

**GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ
KARAKTERİZASYONU**

Emrah KILIÇ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Emrah KILIÇ tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ KARAKTERİZASYONU adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Üye : Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Üye : Prof. Dr. Erdoğan ESİN

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Tarih : 08/09/2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emrah KILIÇ

GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARINININ**KARAKTERİZASYONU****(Doktora Tezi)****Emrah KILIÇ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Eylöl 2006****ÖZET**

Bu çalışmada Pell sayılarından hareketle genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları tanımlandı ve bu tanımdan yararlanılarak genelleştirilmiş Pell sayıları için üreteç matrisi elde edildi. Ayrıca Matris yöntemleri kullanılarak genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının toplamaları için bir yöntem verildi. Pell sayıları için iyi bilinen Binet formülü genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için elde edildi. Son olarak genelleştirilmiş Pell sayılarının üreteç fonksiyonu, üstel fonksiyon gösterimi ve kombinatoryal gösterimleri karakterize edildi.

Bilim Kodu : 204.1.025**Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayısı
genelleştirilmiş Binet formülü, üreteç fonksiyonu****Sayfa Adedi : 47****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI**

CHARACTERIZATION OF GENERALIZED ORDER- k PELL NUMBERS
(Ph.D. Thesis)

Emrah KILIÇ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 2006

ABSTRACT

In this study, using the Pell numbers, the generalized order- k Pell numbers were defined and using this definition, the generating matrix for the generalized order- k Pell numbers was obtained. Also a method for the sums of the generalized order- k Pell numbers by matrix methods was given. The generalized Binet Formula for the generalized Pell numbers given for the well known Binet formula for the usual Pell numbers was obtained. Finally, the generating function, exponential and combinatorial representations of the generalized order- k Pell numbers were characterized.

Science Code : 204.1.025

**Key Words : Generalized order- k Pell number, matrix methods,
generalized Binet formula, generating function**

Page Number: 47

Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI 'ya ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARI	17
2.1. Genelleştirilmiş k -Basamak Pell Sayılarının Tanımı ve Üreteç Matrisi	17
2.2. Genelleştirilmiş Pell Sayılarını İçeren Bazı Bağıntılar	21
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ BİNET FORMÜLÜ	24
3.1. Genelleştirilmiş k -Basamak Pell Matrisinin Özdeğerleri	24
3.2. Genelleştirilmiş Binet Formülü	27
4. MATRİS YÖNTEMLERİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYILARININ TOPLAMLARI	32
4.1. Genelleştirilmiş Pell Sayılarının Toplamları için Üreteç Matrisi	32
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONU VE KOMBİNATORİYAL GÖSTERİMİ	37
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simge ve kısaltmaların açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
L_n	n . ci Lucas sayısı
F_n	n . ci Fibonacci sayısı
$\{u_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{v_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\det A$	A matrisinin determinanı
$\text{per} A$	A matrisinin permanenti
g_n^k	n . ci genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayısı
$F(x)$	Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu
$P(x)$	Pell sayılarının üreteç fonksiyonu
P_n^k	n . ci genelleştirilmiş k -basamak Pell sayısı
I_n	$n \times n$ birim matris
$G_k(x)$	Genelleştirilmiş Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

1.GİRİŞ

Fibonacci sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

İndirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada F_n ; n -inci Fibonacci sayısı ve $\{F_n\}$ ise elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci dizisidir.

Lucas sayıları ise her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n n -inci Lucas sayısı ve $\{L_n\}$ ise elemanları Lucas sayılarından oluşan Lucas dizisidir.

Benzer şekilde Pell sayıları ise P_n , n -ci Pell sayısını göstermek üzere, her $n \geq 0$ sayısı ve $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. $\{P_n\}$ ise elemanları Pell sayılarından oluşan Pell dizisidir.

Fibonacci, Lucas ve Pell dizilerinin değişik genelleştirilmeleri bazı kurallar sağlatılarak çeşitli yazarlar tarafından yapılmıştır [1–13]. Bu çalışmaları gözönüne alarak yapılmış olan genelleştirmelerden bazılarını inceleyeceğiz. Bu genelleştirmelerdeki temel esaslar şunlardır:

1. Birinci tip genelleştirilmede, dizinin her terimi kendisinden önceki ilk iki terimin toplamı şeklinde tanımlanarak bu terimlerin katsayıları keyfi tamsayılar alınır.
2. İkinci tip genelleştirilmede ise birinci tip genelleştirilme ile birlikte dizisinin başlangıç koşulları reel ya da kompleks değişkenler alınarak yapılan genelleştirilmedir.
3. Üçüncü tip olan genelleştirilmede ise dizinin her terimi kendinden önceki k -tane terimin toplamı şeklinde tanımlanır ve bunun için de k -tane başlangıç koşulu verilir. Bu tür dizilere genelleştirilmiş k -basamak sayı dizileri adı verilir.

İlk iki tür genelleştirmelere, genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas dizileri veya ikinci basamaktan indirgeme dizileri adı verilir. Buna göre genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, $D = A^2 - 4B \neq 0$ olacak şekilde A ve B sıfırdan farklı aralarında asal sayılar olmak üzere her $n \geq 0$ ve $u_0 = 0, u_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$u_{n+2} = Au_{n+1} - Bu_n$$

şeklinde tanımlanır [13].

Benzer şekilde Genelleştirilmiş Lucas dizisi ise $D = A^2 - 4B \neq 0$ olacak şekilde A ve B sıfırdan farklı aralarında asal sayılar olmak üzere her $n \geq 0$ ve $v_0 = 2, v_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$v_{n+2} = Av_{n+1} - Bv_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [13].

Örneğin $A = 1$ ve $B = -1$ için $\{u_n\}$ dizisi Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ 'e ve $\{v_n\}$ dizisi de Lucas dizisi $\{L_n\}$ 'e dönüşür.

Yukarıda bahsettiğimiz ikinci tip genelleştirilme ise $D = A^2 - 4B \neq 0$ olacak şekilde A ve B sıfırdan farklı aralarında asal sayılar olmak üzere her $n \geq 0$ ve $W_0 = p$, $W_1 = q$ başlangıç koşulları için

$$W_{n+2} = AW_{n+1} - BW_n$$

bağıntısı ile tanımlanır [4].

Birçok yazar tarafından Fibonacci sayıları için üreteç matris elde edilerek, Fibonacci sayılarının bilinen bazı özellikleri için daha kolay yöntemler ve yeni bazı kombinatoriyal özellikler elde edilmiştir. İlk kez Sylvester tarafından A companion matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınarak,

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilmiştir [14]. Daha sonra Bong tarafından aynı A matrisinin n .ci kuvvetinin

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilmiştir [15]. Bu A matrisine *Fibonacci matrisi* diyeceğiz. Ayrıca Bong, Fibonacci matrisi A 'nın, Fibonacci tipi indirgeme bağıntısına benzer olarak

$$A^n = A^{n-1} + A^{n-2}$$

bağıntısını sağladığını göstermiş ($A^0 = I_2$) ve Fibonacci matrisi A 'nın n . ci kuvvetinin determinant değerini kullanarak, Fibonacci sayıları için Simpson formülü olarak bilinen

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği matrisler yardımı ile elde etmiştir. Yine Bong Fibonacci matrisi A 'nın matris çarpımı altında değişmeli olduğunu, yani her m ve n pozitif tamsayısı için

$$A^{n+m} = A^n \cdot A^m$$

eşitliğini elde etmiştir. Aynı yazar benzer matris eşitliklerini bularak bunlardan bazı kombinatoryal formüller geliştirmiştir. Örneğin

$$A^{2n} = (A^2)^n = (A + I)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} A^r$$

matris eşitliğinde yararlanarak, aynı pozisyonadaki elemanları göz önüne alarak

$$F_{2n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} F_r$$

formülünü kolayca elde etmiştir.

