



**GENELLEŞTİRİLMİŞ
KONVEKS FONKSİYONLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Duygu ULUPINAR

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

Duygu ULUPINAR

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Duygu ULUPINAR tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş Konveks Fonksiyonlar” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 10/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Başkan : Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../ 2023 tarih ve
.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10 / 07 / 2023

Duygu ULUPINAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

Duygu ULUPINAR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hasan ÖGÜNMEZ

Bu çalışma altı bölümden oluşmuştur. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde reel düzlemde konveks fonksiyonlar incelenmiştir. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş konveks fonksiyon tanım ve teoremleri ele alınmıştır. Beşinci bölümde eşitsizlikler ve genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar üzerine genellemeler verilmiştir. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuçtan oluşmuştur.

2023, vii +50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, Güçlü konveks fonksiyonlar, η - Konveks fonksiyonlar, h - Konveks fonksiyonlar, p - Konveks fonksiyonlar Hermite-Hadamard eşitsizlikleri, Jensen eşitsizlikleri.

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

GENERALIZED CONVEX FUNCTIONS

Duygu ULUPINAR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Hasan ÖĞÜNMEZ

This study consists of six parts. The first part is Introduction. There are basic concepts which are necessary for our study in the second part. In the third part, we analysed convex functions on real plane. In the fourth part, we handled definition and theorem of generalized convex functions. In the fifth part, we analysed generalizations on inequalities and generalizations Convex functions. Six part includes Discussion and Conclusion sections.

2023, vii +50 pages

Key words: Convex functions, Strongly convex functions, η -convex functions, h -convex functions, p -convex functions, Hermite-Hadamard inequalities, Jensen's inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her soruma sabırla cevap veren, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Tüm hayatım boyunca her zaman yanımda olan çok değerli anneme, babama ve kardeşime içten teşekkür ederim.

Duygu ULUPINAR
Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Konveks Fonksiyon	3
2.2 Süreklilik.....	3
2.3 Jensen Eşitsizliği.....	3
2.4 Hermite-Hadamard Eşitsizliği	3
2.5 h - Konveks Fonksiyon.....	3
2.6 m - Konveks Fonksiyon.....	4
2.7 Birinci ve İkinci Anlamda s - Konveks Fonksiyon	4
2.8 η - Konveks Fonksiyon.....	4
3. REEL DÜZLEMDE KONVEKS FONKSİYONLAR	5
3.1 Konveks Fonksiyonlar	5
3.2 Süreklilik ve Diferensiyellenebilirlik.....	7
3.3 Karakterizasyonlar	9
3.4 Fonksiyonel İşlemlerde Kapalılık	10
3.5 Eşitsizlikler	12
3.6 Klasik Eşitsizlikler	12
3.7 Jensen Eşitsizliği.....	13
3.8 Hermite-Hadamard Eşitsizliği	13
3.9 Féjer-Hadamard Eşitsizliği	14
3.10 Ostrowski Eşitsizliği	14
3.11 Chebysev Eşitsizliği.....	14
3.12 Grüss Eşitsizliği	15
3.13 Simpson Eşitsizliği	15

