldığında, yani $n=k_{\max}$ sonsuza ıraksarken $\mu(c)=k(c)/k_{\max}$ sifıra yakınsamaktadır. İkinci durumda, n sonsuza ıraksaması durumunda dahi 0 ile 1 arasındaki üyelik dereceleri yine anlamlı olmaktadır.

Tanım 4.1.1.'e uygun olacak şekilde karmaşık sayılar cümlesindeki bir noktanın fuzzy Mandelbrot üyelik derecesini belirleyecek yeni bir algoritma aşağıda verilmiştir.

Algoritma: Fuzzy Mandelbrot cümlesi üyelik derecesi algoritması	
Input	: $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
Data	: $z_0 = 0 + i0$
Output	: $\mu(c)$
1	: for $1 \leftarrow k$ to n do
2	: $z_k = z_{k-1}^2 + c$
3	: if $ z_k \leq 2$
4	: $\mu(c) = 1$
5	: else if $ z_k > 2$ and $ z_{k-1} \leq 2$
6	: $\mu(c) = z_{k-1} / z_k $
7	: end
8	: end
9	: end

Şekil 4.4. Verilen bir c karmaşık sayısının fuzzy Mandelbrot cümlesine üyelik derecesi algoritması

Aşağıdaki örneklerde seçilen bazı noktalar için bu algoritmayı uygulayarak üyelik dereceleri belirlenmektedir.

Örnek 4.1.1. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = i$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 \\
 z_1 &= 0^2 + i = i \\
 z_2 &= i^2 + i = -1 + i \\
 z_3 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_4 &= (-i)^2 + i = -1 + i \\
 z_5 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_6 &= (-i)^2 + i = -1 + i \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_i^n(0)| \leq 2$ olduğundan üyelik derecesi $\mu(i)=1$ bulunur.

Böylece $(i,1) \in \tilde{M}$ elde edilir.

Örnek 4.1.2. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = -1$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + (-1) = -1 \\ z_2 &= (-1)^2 + (-1) = 0 \\ z_3 &= 0^2 + (-1) = -1 \\ z_4 &= (-1)^2 + (-1) = 0 \\ z_5 &= 0^2 + (-1) = -1 \\ z_6 &= (-1)^2 + (-1) = 0 \\ z_7 &= 0^2 + (-1) = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sonuç olarak $n \in \mathbb{N}$ için $|f_i^n(0)| \leq 2$ olduğundan üyelik derecesi $\mu(-1)=1$ bulunur.

Böylece $(-1,1) \in \tilde{M}$ elde edilir.

Aşağıda klasik Mandelbrot cümlesinin elemanı olmayan noktaların fuzzy Mandelbrot cümlesine aitlik derecelerini veren örnekler verilmektedir.

Örnek 4.1.3. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = 1$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\ z_5 &= 26^2 + 1 = 677 \\ z_6 &= 677^2 + 1 = 458330 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elde edilen $\{0, 1, 2, 5, 26, 677, 458330, \dots\}$ dizisi sonsuza ıraksaktır ve $c = 1$ noktası klasik Mandelbrot cümlesinin elemanı değildir. Ancak $k = 3$ iterasyon adımında

$$|f_1^3(0)| = 5 > 2 \text{ olduğundan } \mu(1) = \left| \frac{f_1^2(0)}{f_1^3(0)} \right| = 0.4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.1.4. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = 0.5$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + 0.5 = 0.5 \\ z_2 &= (0.5)^2 + 0.5 = 0.75 \\ z_3 &= (0.75)^2 + 0.5 = 1.063 \\ z_4 &= (1.063)^2 + 0.5 = 1.629 \\ z_5 &= (1.629)^2 + 0.5 = 3.153 \\ z_6 &= (3.153)^2 + 0.5 = 10.44 \\ &\vdots \end{aligned}$$

O halde ortaya çıkan

$$\{0, 0.5, 0.75, 1.063, 1.629, 3.153, 10.44, \dots\}$$

dizisi sonsuza ıraksaktır ve $c = 0.5$ klasik Mandelbrot cümlesinin elemanı değildir.

Ancak $k = 5$ iterasyon adımında $|f_{0.5}^5(0)| = 3.153 > 2$ olduğundan üyelik derecesi

$$\mu(0.5) = \left| \frac{f_{0.5}^4(0)}{f_{0.5}^5(0)} \right| \cong 0.51 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.1.5. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = -1.3 + 0.2i$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= 0^2 + (-1.3 + 0.2i) = -1.3 + 0.2i \\
z_2 &= (-1.3 + 0.2i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = 0.35 - 0.32i \\
z_3 &= (0.35 - 0.32i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = -1.2799 - 0.024i \\
z_4 &= (-1.2799 - 0.024i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = 0.33757 + 0.26144i \\
z_5 &= (0.33757 + 0.26144i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = -1.2544 + 0.3765i \\
z_6 &= (-1.2544 + 0.3765i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = 0.1318 - 0.7475i \\
z_7 &= (0.1318 - 0.7475i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = -1.8414 + 0.0003i \\
z_8 &= (-1.8414 + 0.0003i)^2 + (-1.3 + 0.2i) = 2.0907 + 0.1995i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Böylece dizi

$$\{0, -1.3 + 0.2i, 0.35 - 0.32i, -1.2799 - 0.024i, 0.33757 + 0.26144i, \\
-1.2544 + 0.3765i, 0.1318 - 0.7475i, -1.8414 + 0.0003i, 2.0907 + 0.1995i, \dots\}$$

şeklinde olduğundan $c = -1.3 + 0.2i$ noktasının yörüngesi sonsuza ıraksaktır ve dizi terimlerinin modülleri

$$\{0, 1.3153, 0.47424, 1.2801, 0.42697, 1.3097, 0.75614, 1.8370, 2.830, \dots\}$$

şeklindedir. $k = 8$ iterasyon adımında $|f_{-1.3+0.2i}^8(0)| \cong 3.54 > 2$ olduğundan dolayı

$$\mu(-1.3 + 0.2i) = \left| \frac{f_{-1.3+0.2i}^7(0)}{f_{-1.3+0.2i}^8(0)} \right| \cong 0.88 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.1.6. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = -3$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= 0^2 + (-3) = -3 \\
z_2 &= (-3)^2 + (-3) = 6 \\
z_3 &= 6^2 + (-3) = 33 \\
z_4 &= 33^2 + (-3) = 1086 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

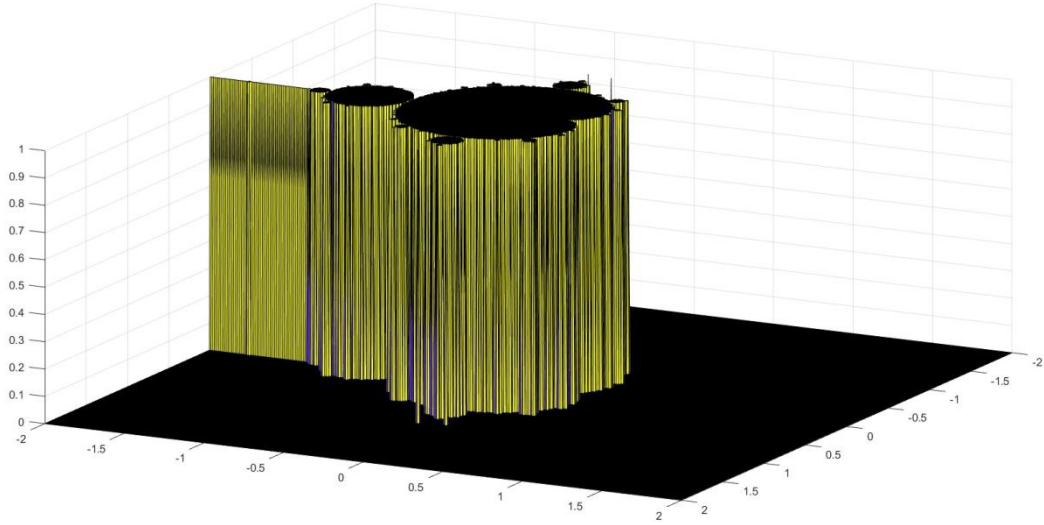
O halde ortaya çıkan $\{0, -3, 6, 33, 1086, \dots\}$ dizisi sonsuza ıraksaktır. Dolayısıyla

$k = 1$ ilk iterasyon adımında $|f_{-3}^1(0)| = 3 > 2$ olduğundan $\mu(-3) = \left| \frac{f_{-3}^0(0)}{f_{-3}^1(0)} \right| = \frac{0}{3} = 0$ bulunur.

Bu örneklerde bazı karmaşık sayıların üyelik dereceleri hesaplanmıştır.

Şimdi karmaşık düzlemin tamamında iterasyon sayısı sonsuza ıraksarken oluşan fuzzy Mandelbrot cümlesinin grafiğinin oluşum aşamalarının her bir iterasyon adımıda geometrik açıdan ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak, üyelik derecesi $\mu(c) = 1$ olan noktalar incelenirse her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_c^n(0)| \leq 2$ eşitsizliği sağlandığından bu durumda üyelik fonksiyonunun tanım cümlesi klasik Mandelbrot cümlesidir ve görüntü cümlesi de $\{1\}$ olur. Sonuç olarak fuzzy Mandelbrot cümlesinin yüksekliği 1 olan göbek cümlesi, klasik Mandelbrot cümlesinin noktalarından oluşmaktadır. Bu durum Şekil 4.5.'de görülmektedir.

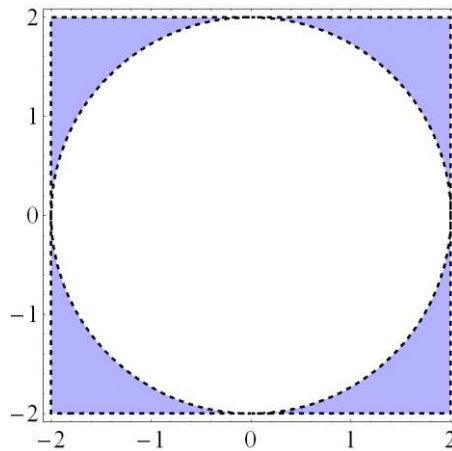


Şekil 4.5. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin göbeğinin üç boyutlu görünümü

Şimdi $\mu(c) \neq 1$ iken fuzzy Mandelbrot cümlesinin oluşum aşamalarını görselleştirmek üzere bazı iterasyon adımlarını ayrı ayrı inceleyelim.

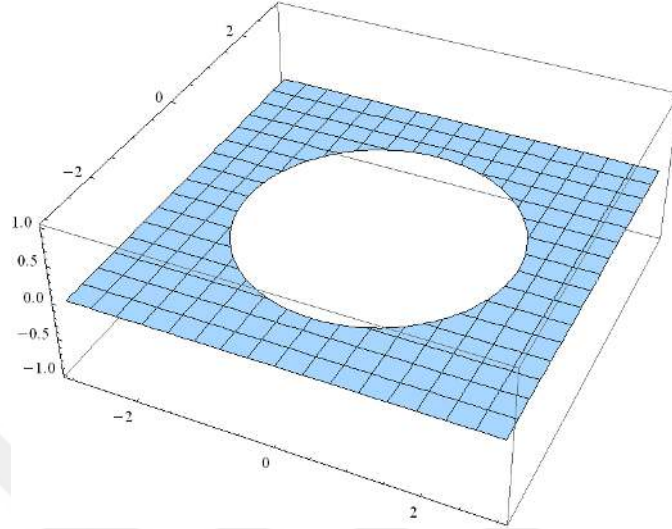
i. $k = 1$ durumu:

Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = 0$ olup $|c| > 2$ şartını sağlayan karmaşık sayıları için tanımlıdır. Dolayısıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ olarak ifade edilirse tanım cümlesi kutupsal koordinatlar yardımıyla $T.K. = \{(r, \theta) \mid |r| > 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ olarak verilir. Böylece tanım cümlesinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.6. $k = 1$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=1$ iterasyon adımımda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow \{0\}$ üyelik fonksiyonunun grafiği de aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.7. $k=1$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

ii. $k=2$ durumu:

Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^1(0)|}{|f_c^2(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu $|c| \leq 2$ ve

$|c^2 + c| > 2$ eşitsizliğini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$|r| \leq 2 \text{ ve } |r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta}| > 2 \quad (4.1)$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun grafiğini verir.

$|r| \leq 2$ eşitsizliği 2 yarıçaplı merkezli birim kapalı yuvarı ifade eder. Diğer taraftan

$$|r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta}| = 2$$

denkleminin kökleri:

$$r_1 = A + B + C$$

$$r_2 = A - B + C$$

$$r_3 = A + B - C$$

$$r_4 = A - B - C$$

olarak bulunur öyle ki

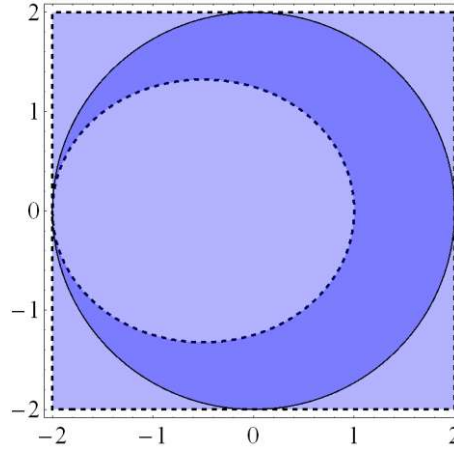
$$A = -\frac{1}{4}e^{-i\theta}(1+e^{2i\theta}),$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-2i\theta}(1+e^{2i\theta})^2 + \frac{e^{-i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{47\sqrt[3]{2}e^{i\theta}}{3D}},$$

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^{-2i\theta}(1+e^{2i\theta})^2 - \frac{e^{-i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{47\sqrt[3]{2}e^{i\theta}}{3D} - \frac{4e^{-i\theta}(1+e^{2i\theta}) - e^{-3i\theta}(1+e^{2i\theta})^3}{4\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-2i\theta}(1+e^{2i\theta})^2 + \frac{e^{-i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{47\sqrt[3]{2}e^{i\theta}}{3D}}},$$

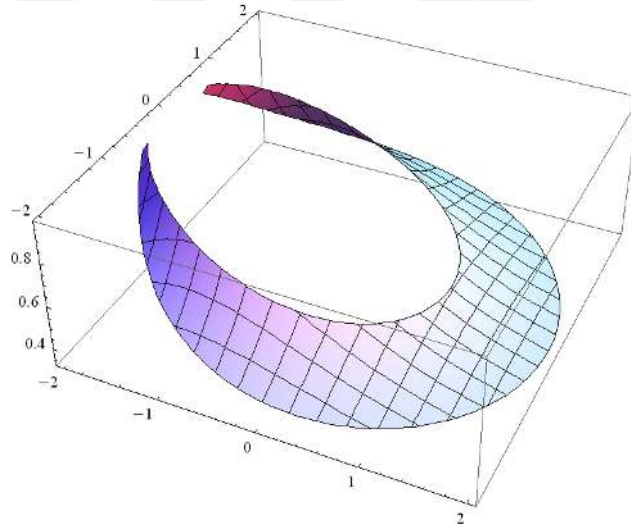
$$D = \sqrt[3]{\sqrt{\left(290e^{3i\theta} - 108e^{i\theta}(1+e^{2i\theta})^2\right)^2 + 415292e^{6i\theta} - 108e^{i\theta} + 74e^{3i\theta} - 108e^{5i\theta}}}$$

olacak şeklindedir. Sonuç olarak (4.1) eşitsizlik sisteminin çözümünden μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesinin grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Şekil 4.8. $k=2$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=2$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.9. $k=2$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

iii. $k=3$ durumu:

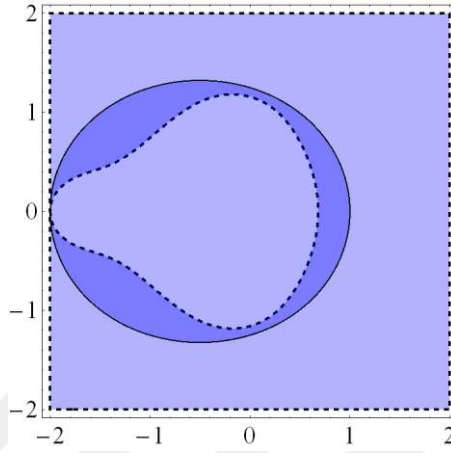
Burada Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^2(0)|}{|f_c^3(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

$|c^2 + c| \leq 2$ ve $|(c^2 + c)^2 + c| > 2$ eşitsizliğini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır.

Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

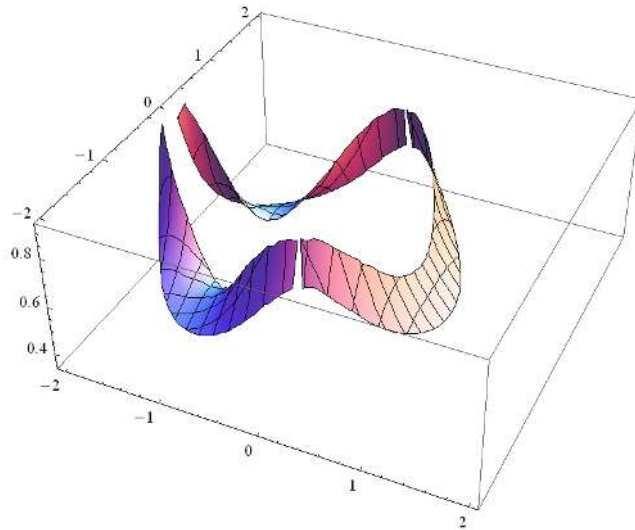
$$\left| r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta} \right| \leq 2 \text{ ve } \left| r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{3i\theta} + r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.10. $k=3$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=3$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.11. $k=3$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

iv. $k = 4$ durumu:

Burada Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^3(0)|}{|f_c^4(0)|}$ bulunur. Ancak üyelik fonksiyonu

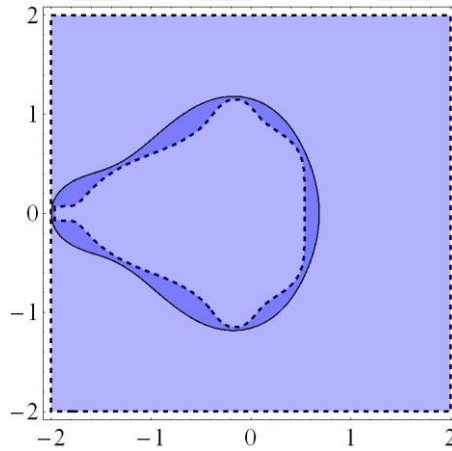
$$\left| (c^2 + c)^2 + c \right| \leq 2 \text{ ve } \left| \left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right| > 2 \text{ eşitsizliğini sağlayan } c \in \mathbb{C} \text{ noktaları}$$

için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{3i\theta} + r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

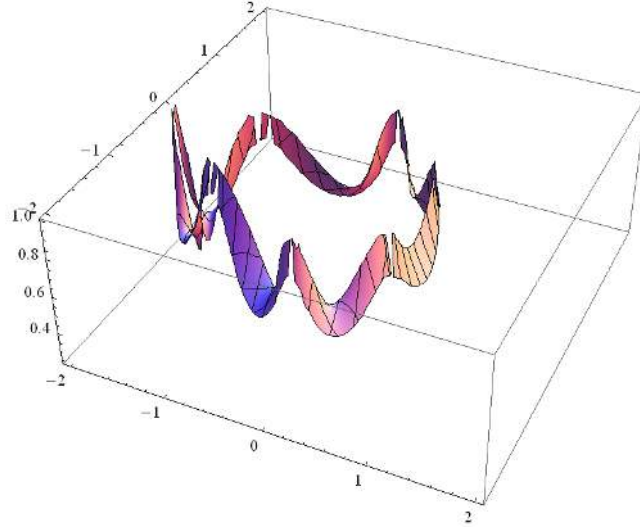
$$\left| r^8 e^{8i\theta} + 4r^7 e^{7i\theta} + 6r^6 e^{6i\theta} + 6r^5 e^{5i\theta} + 5r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{3i\theta} + r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.12. $k = 4$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k = 4$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.13. $k=4$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

v. $k=5$ durumu:

Burada Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^4(0)|}{|f_c^5(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

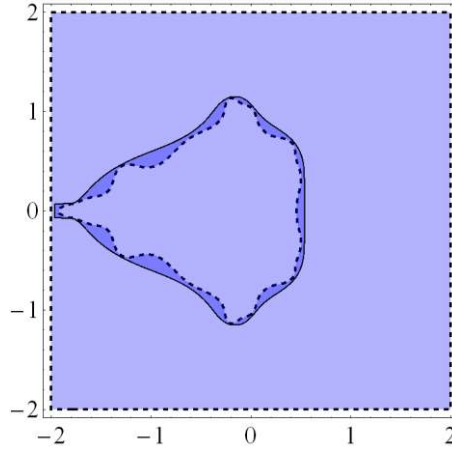
$$\left| \left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right| \leq 2 \text{ ve } \left| \left(\left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right| > 2 \text{ eşitsizliğini sağlayan } c \in \mathbb{C}$$

noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| r^8 e^{8i\theta} + 4r^7 e^{7i\theta} + 6r^6 e^{6i\theta} + 6r^5 e^{5i\theta} + 5r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{3i\theta} + r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

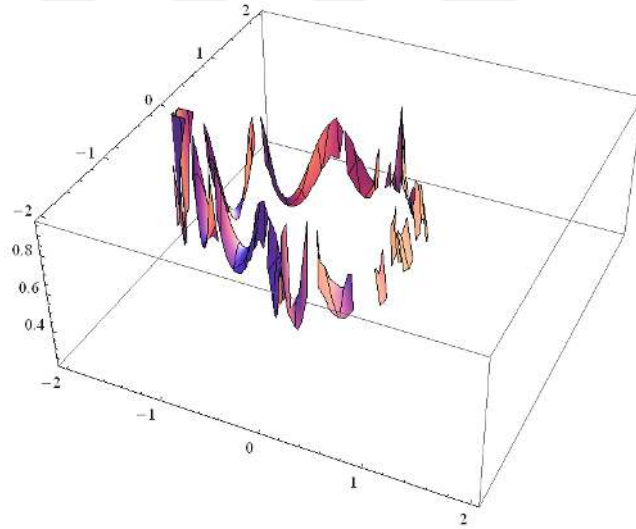
$$\left| \left(\left((r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta})^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.14. $k=5$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=5$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.15. $k=5$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

vi. $k=6$ durumu:

Burada Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^5(0)|}{|f_c^6(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

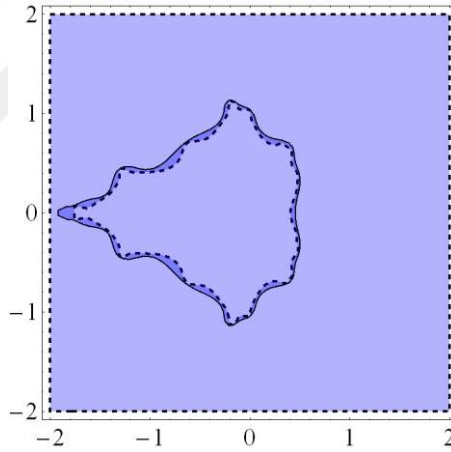
$$\left| \left(\left(\left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right| \leq 2 \quad \text{ve} \quad \left| \left(\left(\left(\left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right| > 2 \quad \text{eşitsizliğini}$$

sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| \left(\left(\left(r^2 e^{2i\theta} + re^{i\theta} \right)^2 + re^{i\theta} \right)^2 + re^{i\theta} \right) \right| \leq 2$$