Diğer bir örnek olarak,

$$\begin{aligned} A^{2n+1} - I &= A^{2n-1} + A^{2n-2} + \dots + A + I + A^{-1} = (A^{2n-1} + A^{2n-2}) + \dots + (A + I) + A^{-1} \\ &= A^{2n} + A^{2n-2} + \dots + A^2 + A^{-1} \end{aligned}$$

$$= A^{-1} + \sum_{r=0}^n A^{2r}$$

matris eşitliğinden, aynı pozisyonundaki elemanların eşitliğini kullanarak

$$F_{2n+1} = 1 + \sum_{r=0}^n F_{2r} = \sum_{r=-1}^{2n-1} F_r$$

formülünü bulmuştur.

Benzer düşünce ile Pell sayıları için üreteç matrisinin bulunması çalışması Ercolano tarafından 2×2 M companion matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alınarak

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilmiştir [16].

Fibonacci ve Lucas sayılarından yararlanarak Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanmış ve bu polinomlarda genelleştirilerek, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları tanımları da yapılmıştır. Ayrıca bu polinomların bölünebilme gibi bazı özellikleri incelenmiştir [17–21].

Matris teoride sıkça kullanılan $(0,1)$ -matrisleri gözönüne alınarak bu matrislerin determinantı ve permanenti ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiler elde

edilmiştir. Örneğin, Lehmer genel bir tridiagonal (üçlü bant) matrisin permanenti ve indirgeme bağıntıları arasındaki bağıntıları elde etmiştir [22]. Minc $n \times n$ tridiagonal A_n matrisini tüm elemanları 1 olacak şekilde, yani

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak, $\text{per}A_n = F_{n+1}$ olduğunu ispatlamıştır [23-24]. Daha sonra, A_n matrisini $(k-1)$ süper-diagonal (köşegen) matrise genişleterek, bu matrisin permanenti ile $(n+1)$.ci genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayısı olduğunu göstermiştir. Yani

$$\text{per}F(n, k) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = g_{n+1}^k.$$

Burada g_n^k ; n -inci genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayısıdır. Ayrıca Minc, $(0,1)$ -Circulant matrislerin permanentleri ve Fibonacci sayıları arasında başka ilişkileri de bulmuştur.

Strang, n boyutlu D_n tridiagonal matrisini aşağıdaki gibi tanımlayarak [25]:

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & i & & 0 \\ i & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & i \\ 0 & & i & 1 \end{bmatrix},$$

$\det D_n = F_{n+1}$ olduğunu göstermiştir. N. Cahill ise matris determinantları ve indirgeme dizileri arasındaki ilişkilerden yararlanarak, kullanılan kare matrislerin determinantlarını bu matrislerin özdeğerlerinin çarpımları olarak yazarak bu determinantlara karşılık gelen sayıların çarpanlara ayrılmalarını elde etmiştir [26]. N. Cahill'in vermiş olduğu bu çarpanlara ayırma aslında yöntem farkıyla Fibonacci polinomlarının çarpanlara ayrılması ile aynı sonuçlardır.

Yukarıda bahsettiğimiz A_n matrisinin permanenti ile D_n matrisinin determinanı aynı sonucu vermektedir. Bu durum Minc tarafından tüm tridiagonal matrisler için şu şekilde genelleştirilmiştir [24]: $A = (a_{kj})$ $n \times n$ bir tridiagonal matris olsun. Eğer $n \times n$, $\hat{A} = (\hat{a}_{kj})$ tridiagonal matrisinin elemanları $(1 \leq k \leq n)$ $a_{kk} = \hat{a}_{kk}$ ve diğer durumlarda ise $\hat{a}_{kj} = ia_{kj}$ ($i^2 = -1$) şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $\text{per} A = \det \hat{A}$ dir ya da açık olarak

$$\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & i & & 0 \\ i & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & i \\ 0 & & i & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi matris determinantları ve permanentleri ile sayı dizileri arasındaki ilişkilere ilginç bir örnek verelim. Bir n boyutlu simetrik karesel $A_n = (a_{ij})$ matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} i+1, & i = j \text{ ise} \\ \min\{i, j\}, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

olarak, yani

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n+1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Gerekli hesaplamalar yapılarak, A_n matrisinin determinanı $\det A_n = F_{2n+1}$ olduğu bulunur [27].

Yukarıda bahsedilen matris gösterimleri benzer şekilde Lucas sayıları içinde elde edilmiştir.

Şimdi Fibonacci ve Pell dizilerinin üreteç fonksiyonlarının elde edilişlerini göz önüne alacağız. Kabul edelim ki

$$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + F_6x^6 + \dots + F_nx^n + \dots$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} (1-x-x^2)F(x) &= F(x) - xF(x) - x^2F(x) \\ &= F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \dots \\ &\quad - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - F_5x^6 - \dots \\ &\quad - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - F_4x^6 - F_5x^7 - \dots \end{aligned}$$

olup buradan gerekli düzenlemeleri yaparak

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)F(x) &= F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \\ &\quad (F_4 - F_3 - F_2)x^4 + (F_5 - F_4 - F_3)x^5 + \dots + \\ &\quad (F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})x^{n-1} + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \dots\end{aligned}$$

elde ederiz. Fibonacci sayılarının tanımını kullanarak

$$(1-x-x^2)F(x) = F_1x = x$$

sonucunu buluruz. Böylece Fibonacci sayılarını üreteç fonksiyonunu

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

olarak elde ederiz [28-29].

Benzer şekilde Pell sayılarını kullanarak

$$P(x) = P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + P_5x^5 + \dots + P_nx^n + \dots$$

fonksiyonunu tanımlar ve buradan

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)P(x) &= P(x) - xP(x) - x^2P(x) \\ &= P_1x + (P_2 - 2P_1)x^2 + (P_3 - 2P_2 - P_1)x^3 + \\ &\quad (P_4 - 2P_3 - P_2)x^4 + (P_5 - 2P_4 - P_3)x^5 + \dots + \\ &\quad (P_{n-1} - 2P_{n-2} - P_{n-3})x^{n-1} + (P_n - 2P_{n-1} - P_{n-2})x^n + \dots\end{aligned}$$

sonucunu buluruz. Pell sayılarının tanımından

$$(1-2x-x^2)P(x) = P_1x = x$$

elde edilir. Böylece Pell sayısının üreteç fonksiyonunu

$$P(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi Fibonacci sayılarının Binet gösteriminden bahsedeceğiz. Fransız matematikçi Binet ilk kez 1843 yılında, Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formüllerini vermiştir: $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Burada α ve β Fibonacci sayılarının karakteristik denklemi $t^2 - t - 1 = 0$ ın kökleridir. Yani $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Ayrıca not edelim ki $t^2 - t - 1 = 0$ karakteristik denklemi aynı zamanda yukarıda bahsedilen 2×2 Fibonacci matrisi A 'nın karakteristik denklemidir.