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKSLİK.....	16
4.1 p - Konveks Fonksiyonlar.....	16
4.2 Birinci ve İkinci Anlamda s - Konveks Fonksiyonlar.....	16
4.3 m - Konveks Fonksiyonlar	17
4.4 h - Konveks Fonksiyonlar.....	17
4.5 η - Konveks Fonksiyonlar.....	18
4.6 GA - Konveks Fonksiyonlar.....	18
4.7 (s, m) - Konveks Fonksiyonlar.....	18
4.8 (m, h_1, h_2) - Konveks Fonksiyonlar	19
4.9 $(m, h_1, h_2) - GA$ - Konveks Fonksiyonlar	19
4.10 Bağıl m - logaritmik Yarı Konveks Fonksiyonlar.....	19
4.11 Genelleştirilmiş Konvekslikle İlgili Tanımlar	20
4.11.1 Quasi Konveks Fonksiyonlar	21
4.12 Wright Konveks Fonksiyonlar.....	21
4.13 Güçlü Konveks Fonksiyonlar	22
4.14 Güçlü (s, m) - Konveks Fonksiyonlar.....	22
4.15 Bağıl Güçlü h - Konveks Fonksiyonlar	22
4.16 İnvex Konveks Fonksiyonlar	23
4.17 δ - Konveks Fonksiyonlar	24
5. EŞİTSİZLİKLER ve GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKSLİK	25
5.1 p -Konveks Fonksiyonlar	25
5.2 s -Konveks Fonksiyonlar	25
5.3 h -Konveks Fonksiyonlar	26
5.3.1 Self Adjoint Operatörlerde Hilbert Uzayları	26
5.3.2 Reel Ortamda Fraktal Kümeler	37
5.4 m - Konveks Fonksiyonlar	40
5.5 GA - Konveks Fonksiyonlar.....	43
6. TARTIŞMA ve SONUÇ	45
7. KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
R	Reel sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
η	Eta
α	Alfa
β	Beta
λ	Lamda
$\subseteq$	Alt Küme
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\int$	İntegral
$\forall$	Her
$\max$	Maksimum
$(.,.)$	Açık aralık
$[.,.]$	Kapalı aralık
$ \quad $	Mutlak değer
$\langle ., . \rangle$	İki vektörün iç çarpımı
$\ x\ $	x vektörünün normu

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1 Konveks fonksiyonların grafiği	5
Şekil 3.2 $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $S_{25}(f) = \{x \in R : x^2 \leq 25\}$ grafiği.....	7
Şekil 4.1 Quasi konveks fonksiyon grafikleri	21



1. GİRİŞ

Matematiği insan beyninin ürünü olan ve uygulanabilirliğinden ziyade kendi iç tutarlılığına sahip soyut kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler bütünü olarak tanımlayabiliriz. Matematiksel kavramlar ve onun üzerine inşa edilen yeni yapılar veya onların keşfedilen özellikleri, uygulama zemini bulmasına veya ilgililerinin onları geliştirmesine göre teorik ve uygulamalı çok büyük değişimlere yol açmış ve insanlığın yüzyıllar süren macerasında önemli bir rol oynamıştır. Örneğin, temel bir kavram olan küme, üzerinde tanımlanan bir fonksiyonla daha önemli bir hal almış, fonksiyon kavramı da türevlenebilme ve integrallenebilme gibi kavramların ortaya çıkmasıyla uygulama sahasında çok büyük değişimlere neden olmuştur. Bunlar kadar olamasa da oldukça kullanışlı matematiksel kavramlardan bir tanesi de konvekslik kavramıdır.

Matematikte konvekslik kavramı, analiz ve geometri arasında önemli bir ilişki oluşturmaktadır. Konveks fonksiyonlar özellikle maksimum/minimum belirleme ya da optimal çözüme ulaşma problemleri olarak tarif edebileceğimiz optimizasyon problemlerinin çözümünde çok önemli bir yer tutmuştur. Konveks optimizasyon, ekonomiden tıbbı kadar farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Konveks fonksiyonların tarihi oldukça eskidir. Konveks fonksiyonlar hakkında ilk çalışmalar 19. yüzyılın sonlarına kadar dayanmaktadır. Son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir ve dolayısıyla bu konudaki çalışmalarda ciddi bir artış söz konusudur.

Konvekslik kavramının en önemli katkılarından biri de onun yardımıyla elde edilen birçok eşitsizliktir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlik teorisi ne kadar önemliyse, aynı şekilde eşitsizlik teorisinde de konveks fonksiyonlar çok önemlidir. Son yıllarda eşitsizlik teorisi sistematik olarak çok çalışmakta ve hali hazırda bir gelişim göstermektedir. Konveks fonksiyonun tanımı da eşitsizlik üzerine kurulu olduğundan birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının bir sonucu olmuştur.