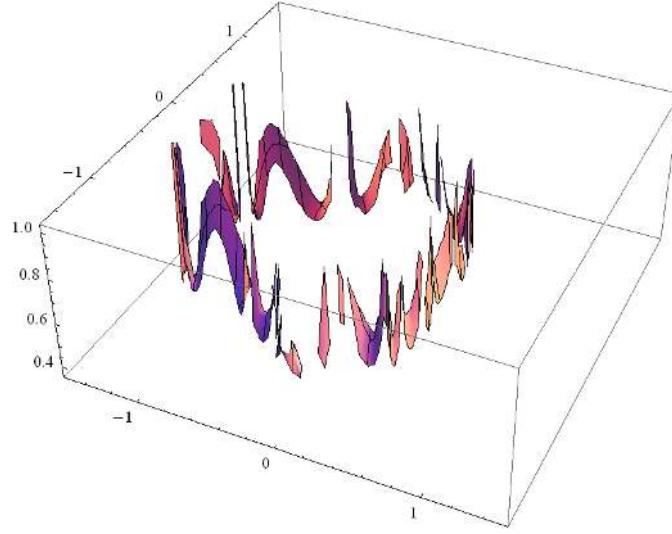
$$\left| \left(\left(\left(\left(r^2 e^{2i\theta} + re^{i\theta} \right)^2 + re^{i\theta} \right)^2 + re^{i\theta} \right) \right) \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.16. $k=6$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=6$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.17. $k=6$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

vii. $k = 7$ durumu:

Burada Tanım 4.1.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^6(0)|}{|f_c^7(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

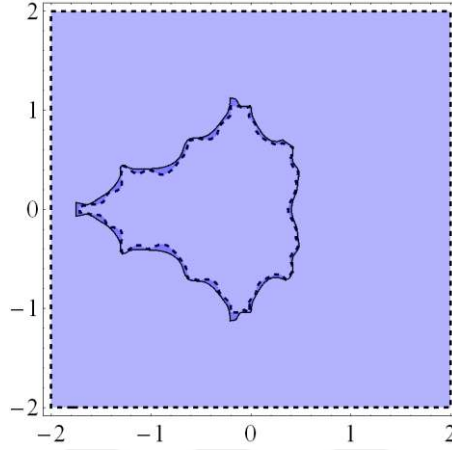
$$\left| \left(\left(\left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right| \leq 2 \text{ ve } \left| \left(\left(\left(\left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c \right| > 2$$

eşitsizliğini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| \left(\left(\left((r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta})^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

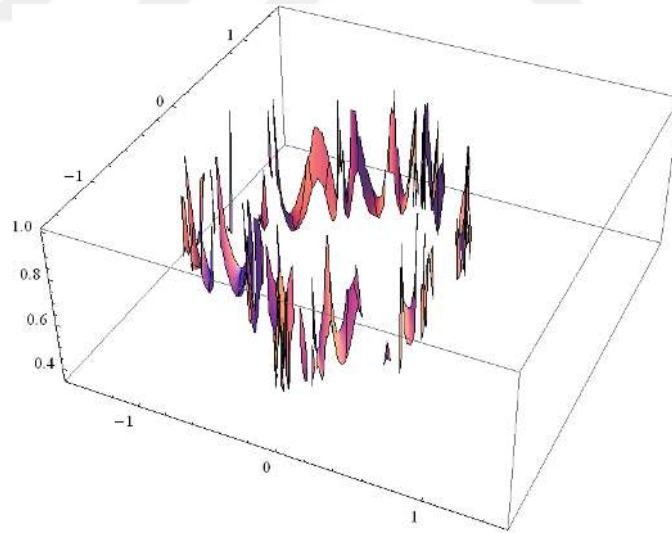
$$\left| \left(\left(\left(\left((r^2 e^{2i\theta} + r e^{i\theta})^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.18. $k=7$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=7$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.19. $k=7$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

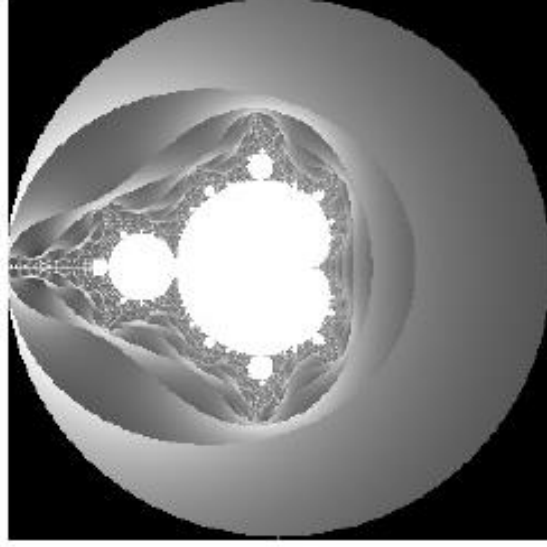
Böyle devam edilerek bulunan kökler yardımıyla üyelik fonksiyonunun her bir iterasyon adımı için tanım ve görüntü cümleleri elde edilerek grafikleri buna bağlı olarak çizilebilmektedir. Diğer taraftan bilgisayar programları aracılığıyla girilecek sonlu maksimum iterasyon sayısı ve yayılma aralığı için fuzzy Mandelbrot

cümlesinin yaklaşık grafiğini çizmek de mümkündür. Bu amaçla aşağıdaki algoritma verilmiştir.

Algoritma: Fuzzy Mandelbrot cümlesi grafiği	
Input	: $n \in \mathbb{N}, \text{range } a, b, \text{stepsize}$
Data	: $z_0 = 0 + i0, c = a(l) + ib(m)$
Output	: $\text{surface}(\mu)$
1	: for $1 \leftarrow l$ to $\text{length}(a)$
2	: for $1 \leftarrow m$ to $\text{length}(a)$
3	: for $1 \leftarrow k$ to n do
4	: $z_k = z_{k-1}^2 + c$
5	: if $ z_k \leq 2$
6	: $\mu(c) = 1$
7	: else if $ z_k > 2$ and $ z_{k-1} \leq 2$
8	: $\mu(c) = z_{k-1} / z_k $
9	: end
10	: end
11	: end
12	: end
13	: end
14	: draw $\mu: [\text{range } a] \times [\text{range } b] \rightarrow [0,1]$

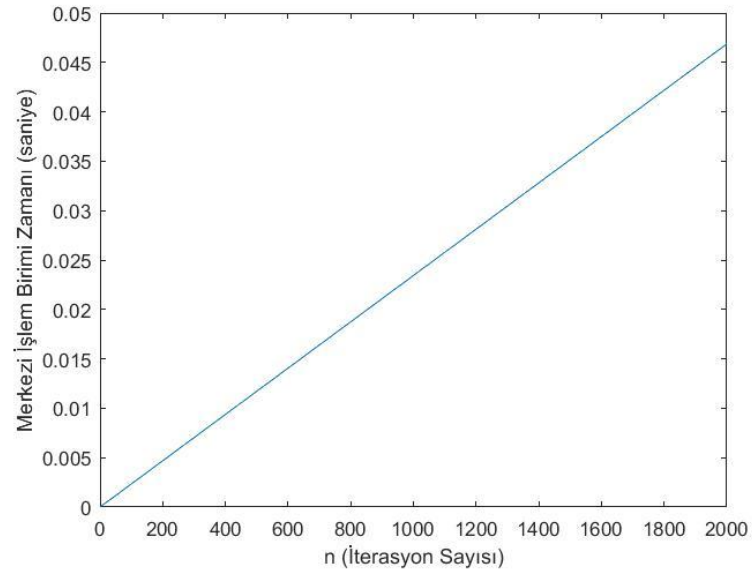
Şekil 4.20. n için fuzzy Mandelbrot cümlesi algoritması

Bu algoritmaya dayalı olarak maksimum iterasyon sayısı $n = 2000$, yayılma aralığı $-2 \leq a \leq 2$ ve $-2 \leq b \leq 2$, adım büyüklüğü $4/300$ alınarak fuzzy Mandelbrot cümlesinin daha net bir gri ölçekli görüntüsü Şekil 4.21.'de verilmiştir.



Şekil 4.21. $n=2000$ için fuzzy Mandelbrot cümlesi

Bu aşamada performans değerlendirmesi için 1.20GHz CPU ve 16GB RAM'e sahip Intel(R) Core(TM) i3-1005G1 üzerinde ölçümler yapılmıştır. Aşağıda grafiği verilen zamanlar saniye cinsinden tüketilen kullanıcı merkezi işlem birim (CPU) zamanını ifade etmektedir.



Şekil 4.22. CPU zamanına dayalı performans profili

Fuzzy Mandelbrot cümlesinin geometrik yapısı ayrıntılı olarak incelendikten sonra devamında bu fuzzy cümlelerin matematiksel yapısı ve topolojik özellikleri incelenmektedir.

Lemma 4.1.1. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin $\tilde{M}_0 = \{(c, \mu(c)) \mid |c| > 2, c \in \mathbb{C}\}$ alt cümlesi boş fuzzy cümledir.

İspat. $\mu(c) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $|c| > 2$ olduğunun kanıtlanmasıdır. İlk olarak, $\mu(c) = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde bir $k \in \mathbb{N}$ için

$f_c^n(0) = [f_c^{n-1}(0)]^2 + c$ iterasyonu altında $\left| \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} \right| = 0$ olduğu anlamına gelir. Yani $|f_c^{k-1}(0)| = 0$ ve $|f_c^k(0)| = |c|$ 'dir. Bu durum sadece $k = 1$ iterasyon adımı için sağlanır. Böylece $|f_c^0(0)| = 0 \leq 2$ ve $|f_c^1(0)| = |c| > 2$ bulunur.

Aksine, $|c| > 2$ olduğunu varsayalım. Başlangıç noktası $f_c^0(0) = 0$ ile birlikte $f_c^n(0) = [f_c^{n-1}(0)]^2 + c$ iterasyonunu uygularsak $f_c^1(0) = 0^2 + c = c$ elde ederiz. O halde $|f_c^1(0)| > 2$ koşulu ilk iterasyon adımı sağlanmış olur. Buradan

$$\mu(c) = \left| \frac{f_c^0(0)}{f_c^1(0)} \right| = \frac{0}{|c|} = 0 \text{ bulunur ki bu da ispatı tamamlamış olur.}$$

Sonuç 4.1.1. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin desteği $\text{supp}(\tilde{M}) = \{c \mid |c| \leq 2\}$ kapalı dairesidir.

Teorem 4.1.1. Fuzzy Mandelbrot cümlesi $\tilde{M}$ reel eksene göre simetriktir.

İspat. Herhangi $c \in \mathbb{C}$ noktasına $n \in \mathbb{N}$ için $f_c^n(0) = [f_c^{n-1}(0)]^2 + c$ iterasyonunu uygulayalım. İlk olarak, $\mu(c) = 1$ olduğu varsayılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_c^n(0)| < 2$

sağlanır. Tanım 4.1.1.'e göre her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_{\bar{c}}^n(0)| < 2$ olur. Böylece, $\mu(\bar{c}) = 1$ olduğu bulunur.

Şimdi, bir $k \in \mathbb{N}$ için $|f_c^k(0)| > 2$ ve $|f_c^{k-1}(0)| \leq 2$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\mu(c) = \left| \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} \right| \text{ olur. Açık bir şekilde, bu } k \in \mathbb{N} \text{ değeri için } |f_{\bar{c}}^k(0)| > 2 \text{ ve}$$

$$|f_{\bar{c}}^{k-1}(0)| \leq 2 \text{ 'dir. Böylece,}$$

$$\mu(\bar{c}) = \left| \frac{f_{\bar{c}}^{k-1}(0)}{f_{\bar{c}}^k(0)} \right| = \left| \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} \right| = \mu(c)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\mu(\bar{c}) = \mu(c)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi $\tilde{M}$ fuzzy Mandelbrot cümlesi yerine sadece reel olan sayılar için $\tilde{M}|_{\mathbb{R}} = \{(c, \mu|_{\mathbb{R}}(c)) \mid c \in \mathbb{C}, \text{Im}(c) = 0\}$ yani $\tilde{M}|_{\mathbb{R}} = \{(c, \mu|_{\mathbb{R}}(c)) \mid c \in \mathbb{R}\}$ fuzzy cümlesini inceleyelim. Bu amaçla Bölüm 2'de verilen klasik Mandelbrot cümlesi M ile ilgili lemma ve teoremleri göz önüne alalım.

Lemma 2.2.6. gereği M klasik Mandelbrot cümlesinin reel eksenle kesişimi $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$

kapalı aralığı olduğundan, $\left\{c \mid -2 \leq c \leq \frac{1}{4}\right\}$ içindeki bütün noktaların f_c iterasyonu

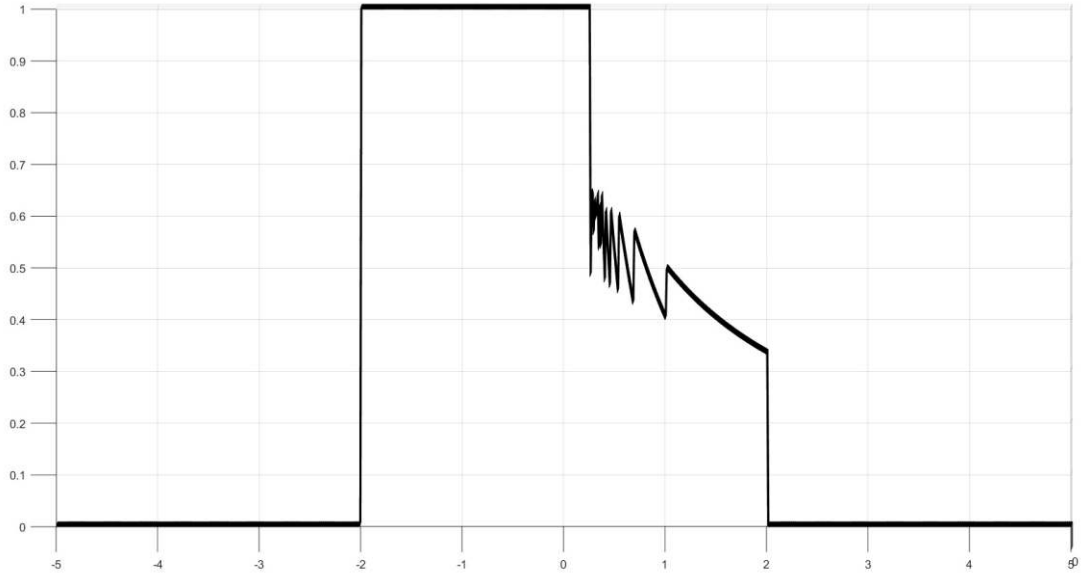
altında yörüngesi sınırlıdır ve Mandelbrot cümlesinin kesin üyesidir. Ayrıca Teorem 2.2.1. gereği orijin merkezli ve 2 yarıçaplı kapalı yuvarın dışındaki bütün noktaların f_c iterasyonu altında yörüngesi sonsuza kaçar ve Mandelbrot cümlesinin kesin olarak üyesi değildir. Dolayısıyla

$$\mu(c) = \begin{cases} 1 & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_c^n(0)| \leq 2, \\ \frac{|f_c^{k-1}(0)|}{|f_c^k(0)|} & , \quad |f_c^k(0)| > 2 \text{ ve } |f_c^{k-1}(0)| \leq 2 \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases}$$

olarak verilen üyelik fonksiyonun reel sayılar cümlesi üzerine kısıtlanmış olan $\mu|_{\mathbb{R}}(c): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu

$$\mu|_{\mathbb{R}}(c) = \begin{cases} 0 & , \quad c \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} & , \quad c \in \left(\frac{1}{4}, 2\right], \\ 1 & , \quad c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right], \end{cases}$$

olur ki burada $k \in \{2, 3, \dots\}$ için $f_c^{k-1}(0) \leq 2 < f_c^k(0)$ olmalıdır. Bu şekilde tanımlanan $\mu|_{\mathbb{R}}(c): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.23. $\tilde{M}|_{\mathbb{R}} = \{(c, \mu|_{\mathbb{R}}(c)) \mid c \in \mathbb{R}\}$ fuzzy cümlesinin grafik gösterimi

Teorem 4.1.2. $\tilde{M}|_{\mathbb{R}} = \{(c, \mu|_{\mathbb{R}}(c)) \mid c \in \mathbb{R}\}$ fuzzy cümlesinin $f_c^{k-1}(0) \leq 2 < f_c^k(0)$ olacak şekilde $k \in \{2, 3, \dots\}$ için

$$\mu|_{\mathbb{R}}(c) = \begin{cases} 0 & , \quad c \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} & , \quad c \in \left(\frac{1}{4}, 2\right], \\ 1 & , \quad c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right], \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mu|_{\mathbb{R}}(c): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu parçalı süreklidir.

İspat.

1. $c \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ise $\mu|_{\mathbb{R}}(c) = 0$ olup sabit fonksiyon süreklidir.
2. $c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right)$ ise $\mu|_{\mathbb{R}}(c) = 1$ olup sabit fonksiyon süreklidir.
3. $c \in \left(\frac{1}{4}, 2\right]$ iken farklı iterasyon adımları için aşağıdaki durumlar vardır.
 - i. $k = 2$ için $c \leq 2 < c^2 + c$ olduğundan $1 < c \leq 2$ 'dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 1 < c \leq 2 &\Rightarrow 2 < c + 1 \leq 3 \\ &\Rightarrow 2c < c^2 + c \leq 3c \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{c}{c^2 + c} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

- ii. $k = 3$ için $c < c^2 + c \leq 2 < (c^2 + c)^2 + c$ olduğundan $0 < (c^2 + c)^2 + c - 2$ eşitsizliğinden yaklaşık olarak $0.682 < c$ olduğu görülür. Buradan $1.1478 < c^2 + c$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
1.1478 < c^2 + c \leq 2 &\Rightarrow 1.1478 + 0.341 < c^2 + c + \frac{c}{c^2 + c} \leq 2 + 1 \\
&\Rightarrow 1.4788 < \frac{(c^2 + c)^2 + c}{c^2 + c} \leq 3 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{c^2 + c}{(c^2 + c)^2 + c} < \frac{1}{1.4788} \cong 0.67168
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $(k-1)$. adım için $c < \dots < f_c^{k-1}(0) \leq 2 < f_c^k(0)$ iken

$0 < f_c^k(0) - 2 = (f_c^{k-1}(0))^2 + c - 2$ eşitsizliğinden $2 - c < (f_c^{k-1}(0))^2$ elde edilir.

Böylece $1 - \frac{c}{f_c^{k-1}(0)} < \frac{2}{f_c^{k-1}(0)} - \frac{c}{f_c^{k-1}(0)} < f_c^{k-1}(0)$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
1 - \frac{c}{f_c^{k-1}(0)} < f_c^{k-1}(0) \leq 2 &\Rightarrow 1 < f_c^{k-1}(0) + \frac{c}{f_c^{k-1}(0)} \leq 2 + 1 \\
&\Rightarrow 1 < \frac{(f_c^{k-1}(0))^2 + c}{f_c^{k-1}(0)} \leq 3 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} < 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $k = 2, 3, \dots$ iterasyon adımları sonsuza ıraksarken $c \in \left(\frac{1}{4}, 2\right]$

için $\mu|_{\mathbb{R}}(c) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ elde edilir. Ayrıca iterasyon fonksiyonu bir polinom fonksiyon

olup bu aralıkta $\mu|_{\mathbb{R}}(c) = \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)}$ rasyonel fonksiyonu sürekli.

Sonuç olarak $\mu|_{[-2,2]}(c) : [-2, 2] \rightarrow \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ ve $\mu|_{\mathbb{R} \setminus [-2,2]}(c) : c \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \rightarrow \{0\}$

fonksiyonları sürekli olup $\mu|_{\mathbb{R}}(c) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ parçalı sürekli.

Teorem 4.1.3. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ sınırlı cümledir.

İspat. Lemma 4.1.1.'e göre $|c| \leq 2$ eşitsizliği vardır ancak ve ancak $\mu(c) > 0$ eşitsizliği vardır. Böylece, $\tilde{M}^{\alpha+}$ cümlesinin sınırlı olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Teorem 4.1.4. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ bağlantılı cümledir.

İspat. $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 = \tilde{M}^{\alpha+}$ olacak şekilde $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \subset \tilde{M}^{\alpha+}$ alt cümlelerini ele alalım. O halde

$$\max_{c \in \tilde{M}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{C}_1}(c), \mu_{\tilde{C}_2}(c)] = \beta$$

için $\mu_{\tilde{C}_1}(c) = \beta$ veya $\mu_{\tilde{C}_2}(c) = \beta$ olacak şekilde bir $c \in \tilde{M}^{\alpha+}$ noktası vardır öyle ki $1 \geq \beta > \alpha$ 'dır. Ancak, $\alpha > 0$ için

$$\min_{c \in \tilde{M}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{C}_1}(c), \mu_{\tilde{C}_2}(c)] > \alpha$$

olduğundan $\mu_{\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2}(c) \neq 0$ elde edilir. Böylece boştan farklı $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \subset \tilde{M}^{\alpha+}$ alt cümleleri için $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \neq \emptyset$ 'dir. Sonuç olarak,

$$\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 = \emptyset \text{ ve } \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 = \tilde{M}^{\alpha+}$$

olacak şekilde klasik boş cümle $\emptyset$ ve kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+}$ 'dan farklı olarak hiçbir $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \subset \tilde{M}^{\alpha+}$ cümleleri yoktur. Bu durum $0 \leq \alpha < 1$ için $\tilde{M}^{\alpha+}$ cümlesinin bağlantılı olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.1.5. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ basit bağlantılıdır.

İspat. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesinin tümleyeni

$$\mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu_{\mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+}}(c) < \alpha_1\}$$

şeklindedir öyle ki $0 < \alpha_1 \leq 1$ için $1 - \alpha = \alpha_1$ 'dir. $\tilde{K}$ cümlesi kompakt ve $\tilde{F}$ cümlesi kapalı olacak şekilde $\mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+} = \tilde{K} \cup \tilde{F}$ ayrık bileşimi ele alınsın. $0 \leq \beta < \alpha_1$ olmak üzere

$$\mu_{\mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+}}(c) = \max_{c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{K}}(c), \mu_{\tilde{F}}(c)] = \beta$$

şartıyla $\mu_{\tilde{K}}(c) = \beta$ ve $\mu_{\tilde{F}}(c) = \beta$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+}$ noktası vardır.

Dahası, $\tilde{K} \cap \tilde{F} = \emptyset$ olduğundan

$$\mu_{\tilde{K} \cap \tilde{F}} = \min_{c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{K}}(c), \mu_{\tilde{F}}(c)] = 0$$

şeklindedir. Eğer $\mu_{\tilde{F}}(c) = 0$ olduğunu varsayarsak $\tilde{F} = \{c \mid |c| < 2\}$ bulunur. Ancak bu durum $\tilde{F}$ cümlesinin kapalı olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\mu_{\tilde{K}}(c) = 0$ olduğunu varsayarsak

$$\tilde{F} = \{c \mid \mu_{\tilde{K}}(c) = \beta\} \text{ ve } \tilde{K} = \emptyset = \{c \mid |c| < 2\}$$

bulunur. Ancak bu durum da $\tilde{K}$ cümlesinin kompakt olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\tilde{K}$ klasik boş bir cümledir. Sonuç olarak, fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesinin tümleyeni, herhangi bir kompakt ve kapalı cümlelerin ayrık bir

birleşimi olarak verildiğinde, bu kompakt cümle klasik boş cümle olmalıdır. Bu gerçeğe göre, $0 \leq \alpha < 1$ için $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ cümlesi basit bağlantılıdır.