Benzer şekilde genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve Lucas dizisi $\{v_n\}$ için Binet formülleri; $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$u_n = \frac{\sigma^n - \delta^n}{\sigma - \delta}$$

ve

$$v_n = \sigma^n + \delta^n$$

şeklindedir. Burada σ ve δ , $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin karakteristik denklemi olan $t^2 - At + B = 0$ denkleminin kökleridir.

Şimdi ise Fibonacci sayılarının diğer bir genelleştirilmesi olan k -basamak genelleştirilmelerinden bahsedeceğiz. İlk kez Miles tarafından k -basamak Fibonacci sayıları, $n > k \geq 2$ olmak üzere [11]:

$$f_n = \sum_{j=1}^k f_{n-j},$$

başlangıç koşulları

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{k-2} = 0, f_{k-1} = f_k = 1$$

ile tanımlanmıştır.

Daha sonraki yıllarda Er tarafından yapılan genelleştirme, Miles tarafından yapılan bu genelleştirmeyi kapsar. Er 'in vermiş olduğu tanımda k -basamak Fibonacci dizisinin tekrar k genelleştirmesi aşağıdaki gibi yapılmıştır [30]:

Genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının k dizisi $\forall n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^k g_{n-j}^i \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada başlangıç koşulları

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1 - n \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad 1 - k \leq n \leq 0$$

dir. Burada g_n^i ; i -inci genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci dizinin n . terimidir.

Tanımından görüleceği üzere bu şekilde tanımlanan dizi k tane diziyi içeren en genel tanımlamalardan biridir ve matris gösterimine uygunluğu bakımından da çok kullanışlıdır.

Genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının tanımından dolayı

$$\begin{bmatrix} g_{n+1}^i \\ g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ \vdots \\ g_{n-k}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ g_{n-2}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

eşitliği sağlanır. Eş. 1.2 'deki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

matrisine A diyelim. Burada A matrisi $k \times k$ companion matristir. Eş. 1.2 'nin genelleştirilmesi ile

$$\begin{bmatrix} g_{n+1}^1 & g_{n+1}^2 & \cdots & g_{n+1}^k \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-k}^1 & g_{n-k}^2 & \cdots & g_{n-k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & \cdots & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

eşitliğini elde ederiz. Eş. 1.4 'deki $k \times k$ boyutlu

$$\begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & \cdots & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

matrisini G_n ile gösterirsek, Eş. 1.4 'ü kısaca

$$G_{n+1} = AG_n \quad (1.5)$$

şeklinde yazarız. Eş. 1.5 'den yararlanarak

$$G_{n+1} = AG_n = A \cdot AG_{n-1}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu şekilde aynı işlemi $(n-1)$ kez yaparak

$$G_{n+1} = A \cdot A^{n-1}G_1 = A^n G_1 \quad (1.6)$$

matris eşitliğini buluruz. Genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının tanımından

$$G_1 = A$$

olduğu görülür. Böylece Eş. 1.6 'dan

$$G_{n+1} = A^n G_1 = A^n \cdot A = A^{n+1} \quad (1.7)$$

bulunur.

Burada A matrisine *genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci matrisi* denir. Ayrıca Er matris yöntemlerinden yararlanarak genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının toplamalarını elde etmiştir.

Miles ve Er tarafından verilen Fibonacci sayılarının k -basamak genelleştirilmeleri kıyaslanırsa aslında

$$f_{n+k-2} = g_n^k$$

olduğu görülür. Burada f_n , Miles tarafından tanımlanan k -basamak Fibonacci sayısını ve g_n^k ise Er tarafından yapılan genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayısını göstermektedir. Açık olarak indis ötelemesi ile bu sayılar aynı sayılardır.

Son yıllarda Lee; Miles tarafından yapılan k -basamak Fibonacci sayıları için matris tekniklerini kullanarak genelleştirilmiş Binet formülünü vermiştir [31]. Ayrıca not edelim ki Lee tarafından kullanılan $k \times k$ companion matrisi, aslında Er tarafından kullanılan $k \times k$ genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci matrisi A ile aynı özelliklere sahip companion matrisidir. Lee bu matrisi Q_k sembolü ile göstermiştir. Lee tarafından kullanılan $k \times k$, Q_k companion matrisi [31–32]:

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup bu matrisin n -inci kuvveti Lee tarafından

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} g_{n-(k-1)} & g_{1,2}^+ & g_{1,3}^+ & \dots & g_{1,k-1}^+ & g_{n-(k-2)} \\ g_{n-(k-2)} & g_{2,2}^+ & g_{2,3}^+ & \dots & g_{2,k-1}^+ & g_{n-(k-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{n-1} & g_{k-1,2}^+ & g_{k-1,3}^+ & \dots & g_{k-1,k-1}^+ & g_n \\ g_n & g_{k,2}^+ & g_{k,3}^+ & \dots & g_{k,k-1}^+ & g_{n+1} \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir (bu matriste kullanılan $g_{n,m}^+$ 'ler ise k -basamak Fibonacci sayılarının bazı lineer birleşimlerini göstermektedir ki biz burada onları göz önüne almayacağız [33]). Lee, Q_k matrisinin karakteristik denklemini gözönüne almış ve bu denklemin tüm köklerinin birbirinden farklı (Bkz [34]) olmasından yararlanarak genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için Binet formülünü vermiştir.

Bizim burada ilgileneceğimiz problem ise genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları için yukarıda bahsedilen genelleştirmeleri de göz önüne alarak en uygun şekilde Pell sayılarının k -basamak genelleştirmesinin elde edilmesidir. Bu şekilde bulacağımız genelleştirilmiş sayı dizisi için uygun üreteç matrisi ve genelleştirilmiş Binet formülünü elde etmek temel problemimiz olacaktır. Ayrıca uygun matrisler tanımlayarak bu sayıların toplamalarını matris yöntemleri ile elde edeceğiz. Bunlardan başka bu sayıları içeren bazı formüller ve gösterimleri elde etmeye çalışacağız.