Matematikte bildiğimiz ve yaygın kullanıma sahip olan eşitsizliklerin çoğu aslında Jensen eşitsizliğinden elde edilir. Yani bilinen diğer eşitsizlikler Jensen eşitsizliğinden elde edilir. Bu durum konvekslik kavramının ne kadar temel bir kavram olduğuna işaret eder. Örneğin, Aritmetik-Geometrik Ortalama, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği

vb. Jensen eşitsizliğinden elde edilebilir. Bilinen eşitsizliklerin değişik varyasyonları ve ispatları genelleştirilmiş varyasyonları birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Simetriğe sahip eşitsizlikler analiz ve kısmi diferansiyel denklemlerde oldukça önemlidir. Çok bilinen eşitsizliklerden bir tanesi Hermite Hadamard eşitsizliğidir. Jensen eşitsizliği ve bu eşitsizliğin sonucu olarak elde edilen diğer birçok önemli eşitsizlikler ifade edilerek verilecektir. Literatürde bu konuda yazılmış kitap ve yayımlanmış makalelerden istifade yoluna gidilecektir.

Görüldüğü üzere konvekslik kavramı hem optimizasyon teorisinde hem de eşitsizlik teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Zamanla gelişen teorik ve uygulamalı bilimler sayesinde klasik konvekslik kavramının genişletilmesine ve farklı konvekslik çeşitlerinin tanımlanmasına ihtiyaç duyulmuştur.

Bu tezde konveks fonksiyonlar sınıfını tanıtır ve genelleştirilme metotları verilmiştir. Bu tür fonksiyonlar için Jensen eşitsizlikleri, Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliklerinin ispatlarını göstererek ve bazı eşitsizliklerden yararlanarak, yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca s -konveks, h -konveks ve p -konveks fonksiyonunu gösterip, genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar için de Hermite-Hadamard ve Jensen tipi eşitsizlikleri de elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Konveks Fonksiyon) Eğer $\forall x, y \in I, \lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f: I \rightarrow R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Niculescu ve Person 2006).

Tanım 2.2 (Süreklilik) $a \in A \subset R$ ve $f: A \rightarrow R$ fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için, $|x - a| < \delta$ ise $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ önermesinin doğru olduğu bir $\delta > 0$ varsa o zaman f fonksiyonuna a da süreklidir denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Tanım 2.3 (Jensen Eşitsizliği) Eğer $\forall x, y \in I$ ve $f: I \rightarrow R$ fonksiyonu için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir. (Pachpatte 2005a).

Tanım 2.4 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f: I \subset [a, b] \rightarrow R$ konveks fonksiyon olsun. $x \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. (Pachpatte 2005a).

Tanım 2.5 (h - Konveks Fonksiyonlar) $h: J \subset R \rightarrow R$ negatif olmayan fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $f: I \subset R \rightarrow R$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq hf(x) + h(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna h - konveks fonksiyon denir. (Varosanec 2007).

Tanım 2.6 (m - Konveks Fonksiyon) $\forall x, y \in [0, b]$ ve $m, t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow R$ fonksiyonu için,

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna m - konveks fonksiyon denir. (Toader 1984).

Tanım 2.7 (Birinci ve İkinci Anlamda s - Konveks Fonksiyon)

$f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu her $x, y \in R$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve bazı $s \in (0, 1]$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s - konveks fonksiyon denir. (Hudzik ve Maligranda.1994).

$f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu için, her $x, y \in [0, \infty]$, $t \in [0, 1]$ ve $s \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s - konveks fonksiyon denir. (Hudzik ve Maligranda 1994).

Tanım 2.8 (η - Konveks Fonksiyon) Eğer $\forall x, y \in [a, b]$, $t \in [0, 1]$ için

$\eta: R \times R \rightarrow R$ olacak şekilde,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(y) + t\eta(f(x), f(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonuna η - konveks fonksiyon denir. (Gordji vd. 2016).

3. REEL DÜZLEMDE KONVEKS FONKSİYONLAR

Konveks fonksiyonlar hakkında klasik çalışmalar Niculescu C. ve Person L. (2006) tarafından ortaya çıkarılmış ve matematikçiler arasında yerini almıştır. Konveks fonksiyonların tarihi oldukça eskidir. Konveks fonksiyonlar hakkında ilk çalışmalar 19. yüzyılın sonlarına kadar dayanmaktadır. Sonraki yıllarda da konveks fonksiyonlar matematiksel analizde önemli bir yere sahip olmuştur.

Jensen konveks fonksiyonlar hakkında ilk gerçek çalışmayı vermiştir. Jensen, konveks fonksiyon kavramını temel olarak pozitif fonksiyon veya artan fonksiyon olarak tanımlamıştır. (Jensen 1906).