Sonuç 4.1.2.

- i. $\mu|_{\mathbb{R}}(c): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu parçalı süreklidir.
- ii. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ sınırlı cümledir.
- iii. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ bağlantılı cümledir.
- iv. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbrot cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ basit bağlantılı cümledir.
- v. $\tilde{M}^1 = \{c \mid \mu(c) = 1\}$ cümlesi, klasik Mandelbrot M cümlesine karşılık gelir ve M cümlesinin boştan farklı, kompakt ve basit bağlantılı olduğu bilinmektedir.

Mandelbrot cümlesinin yerel bağlantılı olduğu ve dolayısıyla yayla (yol) bağlantılı olduğu varsayılır. Ancak bu hala MLC varsayımı olarak adlandırılan açık bir problemdir. Buna bağlı olarak, fuzzy Mandelbrot cümlesinin yayla bağlantılı olması açık bir problemdir.

Bölüm 4.2. Fuzzy Mandelbar Cümlesi

Yinelenen anti-holomorfik polinomların dinamik davranışları ve çatallanma diyagramları araştırılarak Crowe tarafından Mandelbar cümlesi keşfedilmiştir [60]. Bu polinomlar sıradan polinomların karmaşık eşleniğidir ve böylelikle ikinci yinelemeleri holomorfik polinomlardır. Literatürde Mandelbar ve Tricorn adı ile bilinen cümlelerin farklı adlara sahip olmasının nedeni aynı zaman dilimleri içerisinde farklı araştırmacılar tarafından incelenmiş olmasıdır. Ayrıca Mandelbar cümlesinin ana çıkış noktası iterasyon fonksiyonunun kuadratik eşleniğinin tercih edilmesi ve

Mandelbrot cümlesinin ana oluşum yapısı içerisinde inşa edilmesidir. Tricorn ise reel kübik polinomların parametre uzayındaki bölgesel incelemeleri sonucu bulunmasından dolayı bu adı almıştır.

Mandelbrot cümlesinin fuzzy anlamda incelemesi ile ilgili literatürde [27] çalışması var olmasına rağmen Mandelbar cümlesi için fuzzy yaklaşım ile ilgili hiçbir çalışmaya rastlanmamıştır.

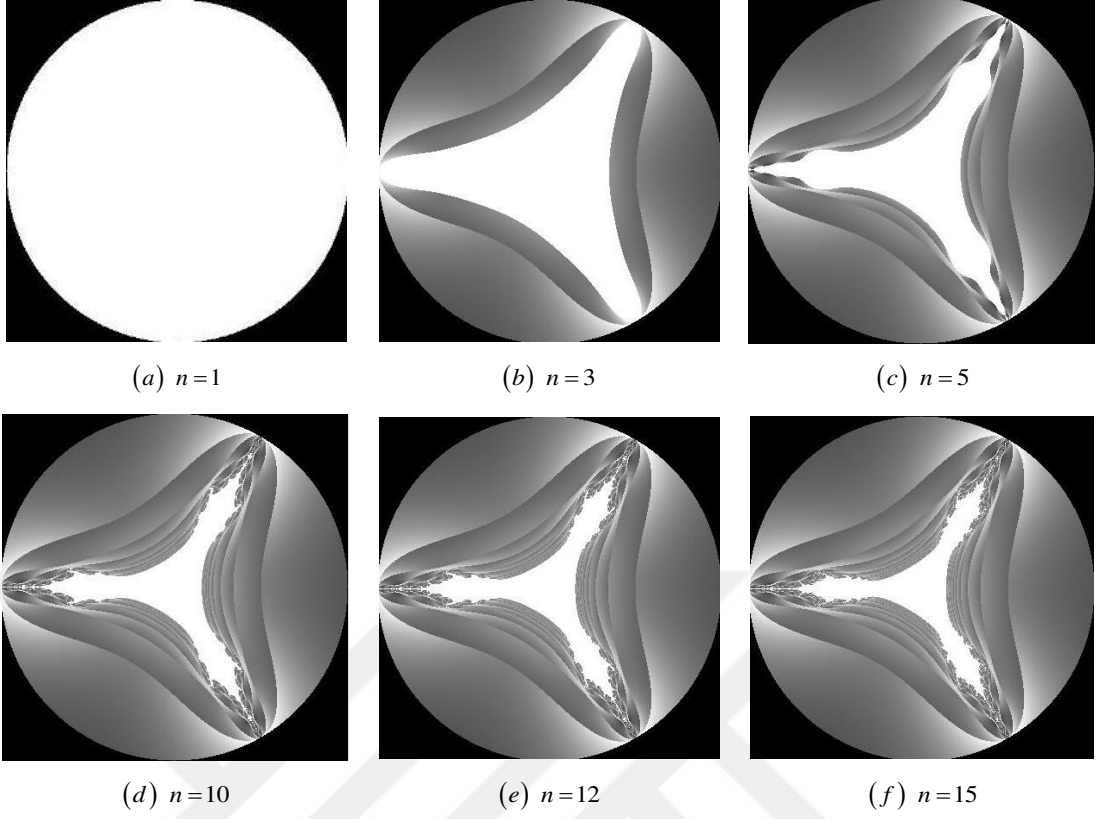
Fuzzy Mandelbrot cümlesinin tanımında kullanılan kuadratik yineleme fonksiyonu yerine $f_c^n(0) = \left[\overline{f_c^{n-1}(0)} \right]^2 + c$ iterasyon fonksiyonu kullanılarak elde edilen cümleye fuzzy Mandelbar cümlesi adı verilmiştir. Fuzzy Mandelbrot cümlesiyle olan benzerlikleri sebebiyle aynı yapısal düzen içerisinde bulanıklaştırma işlemi yapılmasına karşın ortaya çıkardığı farklılıklar da bu alt bölümde açıklanmıştır.

Tanım 4.2.1. $z = 0 + 0i$ başlangıç noktası ile birlikte $f_c^n(0) = \left[\overline{f_c^{n-1}(0)} \right]^2 + c$ iterasyonu altında $\mu: \mathbb{C} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu

$$\mu(c) = \begin{cases} 1 & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_c^n(0)| \leq 2, \\ \frac{|f_c^{k-1}(0)|}{|f_c^k(0)|} & , \quad |f_c^k(0)| > 2 \text{ ve } |f_c^{k-1}(0)| \leq 2 \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere $\tilde{M}_{BAR} = \{(c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C}\}$ fuzzy cümlesine, fuzzy Mandelbar cümlesi denir.

Fuzzy Mandelbar cümlesinin yaklaşık görünümünün gri ölçekli grafikleri, bilgisayar sonsuzluğu işleyemediği için bazı artan sonlu iterasyon sayıları için Şekil 4.24.'de verilmektedir. Maksimum yineleme sayısını artırarak, fuzzy Mandelbar cümlesinin art arda daha ayrıntılı görünümünü elde ederiz. Bu grafiklerdeki parlak pikseller daha yüksek üyelik derecelerine sahiptir.



Şekil 4.24. Sonlu maksimum iterasyon sayısı n için fuzzy Mandelbar cümlesinin yaklaşık görünüşleri

Tanım 4.2.1.'e uygun olacak şekilde fuzzy Mandelbar cümlesindeki bir noktanın üyelik derecesini belirleyecek yeni bir algoritma aşağıda verilmiştir.

Algoritma: Fuzzy Mandelbar cümlesi üyelik derecesi algoritması	
Input	: $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
Data	: $z_0 = 0 + i0$
Output	: $\mu(c)$
1	: for $1 \leftarrow k$ to n do
2	: $z_k = \overline{z_{k-1}}^2 + c$
3	: if $ z_k \leq 2$
4	: $\mu(c) = 1$
5	: else if $ z_k > 2$ and $ z_{k-1} \leq 2$
6	: $\mu(c) = z_{k-1} / z_k $
7	: end
8	: end
9	: end

Şekil 4.25. Verilen bir c karmaşık sayısının fuzzy Mandelbar cümlesine üyelik derecesi algoritması

Aşağıdaki örneklerde seçilen bazı noktalar için bu algoritmayı uygulayarak üyelik dereceleri belirlenmektedir.

Örnek 4.2.1. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = -1$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 \\
 z_1 &= \overline{0}^2 + (-1) = -1 \\
 z_2 &= \overline{(-1)}^2 + (-1) = 0 \\
 z_3 &= \overline{0}^2 + (-1) = -1 \\
 z_4 &= \overline{(-1)}^2 + (-1) = 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\left|f_{(-1)}^n(0)\right| \leq 2$ olduğundan $\mu(-1)=1$ bulunur. Böylece $(-1,1) \in \tilde{M}_{BAR}$ elde edilir.

Örnek 4.2.2. $z = 0+0i$ ile başlayalım ve $c = i$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= \bar{0}^2 + i = i \\ z_2 &= \bar{i}^2 + i = -1 + i \\ z_3 &= \left(\overline{-1+i}\right)^2 + i = 3i \\ z_4 &= \left(\overline{3i}\right)^2 + i = -9 + i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elde edilen $\{0, i, -1+i, 3i, -9+i, \dots\}$ dizisi sonsuza ıraksaktır ve $c = i$ noktası klasik Mandelbar cümlesinin elemanı değildir. $k = 3$ iterasyon adımında $\left|f_i^2(0)\right| = |-1+i| = \sqrt{2} < 2$ ve $\left|f_i^3(0)\right| = |3i| = 3 > 2$ olduğundan $\mu(i) = \frac{\left|f_i^2(0)\right|}{\left|f_i^3(0)\right|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cong 0.47$ bulunur.

Örnek 4.2.3. $z = 0+0i$ ile başlayalım ve $c = \frac{1+i}{2}$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= \bar{0}^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{2} \\ z_2 &= \left(\overline{\frac{1+i}{2}}\right)^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} \\ z_3 &= \left(\overline{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{3}{4} + \frac{i}{2} \\ z_4 &= \left(\overline{\frac{3}{4} + \frac{i}{2}}\right)^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{13}{16} - \frac{i}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_5 &= \left(\overline{\frac{13}{16} - \frac{i}{4}} \right)^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{281}{256} + \frac{29i}{32} \\
z_6 &= \left(\overline{\frac{281}{256} + \frac{29i}{32}} \right)^2 + \frac{1+i}{2} = \frac{57905}{65536} - \frac{6101i}{4096} \\
z_7 &= \left(\overline{\frac{57905}{65536} - \frac{6101i}{4096}} \right)^2 + \frac{1+i}{2} = -\frac{4028410783}{4294967296} + \frac{420387269i}{134217728} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

O halde ortaya çıkan

$$\left\{ 0, \frac{1+i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{i}{2}, \frac{13}{16} - \frac{i}{4}, \frac{281}{256} + \frac{29i}{32}, \frac{57905}{65536} - \frac{6101i}{4096}, -\frac{4028410783}{4294967296} + \frac{420387269i}{134217728}, \dots \right\}$$

dizisi sonsuza ıraksaktır ve $c = \frac{1+i}{2}$ noktası klasik Mandelbar cümlesinin elemanı değildir. $k = 7$ iterasyon adımında

$$\left| f_{\left(\frac{1+i}{2}\right)}^6(0) \right| = \left| \frac{57905}{65536} - \frac{6101i}{4096} \right| = \frac{\sqrt{12881872481}}{65536} \cong 1.73 < 2,$$

$$\left| f_{\left(\frac{1+i}{2}\right)}^7(0) \right| = \left| -\frac{4028410783}{4294967296} + \frac{420387269i}{134217728} \right| = \frac{\sqrt{197194960316363714753}}{4294967296} \cong 3.26 > 2$$

$$\text{olduğundan } \mu\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\left| f_{\left(\frac{1+i}{2}\right)}^6(0) \right|}{\left| f_{\left(\frac{1+i}{2}\right)}^7(0) \right|} = \frac{\frac{\sqrt{12881872481}}{65536}}{\frac{\sqrt{197194960316363714753}}{4294967296}} \cong 0.53 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.2.4. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = -1.9999999999999 - 10^{-11}i$ sayısına algoritmayı uygulayalım.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= -1.9999999999999999 - 10^{-11}i \\
z_2 &= 1.99999999999997002 - 4.99999999999998 \times 10^{-11}i \\
z_3 &= 1.99999999999989009 + 1.899999999999962 \times 10^{-10}i \\
z_4 &= 1.99999999999957034 - 7.6999999999994304 \times 10^{-10}i \\
z_5 &= 1.999999999999317541 - 1.22899999999985951 \times 10^{-8}i \\
z_6 &= 1.99999999999727117 + 4.9149999999776056 \times 10^{-8}i \\
z_7 &= 1.9999999989085655 - 1.9660999999642178 \times 10^{-7}i \\
z_8 &= 1.9999999956343228 + 7.8642999994276975 \times 10^{-7}i \\
z_9 &= 1.9999999825367727 - 0.000003145729990844191i \\
z_{10} &= 1.999999930137295 + 0.000012582909853507568i \\
z_{11} &= 1.9999997203909556 - 0.000050331647655878034i \\
z_{12} &= 1.9999988790307257 + 0.00020132655247714435i \\
z_{13} &= 1.9999954755918785 - 0.0008053057685468185i \\
z_{14} &= 1.9999812538707031 + 0.003221215777123355i \\
z_{15} &= 1.9999146396032468 - 0.01288474234783852i \\
z_{16} &= 1.9994925491141142 + 0.05153676968791633i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

O halde ortaya çıkan dizi sonsuza ıraksaktır ve böylece $c = -1.9999999999999999 - 10^{-11}i$ noktası klasik Mandelbar cümlesinin elemanı değildir. Ancak $k = 16$ iterasyon adımında

$$\begin{aligned}
\left| f_{(-1.9999999999999999 - 10^{-11}i)}^{15}(0) \right| &= |1.9999146396032468 - 0.01288474234783852i| \\
&= 1.9999561450903753 \\
&< 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| f_{(-1.9999999999999999 - 10^{-11}i)}^{16}(0) \right| &= |1.9994925491141142 + 0.05153676968791633i| \\
&= 2.0001566170159584 \\
&> 2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu\left(\frac{1+i}{2}\right) = \left| \frac{f_{(-1.999999999999-10^{-11}i)}^{15}(0)}{f_{(-1.999999999999-10^{-11}i)}^{16}(0)} \right| = \frac{1.9999561450903753}{2.0001566170159584} \cong 0.99$$

bulunur.

Örnek 4.2.5. $z = 0 + 0i$ ile başlayalım ve $c = 3i$ sayısına algoritmayı uygulayalım;

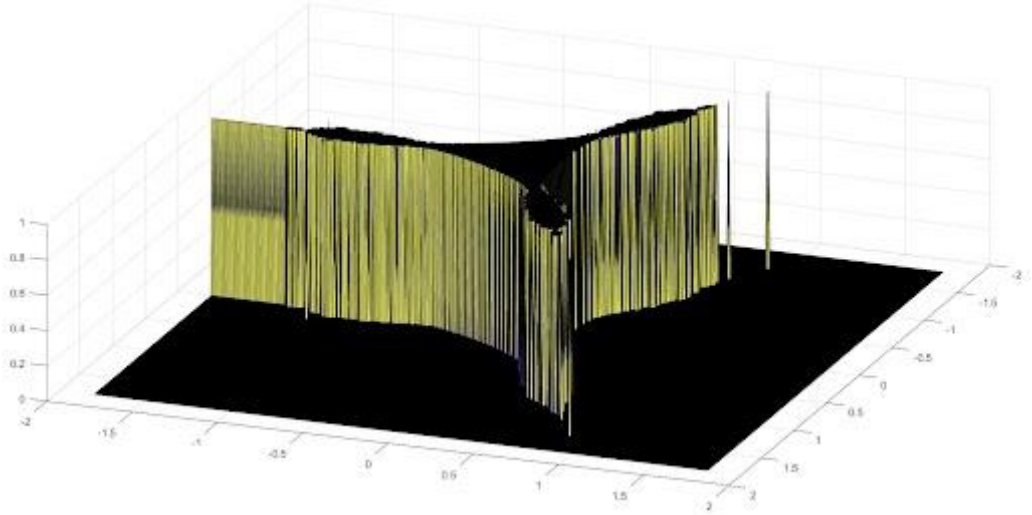
$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= \bar{0}^2 + 3i = 3i \\ z_2 &= \bar{3i}^2 + 3i = -9 + 3i \\ &\vdots \end{aligned}$$

O halde ortaya çıkan $\{0, 3i, -9+3i, \dots\}$ yörüngesi sonsuza ıraksaktır ve böylece $c = 3i$ noktası klasik Mandelbar cümlesinin elemanı değildir. Ancak $k=1$ iterasyon adımımda $|f_{(3i)}^0(0)| = |0| < 2$ ve $|f_{(3i)}^1(0)| = |3i| = 3 > 2$ olduğundan

$$\mu(3i) = \left| \frac{f_{(3i)}^0(0)}{f_{(3i)}^1(0)} \right| = \frac{0}{3} = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu örneklerde bazı karmaşık sayıların üyelik dereceleri ayrı ayrı hesaplanmıştır. Şimdi, karmaşık düzlemin tamamında iterasyon sayısı sonsuza ıraksarken oluşan fuzzy Mandelbar cümlesinin grafiğinin oluşum aşamalarını bazı iterasyon adımları için geometrik ve cebirsel açıdan ayrı ayrı inceleyelim.

İlk olarak, üyelik derecesi $\mu(c)=1$ olan noktalar incelenirse her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_c^n(0)| \leq 2$ eşitsizliği sağlandığından bu durumda üyelik fonksiyonunun tanım cümlesi klasik Mandelbar cümlesi olup görüntü cümlesi $\{1\}$ olur. Sonuç olarak fuzzy Mandelbar cümlesinin yüksekliği 1 olan göbek cümlesi, klasik Mandelbar cümlesinin noktalarından oluşmaktadır. Bu durum aşağıdaki Şekil 4.26.'da görülmektedir.

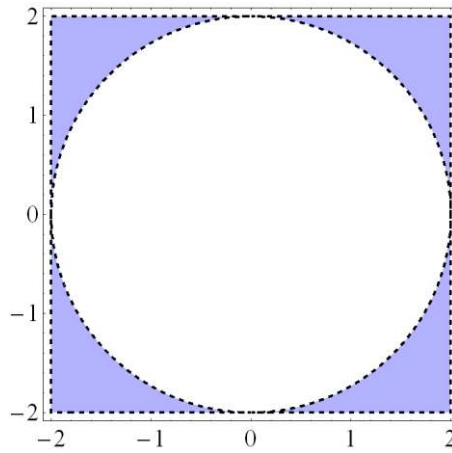


Şekil 4.26. Fuzzy Mandelbar cümlesinin göbeğinin üç boyutlu görünümü

Şimdi fuzzy Mandelbar cümlesinin oluşum aşamalarını görselleştirmek üzere $\mu(c) \neq 1$ iken bazı iterasyon adımlarını ayrı ayrı inceleyelim.

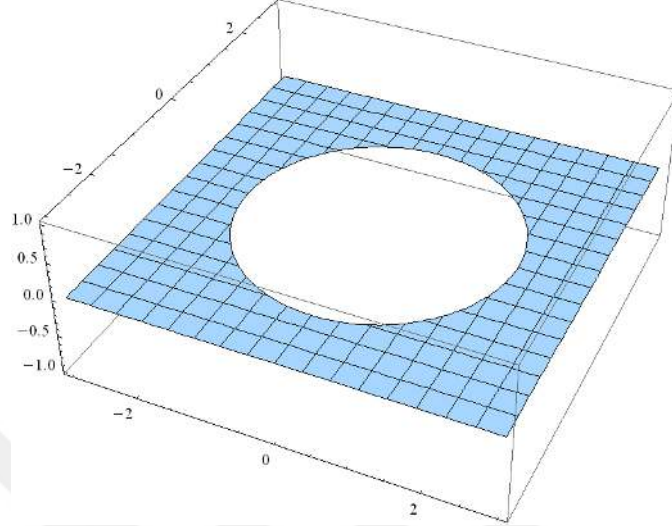
i. $k = 1$ durumu:

Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = 0$ olup $|c| > 2$ şartını sağlayan karmaşık sayıları için tanımlıdır. Dolayısıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ olarak ifade edilirse tanım cümlesi kutupsal koordinatlar yardımıyla $T.K. = \{(r, \theta) \mid |r| > 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ olarak verilir. Böylece tanım cümlesinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.27. $k = 1$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=1$ iterasyon adımımda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow \{0\}$ üyelik fonksiyonunun grafiği de aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.28. $k=1$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

ii. $k=2$ durumu:

Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^1(0)|}{|f_c^2(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu $|c| \leq 2$ ve

$|\bar{c}^2 + c| > 2$ eşitsizliğini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$|r| \leq 2 \text{ ve } |r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta}| > 2 \quad (4.2)$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun grafiğini verir.