Philippou tarafından yapılan çalışmada k -basamak Pell sayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [35]: $P_0^{(k)} = 0$ ve $P_1^{(k)} = 1$ başlangıç koşulları için

$$P_n^{(k)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2^{k-i} P_{n-i}^{(k)}, & 2 \leq n \leq k \text{ ise,} \\ \sum_{i=1}^k 2^{k-i} P_{n-i}^{(k)}, & n \geq k+1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Tanımdan görüleceği üzere burada sayı dizisi parçalı şekilde tanımlanmış olup, bu şekilde tanımlanan k -basamak Pell sayıları için uygun bir üreteç matrisi bulmak oldukça zordur ve hatta bulunamayabilir. Ayrıca yazar bu çalışmasında tanımlamış olduğu k -basamak Pell sayıları için aşağıdaki kombinatorial gösterimleri vermiştir:

$\{P_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, k -basamak Pell dizisi için

$$a) P_{n+1}^{(k)} = \sum_{n_1, \dots, n_k} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} 2^{-n+k(n_1 + \dots + n_k)}, \quad n \geq 0.$$

Burada toplam $n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k = n$ olacak şekildeki negatif olmayan $n_1, \dots, n_k$ tamsayıları üzerinden alınmıştır.

b)

$$P_{n+1}^{(k)} = \left(\frac{1+2^k}{2} \right)^n \left[\sum_{i=0}^{\lfloor n/(k+1) \rfloor} (-1)^i \binom{n-ki}{i} 2^{ki} (1+2^k)^{-(k+1)i} \right] \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{1+2^k}{2} \right)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/(k+1) \rfloor} (-1)^i \binom{n-1-ki}{i} 2^{ki} (1+2^k)^{-(k+1)i} \right], \quad n \geq 1.$$

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARI

2.1. Genelleştirilmiş k -Basamak Pell Sayılarının Tanımı ve Üreteç Matrisi

Bu bölümde Pell sayılarının k -basamak genelleştirilmesinin tanımını ve bu sayılar için üreteç matrisini vereceğiz.

Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının k dizisini, $1 \leq i \leq k$ için

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \dots + P_{n-k}^i \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Başlangıç koşulları $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$P_n^i = \begin{cases} 1, & n = 1 - i \text{ ise,} \\ 0, & \text{diger.} \end{cases}$$

dir. Burada P_n^i , i -inci genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisinin n -inci terimini göstermektedir. Eğer $i = 2$ alınırsa, o halde genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisi $\{P_n^i\}$, bilinen Pell dizisi $\{P_n\}$ olur.

Eğer $i = k = 4$ olarak alırsak, genelleştirilmiş 4-basamak Pell dizisi

$$1, 2, 5, 13, 34, 88, 228, 591, 1532, \dots$$

şeklindedir.

Yukarıda Eş. 2.1 ile vermiş olduğumuz tanımdan dolayı genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}^i \\ P_n^i \\ P_{n-1}^i \\ \vdots \\ P_{n-k}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^i \\ P_{n-1}^i \\ P_{n-2}^i \\ \vdots \\ P_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

eşitliğini yazabiliriz. Eş. 2.2 'deki

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$k \times k$ companion matrisine R diyelim. Eş. 2.3 'ü bu defa k sütun için genelleştirerek

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}^1 & P_{n+1}^2 & \dots & P_{n+1}^k \\ P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-k}^1 & P_{n-k}^2 & \dots & P_{n-k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ P_{n-2}^1 & P_{n-2}^2 & \dots & P_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \dots & P_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

matris eşitliğini elde ederiz. Eğer k boyutlu

$$\begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ P_{n-2}^1 & P_{n-2}^2 & \dots & P_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \dots & P_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

matrisini E_n ile gösterirsek, o zaman Eş. 2.4 'ü kısaca

$$E_{n+1} = R \cdot E_n \quad (2.6)$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.1. Teorem

E_n ve R matrisleri sırasıyla Eş. 2.5 ve Eş. 2.3 'deki gibi olsun. O halde her n ve k ($n \geq k \geq 2$) doğal sayıları için,

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

dir.

İspat

Eş. 2.6 'dan

$$E_{n+1} = R \cdot E_n = R \cdot RE_{n-1}$$

eşitliğini yazarız. Bu işlemi $(n-1)$ kez tekrarlırsak

$$E_{n+1} = R \cdot R^{n-1} E_1 = R^n E_1 \quad (2.7)$$

sonucunu elde ederiz. Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının tanımından

$$E_1 = R$$

olduğunu görülür. Buradan Eş. 2.7 'yi

$$E_{n+1} = R^n E_1 = R^n \cdot R = R^{n+1} \quad (2.8)$$

olarak elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Buradaki R matrisini *genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisi* olarak adlandıracamız.

2.2. Teorem

E_n matrisi Eş. 2.5 ile verilsin. O halde her $n \geq k \geq 2$ için

$$\det E_n = \begin{cases} 1, & k \text{ tek ise} \\ (-1)^n, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat

Teorem 2.1 'den $E_n = R^n$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\det E_n = \det(R^n) = (\det R)^n$$

dir. Ayrıca k boyutlu R companion matrisinin determinanı $\det R = (-1)^{k+1}$ olduğundan,

$$\det E_n = \begin{cases} 1, & k \text{ tek ise} \\ (-1)^n, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.2 Genelleştirilmiş Pell Sayılarını İçeren Bazı Bağıntılar

Bu bölümde genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları arasındaki bazı bağıntıları vereceğiz.

2.3. Teorem

P_n^i , $1 \leq i \leq k$ için i -inci genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisinin n -inci terimi olmak üzere tüm pozitif n ve m tamsayıları için

$$P_{n+m}^i = \sum_{j=1}^k P_m^j P_{n-j+1}^i$$

dir.

İspat

Teorem 2.1 'den, $E_n = R^n$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten

$$E_{n+1} = E_n E_1 = E_1 E_n \quad (2.9)$$

yazabiliriz. Başka bir deyişle E_1 matrisi, matris çarpımına göre değişmelidir. Böylece Eş. 2.9'u genelleştirerek

$$E_{n+m} = E_n E_m = E_m E_n \quad (2.10)$$

matris eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak $E_{n+m} = (e_{ij})$ matrisinin (i, j) -inci elemanı e_{ij} , E_n matrisinin i -inci satırı ve E_m matrisinin j -inci sütununun çarpımından elde edilir. Buradan sonuç kolayca elde edilir.

Örneğin, Teorem 2.3 'de $i = 2$ alırsak,

$$\begin{aligned} P_{n+m}^2 &= \sum_{j=1}^2 P_m^j P_{n-j+1}^2 \\ &= P_m^1 P_n^2 + P_m^2 P_{n-1}^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Her n doğal sayısı için $P_n^1 = P_{n+1}^2$ olduğundan,

$$P_{n+m}^2 = P_{m+1}^2 P_n^2 + P_m^2 P_{n-1}^2$$

sonucunu buluruz. P_n^2 , n -inci Pell sayısı olduğundan, böylece Pell sayıları için iyi bilinen

$$P_{n+m} = P_{m+1} P_n + P_m P_{n-1}$$

formülünü genelleştirmiş oluruz.

Şimdi Teorem 2.3 'ün sonucunu aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

2.1. Sonuç

P_n^i , $1 \leq i \leq k$ için i -inci genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisinin n -inci terimi olmak üzere tüm pozitif n , t ve m tamsayıları için

$$P_{m+t+n}^i = \sum_{j=1}^k P_{m+t}^j P_{n-j+1}^i$$

dir.

İspat

Teorem 2.1 'den, $E_n = R^n$ olduğunu gözönüne alarak buradan

$$E_{m+t+n} = E_{m+t}E_n \text{ veya } E_{m+t+n} = E_{m-1}E_{n+t-1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece matris çarpımını kullanarak;

$$P_{m+t+n}^i = \sum_{j=1}^k P_{m+t}^j P_{n-j+1}^i \text{ veya } P_{m+t+n}^i = \sum_{j=1}^k P_{m-1}^j P_{n+t-j}^i$$

olduğunu kolayca buluruz. Böylece ispat tamamlanır.