3.1 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa,

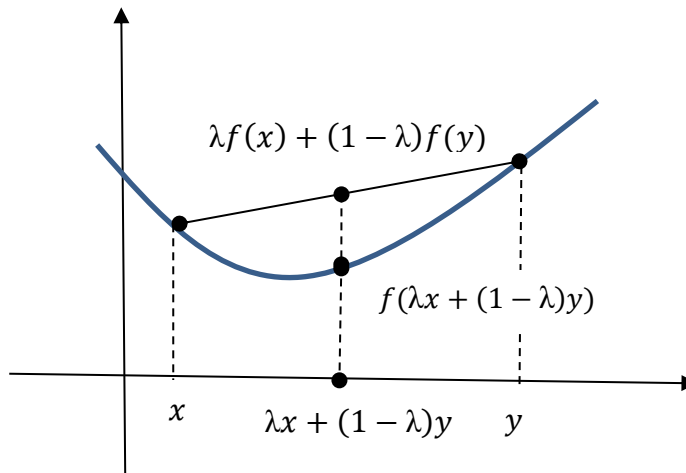
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.1.1)$$

f fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizliğin tam tersi konkavdır. (Niculescu ve Person 2006).

Tanım 3.1.2 Eğer (3.1.1)'de

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.1.2)$$

sağlanırsa, o zaman (3.1.2) eşitsizliğine kesin konveks fonksiyon denir. (Niculescu ve Person 2006).



Şekil 3.1 Konveks fonksiyonların grafiği

Örnek 3.1.2 $f(x) = x^2$ fonksiyonun konveks fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \\
 &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy + (1 - \lambda)^2 y^2 \\
 &\leq \lambda^2 x^2 + \lambda(1 - \lambda)[x^2 + y^2] + (1 - \lambda)^2 y^2 \\
 &= \lambda^2 x^2 + \lambda(1 - \lambda)x^2 + \lambda(1 - \lambda)y^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 \\
 &= x^2(\lambda^2 + \lambda - \lambda^2) + y^2(1 - \lambda)(\lambda + 1 - \lambda) \\
 &= \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)y^2.
 \end{aligned}$$

Burada $k^2 + m^2 \geq 2km$ temel eşitsizliği kullanılmıştır.

Konveks fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

I. f fonksiyonu konveks fonksiyon ve c sabit ise cf konveks bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
 cf(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq c(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \\
 &= c\lambda f(x) + c(1 - \lambda)f(y) \\
 &= \lambda cf(x) + (1 - \lambda)cf(y).
 \end{aligned}$$

II. Konveks fonksiyonların toplamı da konveks fonksiyondur.

O halde f ve g fonksiyonları iki konveks fonksiyon olsun. O zaman konveks fonksiyonların toplamı $h = f + g$ olduğuna göre, h konveks bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
 h(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= (f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
 &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
 &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \\
 &= \lambda[f + g](x) + (1 - \lambda)[f + g](y) \\
 &= \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).
 \end{aligned}$$

III. f fonksiyonu konveks ve artan, u konveks ise $f(u(x))$ fonksiyonu konvektir.

$$\begin{aligned}
 f(u(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &\leq f(\lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)) \\
 &\leq \lambda f(u(x)) + (1 - \lambda)f(u(y)).
 \end{aligned}$$

IV. Konveks fonksiyonlar sürekli olmayabilir.

Örneğin,

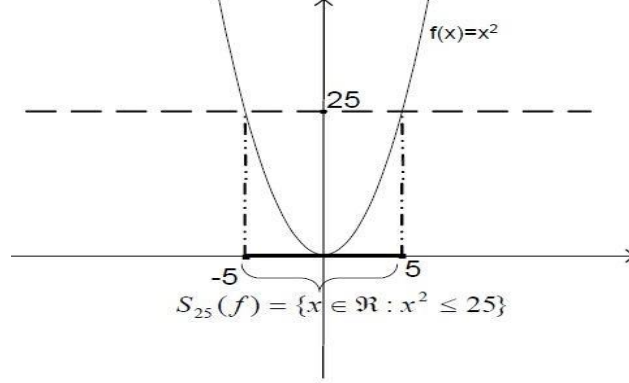
$$f(a) = \begin{cases} a^2 & , & -2 \leq a < 2 \\ 3 & , & a = 5 \end{cases}$$

fonksiyonu sürekli değildir ancak konveks fonksiyondur.