$|r| \leq 2$ eşitsizliği 2 yarıçaplı merkezli birim kapalı yuvarı ifade eder. Diğer taraftan

$$|r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta}| = 2$$

denkleminin kökleri:

$$r_1 = A + B + C$$

$$r_2 = A - B + C$$

$$r_3 = A + B - C$$

$$r_4 = A - B - C$$

olarak bulunur öyle ki

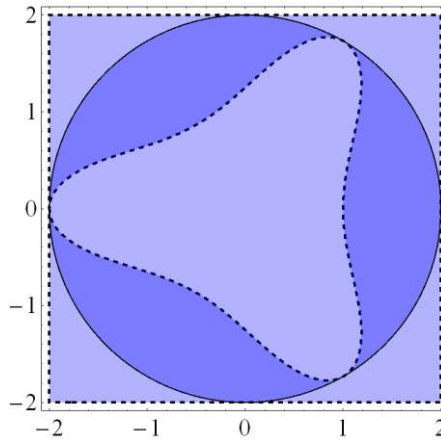
$$A = -\frac{1}{4}e^{-3i\theta}(1+e^{6i\theta}),$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-6i\theta}(1+e^{6i\theta})^2 + \frac{e^{-3i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{47\sqrt[3]{2}e^{3i\theta}}{3D}},$$

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^{-6i\theta}(1+e^{6i\theta})^2 - \frac{e^{-3i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{47\sqrt[3]{2}e^{3i\theta}}{3D} - \frac{4e^{-3i\theta}(1+e^{6i\theta}) - e^{-9i\theta}(1+e^{6i\theta})^3}{4\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-6i\theta}(1+e^{6i\theta})^2 + \frac{e^{-3i\theta}D}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{47\sqrt[3]{2}e^{3i\theta}}{3D}}},$$

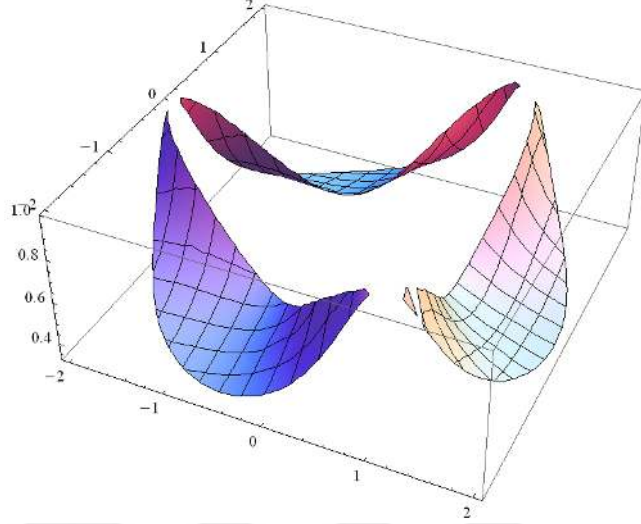
$$D = \sqrt[3]{\sqrt{\left(290e^{9i\theta} - 108e^{3i\theta}(1+e^{6i\theta})^2\right)^2 + 415292e^{18i\theta} - 108e^{3i\theta} + 74e^{9i\theta} - 108e^{15i\theta}}}$$

olacak şekildedir. Sonuç olarak (4.2) eşitsizlik sisteminin çözümünden μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesinin grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Şekil 4.29. $k = 2$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k = 2$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.30. $k = 2$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

iii. $k = 3$ durumu:

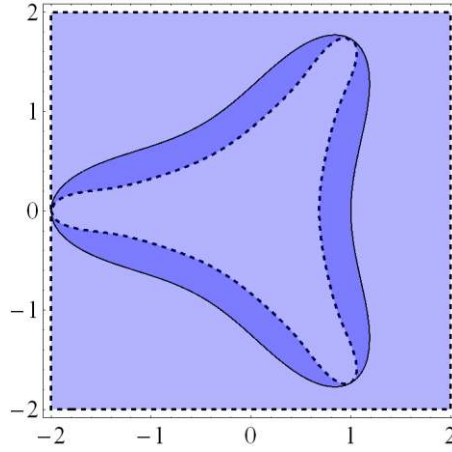
Burada Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^2(0)|}{|f_c^3(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

$|\bar{c}^2 + c| \leq 2$ ve $|(c^2 + \bar{c})^2 + c| > 2$ eşitsizliklerini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$|r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta}| \leq 2$$

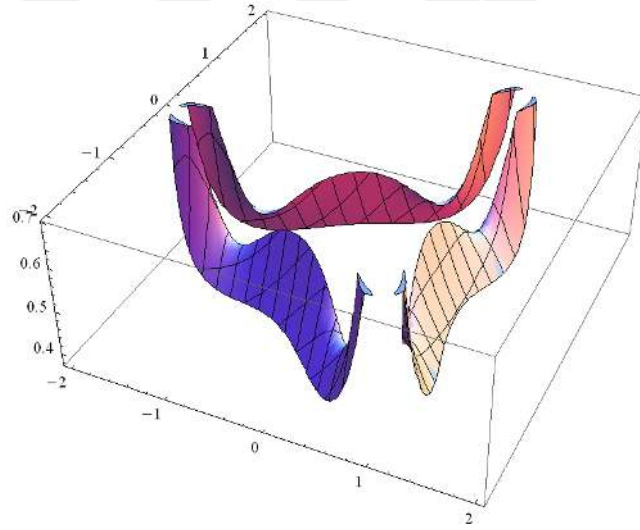
$$|r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{i\theta} + r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta}| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.31. $k=3$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=3$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.32. $k=3$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

iv. $k=4$ durumu:

Burada Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^3(0)|}{|f_c^4(0)|}$ bulunur ve üyelik fonksiyonu

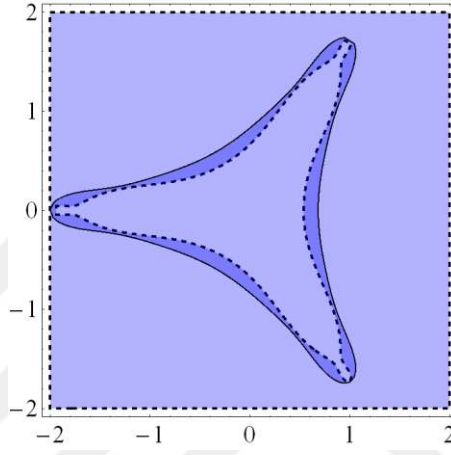
$$\left| (c^2 + \bar{c})^2 + c \right| \leq 2 \quad \text{ve} \quad \left| \left((\bar{c}^2 + c)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right| > 2 \quad \text{eşitsizliklerini sağlayan } c \in \mathbb{C}$$

noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{i\theta} + r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

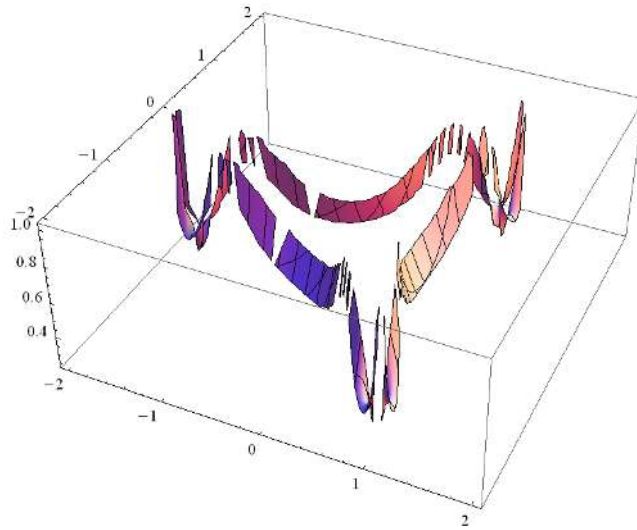
$$\left| r^8 e^{-8i\theta} + 4r^7 e^{-5i\theta} + 6r^6 e^{-2i\theta} + 2r^5 e^{-5i\theta} + 4r^5 e^{i\theta} + 4r^4 e^{-2i\theta} + r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{i\theta} + r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.33. $k = 4$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k = 4$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.34. $k = 4$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

v. $k = 5$ durumu:

Burada Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^4(0)|}{|f_c^5(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

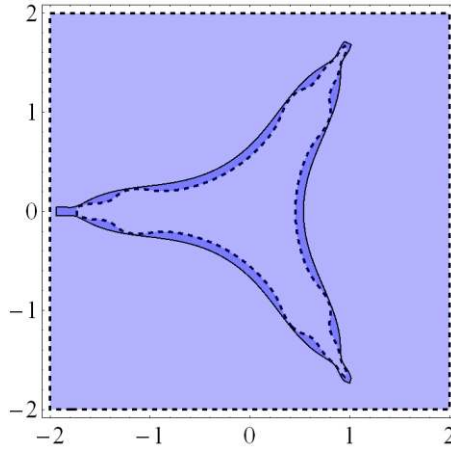
$$\left| \left((\bar{c}^2 + c)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right| \leq 2 \quad \text{ve} \quad \left| \left((c^2 + \bar{c})^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right| > 2 \quad \text{eşitsizliklerini sağlayan}$$

$c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| r^8 e^{-8i\theta} + 4r^7 e^{-5i\theta} + 6r^6 e^{-2i\theta} + 2r^5 e^{-5i\theta} + 4r^5 e^{i\theta} + 4r^4 e^{-2i\theta} + r^4 e^{4i\theta} + 2r^3 e^{i\theta} + r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

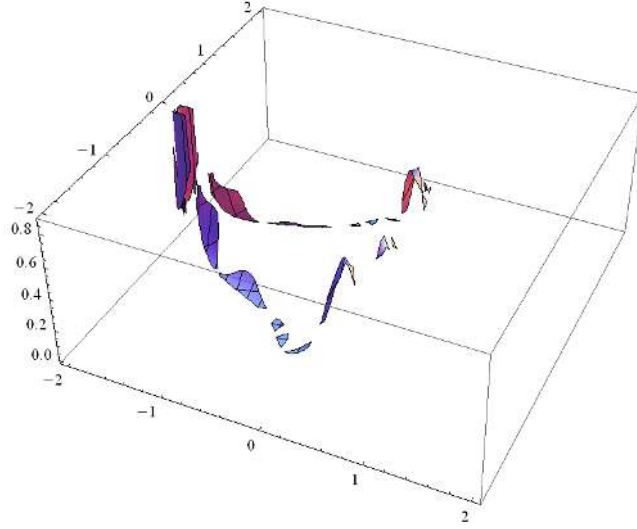
$$\left| \left(\left((r^2 e^{2i\theta} + r e^{-i\theta})^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.35. $k = 5$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k = 5$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.36. $k=5$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

vi. $k=6$ durumu:

Burada Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^5(0)|}{|f_c^6(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

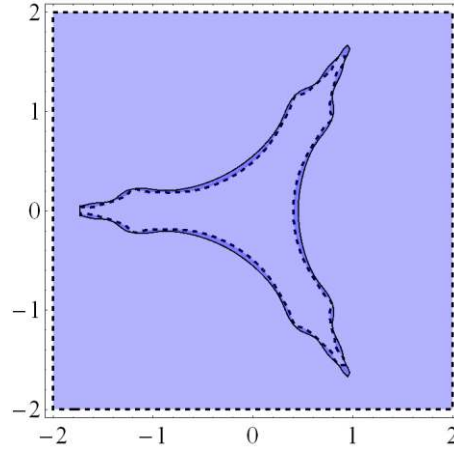
$$\left| \left(\left((c^2 + \bar{c})^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right) + c \right| \leq 2 \text{ ve } \left| \left(\left((\bar{c}^2 + c)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right) + \bar{c} \right| > 2$$

eşitsizliklerini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| \left(\left((r^2 e^{2i\theta} + r e^{-i\theta})^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right) + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

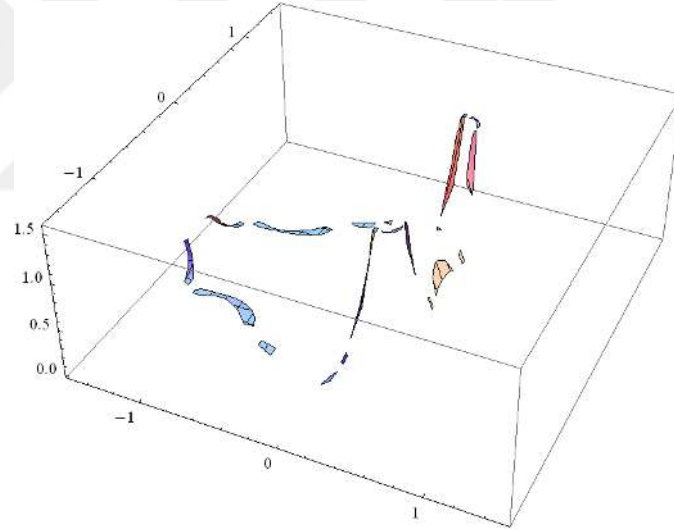
$$\left| \left(\left((r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta})^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right) + r e^{-i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.37. $k=6$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=6$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.38. $k=6$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

vii. $k=7$ durumu:

Burada Tanım 4.2.1.'e göre $\mu(c) = \frac{|f_c^6(0)|}{|f_c^7(0)|}$ şeklindedir öyle ki üyelik fonksiyonu

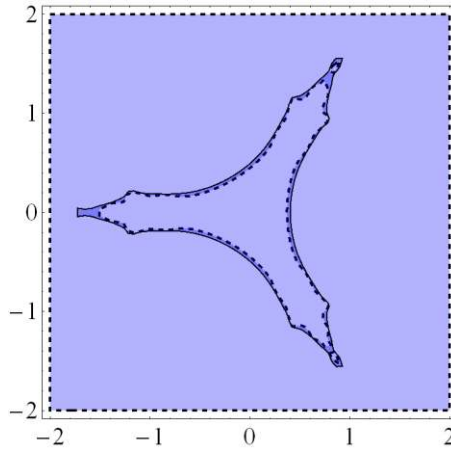
$$\left| \left(\left(\left(\left(\bar{c}^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right| \leq 2 \text{ ve } \left| \left(\left(\left(\left(\left(c^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right)^2 + \bar{c} \right)^2 + c \right| > 2$$

eşitsizliklerini sağlayan $c \in \mathbb{C}$ noktaları için tanımlıdır. Kutupsal koordinatlar yardımıyla $c = r \cdot e^{i\theta}$ alınarak

$$\left| \left(\left(\left(\left(r^2 e^{-2i\theta} + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| \leq 2$$

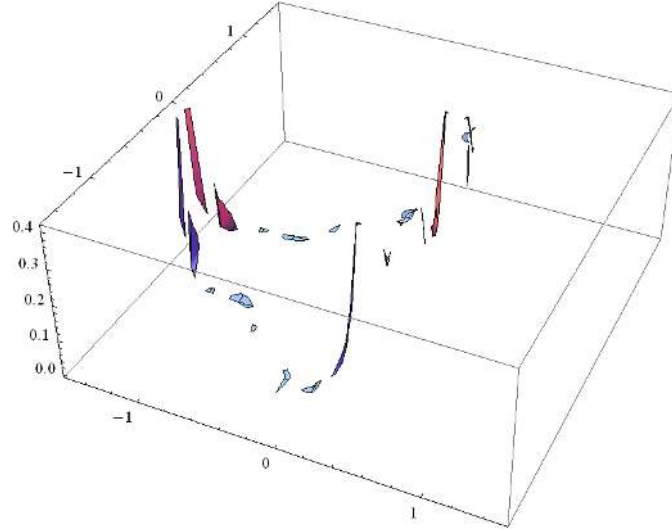
$$\left| \left(\left(\left(\left(\left(r^2 e^{2i\theta} + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right)^2 + r e^{-i\theta} \right)^2 + r e^{i\theta} \right| > 2$$

eşitsizliklerinin çözüm cümlesi μ üyelik fonksiyonunun tanım cümlesini oluşturur ve grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.39. $k=7$ iterasyon adımı için tanım cümlesi grafiği

Ayrıca $k=7$ durumunda $\mu: \mathbb{C} \rightarrow (0,1)$ üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



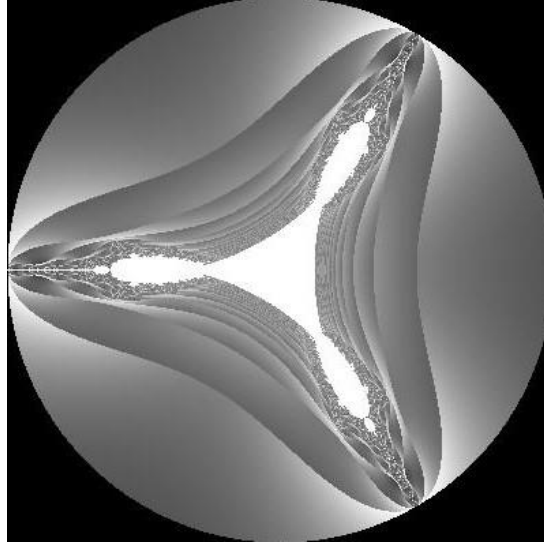
Şekil 4.40. $k=7$ iterasyon adımı için $\mu(c)$ üyelik fonksiyonunun grafiği

Böyle devam edilerek bulunan kökler yardımıyla üyelik fonksiyonunun her bir iterasyon adımı için tanım ve görüntü cümleleri elde edilerek grafikleri buna bağlı olarak çizilebilmektedir. Diğer taraftan bilgisayar programları aracılığıyla girilecek sonlu maksimum iterasyon sayısı ve yayılma aralığı için fuzzy Mandelbar cümlesinin yaklaşık grafiğini çizmek mümkündür. Bu amaçla aşağıdaki algoritma verilmiştir.

Algoritma: Fuzzy Mandelbar cümlesi grafiği	
Input	: $n \in \mathbb{N}, \text{range } a, b, \text{stepsize}$
Data	: $z_0 = 0 + i0, c = a(l) + ib(m)$
Output	: $\text{surface}(\mu)$
1	: for $1 \leftarrow l$ to $\text{length}(a)$
2	: for $1 \leftarrow m$ to $\text{length}(a)$
3	: for $1 \leftarrow k$ to n do
4	: $z_k = \overline{z_{k-1}}^2 + c$
5	: if $ z_k \leq 2$
6	: $\mu(c) = 1$
7	: else if $ z_k > 2$ and $ z_{k-1} \leq 2$
8	: $\mu(c) = z_{k-1} / z_k $
9	: end
10	: end
11	: end
12	: end
13	: end
14	: draw $\mu: [\text{range } a] \times [\text{range } b] \rightarrow [0, 1]$

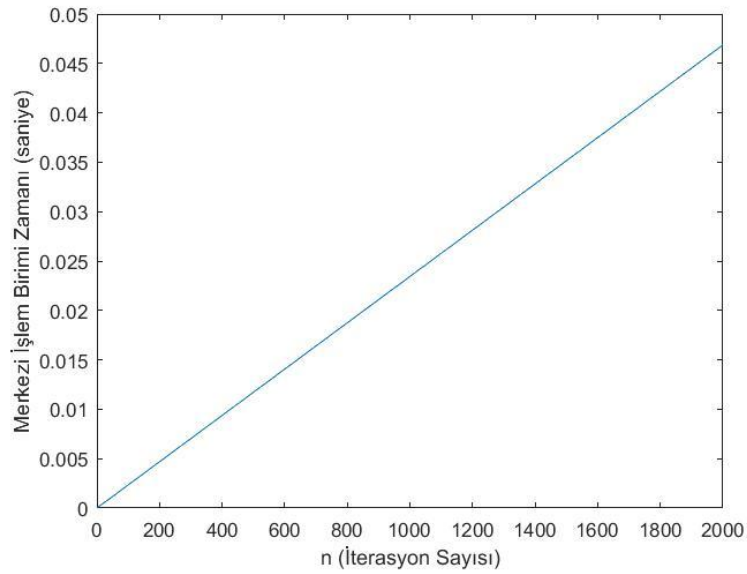
Şekil 4.41. n için fuzzy Mandelbar cümlesinin grafik algoritması

Bu algoritmaya dayalı olarak maksimum iterasyon sayısı $n = 2000$, yayılma aralığı $-2 \leq a \leq 2$ ve $-2 \leq b \leq 2$, adım büyüklüğü $4/300$ alınarak fuzzy Mandelbar cümlesinin daha net gri ölçekli bir görüntüsü Şekil 4.42.'de verilmiştir.



Şekil 4.42. $n=2000$ için fuzzy Mandelbar cümlesi

Daha sonra performans değerlendirmesi için 1.20GHz CPU ve 16GB RAM'e sahip Intel(R) Core(TM) i3-1005G1 üzerinde ölçümler yapılmıştır. Aşağıda grafiği verilen zamanlar, tüketilen kullanıcı CPU zamanını ifade etmektedir.



Şekil 4.43. CPU zamanına dayalı performans profili

Fuzzy Mandelbar cümlesinin geometrik yapısını ayrıntılı olarak inceledikten sonra devamında bu fuzzy cümlelerin matematiksel yapısı ve topolojik özellikleri incelenecektir.

Lemma 4.2.1. Fuzzy Mandelbar cümlesinin $\tilde{M}_{BAR_0} = \{(c, \mu(c)) \mid |c| > 2, c \in \mathbb{C}\}$ alt cümlesi boş fuzzy cümledir.

İspat. $\mu(c)=0$ olması için gerek ve yeter şart $|c| > 2$ olduğunun kanıtlanmasıdır. İlk olarak, $\mu(c)=0$ olduğunu kabul edelim. O halde bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$f_c^n(0) = \left[\overline{f_c^{n-1}(0)} \right]^2 + c \text{ iterasyonu altında } \left| \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} \right| = 0 \text{ olduğu anlamına gelir.}$$

Yani, $|f_c^{k-1}(0)| = 0$ ve $|f_c^k(0)| = |c|$ 'dir. Ancak bu durum sadece $k=1$ iterasyon adımı için sağlanır. Böylece $|f_c^0(0)| = 0 \leq 2$ ve $|f_c^1(0)| = |c| > 2$ bulunur.

Aksine, $|c| > 2$ olduğunu varsayalım. Başlangıç noktası $f_c^0(0)=0$ ile birlikte

$$f_c^n(0) = \left[\overline{f_c^{n-1}(0)} \right]^2 + c \text{ iterasyonunu uygularsak } f_c^1(0) = \overline{0}^2 + c \text{ elde ederiz. O halde}$$

$|f_c^1(0)| = |c| > 2$ koşulu ilk iterasyon adımı sağlanmış olur. Buradan

$$\mu(c) = \left| \frac{f_c^0(0)}{f_c^1(0)} \right| = \frac{0}{|c|} = 0 \text{ bulunur ki bu da ispatı tamamlamış olur.}$$

Sonuç 4.2.1. Fuzzy Mandelbar cümlesinin desteği $\text{supp}(\tilde{M}_{BAR}) = \{c \mid |c| \leq 2\}$ kapalı dairedir.

Teorem 4.2.1. Fuzzy Mandelbar cümlesi $\tilde{M}_{BAR}$, reel eksene göre simetriktir.

$$\mathbf{\text{İspat.}} \text{ Herhangi bir } c \text{ karmaşık noktasına } f_c^n(0) = \left[\overline{f_c^{n-1}(0)} \right]^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

iterasyonunu uygulayalım. Öncelikle $\mu(c)=1$ olduğunu varsayarsak her n doğal

sayısı için $|f_c^n(0)| < 2$ elde edilir. Dolayısıyla, herhangi bir karmaşık sayının modülü

ile eşleniğinin modülünün eşit olması özelliğine göre her n doğal sayısı için

$$|f_{\bar{c}}^n(0)| < 2 \text{ sonucuna ulaşılır. Bu durumda } \mu(\bar{c}) = 1 \text{ elde edilir.}$$

Diğer taraftan, herhangi bir k doğal sayısı için $|f_c^k(0)| > 2$ ve $|f_c^{k-1}(0)| \leq 2$ iken

$\mu(c) = \left| \frac{f_c^{k-1}(0)}{f_c^k(0)} \right|$ olduğunu varsayalım. Açık bir şekilde $k \in \mathbb{N}$ değeri için

$|f_{\bar{c}}^k(0)| > 2$ ve $|f_{\bar{c}}^{k-1}(0)| \leq 2$ olduğu görülmektedir. Böylece

$$\mu(\bar{c}) = \frac{|f_{\bar{c}}^{k-1}(0)|}{|f_{\bar{c}}^k(0)|} = \frac{\overline{|f_c^{k-1}(0)|}}{\overline{|f_c^k(0)|}} = \frac{|f_c^{k-1}(0)|}{|f_c^k(0)|} = \mu(c)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\mu(\bar{c}) = \mu(c)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Fuzzy Mandelbrot cümlesinde olduğu gibi fuzzy Mandelbar cümlesinin de reel eksene göre simetrik olmasının yanı sıra fuzzy Mandelbrot cümlesinden farklı olarak bu fuzzy cümle bir diğer simetri özelliğine de sahiptir. Bu simetri durumu aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.2. Fuzzy Mandelbar cümlesi $\tilde{M}_{BAR}$, orijin etrafında $2\pi/3$ radyan dönme simetrisine sahiptir.