2.4. Teorem

P_n^i , $1 \leq i \leq k$ için genelleştirilmiş Pell dizisinin n -inci terimini göstermek üzere her pozitif n tamsayısı için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$P_{n+1}^i = P_n^1 + P_n^{i+1}, \quad 2 \leq i \leq k-1$$

$$P_{n+1}^1 = 2P_n^1 + P_n^2,$$

$$P_{n+1}^k = P_n^1. \tag{2.11}$$

İspat

Eş. 2.9 'dan $E_{n+1} = E_n E_1$ eşitliğini gözönüne alarak ve matris çarpımını kullanarak istenilen eşitlikler kolayca elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ BİNET FORMÜLÜ

3.1. Genelleştirilmiş k -Basamak Pell Matrisinin Özdeğerleri

Bu bölümde Fibonacci sayıları için verilen Binet formülünü genelleştirilmiş Pell sayıları için elde edeceğiz. Pell sayıları için Binet formülü

$$P_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad (3.1)$$

olup burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$; Pell sayılarının karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ 'nin kökleridir.

Şimdi Pell sayılarının Binet formülü olarak bilinen Eş. 3.1 'i genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için matris yöntemlerini kullanarak elde edeceğiz. Bunun için bazı yardımcı Teoremler vereceğiz.

3.1. Teorem

Her $k \geq 2$ pozitif tamsayısı için $x^{k+1} - 3x^k - x^{k-1} + 1 = 0$ denkleminin katlı kökü yoktur.

İspat

$f(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x - 1$ olmak üzere $h(x) = (x-1)f(x)$ olarak alırsak, bu durumda açık olarak $h(x) = x^{k+1} - 3x^k - x^{k-1} + 1$ dir. Buradan $k \geq 2$ ve $f(1) \neq 1$ olduğundan 1, $h(x)$ 'in bir köküdür fakat katlı kökü değildir. Kabul edelim ki α ,

$h(x)$ 'in bir katlı kökü olsun. O halde not edelim ki $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ dir. Ayrıca α bir katlı kök olduğundan

$$h(\alpha) = \alpha^{k+1} - 3\alpha^k - \alpha^{k-1} + 1 = 0$$

ve

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= (k+1)\alpha^k - 3k\alpha^{k-1} - (k-1)\alpha^{k-2} \\ &= \alpha^{k-2}((k+1)\alpha^2 - 3k\alpha + k-1) = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece son eşitlikten $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$\alpha_{1,2} = \frac{3k \mp \sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)}$$

olarak buluruz. Buradan α_1 kökünü $h(\alpha) = 0$ 'da yerine yazarak

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1^{k-1}(-\alpha_1^2 + 3\alpha_1 - 1) - 1 \\ &= \left(\frac{3k + \sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)} \right)^{k-1} \left(\frac{5k - 4 + 3\sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)^2} \right) - 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitliğini elde ederiz.

Kabul edelim ki

$$\alpha_k = \left(\left(\frac{3k + \sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)} \right)^{k-1} \left(\frac{5k - 4 + 3\sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)^2} \right) \right)$$

olsun. O halde Eş. 3.2 'yi

$$0 = a_k - 1 \quad (3.3)$$

olarak yazarsınız. Burada $k \geq 2$ için $a_k < a_{k+1}$ ve $a_2 = 2.0887$ olup, bu ise Eş. 3.3 ile bir çelişkidir.

Şimdi diğer kök α_2 'yi göz önüne alalım. Benzer şekilde α_2 kökünü $h(\alpha) = 0$ 'da yerine yazarak

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_2^{k-1} (-\alpha_2^2 + 3\alpha_2 - 1) - 1 \\ &= \left(\frac{3k - \sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)} \right)^{k-1} \left(\frac{5k - 4 - 3\sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)^2} \right) - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitliğini elde ederiz. Kabul edelim ki

$$b_k = \left(\left(\frac{3k - \sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)} \right)^{k-1} \left(\frac{5k - 4 - 3\sqrt{5k^2 + 4}}{2(k+1)^2} \right) \right)$$

olsun. Buradan Eş. 3.4 'ü

$$0 = b_k - 1 \quad (3.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k \geq 2$ için $b_k > b_{k+1}$ ve $b_2 = -8,88662 \times 10^{-2}$ olduğundan $b_k \neq 1$ olup bu ise Eş. 3.5 ile bir çelişkidir. Bu iki çelişkiden dolayı, $h(x) = 0$ denklemi katlı köke sahip olmadığı görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç olarak Teorem 3.1 'den $x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x - 1 = 0$ denkleminin $k \geq 2$ için katlı köke sahip olmadığı söyleriz.

3.2. Genelleştirilmiş Binet Formülü

$f(\lambda) = \lambda^k - 2\lambda^{k-1} - \lambda^{k-2} - \dots - \lambda - 1$ polinomunun genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisinin karakteristik polinomu olduğunu varsayalım. Burada hemen belirtelim ki $f(\lambda)$ aynı zamanda genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisi R 'nin de karakteristik polinomudur. Kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ' lar genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisi R 'nin özdeğerleri olsun. O halde Teorem 3.1 'den bu özdeğerler birbirlerinden farklıdır.

Şimdi aşağıdaki $k \times k$ Vandermonde matrisini göz önüne alalım:

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^{k-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^{k-1} & \lambda_3^{k-2} & \dots & \lambda_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{k-1} & \lambda_k^{k-2} & \dots & \lambda_k & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ayrıca $V^T = \Lambda$ ve w_k^i ; $k \times 1$ boyutlu aşağıdaki gibi bir sütun matrisi olsun.

$$w_k^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \lambda_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}.$$

$V_j^{(i)}$, V matrisinin j -inci sütununun w_k^i sütun matrisiyle yer değiştirilmesi ile elde edilen $k \times k$ boyutlu matrisi gösterebiliriz. Buna göre genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için Binet formülünü verebiliriz.

3.2. Teorem

P_n^i ; i -inci genelleştirilmiş k -basamak Pell dizisinin n -inci terimi olmak üzere $1 \leq i \leq k$ için

$$P_{n-i+1}^j = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

dir.

İspat

R matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için, R matrisi köşegenleştirilebilir. Buradan $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ köşegen matrisi için $R\Lambda = \Lambda D$ eşitliği kolayca görülür. Vandermonde matrisi V ters çevrilebilir olduğundan $\Lambda^{-1}R\Lambda = D$ eşitliğini yazabiliriz. Böylece R matrisinin D matrisine benzer olduğunu söyleyebiliriz. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $R^n\Lambda = \Lambda D^n$ yazarız. Böylece e_{ij} ; Eş. 2.5 ile verilen E_n matrisinin (i, j) . ci elemanını göstermek üzere aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} e_{i1}\lambda_1^{k-1} + e_{i2}\lambda_1^{k-2} + \dots + e_{ik} &= \lambda_1^{n+k-i} \\ e_{i1}\lambda_2^{k-1} + e_{i2}\lambda_2^{k-2} + \dots + e_{ik} &= \lambda_2^{n+k-i} \\ &\vdots \\ e_{i1}\lambda_k^{k-1} + e_{i2}\lambda_k^{k-2} + \dots + e_{ik} &= \lambda_k^{n+k-i} \end{aligned}$$

Buradan her bir $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$e_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

elde ederiz. Burada $e_{ij} = P_{n-i+1}^j$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 'in özel bir hali olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.1. Sonuç

P_n^k , n -inci genelleştirilmiş k -basamak Pell sayısını göstermek üzere

$$P_n^k = \frac{\det(V_k^{(1)})}{\det(V)}$$

dir.