V. Konveks fonksiyonlar türevlenebilir olmayabilir.

Örneğin, $f(a) = |a|$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. Ancak $a = 0$ noktasında türevlenebilir değildir.

Örnek 3.1.3 $f(x) = x^2$ konveks bir fonksiyon ise $S_{25}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 25\}$ eşitsizliğinin grafiğini gösteriniz.



Şekil 3.2 $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $S_{25}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 25\}$ grafiği

Sonuç 3.1.4 $\forall x, y \in I \subset \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ ise, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyonu için $\lambda = \frac{1}{2}$ durumunda konveksliğini incelendiğinde,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği bulunur.

3.2 Süreklilik ve Diferensiyellenebilirlik

Tanım 3.2.1 Konveks bir fonksiyon $[a, b]$ ve $z \in [a, b]$ ise, $z = \lambda a + (1 - \lambda)b$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(z) = f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \lambda M + (1 - \lambda)M = M$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $M = \max(f(a), f(b))$ kapalı aralıkta f üstten sınırlıdır denir.

Ayrıca keyfi bir nokta yazarsak $z \in [a, b]$, $z = (a + b)/(2 + t)$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(2\frac{a+b}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{4} + \frac{t}{2} + \frac{a+b}{2} - \frac{t}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f alttan sınırlıdır denir.

f fonksiyonu alttan ve üstten sınırlı olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m$$

eşitsizliği elde edilir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Teorem 3.2.2 (Lipschitzian Koşulu) $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $\forall x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq C(x - y)$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna I 'da Lipschitzian koşulunu sağlıyor denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: $\forall \varepsilon > 0$ için $a - \varepsilon, b + \varepsilon \in I$ olsun. $z = y + \frac{\varepsilon}{|y-x|}(y - x)$ ve $\lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon + |y-x|}$ alalım.

O halde, $z \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, ve $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$ için

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \lambda f(z) + (1 - \lambda)f(x) \\ &= \lambda(f(z) - f(x)) + f(x) \\ &= f(y) - f(x) \leq \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|} (f(z) - f(x)) \\ &\leq \frac{|y - x|}{\varepsilon} (M - m) = K|y - x| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, $[a, b]$ ayrık noktalar kümesi için $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ aralığının m ve M 'nin alt ve üst sınırlarıdır. Burada $\forall x, y \in [a, b]$ ve $K = (M - m)/\varepsilon$ doğru olduğundan,

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

elde edilir. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ koleksiyonu için $[a, b]$ ayrık noktalar ise,

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \text{ için } \delta = \varepsilon/K \text{ alınırsa } \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

Önerme 3.2.3 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. $x, y, z \in I$ için $x < y < z$ olacak şekilde,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: İlk eşitsizlik için,

$$y = x + \frac{y-x}{z-x}(z-x) \quad \text{ve} \quad f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)) \quad \text{eşitsizliği}$$

kullanılarak ikinci eşitsizlik, $z = x + \frac{z-x}{z-y}(z-y)$ elde edilir. Böylelikle eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 3.2.4 $f: I \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olsun. $\forall x \in I$ için $t \in I - \{x\} \rightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ artandır. $f: I \rightarrow R$ için f'_- ve f'_+ kullanılarak Önerme 3.2.3 ve Sonuç 3.2.4 kullanılarak kolayca ispatlanabilir. (Stolz 1893).

3.3 Karakterizasyonlar

Teorem 3.3.1 $f: [a, b] \rightarrow R$ konveks (kesinlikle konveks) ancak ve ancak (kesin artan) bir fonksiyon, $g: [a, b] \rightarrow R$ olmak üzere $c \in (a, b)$ ve $\forall x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

eşitliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: İlk olarak $f: [a, b] \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olsun. Lebesgue integrali için artan $g = f'_-$ seçelim. $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$ eşitsizliği vardır. Teorem 3.2.2'e göre $f, [c, x]$ kesinlikle süreklidir. (Royden 1988). Ayrıca f kesinlikle konveks ise g kesinlikle konvektir. Tersine, $x < y$ için g artan ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun.