İspat. Herhangi bir $c \in \mathbb{C}$ noktasının orijin etrafında $2\pi/3$ radyan döndürüldüğünde üyelik derecesinin değişmez kaldığını, yani $w = e^{2\pi i/3}$ karmaşık sayısı için $\mu(w \cdot c) = \mu(c)$ olduğunu tümevarım yardımıyla ispatlayalım. Ancak tümevarıma başlamadan önce

$$\begin{aligned} w^3 &= 1 \\ w^2 \cdot w &= 1 \\ \bar{w}^2 \cdot w^2 \cdot w &= \bar{w}^2 \\ |w|^4 \cdot w &= \bar{w}^2, \left(|w|^4 = 1 \right) \end{aligned}$$

olduğundan $w = \bar{w}^2$ eşitliğinin var olduğuna dikkat edelim.

i. İlk iterasyon adımında $f_{w \cdot c}^1(0) = w \cdot c$ ve $f_c^1(0) = c$ olduğundan $f_{w \cdot c}^1(0) = w \cdot f_c^1(0)$ elde edilir.

ii. İkinci iterasyon adımında $f_{w \cdot c}^2(0) = (\overline{w \cdot c})^2 + w \cdot c$ ve $f_c^2(0) = \bar{c}^2 + c$ olduğundan

$$f_{w \cdot c}^2(0) = (\overline{w \cdot c})^2 + w \cdot c = \bar{w}^2 \cdot \bar{c}^2 + w \cdot c = w \cdot \bar{c}^2 + w \cdot c = w \cdot (\bar{c}^2 + c) = w \cdot f_c^2(0)$$

elde edilir.

iii. Üçüncü iterasyon adımında $f_{w \cdot c}^3(0) = \left((\overline{w \cdot c})^2 + w \cdot c \right)^2 + w \cdot c$ ve

$f_c^3(0) = (\bar{c}^2 + c)^2 + c$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{w \cdot c}^3(0) &= \left((\overline{w \cdot c})^2 + w \cdot c \right)^2 + w \cdot c \\ &= \left((\bar{w}^2 \cdot \bar{c}^2) + w \cdot c \right)^2 + w \cdot c \\ &= \left((\overline{w \cdot \bar{c}^2}) + \overline{w \cdot c} \right)^2 + w \cdot c \\ &= (\bar{w} \cdot c^2 + \bar{w} \cdot \bar{c})^2 + w \cdot c \\ &= \bar{w}^2 \cdot (c^2 + \bar{c})^2 + w \cdot c \\ &= w \cdot (c^2 + \bar{c})^2 + w \cdot c \\ &= w \cdot ((c^2 + \bar{c})^2 + c) \\ &= w \cdot ((\bar{c}^2 + c)^2 + c) \\ &= w \cdot f_c^3(0) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $m-1$. iterasyon adımında $f_{w \cdot c}^{m-1}(0) = w \cdot f_c^{m-1}(0)$ olduğunu kabul edelim.

v. m . iterasyon adımında kabulden yola çıkarak

$$\begin{aligned}
f_{w \cdot c}^m(0) &= \left(\overline{w \cdot f_c^{m-1}(0)} \right)^2 + w \cdot c \\
&= \bar{w}^2 \cdot \left(\overline{f_c^{m-1}(0)} \right)^2 + w \cdot c \\
&= w \cdot \left(\overline{f_c^{m-1}(0)} \right)^2 + w \cdot c \\
&= w \cdot \left(\left(\overline{f_c^{m-1}(0)} \right)^2 + c \right) \\
&= w \cdot f_c^m(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tümevarım tamamlanır. Dahası,

$$\begin{aligned}
|f_{w \cdot c}^m(0)| &= |w \cdot f_c^m(0)| \\
&= |w| \cdot |f_c^m(0)| \\
&= |e^{2\pi i/3}| \cdot |f_c^m(0)|
\end{aligned}$$

eşitliğinde $|w| = |e^{2\pi i/3}| = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$|f_{w \cdot c}^m(0)| = |f_c^m(0)| \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. O halde bu durum üyelik fonksiyonunu tespit etmek için yeterlidir. İlk olarak, $\mu(c) = 1$ olduğunu varsayalım. Böylece, her n doğal sayısı için

$$|f_c^n(0)| \leq 2 \text{ eşitsizliği sağlanmaktadır. (4.3) denklemine göre } |f_{w \cdot c}^m(0)| = |f_c^m(0)| \leq 2$$

var olduğundan $\mu(w \cdot c) = 1$ bulunur. Yani, $\mu(w \cdot c) = \mu(c)$ eşitliği elde edilir.

İkinci olarak, $\mu(c) \neq 1$ ise her bir m doğal sayısı için (4.3) denklemine göre

$$\mu(w \cdot c) = \frac{|f_{w \cdot c}^{m-1}(0)|}{|f_{w \cdot c}^m(0)|} = \frac{|f_c^{m-1}(0)|}{|f_c^m(0)|} = \mu(c)$$

eşitliği tekrar sağlanır. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α – kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ sınırlı cümledir.

İspat. Lemma 4.2.1.’e göre $|c| \leq 2$ olması için gerek ve yeter şart $\mu(c) > 0$ olmalıdır. Böylece, $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ cümlesinin sınırlı olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Teorem 4.2.4. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α – kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ bağlantılı cümledir.

İspat. $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ olacak şekilde $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ alt cümlelerini ele alalım. O halde

$$\max_{c \in \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{C}_1}(c), \mu_{\tilde{C}_2}(c)] = \beta$$

için $\mu_{\tilde{C}_1}(c) = \beta$ veya $\mu_{\tilde{C}_2}(c) = \beta$ olacak şekilde $c \in \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ noktası vardır öyle ki $1 \geq \beta > \alpha$ ’dır. Ancak, $\alpha > 0$ için

$$\min_{c \in \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{C}_1}(c), \mu_{\tilde{C}_2}(c)] > \alpha$$

olduğundan $\mu_{\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2}(c) \neq 0$ elde edilir. Böylece $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde boştan farklı $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ alt cümleleri vardır. Sonuç olarak,

$$\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 = \tilde{\emptyset} \text{ ve } \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 = \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$$

olacak şekilde sıradan boş cümle $\emptyset$ ve kuvvetli α – kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$,’dan farklı olarak hiçbir $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \subset \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ cümleleri yoktur. Bu durum $0 \leq \alpha < 1$ için $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ cümlesinin bağlantılı olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.2.5. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α – kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ basit bağlantılı cümledir.

İspat. Fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α – kesit cümlesinin tümleyeni

$$\mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \left\{ c \mid \mu_{\mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}}(c) \leq \alpha_1 \right\}$$

şeklindedir öyle ki $0 < \alpha_1 \leq 1$ için $1 - \alpha = \alpha_1$ 'dir. $\tilde{K}$ cümlesi kompakt ve $\tilde{F}$ cümlesi kapalı olacak şekilde $\mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \tilde{K} \cup \tilde{F}$ ayrık bileşimi ele alınsın. $0 \leq \beta < \alpha_1$ olmak üzere

$$\mu_{\mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}}(c) = \max_{c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{K}}(c), \mu_{\tilde{F}}(c)] = \beta$$

şartıyla $\mu_{\tilde{K}}(c) = \beta$ ve $\mu_{\tilde{F}}(c) = \beta$ olacak şekilde $c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}$ noktası vardır. Dahası, $\tilde{K} \cap \tilde{F} = \tilde{\emptyset}$ olduğundan

$$\mu_{\tilde{K} \cap \tilde{F}}(c) = \min_{c \in \mathbb{C} \setminus \tilde{M}_{BAR}^{\alpha+}} [\mu_{\tilde{K}}(c), \mu_{\tilde{F}}(c)] = 0$$

şeklindedir. Eğer $\mu_{\tilde{F}}(c) = 0$ olduğunu varsayarsak $\tilde{F} = \{c \mid |c| < 2\}$ bulunur. Ancak bu durum $\tilde{F}$ cümlesinin kapalı olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\mu_{\tilde{K}}(c) = 0$ olduğunu varsayarsak

$$\tilde{F} = \{c \mid \mu_{\tilde{K}}(c) = \beta\} \text{ ve } \tilde{K} = \tilde{\emptyset} = \{c \mid |c| < 2\}$$

bulunur. Ancak bu durum da $\tilde{K}$ cümlesinin kompakt olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\tilde{K}$ klasik boş bir cümledir. Sonuç olarak, fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α – kesit cümlesinin tümleyeni, herhangi bir kompakt ve kapalı cümlelerin ayrık bir birleşimi olarak verildiğinde, bu kompakt cümle boş cümle olmalıdır. Bu gerçeğe göre, $0 \leq \alpha < 1$ için $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ cümlesi basit bağlantılıdır.

Sonuç 4.2.2.

- i. $\mu|_{\mathbb{R}}(c): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu parçalı süreklidir.
- ii. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ sınırlı cümledir.
- iii. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ bağlantılı cümledir.
- iv. $0 \leq \alpha < 1$ için fuzzy Mandelbar cümlesinin kuvvetli α -kesit cümlesi $\tilde{M}_{BAR}^{\alpha+} = \{c \mid \mu(c) > \alpha\}$ basit bağlantılı cümledir.
- v. $\tilde{M}_{BAR}^1 = \{c \mid \mu(c) = 1\}$ cümlesi, klasik Mandelbar M_{BAR} cümlesine karşılık gelir ve M_{BAR} cümlesinin boştan farklı, kompakt ve basit bağlantılı olduğu bilinmektedir.
- vi. Fuzzy Mandelbrot cümlesinden farklı olarak fuzzy Mandelbar cümlesi orijin etrafında $2\pi/3$ radyan dönme simetrisine sahiptir.

BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY MANDELBROT VE FUZZY MANDELBAR CÜMLELERİ

5.1. Genelleştirilmiş Fuzzy Mandelbrot Cümleleri

Fuzzy Mandelbrot cümlesinin en önemli özelliği klasik Mandelbrot cümlesine ait olan ya da ait olmayan her bir karmaşık noktası için yineleme fonksiyonu ile birlikte bir üyelik derecesi tanımlayabilmektir. Böylelikle ortaya çıkan süreçte her bir adımda elenen noktalar fuzzy anlamda tekrar hayata geri döner. Bu durumun genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi içinde geçerli olabilmesi adına izlenebilecek alternatif yollar aşağıdaki gibi verilebilir:

i. Kuadratik yineleme fonksiyonunda iterasyon kuvveti artırılarak $f_c^n(0) = (f_c^n(0))^p + c$, $p > 2$, $p \in \mathbb{Z}^+$ kullanılır. Literatüre göre sadece $p \in \mathbb{Z}^+$ durumu için değil aynı zamanda $p \in \mathbb{Z}^-$ ve $p \in \mathbb{Q}$ durumları içinde genelleştirme yapılmaktadır.

ii. Fuzzy Mandelbrot cümlesinde $z_n \rightarrow (z_{n-1})^2 + c$ iterasyon adımları uygulanırken z ve c karmaşık sayıları yerine bi-kompleks sayılar, tri-kompleks sayılar, quadri-kompleks sayılar veya hiper-kompleks sayılar kullanılır.

iii. Hem iterasyon kuvveti aynı anda değiştirilerek farklı farklı sayı cümleleri üzerinde üyelik dereceleri ayrı ayrı hesaplanır.

Ayrıca bu durumlara ek olarak literatür tarama aşamasında karşılaşmadığımız durumlar da olabilir. Ancak bu alt bölümde üzerinde izlenecek yöntem olarak i. şıkkı tercih edilmiştir. Böylece iterasyon fonksiyonunun kuvvetinin değiştirilmesine ek olarak fuzzy mantığın kullanılması genelleştirilmiş Mandelbrot cümlelerine yeni bir

anlam kazandırır. Bu alt bölümde genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümleleri tanıtıldıktan sonra matematiksel ve grafiksel yapısı incelenmiştir. İterasyon fonksiyonunun farklı kuvvetleri için ortaya çıkan genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinde bazı noktalar için üyelik derecesi hesaplamaları yapılmıştır ve konumları tespit edilmiştir. Kuvvetlerin değişmesi önceki bölümde çalışılan fuzzy Mandelbrot cümlesine ilave olarak genelleştirilmiş fuzzy cümlelerin yeni bir simetri özelliğine sahip olmasına sebep olacağından bu fuzzy cümlelerin sahip oldukları simetri özellikleri araştırılmıştır. Bu yaklaşımın sonucu olarak genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümleleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.1. $z = 0 + 0i$ başlangıç noktası ile birlikte $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$f_{(p,c)}^k(0) = \left[f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right]^p + c$ iterasyonu altında $\mu: \mathbb{C} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu

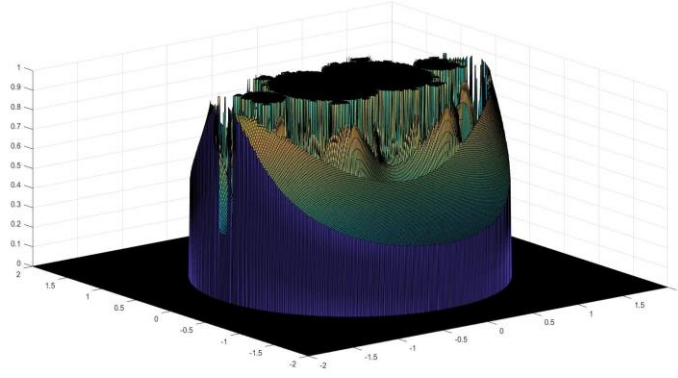
$$\mu(c) = \begin{cases} 1 & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \leq \sqrt[p-1]{2}, \\ \frac{\left| f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right|}{\left| f_{(p,c)}^k(0) \right|}, & \left| f_{(p,c)}^k(0) \right| > \sqrt[p-1]{2} \text{ ve } \left| f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right| \leq \sqrt[p-1]{2} \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere

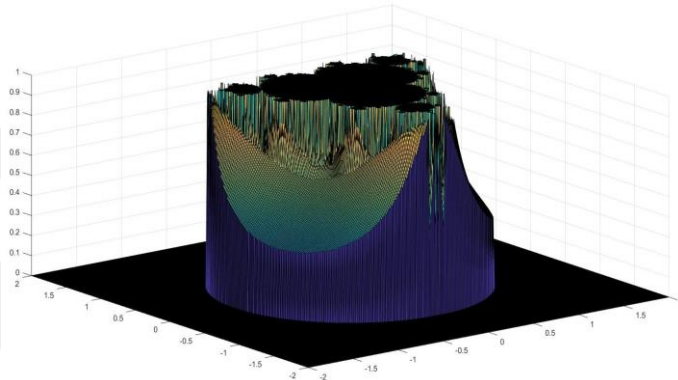
$$\tilde{M}^p = \left\{ (c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C} \right\}$$

cümlesine genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi denir. Özel olarak $p = 2$ için Bölüm 4.1.'de tanıtılan ve özellikleri araştırılan fuzzy Mandelbrot cümlesi ve $p = 3$ için [93] makalesinde tanıtılan ve özellikleri araştırılan fuzzy Mandelbrot cümlesi elde edilir.

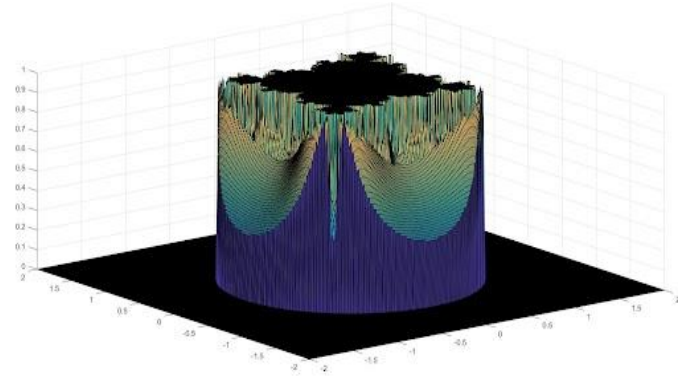
p kuvvetinin özel seçimleri için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



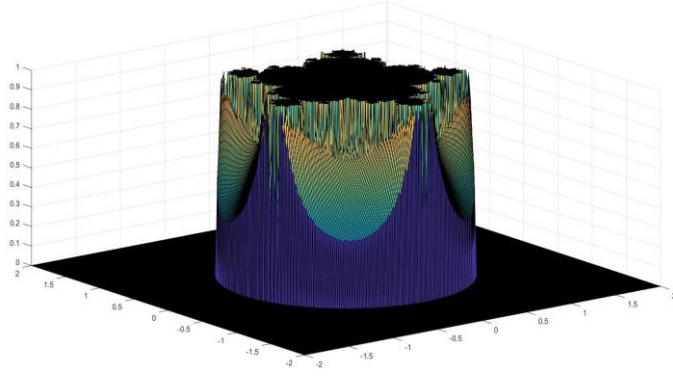
Şekil 5.1. $p = 3$ için fuzzy Mandelbrot cümlesi



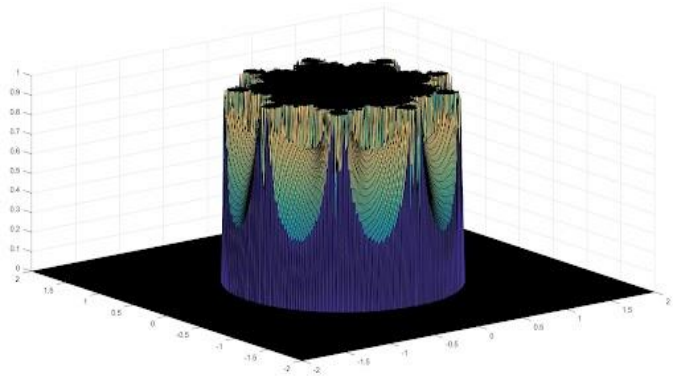
Şekil 5.2. $p = 4$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi



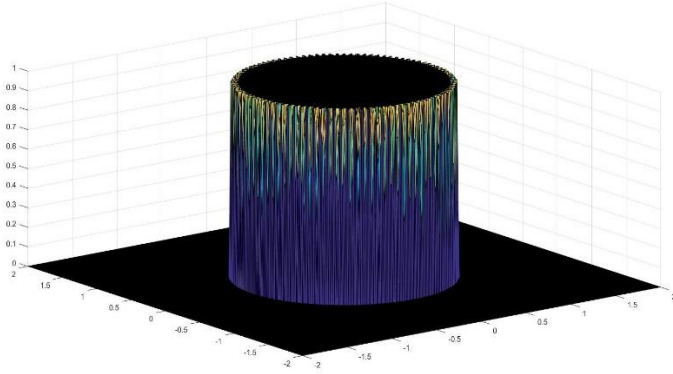
Şekil 5.3. $p = 5$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi



Şekil 5.4. $p = 6$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi

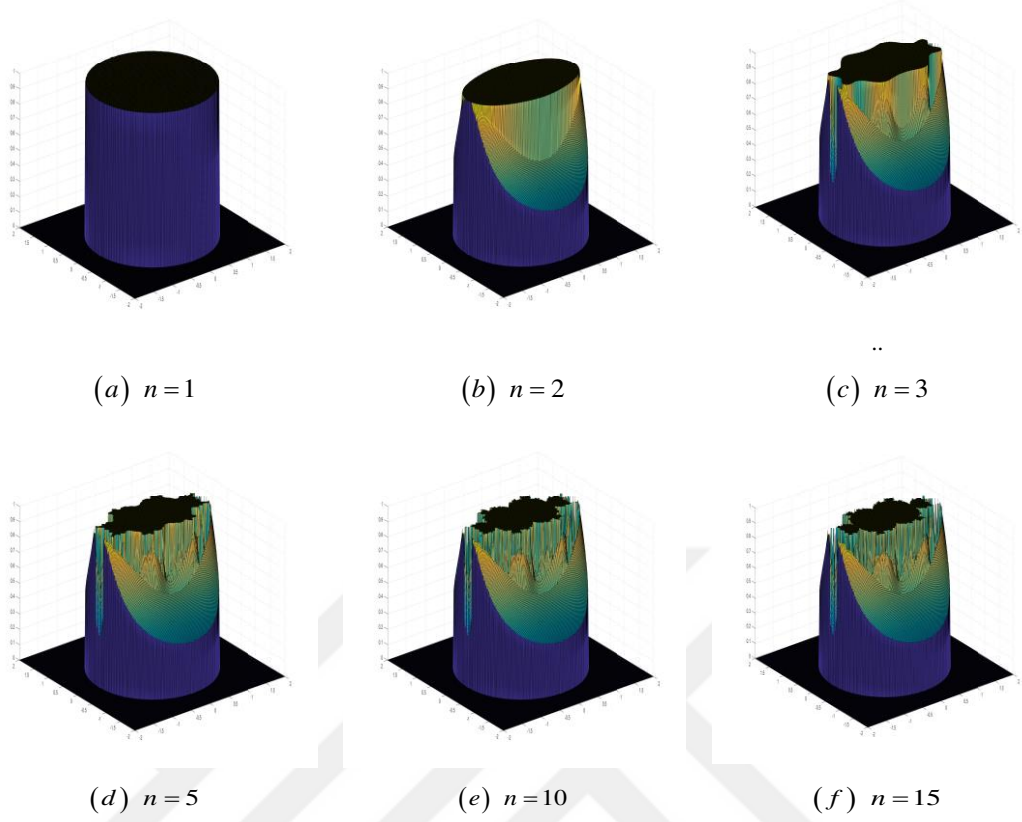


Şekil 5.5. $p = 10$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi



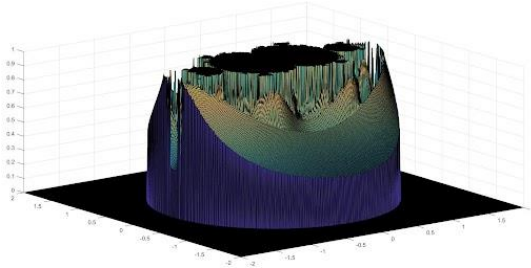
Şekil 5.6. $p = 100$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi

Özel olarak, $p = 3$ durumu için ortaya çıkan fuzzy Mandelbrot cümlesinin her bir iterasyon adımı için grafik incelemesini yapalım.

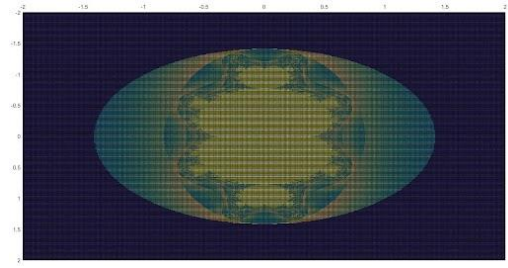


Şekil 5.7. Bazı yineleme adımları için fuzzy Mandelbrot cümlesinin grafikleri

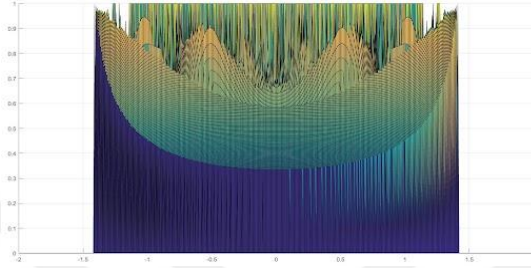
Ayrıca grafikler dikkatli incelenirse belli bir iterasyon adımı sonrasında ortaya çıkan grafikler şekilsel bakımdan birbirine çok yakındır. O halde $n = 200$ iterasyon adımı için çizdirilen fuzzy Mandelbrot cümlesinin detaylı görünümü aşağıda verilmiştir.



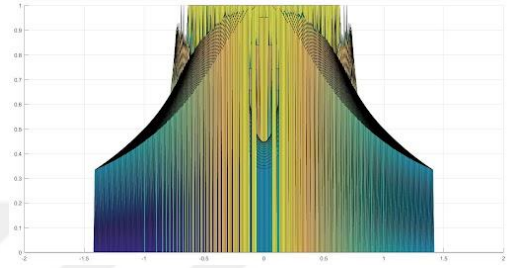
(a) genlik:35°, yükseklik:28°



(b) üstten görünüm



(c) yandan görünüm



(d) önden görünüm

Şekil 5.8. Fuzzy Mandelbrot cümlesinin farklı bakış açıları ile görünüşleri

Lemma 5.1.1. $\tilde{M}_0^p = \{(c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C}\}$ genelleştirilmiş fuzzy cümlesi boş olması için gerek ve yeter şart $|c| > \sqrt[p-1]{2}$ olmasıdır.