İspat

e_{ij} ; E_n matrisinin (i, j) -inci elemanı olmak üzere eğer $i = 1$ ve $j = k$ olarak alınırsa

Teorem 3.2 'den istenilen sonuç kolayca görülür.

Böylece her i tamsayısı, $1 \leq i \leq k$, için Teorem 3.2 ile genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının genelleştirilmiş Binet formülünü vermiş olduk.

Gerçekten $k = 2$ olarak alırsak, genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları Pell sayılarına indirgenir. Bu durumda

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$E_n = R^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$R\Lambda = \Lambda D$$

eşitliği sağlanır. Burada D köşegen matrisi

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, λ_1 ve λ_2 ise Pell sayılarının karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ in kökleridir. V ters çevrilebilir olup $R^n \Lambda = \Lambda D^n$ eşitliği sağlanır. Böylece

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

matris eşitliğinden

$$P_{n+1}\lambda_1 + P_n = \lambda_1^{n+1}$$

$$P_{n+1}\lambda_2 + P_n = \lambda_2^{n+1}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu lineer denklem sistemi bir Cramer sistemi olup Cramer yöntemi ile çözümü yapılır ise

$$P_n = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

olarak bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa n . ci Pell sayısı için Binet formülü

$$P_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

elde edilir.

4. MATRİS YÖNTEMLERİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYILARININ TOPLAMLARI

4.1. Genelleştirilmiş Pell Sayılarının Toplamları için Üreteç Matrisi

Bu bölümde Pell sayılarının 1 'den n 'e kadar olan toplamı

$$\sum_{i=1}^n P_i = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2}$$

ifadesini gözönüne alarak bunu genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için uygulayacağız. Bunun için Eş 2.3 ile verilen R matrisinden yararlanarak yeni bir matris tanımlayacağız ve bu matrisin kuvvetlerini alarak genelleştirilmiş Pell sayılarının toplamlarını elde edeceğiz. Genelleştirilmiş k boyutlu Pell matrisi R 'yi bir boyut genişleterek $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu T matrisini

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlayalım.

Ayrıca $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu C_n matrisini ise

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_n & & & \\ S_{n-1} & E_n & & \\ S_{n-k+1} & & & \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada E_n ; Eş. 2.5 ile verilen k boyutlu matris ve S_n 'de genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının 1 'den $(n+1)$ 'e kadar toplamı, yani

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1 \quad (4.3)$$

dir. Hemen belirtelim ki Teorem 2.4 'den $P_n^1 = P_{n+1}^k$ olup, buradan

$$S_n = \sum_{i=1}^n P_i^k$$

yazabiliriz.

4.1. Teorem

Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının toplamı S_n , Eş. 4.3 ile verilsin. O halde

$$C_n = T^n \text{ ve } S_n = (C_{n+1})_{2,1}$$

dir. Burada $(C_{n+1})_{2,1}$; C_{n+1} matrisinin (2,1)-inci elemanıdır.

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapacağız. $n = 1$ için, genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının tanımından

$$S_1 = \sum_{i=0}^0 P_i^1 = P_1^k = 1$$

yazarız. Ayrıca

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T$$

olduğundan istenilen elde edilir. Kabul edelim ki $n > 1$ için iddia doğru olsun. O halde göstereceğiz ki iddia $(n+1)$ için doğrudur. Burada Eş. 2.11 'deki $P_{n+1}^k = P_n^1$ eşitliğini göz önüne alarak

$$S_{n+1} = P_n^1 + S_{n-1}$$

olarak buluruz. Bu son eşitlikten yararlanarak

$$C_{n+1} = C_n T$$

matris eşitliğini yazarız. Böylece tümevarım hipotezinden

$$C_{n+1} = T^{n+1} \tag{4.4}$$

eşitliğini elde ederiz. C_n matrisinin tanımından $S_n = (C_{n+1})_{2,1}$ olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.1 'deki Eş. 4.4 'den yararlanarak

$$C_{n+1} = C_n C_1 = C_1 C_n$$

matris eşitliğini yazarız. Buradan

$$S_n = 1 + 2S_{n-1} + \sum_{i=2}^k S_{n-i}$$

ifadesini elde ederiz. Ayrıca $S_n = P_n^1 + S_{n-1}$ olduğundan

$$P_n^1 = 1 + \sum_{i=1}^k S_{n-i}$$

dolayısı ile Eş. 2.11 'den dolayı

$$P_{n+1}^k = 1 + \sum_{i=1}^k S_{n-i}$$

ifadesini buluruz. Böylece genelleştirilmiş Pell sayılarını yine kendi toplamaları cinsinden elde etmiş oluruz.

Eğer $k = 2$ alırsak, genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları bilinen Pell sayılarına indirgenir ve son eşitlikten yararlanarak

$$P_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^2 S_{n-i}$$

ve

$$P_{n+1} = 1 + S_{n-1} + S_{n-2}$$

sonucunu elde ederiz. Buradan kolay bir hesaplama ile Pell sayıları için bilinen

$$\sum_{i=1}^n P_i = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2}$$

toplam formülü elde ederiz. Böylece Pell sayıları için bilinen toplam formülünü genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için elde etmiş oluruz.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -BASAMAK PELL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONU VE KOMBİNATORİYAL GÖSTERİMİ

Bu bölümde genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları için üreteç fonksiyonunu elde edeceğiz. Şimdi katsayıları genelleştirilmiş Pell sayıları olan

$$G_k(x) = P_1^k + P_2^k x + P_3^k x^2 + P_4^k x^3 + \dots + P_k^k x^{k-1} + P_{k+1}^k x^k + \dots + P_n^k x^{n-1} + \dots$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre;

$$\begin{aligned} & (1 - 2x - x^2 - x^3 - \dots - x^k) G_k(x) \\ &= P_1^k + P_2^k x + P_3^k x^2 + \dots + P_k^k x^{k-1} + \dots + P_n^k x^{n-1} + \dots \\ & \quad - 2P_1^k x - 2P_2^k x^2 - 2P_3^k x^3 - \dots - 2P_k^k x^k - \dots - 2P_n^k x^n - \dots \\ & \quad - P_1^k x^2 - P_2^k x^3 - P_3^k x^4 - \dots - P_k^k x^{k+1} - \dots - P_n^k x^{n+1} - \dots \\ & \quad - P_1^k x^3 - P_2^k x^4 - P_3^k x^5 - \dots - P_k^k x^{k+2} - \dots - P_n^k x^{n+2} - \dots \\ & \quad \dots \\ & \quad - P_1^k x^k - P_2^k x^{k+1} - P_3^k x^{k+2} - \dots - P_k^k x^{2k-1} - \dots - P_n^k x^{n+k-1} - \dots \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Gerekli katsayı düzenlemelerini yaparak