İspat. Varsayalım ki $\tilde{M}_0^p = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\mu(c) = 0$ iken herhangi $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{f_{(p,c)}^{k-1}(0)}{f_{(p,c)}^k(0)} \right| = 0 \text{ bulunur. Yani } |f_{(p,c)}^{k-1}(0)| = 0 \text{ olmalıdır. Yineleme fonksiyonu}$$

$$f_{(p,c)}^k(0) = \left(f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right)^p + c \text{ olduğundan dolayı } \left| \left(f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right)^p \right| = |f_{(p,c)}^k(0) - c| = 0$$

sağlanır. Böylece üçgen eşitsizliği kuralından $|f_{(p,c)}^k(0) - |c|| \leq |f_{(p,c)}^k(0) - c| = 0$ olduğu

görülmür. Yani $|c| - |f_{(p,c)}^k(0)| \geq 0$ bulunur. Ancak Tanım 5.1.1.'e göre $|f_{(p,c)}^k(0)| > \sqrt[p-1]{2}$

eşitsizliğini sağlamalıdır. Sonuç olarak $|c| > \sqrt[p-1]{2}$ elde edilir.

Diğer taraftan $|c| > \sqrt[p-1]{2}$ olduğu kabul edilirse $|f_{(p,c)}^1(0)| = |c| > \sqrt[p-1]{2}$ bulunur. Daima

$f_{(p,c)}^0(0) = 0$ eşitliği vardır öyle ki $|f_{(p,c)}^0(0)| = 0 \leq \sqrt[p-1]{2}$ olduğu görülmür. Sonuç olarak

$$\mu(c) = \frac{|f_{(p,c)}^0(0)|}{|f_{(p,c)}^1(0)|} = \frac{0}{|c|} = 0$$

üyelik derecesine bağlı olarak $\tilde{M}_0^p = \tilde{\emptyset}$ eşitliği görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.1.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot destek cümleleri

$$\text{supp}(\tilde{M}^p) = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq \sqrt[p-1]{2} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 5.1.1. Lemma 5.1.2.'ye göre, bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot destek cümlelerinin sınırlarını belirlemek için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

- i. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}^2)$ için $|c| \leq 2$,
- ii. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}^3)$ için $|c| \leq \sqrt{2} \cong 1.41$,
- iii. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}^4)$ için $|c| \leq \sqrt[3]{2} \cong 1.25$,
- iv. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}^5)$ için $|c| \leq \sqrt[4]{2} \cong 1.18$,
- v. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}^6)$ için $|c| \leq \sqrt[5]{2} \cong 1.14$.

Örnek 5.1.1. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[f_{(p,c)}^{k-1}(z) \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(3,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(3,i)}^1(0) &= 0^3 + i = i \\ f_{(3,i)}^2(0) &= i^3 + i = 0 \\ f_{(3,i)}^3(0) &= 0^3 + i = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(3,i)}^4(0) &= i^3 + i = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 0, i, 0, \dots\}$ iterasyon dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(3,i)}^n(0)| \leq \sqrt{2}$ sağlanır. Böylece üyelik derecesi $\mu(i) = 1$ bulunur. Yani, $(i, 1) \in \tilde{M}^3$ elde edilir.

Örnek 5.1.2. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(4,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(4,i)}^1(0) &= 0^4 + i = i \\ f_{(4,i)}^2(0) &= i^4 + i = 1 + i \\ f_{(4,i)}^3(0) &= (1 + i)^4 + i = -4 + i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 1 + i, -4 + i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımımda $|f_{(4,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[3]{2}$ ve $|f_{(4,i)}^2(0)| = |1 + i| = \sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.3. $p = 5$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(5,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(5,i)}^1(0) &= 0^5 + i = i \\ f_{(5,i)}^2(0) &= i^5 + i = 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(5,i)}^3(0) &= (2i)^5 + i = 32i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 2i, 32i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımında $|f_{(5,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[4]{2}$ ve $|f_{(5,i)}^2(0)| = |2i| = 2 > \sqrt[4]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.4. $p = 6$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(6,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(6,i)}^1(0) &= 0^6 + i = i \\ f_{(6,i)}^2(0) &= i^6 + i = -1 + i \\ f_{(6,i)}^3(0) &= (-1 + i)^6 + i = 9i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, -1 + i, 9i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımında $|f_{(6,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[5]{2}$ ve $|f_{(6,i)}^2(0)| = |-1 + i| = \sqrt{2} > \sqrt[5]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

Sonuç 5.1.2. $c = i$ karmaşık sayısının $p > 2$ durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i. Eğer $p = 4m$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |1 + i| = \sqrt{2} > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

ii. Eğer $p = 4m + 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |2i| = 2 > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

iii. Eğer $p = 4m + 2$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |-1 + i| = \sqrt{2} > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

iv. Eğer $p = 4m + 3$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği sağlandığından dolayı $\mu(i) = 1$ üyelik derecesine sahiptir.

Dolayısıyla $c = i$ noktasının üyelik fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Yani, her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mu(i) = \begin{cases} 0.7 & , p = 4m + 2 \\ 1 & , p = 4m + 3 \\ 0.7 & , p = 4m + 4 \\ 0.5 & , p = 4m + 5 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 5.1.5. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = 0.5$ seçelim.

$$f_{(3,0.5)}^0(0) = 0$$

$$f_{(3,0.5)}^1(0) = 0^3 + 0.5 = 0.500$$

$$f_{(3,0.5)}^2(0) = (0.5)^3 + 0.5 = 0.625$$

$$f_{(3,0.5)}^3(0) = (0.625)^3 + 0.5 \cong 0.744$$

$$f_{(3,0.5)}^4(0) = (0.744)^3 + 0.5 \cong 0.912$$

$$\begin{aligned}
f_{(3,0.5)}^5(0) &= (0.912)^3 + 0.5 \cong 1.258 \\
f_{(3,0.5)}^6(0) &= (1.258)^3 + 0.5 \cong 2.494 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, 0.500, 0.625, 0.744, 0.912, 1.258, 2.494, \dots\}$

iterasyon dizisi $k = 6$ iterasyon adımında $|f_{(3,0.5)}^5(0)| \cong 1.258 \leq \sqrt{2}$ ve

$|f_{(3,0.5)}^6(0)| \cong 2.494 > \sqrt{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(0.5) = \frac{1.258}{2.494} \cong 0.504$ üyelik

derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.6. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = 0.5$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(4,0.5)}^0(0) &= 0 \\
f_{(4,0.5)}^1(0) &= 0^4 + 0.5 = 0.5000 \\
f_{(4,0.5)}^2(0) &= (0.5)^4 + 0.5 = 0.5625 \\
f_{(4,0.5)}^3(0) &= (0.5625)^4 + 0.5 \cong 0.6001 \\
f_{(4,0.5)}^4(0) &= (0.6001)^4 + 0.5 \cong 0.6296 \\
f_{(4,0.5)}^5(0) &= (0.6296)^4 + 0.5 \cong 0.6572 \\
f_{(4,0.5)}^6(0) &= (0.6572)^4 + 0.5 \cong 0.6865 \\
f_{(4,0.5)}^7(0) &= (0.6865)^4 + 0.5 \cong 0.7222 \\
f_{(4,0.5)}^8(0) &= (0.7222)^4 + 0.5 \cong 0.7720 \\
f_{(4,0.5)}^9(0) &= (0.7720)^4 + 0.5 \cong 0.8552 \\
f_{(4,0.5)}^{10}(0) &= (0.8552)^4 + 0.5 \cong 1.0351 \\
f_{(4,0.5)}^{11}(0) &= (1.0351)^4 + 0.5 \cong 1.6481 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan

$$\{0, 0.5, 0.5625, 0.6001, 0.6296, 0.6572, 0.6865, 0.7222, 0.7720, 0.8552, 1.0351, 1.6481, \dots\}$$

iterasyon dizisi $k = 11$ iterasyon adımımda $\left|f_{(4,0.5)}^{10}(0)\right| \cong 1.0351 \leq \sqrt[3]{2}$ ve $\left|f_{(4,0.5)}^{11}(0)\right| \cong 1.6481 > \sqrt[3]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(0.5) = \frac{1.0351}{1.6481} \cong 0.6281$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.7. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[f_{(p,c)}^{k-1}(z)\right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = -1$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(3,-1)}^0(0) &= 0 \\ f_{(3,-1)}^1(0) &= 0^3 + (-1) = -1 \\ f_{(3,-1)}^2(0) &= (-1)^3 + (-1) = -2 \\ f_{(3,-1)}^3(0) &= (-2)^3 + (-1) = -9 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\{0, 0, -1, -2, -9, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımımda $\left|f_{(3,-1)}^1(0)\right| = |-1| = 1 \leq \sqrt{2}$ ve $\left|f_{(3,-1)}^2(-1)\right| = |-2| = 2 > \sqrt{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(-1) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.8. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[f_{(p,c)}^{k-1}(z)\right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = -1$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(4,-1)}^0(0) &= 0 \\ f_{(4,-1)}^1(0) &= 0^4 + (-1) = -1 \\ f_{(4,-1)}^2(0) &= (-1)^4 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{(4,-1)}^3(0) = 0^4 + (-1) = -1$$

$$\vdots$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, -1, 0, -1, \dots\}$ iterasyon dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(4,-1)}^n(0)| \leq \sqrt[3]{2}$ sağlanır. Böylece üyelik derecesi $\mu(-1) = 1$ bulunur. Yani, $(-1, 1) \in \tilde{M}^3$ elde edilir.

Sonuç 5.1.3. $c = -1$ karmaşık sayısının $p \geq 2$ durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

- i. Eğer $p = 2m$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği sağlandığından dolayı $\mu(-1) = 1$ üyelik derecesine sahiptir.
- ii. Eğer $p = 2m + 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,-1)}^1(0)| = |-1| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |-2| = 2 > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Dolayısıyla $c = -1$ noktasının üyelik fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mu(-1) = \begin{cases} 1 & , p = 2n \\ 0.5 & , p = 2n + 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Son olarak, tamamıyla sanal veya gerçek olmayan bir karmaşık sayı için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.1.9. $p=3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile

birlikte $z=0+0i$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^1(0) &= 0^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^2(0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = i\sqrt{2} \\ f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^3(0) &= (i\sqrt{2})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, i\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}, \dots\right\}$ iterasyon dizisi

$k=3$ iterasyon adımında

$$\left|f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^2(0)\right| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \text{ ve } \left|f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^3(0)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

şartlarını sağlar. Böylece $\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cong 0.63$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.1.10. $p=4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = [f_{(p,c)}^{k-1}(z)]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile

birlikte $z=0+0i$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^1(0) &= 0^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^2(0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^3(0) = \left(i\sqrt{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}$$

$$\vdots$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, i\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}, \dots\right\}$ iterasyon dizisi

$k = 3$ iterasyon adımımda

$$\left|f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^2(0)\right| = |i\sqrt{2}| = \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \text{ ve } \left|f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^3(0)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

şartlarını sağlar. Böylece $\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cong 0.63$ üyelik derecesine sahiptir.

Ayrıca genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesinin noktalarının üyelik dereceleri aşağıda geliştirilen algoritma yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

Algoritma: Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi üyelik derecesi algoritması

Input : $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
Data : $z_0 = 0 + i0$
Output : $\mu(c)$

```

1 : for 1 ← k to n do
2 :    $z_k = z_{k-1}^p + c$ 
3 :   if  $|z_k| \leq 2$ 
4 :      $\mu(c) = 1$ 
5 :   else if  $|z_k| > 2$  and  $|z_{k-1}| \leq 2$ 
6 :      $\mu(c) = |z_{k-1}| / |z_k|$ 
7 :   end
8 : end
9 : end

```

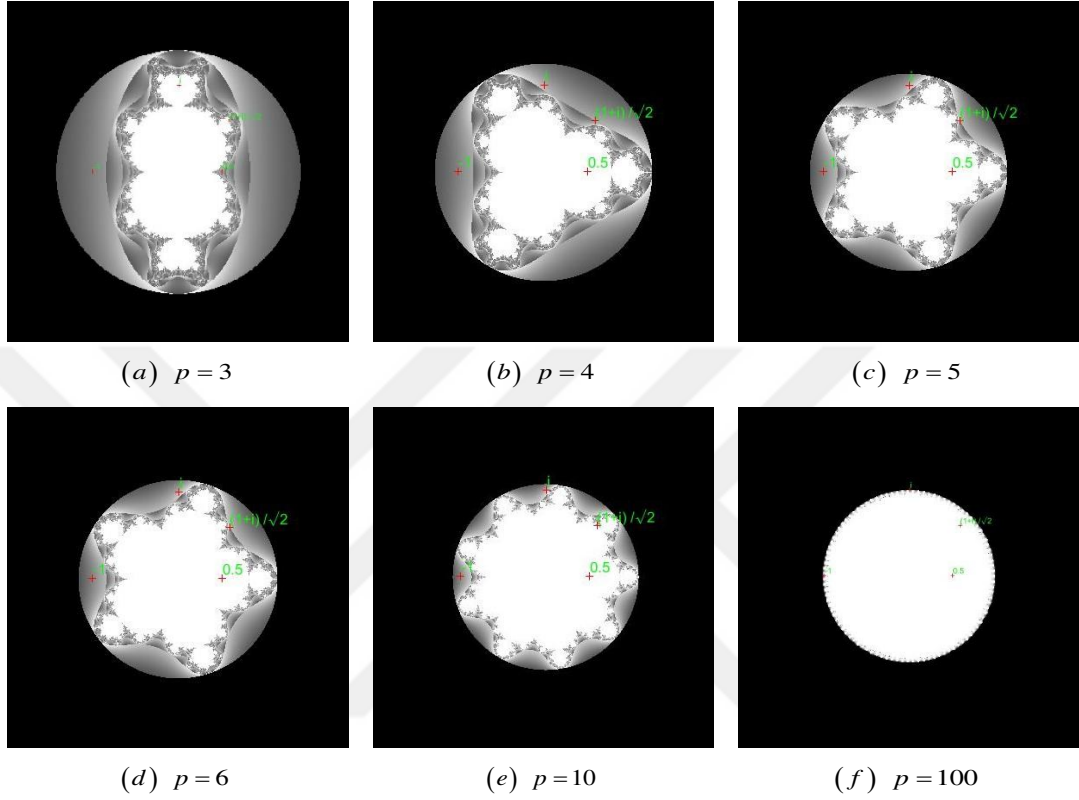
Şekil 5.9. Verilen bir c karmaşık sayısının genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesine üyelik derecesi algoritması

Bu örnekler aynı algoritma ile devam ettirilebilir. Yukarıda yapmış olduğumuz işlemlere ortak bir pencereden bütün olarak bakılırsa, çeşitli derecelerdeki genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerindeki bazı seçilmiş karmaşık sayılar için aşağıdaki üyelik dereceleri açıkça görülür.

Tablo 5.1. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesindeki bazı karmaşık c noktalarının üyelik dereceleri

	$\tilde{M}^3$	$\tilde{M}^4$	$\tilde{M}^5$	$\tilde{M}^6$	$\tilde{M}^{10}$	$\tilde{M}^{100}$
$\mu(i)$	1	0.7071	0.5	0.7071	0.7071	0.7071
$\mu(-1)$	0.5	1	0.5	1	1	1
$\mu(0.5)$	0.5046	0.6281	1	1	1	1
$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$	0.6325	0.6045	1	0.6347	0.5412	1

Şimdi sonlu yineleme sayısı $n = 30$ olacak şekilde verilen p dereceden bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinin gri ölçekli grafiklerinde bu noktaların tam konumlarını gösterelim.



Şekil 5.10. $n = 30$ yineleme adımı için bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinin gri ölçekli grafikleri üzerindeki bazı noktalar

Buradaki fuzzy cümlelerin gri ölçekli grafiklerinde, daha parlak piksellere karşılık gelen karmaşık sayılar için daha yüksek üyelik derecesine sahip olması demektir.

Diğer bir taraftan, genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot $\tilde{M}^p$ cümlesi birbirinden farklı iki simetri özelliğine sahiptir.

Teorem 5.1.1. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot $\tilde{M}^p$ cümlesi reel eksene göre simetriktir.

İspat. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot $\tilde{M}^p$ cümlesi, μ üyelik fonksiyonuna bağlıdır. O halde $\mu(c) = 1$ olması durumunda $\mu(\bar{c}) = 1$ olduğundan $\mu(c) = \mu(\bar{c})$

eşitliği görülür. Ayrıca $\mu(c) \neq 1$ olması durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlesi tanımına göre

$$\mu(c) = \left| \frac{f_{(p,c)}^{k-1}(0)}{f_{(p,c)}^k(0)} \right| = \left| \frac{f_{(p,\bar{c})}^{k-1}(0)}{f_{(p,\bar{c})}^k(0)} \right| = \mu(\bar{c})$$

sağlanmaktadır. Böylelikle her $c \in \mathbb{C}$ için $\mu(c) = \mu(\bar{c})$ bulunduğundan ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot $\tilde{M}^p$ cümlelerinin bu simetri özelliği p derecesinden bağımsız olmasına rağmen, $\tilde{M}^p$ cümleleri p derecelerinin farklılığının etkili olduğu bir diğer simetri özelliğine sahiptir. Bu durumun gösterilmesi aşamasında her bir iterasyon adımı için yineleme fonksiyonları birbirinden farklı olmasından dolayı ayrı ayrı kanıtlanmaları gerekir.

Teorem 5.1.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot $\tilde{M}^p$ cümlesi $(p-1)$ -kat dönme simetrisine sahiptir. Diğer bir ifadeyle, herhangi p derecesine sahip $\tilde{M}^p$ cümlesi orijin etrafında $\frac{2\pi}{p-1}$ radyan açısıyla dönme simetrisine sahiptir.

İspat. Herhangi bir $c \in \mathbb{C}$ noktasının $\frac{2\pi}{p-1}$ radyan açısıyla döndürülmesi sonucunda üyelik derecesinin değişmez kaldığı gösterilirse ispat tamamlanır. Bu yüzden, μ üyelik fonksiyonu olmak üzere herhangi $w = e^{2\pi i/(p-1)}$ karmaşık sayısı için $\mu(w \cdot c) = \mu(c)$ olduğunu ispatlayalım. O halde, k iterasyon sayısını göstermek üzere yineleme fonksiyonuna tümevarım adımlarını uygulayalım.

i. İlk iterasyon adımı $k = 1$ durumunda

$$f_{(p,w \cdot c)}^1(0) = w \cdot c \text{ ve } f_{(p,c)}^1(0) = c$$

olduğundan

$$f_{(p,wc)}^1(0) = w \cdot f_{(p,c)}^1(0)$$

bulunur.

ii. İkinci iterasyon adımı $k = 2$ durumunda

$$w^{p-1} = 1, f_{(p,wc)}^2(0) = (w \cdot c)^p + w \cdot c = w \cdot (w^{p-1} \cdot c^p + c) \text{ ve } f_{(p,c)}^2(c) = c^p + c$$

olduğundan

$$f_{(p,wc)}^2(0) = w \cdot f_{(p,c)}^2(0)$$

bulunur.

iii. Üçüncü iterasyon adımı $k = 3$ durumunda

$$w^{p-1} = 1, f_{(p,wc)}^3(0) = ((w \cdot c)^p + w \cdot c)^p + w \cdot c = w \cdot (w^{p-1} \cdot (w^{p-1} \cdot c^p + c)^p + c)$$

ve

$$f_{(p,c)}^3(0) = (c^p + c)^p + c$$

olduğundan

$$f_{(p,wc)}^3(0) = w \cdot f_{(p,c)}^3(0)$$

bulunur.

iv. $(n-1)$ 'inci iterasyon adımı $k = n-1$ durumunda

$$f_{(p,w \cdot c)}^{n-1}(0) = w \cdot f_{(p,c)}^{n-1}(0)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

v. n 'inci iterasyon adımı $k = n$ durumunda $f_{(p,w \cdot c)}^n(0) = \left[f_{(p,w \cdot c)}^{n-1}(0) \right]^p + w \cdot c$ iterasyon fonksiyonu özelliğine göre

$$\begin{aligned} f_{(p,w \cdot c)}^n(0) &= \left[w \cdot f_{(p,c)}^{n-1}(0) \right]^p + w \cdot c \\ &= w \cdot \left(w^{p-1} \cdot \left[f_{(p,c)}^{n-1}(0) \right]^p + c \right) \\ &= w \cdot \left(\left[f_{(p,c)}^{n-1}(0) \right]^p + c \right) \\ &= w \cdot f_{(p,c)}^n(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, her bir $k \in \mathbb{N}$ için $f_{(p,w \cdot c)}^k(0) = w \cdot f_{(p,c)}^k(0)$ eşitliğinin sağlandığı görülür ve tümevarım adımları tamamlanır.

Dahası

$$\begin{aligned} \left| f_{(p,w \cdot c)}^n(0) \right| &= \left| w \cdot f_{(p,c)}^n(0) \right| \\ &= |w| \cdot \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \\ &= \left| e^{2\pi i/(p-1)} \right| \cdot \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca $|w| = \left| e^{2\pi i/(p-1)} \right| = 1$ olduğundan

$$\left| f_{(p,w \cdot c)}^n(0) \right| = \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \quad (5.1)$$

elde edilir. Bu durum üyelik fonksiyonunu tespit etmek için yeterlidir.

Öncelikle, $\mu(c)=1$ olduğunu varsayalım. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizliği sağlanır. (5.1) denklemine göre $|f_{(p,w \cdot c)}^n(0)| = |f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt[p-1]{2}$ var olduğundan $\mu(w \cdot c)=1$ elde edilir. Böylece $\mu(w \cdot c)=\mu(c)$ eşitliği sağlanır.

İkinci olarak, $\mu(c) \neq 1$ olduğunu varsayalım. O halde, (5.1) denklemine göre her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\mu(w \cdot c) = \frac{|f_{(p,w \cdot c)}^{k-1}(0)|}{|f_{(p,w \cdot c)}^k(0)|} = \frac{|f_{(p,c)}^{k-1}(0)|}{|f_{(p,c)}^k(0)|} = \mu(c)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5.2. Genelleştirilmiş Fuzzy Mandelbar Cümleleri

Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinin yineleme fonksiyonu yerine $f_{(p,c)}^k(0) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(0)} \right]^p + c$ kullanılarak bu alt bölümde genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin matematiksel ve grafiksel yapısı incelenmiştir. İterasyon fonksiyonunun farklı kuvvetleri için ortaya çıkan genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinde bazı noktalar için üyelik derecesi hesaplamaları yapılmış ve konumları tespit edilmiştir. Bu fuzzy cümlelerin sahip oldukları simetri özellikleri araştırılmıştır ve genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümlelerinden farklı olarak bu fuzzy cümlelerin $(p+1)$ -kat dönme simetrisine sahip olduğu görülmüştür. Şimdi, genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesini tanımlayalım.

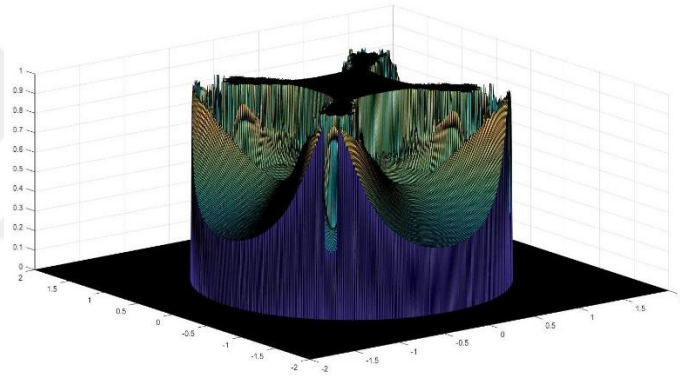
Tanım 5.2.1. $z = 0 + 0i$ başlangıç noktası ile birlikte $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_{(p,c)}^k(0) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(0)} \right]^p + c \text{ iterasyonu altında } \mu: \mathbb{C} \rightarrow [0,1] \text{ üyelik fonksiyonu}$$

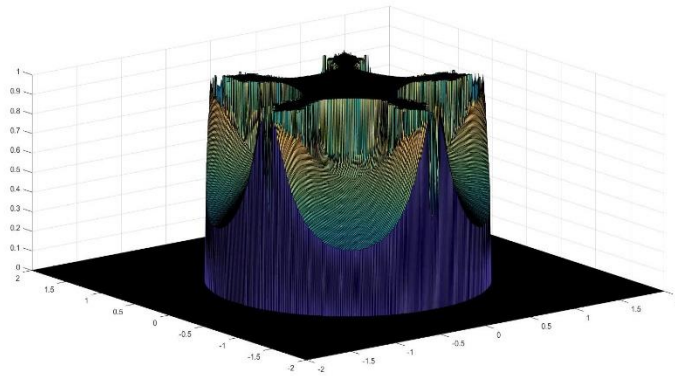
$$\mu(c) = \begin{cases} 1 & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt[p-1]{2}, \\ \frac{|f_{(p,c)}^{k-1}(0)|}{|f_{(p,c)}^k(0)|}, & |f_{(p,c)}^k(0)| > \sqrt[p-1]{2} \text{ ve } |f_{(p,c)}^{k-1}(0)| \leq \sqrt[p-1]{2} \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere $\tilde{M}_{BAR}^p = \{(c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C}\}$ cümlesine genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi denir. Özel olarak $p = 2$ için Bölüm 4.2.'de tanıtılan ve özellikleri araştırılan fuzzy Mandelbar cümlesi elde edilir.

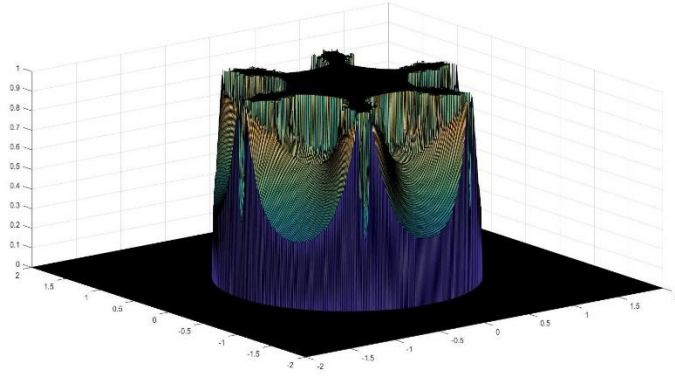
p kuvvetinin özel seçimleri için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



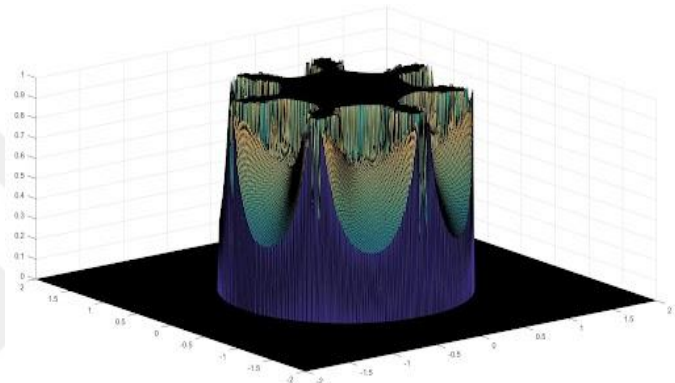
Şekil 5.11. $p = 3$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi



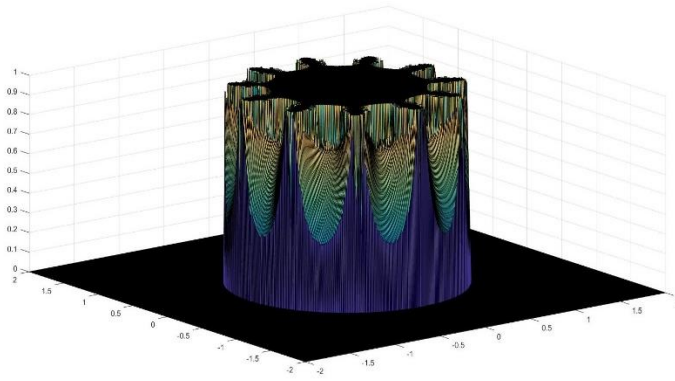
Şekil 5.12. $p = 4$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi



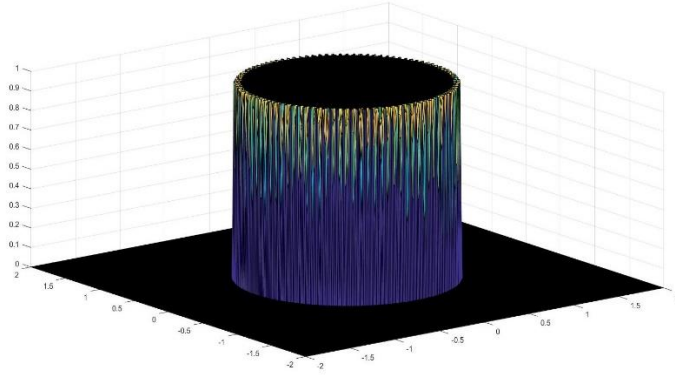
Şekil 5.13. $p = 5$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi



Şekil 5.14. $p = 6$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi



Şekil 5.15. $p = 10$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi



Şekil 5.16. $p = 100$ için genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi

Lemma 5.2.1. $\tilde{M}_{BAR_0}^p = \{(c, \mu(c)) \mid c \in \mathbb{C}\}$ genelleştirilmiş fuzzy cümlesi boş olması için gerek ve yeter şart $|c| > {}^{p-1}\sqrt{2}$ olmasıdır.

İspat. Varsayalım ki $\tilde{M}_{BAR_0}^p = \tilde{\emptyset}$ olsun. Bu durumda $\mu(c) = 0$ iken herhangi $k \in \mathbb{N}$

için $\left| \frac{f_{(p,c)}^{k-1}(0)}{f_{(p,c)}^k(0)} \right| = 0$ bulunur. Yani $|f_{(p,c)}^{k-1}(0)| = 0$ olmalıdır. Yineleme fonksiyonu

$$f_{(p,c)}^k(0) = \left(\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(0)} \right)^p + c \quad \text{olduğundan} \quad \left| \left(\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(0)} \right)^p \right| = |f_{(p,c)}^k(0) - c| = 0 \quad \text{sağlanır.}$$

Böylece $|f_{(p,c)}^k(0) - |c|| \leq |f_{(p,c)}^k(0) - c| = 0$ olduğu görülür. Buradan $|c| - |f_{(p,c)}^k(0)| \geq 0$

olduğu görülür. Ancak Tanım 5.2.1.'e göre $|f_{(p,c)}^k(0)| > {}^{p-1}\sqrt{2}$ eşitsizliğini sağlamalıdır.

Sonuç olarak $|c| > {}^{p-1}\sqrt{2}$ elde edilir.

Diğer taraftan $|c| > {}^{p-1}\sqrt{2}$ olduğu kabul edilirse $|f_{(p,c)}^1(0)| = |c| > {}^{p-1}\sqrt{2}$ bulunur. Daima

$f_{(p,c)}^0(0) = 0$ eşitliği vardır öyle ki $|f_{(p,c)}^0(0)| = 0 \leq {}^{p-1}\sqrt{2}$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\mu(c) = \frac{|f_{(p,c)}^0(0)|}{|f_{(p,c)}^1(0)|} = \frac{0}{|c|} = 0$$

üyelik derecesine bağlı olarak $\tilde{M}_{BAR_0}^p = \tilde{\emptyset}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar destek cümleleri

$$\text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^p) = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq \sqrt[p-1]{2}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 5.2.1. Lemma 5.2.2.'ye göre, bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar destek cümlelerinin sınırlarını belirlemek için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

- i. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^2)$ için $|c| \leq 2$,
- ii. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^3)$ için $|c| \leq \sqrt{2} \cong 1.41$,
- iii. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^4)$ için $|c| \leq \sqrt[3]{2} \cong 1.25$,
- iv. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^5)$ için $|c| \leq \sqrt[4]{2} \cong 1.18$,
- v. Her $c \in \text{supp}(\tilde{M}_{BAR}^6)$ için $|c| \leq \sqrt[5]{2} \cong 1.14$.

Örnek 5.2.1. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(3,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(3,i)}^1(0) &= \overline{0}^3 + i = i \\ f_{(3,i)}^2(0) &= \overline{i}^3 + i = 2i \\ f_{(3,i)}^3(0) &= \overline{2i}^3 + i = 9i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 2i, 9i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımında $|f_{(3,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt{2}$ ve $|f_{(3,i)}^2(0)| = |2i| = 2 > \sqrt{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.2.2. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{(4,i)}^0(0) &= 0 \\ f_{(4,i)}^1(0) &= \overline{0}^4 + i = i \\ f_{(4,i)}^2(0) &= \overline{i}^4 + i = 1 + i \\ f_{(4,i)}^3(0) &= \left(\overline{1+i} \right)^4 + i = -4 + i \\ f_{(4,i)}^4(0) &= \left(\overline{-4+i} \right)^4 + i = 161 + 241i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 1+i, -4+i, 161+241i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımında $|f_{(4,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[3]{2}$ ve $|f_{(4,i)}^2(0)| = |1+i| = \sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.2.3. $p = 5$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(5,i)}^0(0) &= 0 \\
f_{(5,i)}^1(0) &= \bar{0}^5 + i = i \\
f_{(5,i)}^2(0) &= \bar{i}^5 + i = 0 \\
f_{(5,i)}^3(0) &= \bar{0}^5 + i = i \\
f_{(5,i)}^4(0) &= \bar{i}^5 + i = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\{0, i, 0, i, 0, \dots\}$ iterasyon dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \leq \sqrt[4]{2} \text{ sağlanır. Böylece üyelik derecesi } \mu(i) = 1 \text{ bulunur. Yani, } (i, 1) \in \tilde{M}_{BAR}^5$$

elde edilir.

Örnek 5.2.4. $p = 6$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = i$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(6,i)}^0(0) &= 0 \\
f_{(6,i)}^1(0) &= \bar{0}^6 + i = i \\
f_{(6,i)}^2(0) &= \bar{i}^6 + i = -1 + i \\
f_{(6,i)}^3(0) &= \left(\overline{-1 + i} \right)^6 + i = 3i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\{0, i, -1 + i, 3i, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$

iterasyon adımında $\left| f_{(6,i)}^1(0) \right| = |i| = 1 \leq \sqrt[5]{2}$ ve $\left| f_{(6,i)}^2(i) \right| = |-1 + i| = \sqrt{2} > \sqrt[5]{2}$ şartlarını

sağlar. Böylece $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

Sonuç 5.2.2. $c = i$ karmaşık sayısının $p > 2$ durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i. Eğer $p = 4m$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |1+i| = \sqrt{2} > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

ii. Eğer $p = 4m+1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği sağlandığından dolayı $\mu(i) = 1$ üyelik derecesine sahiptir.

iii. Eğer $p = 4m+2$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |-1+i| = \sqrt{2} > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$ üyelik derecesine sahiptir.

iv. Eğer $p = 4m+3$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,i)}^1(0)| = |i| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |2i| = 2 > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Dolayısıyla $c = i$ noktasının üyelik fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Yani her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mu(i) = \begin{cases} 0.7 & , p = 4m+2 \\ 0.5 & , p = 4m+3 \\ 0.7 & , p = 4m+4 \\ 1 & , p = 4m+5 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 5.2.5. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0+0i$ ve $c = 0.5$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(3,0.5)}^0(0) &= 0 \\
f_{(3,0.5)}^1(0) &= \overline{0}^3 + 0.5 = 0.500 \\
f_{(3,0.5)}^2(0) &= (\overline{0.5})^3 + 0.5 = 0.625 \\
f_{(3,0.5)}^3(0) &= (\overline{0.625})^3 + 0.5 \cong 0.744 \\
f_{(3,0.5)}^4(0) &= (\overline{0.744})^3 + 0.5 \cong 0.912 \\
f_{(3,0.5)}^5(0) &= (\overline{0.912})^3 + 0.5 \cong 1.258 \\
f_{(3,0.5)}^6(0) &= (\overline{1.258})^3 + 0.5 \cong 2.494 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan $\{0, 0.500, 0.625, 0.744, 0.912, 1.258, 2.494, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 6$ iterasyon adımında $|f_{(3,0.5)}^5(0)| \cong 1.258 \leq \sqrt{2}$ ve $|f_{(3,0.5)}^6(0)| \cong 2.494 > \sqrt{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(0.5) = \frac{1.258}{2.494} \cong 0.504$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.2.6. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = 0.5$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(4,0.5)}^0(0) &= 0 \\
f_{(4,0.5)}^1(0) &= \overline{0}^4 + 0.5 = 0.5000 \\
f_{(4,0.5)}^2(0) &= (\overline{0.5})^4 + 0.5 = 0.5625 \\
f_{(4,0.5)}^3(0) &= (\overline{0.5625})^4 + 0.5 \cong 0.6001 \\
f_{(4,0.5)}^4(0) &= (\overline{0.6001})^4 + 0.5 \cong 0.6296 \\
f_{(4,0.5)}^5(0) &= (\overline{0.6296})^4 + 0.5 \cong 0.6572 \\
f_{(4,0.5)}^6(0) &= (\overline{0.6572})^4 + 0.5 \cong 0.6865 \\
f_{(4,0.5)}^7(0) &= (\overline{0.6865})^4 + 0.5 \cong 0.7222 \\
f_{(4,0.5)}^8(0) &= (\overline{0.7222})^4 + 0.5 \cong 0.7720 \\
f_{(4,0.5)}^9(0) &= (\overline{0.7720})^4 + 0.5 \cong 0.8552 \\
f_{(4,0.5)}^{10}(0) &= (\overline{0.8552})^4 + 0.5 \cong 1.0351 \\
f_{(4,0.5)}^{11}(0) &= (\overline{1.0351})^4 + 0.5 \cong 1.6481 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağılı olarak ortaya çıkan

$$\{0, 0.5, 0.5625, 0.6001, 0.6296, 0.6572, 0.6865, 0.7222, 0.7720, 0.8552, 1.0351, 1.6481, \dots\}$$

iterasyon dizisi $k = 11$ iterasyon adımında $\left|f_{(4,0.5)}^{10}(0)\right| \cong 1.0351 \leq \sqrt[3]{2}$ ve

$\left|f_{(4,0.5)}^{11}(0)\right| \cong 1.6481 > \sqrt[3]{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(0.5) = \frac{1.0351}{1.6481} \cong 0.6281$ üyelik

derecesine sahiptir.

Örnek 5.2.7. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)}\right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = -1$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(3,-1)}^0(0) &= 0 \\
f_{(3,-1)}^1(0) &= \bar{0}^3 + (-1) = -1 \\
f_{(3,-1)}^2(0) &= (\bar{-1})^3 + (-1) = -2 \\
f_{(3,-1)}^3(0) &= (\bar{-2})^3 + (-1) = -9 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\{0, 0, -1, -2, -9, \dots\}$ iterasyon dizisi $k = 2$ iterasyon adımında $|f_{(3,-1)}^1(0)| = |-1| = 1 \leq \sqrt{2}$ ve $|f_{(3,-1)}^2(-1)| = |-2| = 2 > \sqrt{2}$ şartlarını sağlar. Böylece $\mu(-1) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Örnek 5.2.8. $p = 4$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = -1$ seçelim.

$$\begin{aligned}
f_{(4,-1)}^0(0) &= 0 \\
f_{(4,-1)}^1(0) &= \bar{0}^4 + (-1) = -1 \\
f_{(4,-1)}^2(0) &= (\bar{-1})^4 + (-1) = 0 \\
f_{(4,-1)}^3(0) &= \bar{0}^4 + (-1) = -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\{0, -1, 0, -1, \dots\}$ iterasyon dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(4,-1)}^n(0)| \leq \sqrt[3]{2}$ sağlanır. Böylece üyelik derecesi $\mu(-1) = 1$ bulunur. Yani, $(-1, 1) \in \tilde{M}_{BAR}^3$ elde edilir.

Sonuç 5.2.3. $c = -1$ karmaşık sayısının $p \geq 2$ durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerindeki üyelik dereceleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i. Eğer $p = 2m$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_{(p,c)}^n(0)| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği sağlandığından dolayı $\mu(-1) = 1$ üyelik derecesine sahiptir.

ii. Eğer $p = 2m + 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise $|f_{(p,-1)}^1(0)| = |-1| = 1 \leq \sqrt[p-1]{2}$ ve $|f_{(p,i)}^2(0)| = |-2| = 2 > \sqrt[p-1]{2}$ eşitsizlikleri sağlandığından dolayı $\mu(i) = \frac{1}{2} = 0.5$ üyelik derecesine sahiptir.

Dolayısıyla $c = -1$ noktasının üyelik fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mu(-1) = \begin{cases} 1 & , p = 2n \\ 0.5 & , p = 2n + 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Son olarak, tamamıyla sanal veya gerçekte olmayan bir karmaşık sayı için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.2.9. $p = 3$ olmak üzere $f_{(p,c)}^k(z) = \left[\overline{f_{(p,c)}^{k-1}(z)} \right]^p + c$ iterasyon fonksiyonu ile

birlikte $z = 0 + 0i$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ seçelim.

$$\begin{aligned} f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^1(0) &= \overline{0}^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^2(0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 0 \\ f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^3(0) &= \overline{0}^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^4(0) = \left(\overline{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\vdots$$

Bu duruma bağlı olarak ortaya çıkan $\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \dots\right\}$ iterasyon

dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|f_{\left(3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^n(0)\right| \leq \sqrt{2}$ eşitsizliği sağlandığından dolayı

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 \text{ üyelik derecesine sahiptir.}$$

Ayrıca geliştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesinin noktalarının üyelik dereceleri aşağıda geliştirilen algoritma yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

Algoritma: Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi üyelik derecesi algoritması

Input	:	$c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
Data	:	$z_0 = 0 + i0$
Output	:	$\mu(c)$
1	:	for $1 \leftarrow k$ to n do
2	:	$z_k = \overline{z_{k-1}}^p + c$
3	:	if $ z_k \leq 2$
4	:	$\mu(c) = 1$
5	:	else if $ z_k > 2$ and $ z_{k-1} \leq 2$
6	:	$\mu(c) = z_{k-1} / z_k $
7	:	end
8	:	end
9	:	end

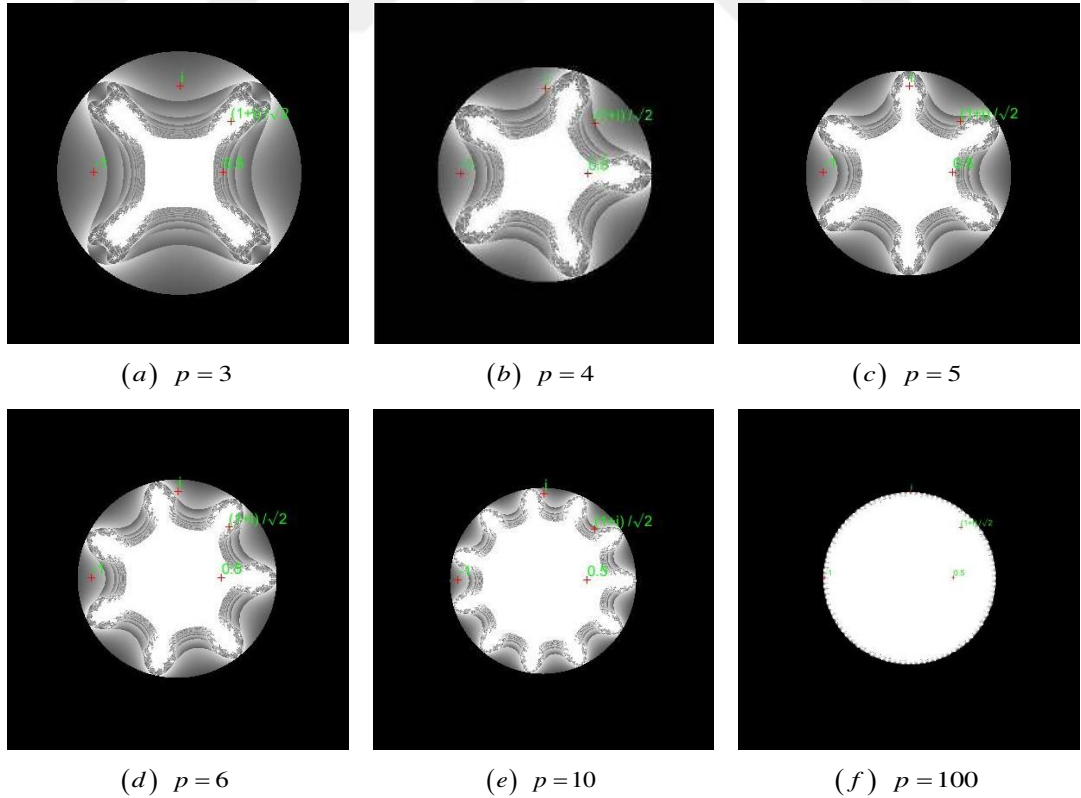
Şekil 5.17. Verilen bir c karmaşık sayısının genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesine üyelik derecesi algoritması

Bu örnekler aynı algoritma ile devam ettirilebilir. Yukarıda yapmış olduğumuz işlemlere ortak bir pencereden bütün olarak bakılırsa, çeşitli derecelerdeki genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerindeki bazı seçilmiş karmaşık sayılar için aşağıdaki üyelik dereceleri açıkça görülür.

Tablo 5.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesindeki bazı karmaşık c noktalarının üyelik dereceleri

	$\tilde{M}_{BAR}^3$	$\tilde{M}_{BAR}^4$	$\tilde{M}_{BAR}^5$	$\tilde{M}_{BAR}^6$	$\tilde{M}_{BAR}^{10}$	$\tilde{M}_{BAR}^{100}$
$\mu(i)$	0.5	0.7071	1	0.7071	0.7071	0.7071
$\mu(-1)$	0.5	1	0.5	1	1	1
$\mu(0.5)$	0.5046	0.6281	1	1	1	1
$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$	0.5046	0.6281	1	1	1	1

Şimdi sonlu yineleme sayısı $n = 30$ olacak şekilde verilen p dereceden bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin gri ölçekli grafiklerinde bu noktaların tam konumlarını gösterelim.



Şekil 5.18. $n = 30$ yineleme adımı için bazı genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin gri ölçekli grafikleri üzerindeki bazı noktalar

Buradaki fuzzy cümlelerin gri ölçekli grafiklerinde, daha parlak piksellere karşılık gelen karmaşık sayılar daha yüksek üyelik derecesine sahiptir.

Diğer bir taraftan, genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlesi birbirinden farklı iki simetri özelliğine sahiptir.

Teorem 5.2.1. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlesi reel eksene göre simetriktr.