$$\begin{aligned} & (1 - 2x - x^2 - x^3 - \dots - x^k) G_k(x) \\ &= P_1^k + (P_2^k - 2P_1^k)x + (P_3^k - 2P_2^k - P_1^k)x^2 + (P_4^k - 2P_3^k - P_2^k - P_1^k)x^3 + \dots \\ & \quad + (P_k^k - 2P_{k-1}^k - P_{k-2}^k - \dots - P_1^k)x^{k-1} + (P_{k+1}^k - 2P_k^k - P_{k-1}^k - \dots - P_1^k)x^k + \dots \\ & \quad + (P_n^k - 2P_{n-1}^k - P_{n-2}^k - \dots - P_{n-k}^k)x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının tanımdan yararlanarak

$$(1 - 2x - x^2 - x^3 - \dots - x^k) G_k(x) = P_1^k = 1$$

olduğu görülür. Buradan genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının üreteç fonksiyonu $G_k(x)$;

$$\begin{aligned} G_k(x) &= \frac{1}{(1 - 2x - x^2 - x^3 - \dots - x^k)} \\ &= (1 - 2x - x^2 - x^3 - \dots - x^k)^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Buradan hareketle $G_k(x)$ fonksiyonunu üstel fonksiyon cinsinden aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

5.1. Teorem

Genelleştirilmiş Pell sayılarının üreteç fonksiyonu $G_k(x)$ olmak üzere

$$G_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(x)^n x^n}{n}\right)$$

dir.

İspat

Kabul edelim ki $g(x) = 2 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$ ve $f(x) = 2x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$ ve $0 \leq f(x) < 1$ olsun. O halde $f(x) = xg(x)$ olur. $G_k(x)$ ve $f(x)$ 'i göz önüne alarak

$$G_k(x) = (1 - f(x))^{-1}$$

yazarız. Böylece $g(x)$ 'den yararlanarak

$$\begin{aligned} \ln G_k(x) &= \ln(1 - f(x))^{-1} \\ &= -\ln(1 - f(x)) \\ &= -\left(-f(x) - \frac{1}{2}f(x)^2 - \frac{1}{3}f(x)^3 - \dots - \frac{1}{n}f(x)^n - \dots\right) \\ &= \left(f(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{3}f(x)^3 + \dots + \frac{1}{n}f(x)^n + \dots\right) \\ &= \left[\left(2 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}\right)x + \frac{1}{2}\left(2 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}\right)^2 x^2 + \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{n}\left(2 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}\right)^n x^n + \dots\right] \\ &= \left(g(x) + \frac{1}{2}g(x)^2 x^2 + \frac{1}{3}g(x)^3 x^3 + \dots + \frac{1}{n}g(x)^n x^n + \dots\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$G_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(x)^n x^n}{n}\right)$$

veya

$$G_k(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)^n}{n}\right)$$

bulunur ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisi R 'nin karakteristik denklemi $\lambda^k - 2\lambda^{k-1} - \lambda^{k-2} - \dots - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere, genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları ile genelleştirilmiş k -basamak Pell matrisinin özdeğerleri arasındaki bir ilişkiyi vereceğiz.

5.2. Teorem

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisinin karakteristik denkleminin herhangi kökü λ ve $n \geq k > 1$ ise, o takdirde

$$\lambda^n = \sum_{j=1}^k P_{n-k+1}^j \lambda^{k-j}$$

dir.

İspat

Bu Teoremin ispatı için tümevarım yöntemini kullanacağız. O halde $n \geq k > 1$ olacak şekildeki n ve k tamsayıları için ilk olarak kabul edelim ki $n = k = 2$ olsun. O halde genelleştirilmiş k -basamak Pell sayıları bilinen Pell sayılarına dönüşür ve $P_n^1 = P_{n+1}^2$ eşitliği ile

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= P_1^1 \lambda + P_1^2 = P_2^2 \lambda + P_1^2 \\ &= 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

denklemini buluruz. Bu ise Pell sayılarının karakteristik denklemi olup istenilen elde edilir. Kabul edelim ki n ($n > k$) için ifade doğru olsun. Buna göre göstereceğiz ki iddia $n+1$ içinde doğrudur. O halde

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \cdot \lambda = \left(\sum_{j=1}^k P_{n-k+1}^j \lambda^{k-j} \right) \lambda$$

olup kabulümüzden

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} &= \left(P_{n-k+1}^1 \lambda^{k-1} + P_{n-k+1}^2 \lambda^{k-2} + \dots + P_{n-k+1}^{k-1} \lambda + P_{n-k+1}^k \right) \lambda \\ &= P_{n-k+1}^1 \lambda^k + P_{n-k+1}^2 \lambda^{k-1} + \dots + P_{n-k+1}^{k-1} \lambda^2 + P_{n-k+1}^k \lambda \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca $\lambda^k = 2\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + \lambda + 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} &= P_{n-k+1}^1 \lambda^k + P_{n-k+1}^2 \lambda^{k-1} + \dots + P_{n-k+1}^{k-1} \lambda^2 + P_{n-k+1}^k \lambda \\ &= P_{n-k+1}^1 \left(2\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + \lambda + 1 \right) + P_{n-k+1}^2 \lambda^{k-1} + \dots + P_{n-k+1}^{k-1} \lambda^2 + P_{n-k+1}^k \lambda \\ &= 2P_{n-k+1}^1 \lambda^{k-1} + P_{n-k+1}^1 \lambda^{k-2} + \dots + P_{n-k+1}^1 \lambda + P_{n-k+1}^1 \\ &\quad + P_{n-k+1}^2 \lambda^{k-1} + P_{n-k+1}^3 \lambda^{k-2} + \dots + P_{n-k+1}^{k-1} \lambda^2 + P_{n-k+1}^k \lambda \\ &= \left(2P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^2 \right) \lambda^{k-1} + \left(P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^3 \right) \lambda^{k-2} + \dots \\ &\quad + \left(P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^{k-1} \right) \lambda^2 + P_{n-k+1}^k \lambda + P_{n-k+1}^1 . \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Diğer taraftan Teorem 2.4 'den

$$P_{n+1}^i = P_n^1 + P_n^{i+1}, \quad 2 \leq i \leq k-1$$

$$P_{n+1}^1 = 2P_n^1 + P_n^2 .$$

olup, buna göre

$$2P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^2 = P_{n-k+2}^1$$

$$P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^3 = P_{n-k+2}^2$$

$$P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^4 = P_{n-k+2}^3$$

$$\vdots$$

$$P_{n-k+1}^1 + P_{n-k+1}^{k-1} = P_{n-k+2}^k$$

eşitliklerini buluruz. Böylece

$$\lambda^{n+1} = P_{n-k+2}^1 \lambda^{k-1} + P_{n-k+2}^2 \lambda^{k-2} + \dots + P_{n-k+2}^{k-2} \lambda^2 + P_{n-k+2}^{k-1} \lambda + P_{n-k+1}^1$$

eşitliğini elde ederiz. Yine Teorem 2.4 'den her n pozitif tamsayısı için $P_{n+1}^k = P_n^1$ olup buradan $P_{n-k+2}^k = P_{n-k+1}^1$ yazarak,

$$\lambda^{n+1} = P_{n-k+2}^1 \lambda^{k-1} + P_{n-k+2}^2 \lambda^{k-2} + \dots + P_{n-k+2}^{k-2} \lambda^2 + P_{n-k+2}^{k-1} \lambda + P_{n-k+2}^2$$

eşitliğini elde ederiz ki bu da ispatımızı tamamlar.