İspat. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlesi, μ üyelik fonksiyonuna bağlıdır. O halde $\mu(c)=1$ ise $\mu(\bar{c})=1$ olduğundan $\mu(c)=\mu(\bar{c})$ elde edilir. Ayrıca $\mu(c) \neq 1$ olması durumunda genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlesi tanımına göre

$$\mu(c) = \left| \frac{f_{(p,c)}^{k-1}(0)}{f_{(p,c)}^k(0)} \right| = \left| \frac{f_{(p,\bar{c})}^{k-1}(0)}{f_{(p,\bar{c})}^k(0)} \right| = \mu(\bar{c})$$

olduğu görülür. Şu halde her $c \in \mathbb{C}$ için $\mu(c)=\mu(\bar{c})$ bulunduğundan ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlelerinin bu simetri özelliği p derecesinden bağımsız olmasına rağmen, $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümleleri p derecelerinin farklılığının etkili olduğu bir diğer simetri özelliğine sahiptir. Bu durumun gösterilmesi aşamasında her bir iterasyon adımı için yineleme fonksiyonları birbirinden farklı olmasından dolayı ayrı ayrı kanıtlanmaları gerekir.

Teorem 5.2.2. Genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlesi $(p+1)$ -kat dönme simetrisine sahiptir. Diğer bir deyişle, herhangi p derecesine sahip $\tilde{M}_{BAR}^p$ cümlesi orijin etrafında $\frac{2\pi}{p+1}$ radyan açısıyla dönme simetrisine sahiptir.

İspat. Herhangi bir $c \in \mathbb{C}$ noktasının $\frac{2\pi}{p+1}$ radyan açısıyla döndürülmesi sonucunda üyelik derecesinin değişmez kaldığı gösterilirse ispat tamamlanır. Bu yüzden, μ üyelik fonksiyonu olmak üzere herhangi $w = e^{2\pi i/(p+1)}$ karmaşık sayısı için $\mu(w \cdot c) = \mu(c)$ olduğunu ispatlayalım. O halde, k iterasyon sayısı olmak üzere yineleme fonksiyonu yardımıyla tümevarım uygulayalım. Ancak, tümevarım adımlarına başlamadan önce aşağıdaki eşitliği görelim.

$$\begin{aligned} w^{p+1} &= 1 \\ w^p \cdot w &= 1 \\ \bar{w}^p \cdot w^p \cdot w &= \bar{w}^p \\ |w|^{2p} \cdot w &= \bar{w}^p, \quad (|w|^{2p} = 1) \\ w &= \bar{w}^p. \end{aligned}$$

i. İlk iterasyon adımı $k = 1$ durumunda,

$$f_{(p,wc)}^1(0) = w \cdot c \text{ ve } f_{(p,c)}^1(0) = c$$

olduğundan

$$f_{(p,wc)}^1(0) = w \cdot f_{(p,c)}^1(0)$$

bulunur.

ii. İkinci iterasyon adımı $k = 2$ durumunda,

$$f_{(p,wc)}^2(0) = (\overline{w \cdot c})^p + w \cdot c = \bar{w}^p \cdot \bar{c}^p + w \cdot c = w \cdot \bar{c}^p + w \cdot c = w \cdot (\bar{c}^p + c),$$

$$f_{(p,c)}^2(0) = \overline{c}^p + c$$

olduğundan

$$f_{(p,w \cdot c)}^2(0) = w \cdot f_{(p,c)}^2(0)$$

bulunur.

iii. Üçüncü iterasyon adımı $k = 3$ durumunda,

$$\begin{aligned} f_{(p,w \cdot c)}^3(0) &= \left(\overline{\left(\overline{w \cdot c} \right)^p + w \cdot c} \right)^p + w \cdot c \\ &= \left(\overline{\overline{w}^p \cdot \overline{c}^p} + \overline{w \cdot c} \right)^p + w \cdot c \\ &= \left(\overline{w \cdot \overline{c}^p} + \overline{w \cdot c} \right)^p + w \cdot c \\ &= \left(\overline{w} \cdot \overline{c}^p + \overline{w} \cdot \overline{c} \right)^p + w \cdot c \\ &= \overline{w}^p \cdot \left(\overline{c}^p + \overline{c} \right)^p + w \cdot c \\ &= w \cdot \left(c^p + \overline{c} \right)^p + w \cdot c \\ &= w \cdot \left(\left(c^p + \overline{c} \right)^p + c \right) \\ &= w \cdot \left(\overline{\overline{c}^p + c} \right)^p + c \end{aligned}$$

$$f_{(p,c)}^3(0) = \left(\overline{\overline{c}^p + c} \right)^p + c$$

olduğundan

$$f_{(p,w \cdot c)}^3(0) = w \cdot f_{(p,c)}^3(0)$$

bulunur.

iv. $(n-1)$ 'inci iterasyon adımı $k = n-1$ durumunda,

$$f_{(p,w \cdot c)}^{n-1}(0) = w \cdot f_{(p,c)}^{n-1}(0)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

v. n 'inci iterasyon adımı $k = n$ durumunda, $f_{(p,w \cdot c)}^n(0) = \left[\overline{f_{(p,w \cdot c)}^{n-1}(0)} \right]^p + w \cdot c$ iterasyon fonksiyonu özelliğine göre

$$\begin{aligned} f_{(p,w \cdot c)}^n(0) &= \left[\overline{w \cdot f_{(p,c)}^{n-1}(0)} \right]^p + w \cdot c \\ &= \bar{w}^p \cdot \left[\overline{f_{(p,c)}^{n-1}(0)} \right]^p + w \cdot c \\ &= w \cdot \left[\overline{f_{(p,c)}^{n-1}(0)} \right]^p + w \cdot c \\ &= w \cdot \left(\left[\overline{f_{(p,c)}^{n-1}(0)} \right]^p + c \right) \\ &= w \cdot f_{(p,c)}^n(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $f_{(p,w \cdot c)}^n(0) = w \cdot f_{(p,c)}^n(0)$ iterasyon adımının her bir $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığı görülür öyle ki bu durumda tümevarım adımları tamamlanır.

Dahası

$$\begin{aligned} \left| f_{(p,w \cdot c)}^n(0) \right| &= \left| w \cdot f_{(p,c)}^n(0) \right| \\ &= |w| \cdot \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \\ &= \left| e^{2\pi i l(p+1)} \right| \cdot \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca $|w| = \left| e^{2\pi i l(p+1)} \right| = 1$ olduğundan

$$\left| f_{(p,wc)}^n(0) \right| = \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \quad (5.2)$$

elde edilir. Bu durum üyelik fonksiyonunu tespit etmek için yeterlidir.

Öncelikle, $\mu(c)=1$ olduğunu varsayalım. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \leq {}^{p-1}\sqrt{2}$ eşitsizliği sağlanır. (5.2) denkleminde göre $\left| f_{(p,wc)}^n(0) \right| = \left| f_{(p,c)}^n(0) \right| \leq {}^{p-1}\sqrt{2}$ var olduğundan $\mu(w \cdot c)=1$ elde edilir. Böylece $\mu(w \cdot c)=\mu(c)$ eşitliği sağlanır.

İkinci olarak, $\mu(c) \neq 1$ olduğunu varsayalım. O halde, (5.2) denkleminde göre her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\mu(w \cdot c) = \frac{\left| f_{(p,wc)}^{k-1}(0) \right|}{\left| f_{(p,wc)}^k(0) \right|} = \frac{\left| f_{(p,c)}^{k-1}(0) \right|}{\left| f_{(p,c)}^k(0) \right|} = \mu(c)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen orijinal bulgu ve sonuçlar Bölüm 4 ve Bölüm 5'te verilmiştir.

Bölüm 2'de tanıtılmış olan Mandelbrot cümlesi ile özellikleri ve Bölüm 3'te tanıtılmış olan fuzzy cümle teorisi göz önüne alınarak Bölüm 4'te fuzzy Mandelbrot cümlesi tanımlanmış, geometrik ve topolojik açıdan incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde fuzzy Mandelbar cümlesi tanımlanarak fuzzy Mandelbrot cümlesi ile olan benzerlikleri ve farklılıkları araştırılmıştır. Bu araştırma sonucu elde edilen lemma ve teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Fuzzy Mandelbrot ve Mandelbar cümlelerine ait algoritmalar verilerek ilgili cümlelerin grafiksel yapıları ortaya konulmuştur.

Bölüm 5'te ise bir önceki bölümde ayrıntılı olarak incelenen fuzzy cümlelerin genelleştirilmeleri yapılmıştır. Bu genelleştirmeler, fuzzy Mandelbrot ve fuzzy Mandelbar cümlelerinin tanımında kullanılan kuadratik yineleme fonksiyonunun kuvvetinin genelleştirmesi yoluyla yapılmıştır. Doğal olarak ortaya çıkan topolojik ve geometrik durumlar, ilgili lemma ve teoremler ifade ve ispat edilerek incelenmiştir.

Bu çalışmada tanımlanan fuzzy Mandelbrot, fuzzy Mandelbar, genelleştirilmiş fuzzy Mandelbrot cümleleri ve genelleştirilmiş fuzzy Mandelbar cümlelerinin tanım cümlesi olan karmaşık sayılar cümlesi yerine bikompleks sayılar veya kuaterniyonlar cümleleri seçilerek yüksek boyutlu uzaylarda ileri çalışmalar yapılabilir. Böylece bu çalışmada elde edilen orijinal bulgu ve sonuçlar yüksek boyutlu uzaylarda tanımlı olan genelleştirilmiş Mandelbrot cümleleri fuzzy yaklaşımla ele alınarak araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A., Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353, 1965a.
- [2] Zadeh, L. A., Fuzzy sets and systems. Polytechnic Press of Polytechnic Inst. Of Brooklyn, New York, 29–37, 1965b.
- [3] Zadeh, L. A., Fuzzy algorithms. *Information and Control*, 12, 94–102, 1968.
- [4] Zadeh, L. A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. I. *Information Sci.*, 8, 199–249, 1975.
- [5] Zadeh, L. A., From computing with numbers to computing with words from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. Darlington memorial issue. *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, 46(1), 105–119, 1999.
- [6] Yager, R. R., Ovchinnikov, S., Tong, R. M., Nguyen, H. T., Fuzzy sets and applications. Wiley-Interscience, 1987.
- [7] Běhounek, L., Cintula, P., Fuzzy class theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(1), 34–55, 2005.
- [8] Kandel, A., Fuzzy mathematical techniques with applications. With a foreword by Ronald R. Yager. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, xiv+274, 1986.
- [9] Kosko, B., Isaka, S., Fuzzy logic. *Scientific American*, 269(1), 76-81, 1993.
- [10] Tamir, D. E., Cao, Z. Q., Kandel, A., Mott, J. L., An axiomatic approach to fuzzy set theory. *Inform. Sci.*, 52(1), 75–83, 1990.
- [11] Tamir, D. E., Kandel, A., Axiomatic theory of complex fuzzy logic and complex fuzzy classes. *International Journal of Computers Communications & Control*, 6(3), 562-576, 2011.
- [12] Tamir, D. E., Lu, J., Kandel, A., A new interpretation of complex membership grade. *International Journal of Intelligent Systems*, 26(4), 285-312, 2011.
- [13] Mizumoto, M., Tanaka, K., Some properties of fuzzy sets of type 2. *Information and Control*, 31(4), 312–340, 1976.

- [14] Dubois, D., Prade, H., Operations on fuzzy numbers. *Internat. J. Systems Sci.*, 9(6), 613–626, 1978.
- [15] Dubois, D., Prade, H., Fuzzy sets and systems. Theory and applications. With a foreword by Lotfi A. Zadeh. *Mathematics in Science and Engineering*, 144, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, xvii+393, 1980.
- [16] Nguyen, H. T., A note on the extension principle for fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 64(2), 369–380, 1978.
- [17] Gähler, S., Gähler, W., Fuzzy real numbers. Diagnostics and control through neural interpretations of fuzzy sets (Mariehamn, 1993). *Fuzzy Sets and Systems*, 66(2), 137–158, 1994.
- [18] Eklund, P., Gähler, W., Basic notions for fuzzy topology. I. *Fuzzy Sets and Systems*, 26(3), 333–356, 1988a.
- [19] Eklund, P., Gähler, W., Basic notions for fuzzy topology. II. *Fuzzy Sets and Systems* 27(2), 171–195, 1988b.
- [20] Goetschel, R. Jr., Voxman, W., Topological properties of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 10(1), 87–99, 1983.
- [21] Goetschel, R. Jr., Voxman, W., Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(1), 31–43, 1986.
- [22] Buckley, J. J., Fuzzy complex numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 33(3), 333–345, 1989.
- [23] Cabrelli, C. A., Forte, B., Molter, U. M., Vrscay, E. R., Iterated fuzzy set systems: A new approach to the inverse problem for fractals and other sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 171(1), 79-100, 1992.
- [24] Goguen, J. A., L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 18, 145–174, 1967.
- [25] Brown, J. G., A note on fuzzy sets. *Information and Control*, 18(1), 32-39, 1971.
- [26] De Luca, A., Termini, S., On the convergence of entropy measures of a fuzzy set. *Kybernetes*, 6(3), 219-227, 1977.
- [27] Drago, I., Fuzzy interpretation of the Mandelbrot set drawing. *Fuzzy Sets and Systems*, 37(1), 117-122, 1990.
- [28] Julian, P., Charles, H., Computer arithmetic. *Chaos and Fractals, Physica D: Nonlinear Phenomena*, 42(1–3), 99-110, 1990.

- [29] Witold, P., Andrzej, B., Fuzzy fractal dimensions and fuzzy modeling. Information Sciences, 153, 199-216, 2003.
- [30] Devaney, R. L., An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, xviii+336, 1989.
- [31] Fatou, P., Sur les substitutions rationnelles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 164, 806-808, 1917.
- [32] Fatou, P., Sur les équations fonctionnelles. Bull. Soc. Math. France, 47, 161–271, 1919.
- [33] Julia, G., Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. J. Math. Pures Appl., 8, 47-245, 1918.
- [34] Douady, A., Hubbard, J. H., Itération des polynômes quadratiques complexes. [Iteration of complex quadratic polynomials]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 294(3), 123–126, 1982.
- [35] Douady, A., Hubbard, J. H., Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I. [Dynamical study of complex polynomials. Part I] Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay], 84-2. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 75, 1984.
- [36] Douady, A., Hubbard, J. H., Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II. [Dynamical study of complex polynomials. Part II] With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac. Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay], 85-4. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, v+154, 1985.
- [37] Hubbard, J. H., Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), Publish or Perish, Houston, TX, 467–511, 1993.
- [38] Lyubich, M. Y., Some typical properties of the dynamics of rational mappings. Uspekhi Mat. Nauk, 38(5)(233), 197–198, 1983.
- [39] Lyubich, M. Y., Investigation of the stability of the dynamics of rational functions. (Translated in Selecta Math. Soviet. 9(1), 69–90, 1990) Teor. Funktsii Funktsional. Anal. I Prilozhen., 42, 72–91, 1984.
- [40] McMullen, C. T., Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension. Amer. J. Math., 120(4), 691–721, 1998.
- [41] Milnor, J., Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, viii+257, 1999.

- [42] Shishikura, M., The boundary of the Mandelbrot set has Hausdorff dimension two. *Complex analytic methods in dynamical systems* (Rio de Janeiro, 1992). 222(7), 389–405, 1994.
- [43] Shishikura, M., Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), 1(2), 886–895, 1995.
- [44] Shishikura, M., The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. Of Math.*, 147(2), 225–267, 1998.
- [45] Barnsley, M. F., *Fractals everywhere*. Second edition. Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III. Academic Press Professional, Boston, MA, xiv+534, 1993.
- [46] Devaney, R. L., *A first course in chaotic dynamical systems. Theory and experiment*. With a separately available computer disk. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, xiv+302, 1992.
- [47] Falconer, K., *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, xxii+288, 1990.
- [48] Gujar, U. G., Bhavsar, V. C., *Fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex c -plane*. School of Computer Science University of New Brunswick Fredericton, N. B. Canada, 1988.
- [49] Gujar, U. G., Bhavsar, V. C., Nagarjuna, V., *Fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex z -plane*. Faculty of Computer Science University of New Brunswick Fredericton, N. B. Canada, 1990.
- [50] Gujar, U. G., Bhavsar, V. C., *Fractals from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex c -plane*. *Computers & Graphics*, 15(3), 441-449, 1991.
- [51] Gulick, D., *Encounters with chaos and fractals*. Second edition. CRC Press, Boca Raton, FL, xvi+371, 2012.
- [52] Hutchinson, J. E., *Fractals and self-similarity*. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5), 713–747, 1981.
- [53] Lakhtakia, A., Varadan, V. V., Messier, R., Varadan, V. K., *On the symmetries of the Julia sets for the process $z \rightarrow z^p + c$* . *J. Phys. A*, 20(11), 3533–3535, 1987.
- [54] Mandelbrot, B. B., *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., v+460, 1982.

- [55] Mañé, R., Sad, P., Sullivan, D., On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 16(2), 193–217, 1983.
- [56] Papathomas, T. V., Julesz, B., Animation with fractals from variations on the Mandelbrot set. *The Visual Computer*, 3(1), 23-26, 1987.
- [57] Parisé, P. O., Rochon, D., A study of dynamics of the tricomplex polynomial $\eta^p + c$, *Nonlinear Dynam.*, 82(1-2), 157–171, 2015.
- [58] Pu, P. M., Liu, Y. M., Fuzzy topology. I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 76(2), 571–599, 1980.
- [59] Rochon, D., A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4), 355–368, 2000.
- [60] Crowe, W. D., Hasson, R., Rippon, P. J., Strain-Clark, P. E. D., On the structure of the Mandelbar set. *Nonlinearity*, 2(4), 541–553, 1989.
- [61] Winters, R., Bifurcations in families of antiholomorphic and biquadratic maps. Boston University, 53 pp., Thesis (Ph.D.), 1990.
- [62] Lavaurs, P., Systemes dynamiques holomorphes: explosion de points périodiques paraboliques. Paris 11, Thesis (Ph.D.), 1989.
- [63] Milnor, J., Remarks on iterated cubic maps. *Experiment. Math.*, 1(1), 5–24, 1992.
- [64] Nakane, S., Connectedness of the tricorn. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 13(2), 349–356, 1993.
- [65] Nakane, S., Schleicher, D., Non-local connectivity of the tricorn and multicorns. *Dynamical systems and chaos*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1 (Hachioji, 1994), 200–203, 1995.
- [66] Huang, Y. N., Global analysis of the Mandelbrot set and the general Mandelbrot set. *China Science (A)*, 8, 823-830, 1991.
- [67] Dhurandhar, S. V., Bhavsar, V. C., Gujar, U. G., Analysis of z –plane fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ for $\alpha < 0$. *Computers & Graphics*, 17(1), 89-94, 1993.
- [68] Shirriff, K. W., An investigation of fractals generated by $z \rightarrow 1/z^n + c$. *Computers & graphics*, 17(5), 603-607, 1993.
- [69] Rhee, N. H., Rhee, N. C., The radius of the n –Mandelbrot set. *Appl. Math. Lett.*, 21(8), 877–879, 2008.

- [70] Xing-yuan, W., Xu, Z., The divisor periodic point of escape-time N of the Mandelbrot set. *Appl. Math. Comput.*, 187(2), 1552–1556, 2007.
- [71] Andreadis, I., Karakasidis, T. E., On numerical approximations of the area of the generalized Mandelbrot sets. *Appl. Math. Comput.*, 219(23), 10974–10982, 2013.
- [72] Singh, S. L., Mishra, S. N., Sinkala, W., A new iterative approach to fractal models. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17(2), 521–529, 2012.
- [73] Conway, J. B., Functions of one complex variable. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, xiii+317, 1978.
- [74] Crownover, R. M., Introduction to fractals and chaos. Jones & Bartlett Pub, 1995.
- [75] Branner, B., The Mandelbrot set. *Chaos and fractals* (Providence, RI, 1988), 75–105, *Proc. Sympos. Appl. Math.*, 39, AMS Short Course Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1989.
- [76] Hepting, D. H., Approximation and visualization of sets defined by iterated function systems. Thesis (Ph.D.), 1991.
- [77] Bourke, P., Julia Set Fractal (2D), 2001. [Http://paulbourke.net/fractals/juliaset/](http://paulbourke.net/fractals/juliaset/), Erişim Tarihi: 11.02.2022.
- [78] Pražák, D., The Mandelbrot set. International Conference "Jubilees of the Departments of Mathematics TUL 2000", Liberec, 2000.
- [79] Kahn, J., The Mandelbrot set is connected. Department of Mathematics Brown University, [Http://www.math.brown.edu/jk17/mconn.pdf](http://www.math.brown.edu/jk17/mconn.pdf), Erişim Tarihi: 07.12.2021.
- [80] Carleson, L., Gamelin, T. W., Complex dynamics. Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, x+175, 1993.
- [81] Riedl, J., Arcs in Multibrot sets, locally connected Julia sets and their construction by quasiconformal surgery, Technische Universität München, Zentrum Mathematik, Thesis (Ph.D.), 2001.
- [82] Xing-yuan, W., Wen-jing, S., The generalized M-J sets for bicomplex numbers. *Nonlinear Dynam.*, 72(1-2), 17–26, 2013.
- [83] Avila, A., Kahn, J., Lyubich, M., Shen, W., Combinatorial rigidity for unicritical polynomials. *Ann. of Math.*, 170(2), 783–797, 2009.
- [84] Baribeau, L., Ransford, T., Cross-sections of multibrot sets. *J. Anal.*, 24(1), 95–101, 2016.

- [85] Bridy, A., Pérez, R. A., A count of maximal small copies in multibrot sets. *Nonlinearity*, 18(5), 1945–1953, 2005.
- [86] Schleicher, D., On fibers and local connectivity of compact sets in $\mathbb{C}$. arXiv preprint math/9902154, 1999.
- [87] Dominik, E., Sabyasachi, M., Schleicher, D., Rational parameter rays of the multibrot sets. *Dynamical systems, number theory and applications*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 49–84, 2016.
- [88] Lau, E., Schleicher, D. E., Symmetries of fractals revisited. *Math. Intelligencer*, 18(2), 53, 1996.
- [89] Alexander, C., Giblin, I., Newton, D., Symmetry groups of fractals. *The Mathematical Intelligencer*, 14(2), 32-38, 1992.
- [90] Diamond, P., Kloeden, P., Metric spaces of fuzzy sets. Theory and applications. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, x+178, 1994.
- [91] Buckley, J. J., Fuzzy complex numbers. *Proceedings of ISFK, Guangzhou, China*, 597 –700, 1987.
- [92] Chang, C. L., Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 24, 182–190, 1968.
- [93] İnce, İ., Ersoy, S. Fuzzy Mandelbrot set. Submitted.
- [94] İnce, İ., Ersoy, S., Fuzzy Mandelbrot sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 435, 78–88, 2022.
- [95] İnce, İ., Ersoy, S. Generalized Fuzzy Mandelbrot and Mandelbar Sets. Submitted.
- [96] Gamelin, T. W., Complex analysis. *Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, xviii+478, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İbrahim İNCE

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Doktora	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Anabilim Dalı / Topoloji Bilim Dalı	Devam ediyor
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Anabilim Dalı / Topoloji Bilim Dalı	2016
Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü	2013
Lise	Eskişehir Muzaffer Çil Anadolu Lisesi	2008

ESERLER

1. İnce, İ., Ersoy, S., Fuzzy Mandelbrot sets. Fuzzy Sets and Systems, 435, 78–88, 2022.
2. İnce, İ., Ersoy, S., On sequential topological groups. J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math., 25(4), 243–252, 2018.
3. Ersoy, S., İnce, İ., Bilgin, M., Strongly k-spaces. Bull. Iranian Math. Soc., 43(3), 727–734, 2017.
4. Ersoy, S., Bilgin, M., İnce, İ., Generalized open sets of Minkowski space. Math. Morav., 19(1), 49–56, 2015.