Chen ve Louck aşağıdaki C_m matrisini göz önüne alarak

$$C_m = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{m-1} & u_m \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C_m^n matrisinin kombinatoryal gösterimi için aşağıdaki teoremi vermişlerdir:

5.3. Teorem [36]

C_m matrisinin n . ci kuvveti C_m^n 'nin (i, j) -inci elemanı $c_{ij}^{(n)}$ ise, o zaman

$$c_{ij}^{(n)} = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_m)} \frac{k_j + k_{j+1} + \dots + k_m}{k_1 + k_2 + \dots + k_m} \times \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} u_1^{k_1} \dots u_m^{k_m}$$

dir. Burada toplam $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = n - i + j$ şartını sağlayan negatif olmayan tamsayılar üzerinden alınır ve eğer $n = i - j$ ise bu formüldeki katsayılar 1 olarak tanımlanır.

O halde genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının kombinatoryal gösterimi için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

5.1. Sonuç

Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayısı

$$P_n^k = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_m)} \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} \times \binom{t_1 + t_2 + \dots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} 2^{t_1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada toplam $t_1 + 2t_2 + \dots + kt_k = n - 1 + k$ şartını sağlayan negatif olmayan tamsayılar üzerinden alınır.

İspat

Teorem 5.3 'de $u_1 = 2$ ve her $j = 2, 3, \dots, k$ için $u_j = 1$ olmak üzere $E_n = (e_{ij})$ matrisinin tanımından $e_{1k} = P_n^k$ alınarak istenilen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Vorob'yev, N.N., "Fibonacci Numbers", **Blaisdell**, New York, 1-176 (1961).
2. Hoggatt, V.E. Jr., "Fibonacci and Lucas Numbers", **Houghton-Mifflin**, Boston, 1-65 (1969).
3. Horadam, A.F., "A generalized Fibonacci sequence", **Americ. Math. Monthly.**, 68: 455- 459 (1961).
4. Horadam A.F., "Special properties of the sequence $W\{n\}(a,b,p,q)$ ", **Fibonacci Quart.**, 5: 424-434 (1967).
5. Walton, J.E. and Horadam, A.F., "Some further identities for the generalized Fibonacci sequence $H\{n\}$ ", **Fibonacci Quart.**, 12: 272-280 (1974).
6. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications" **John Wiley & Sons**, New York, 24-61 (1989).
7. Silva, A. and Hoggatt, V.E. Jr. "Generalized Fibonacci numbers" **Fibonacci Quart.** 18 (4): 290-300 (1980).
8. Horadam A.F., "Generating identities for generalized Fibonacci and Lucas triples", **Fibonacci Quart.**, 15 (4): 289-292 (1977).
9. Kalman, D., "Generalized Fibonacci numbers by matrix methods" **Fibonacci Quart.** 20 (1): 73-76 (1982).
10. Horadam, A.F., "Pell identities", **Fibonacci Quart.** 9 (3): 245-252, 263 (1971).
11. Miles, E.P., "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", **Amer. Math. Monthly** 67: 745-752 (1960).
12. Lee, G.-Y., " k -Lucas numbers and associated bipartite graphs", **Linear Algebra Appl.**, 320 (1-3): 51-61 (2000).
13. Robbins, N., "Beginning Number Theory", **Wm. C. Brown Publishers**, Oxford, 185-195 (1993).
14. Sylvester, J. R., "Fibonacci Properties by Matrix Methods", **Mathematical Gasette**, 63: 188-191 (1979).
15. Bong, N. H., "Fibonacci matrices and Matrix Representation of Fibonacci Numbers", **Southeast Asian Bull. Math.**, 23: 357-374 (1999).

16. Ercolano, J., "Matrix generators of Pell sequences", *Fibonacci Quart.* 17 (1): 71-77 (1979).
17. Webb, W. A. and Parberry, E. A., "Divisibility properties of Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quart.* 7 (5): 457-463 (1969).
18. Hoggatt, V. E., Jr. and Bicknell, M., "Generalized Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quart.* 11(5): 457-465 (1973).
19. Hoggatt, V. E., Jr. and Long, C. T. "Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quart.*, 12: 113-120 (1974).
20. Hoggatt, V. E., Jr. and Marjorie, B.J. "Convolution arrays for Jacobsthal and Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quart.* 16 (5): 385-402 (1978).
21. Shannon, A. G., Horadam, A. F., "Generalized Pell numbers and polynomials", *Applications of Fibonacci numbers*, 9: 213-224 (2004).
22. Lehmer, D. H., "Fibonacci and related sequences in periodic tridiagonal matrices", *Fibonacci Quart.* 13: 150-158 (1975).
23. Minc, H., "Permanents of (0,1)-Circulants", *Canad. Math. Bull.*, 7 (2): 253-263 (1964).
24. Minc, H., "Permanents. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 6", *Addison-Wesley Publishing Co.*, Reading, Mass., 119-127 (1978).
25. Strang, G., "Introduction to Applied mathematics", *Wellesley-Cambridge Press*, Wellesley, MA, 1-750 (1986).
26. Cahil, N. D. and Narayan, D. A., "Fibonacci and Lucas numbers as tridiagonal matrix determinants", *Fibonacci Quart.*, 42 (3): 216-221 (2004).
27. Seibert, J, "Problem B-978, Determine the Determinant", *Fibonacci Quart.* 43 (1): 88-89 (2005).
28. Horadam A.F., "Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers", *Duke Math. J.*, 32: 437-446 (1965).
29. Wilf, H. S. Generating Functionology, *Academic Press Inc.*, San Diego, 3-65 (1990).
30. Er, M. C., "Sums of Fibonacci numbers by matrix methods", *Fibonacci Quart.* 22 (3): 204-207 (1984).

31. Lee, G.-Y., Lee, S.-G., Kim, J.-S. and Shin H.-K., "The Binet formula and representations of k -generalized Fibonacci numbers", ***Fibonacci Quart.*** 39 (2): 158-164 (2001).
32. Lee, G.-Y., Lee, S.-G. and Shin, H.-G., "On the k -generalized Fibonacci matrix Q_k ", ***Linear Algebra Appl.***, 251: 73-88 (1997).
33. Lee, G.-Y. and Lee, S.-G., "A note on generalized Fibonacci numbers", ***Fibonacci Quart.*** 33 (3): 273-278 (1995).
34. Taussky, O., "Bounds for characteristic roots of matrices", ***Duke Math. J.*** 15: 1043-1044 (1948).
35. Philippou, A. N. and Philippou, G. N., "The Pell sequence of order k , multinomial coefficients, and probability", ***Bull. Soc. Math. Grèce***, 22: 74-84 (1981).
36. Chen, W. Y. C. and Louck, J. D., "The combinatorial power of the companion matrix, ***Linear Alg. Appl.*** 232: 261-278 (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KILIÇ, Emrah
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 11.10.1977 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 2924330
 e-mail : ekilic@etu.edu.tr.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2002
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1999
Lise	Kurtuluş Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2002-2006	Gazi Üniversitesi	Araş. Gör.
2006-	TOBB ETÜ Matematik Böl.	Öğretim Gör.

Yabancı Dil

İngilizce