$$\begin{aligned} & \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &= (1 - \lambda) \int_{\lambda x + (1 - \lambda)y}^y g(t)dt - \lambda \int_x^{\lambda x + (1 - \lambda)y} g(t)dt \end{aligned}$$

Önceki eşitliğin sağ tarafındaki integrali yeniden yazılırsa, $g(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda)g(\lambda x + (1 - \lambda)y)[y - \lambda x - (1 - \lambda)y] \\ & \quad - \lambda g(\lambda x + (1 - \lambda)y)[\lambda x + (1 - \lambda)y - x] \\ &= (1 - \lambda)g(\lambda x + (1 - \lambda)y)\lambda[y - x] \\ & \quad - \lambda g(\lambda x + (1 - \lambda)y)(\lambda - 1)[y - x] = 0 \\ & \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq 0 \end{aligned}$$

Bu nedenle f konveks bir fonksiyondur.

Teorem 3.3.2 f fonksiyonu (a, b) üzerinde $f: [a, b] \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir konveks fonksiyon ise f' artandır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: Kabul edilsin f' artan olsun. $c \in (a, b)$ için $f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt$ vardır. Böylece Teorem 3.3.1'i kullanılarak f konveks bir fonksiyondur.

Teorem 3.3.3 Kabul edilsin (a, b) üzerinde f'' olsun. O zaman f' 'in konveks fonksiyon olması için ancak ve ancak $f''(x) > 0$ ve $f''(x) > 0$ aralıkta kesinlikle konvektir. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: Eğer f' artan ise ancak ve ancak f'' negatif olmayan ve f' pozitif olduğunda kesinlikle artandır.

Teorem 3.3.4 $f: (a, b) \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olması için her bir $x_0 \in (a, b)$ aralığında f fonksiyonunun en az bir alt sınırı vardır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: f konveks bir fonksiyon ise ve $x_0 \in (a, b)$ için $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ seçelim.

$x > x_0$ veya $x < x_0$ sırasıyla $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m$ ya da $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m$ sağlanır. Her iki

durumda da $f(x) - f(y) \geq m(x - x_0)$ için $f(x) \geq m(x - x_0) + f(x_0) = A(x)$ dir.

Tersine, f için $x_0 \in (a, b)$ bir sınırı olmak üzere, $x, y \in (a, b)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$ olsun. $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ fonksiyonu f için x_0 de sınırlıdır. O halde,

$f(x_0) = A(x_0) = A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda A(x) + (1 - \lambda)A(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ eşitsizliği sağlanır.

3.4 Fonksiyonel İşlemlerde Kapalılık

Teorem 3.4.1 $f: I \rightarrow R$ ve $g: I \rightarrow R$ konveks fonksiyon olsun. $\alpha \geq 0$ ise $(f + g)$ ve αf konveks fonksiyondur. (Vivas ve Hernandez 2017).

Teorem 3.4.2 $f: I \rightarrow R$ ve $g: I \rightarrow R$ olsun. Eğer f ve g konveks fonksiyonlar ve g artan ise o zaman $(g \circ f)$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. (Vivas ve Hernandez 2017).

$$\begin{aligned} \text{İspat: } g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &\leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda g(f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f)(x) + (1 - \lambda)(g \circ f)(y) \end{aligned}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.3 Eğer $f: I \rightarrow R$ ve $g: I \rightarrow R$ negatif olmayan, azalan(artan) ve konveks fonksiyon ise o halde $h(x) = f(x)g(x)$ eşitsizliği de negatif olmayan azalan (artan) ve konveks fonksiyondur. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: İlk iki özellikten $x < y$ kabul edilsin.

$$\begin{aligned} [f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] &\leq 0 \\ f(x)g(y) + f(y)g(x) &\leq f(x)g(x) + f(y)g(y) \end{aligned}$$

$\lambda \in (0,1)$ alınır,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y)g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq [\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)][\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)] \\ &= \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)[f(x)g(y) + f(y)g(x)] \\ &\quad + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) \\ &\leq \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)[f(x)g(x) + f(y)g(y)] \\ &\quad + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) = \lambda f(x)g(x) + (1 - \lambda)f(y)g(y). \end{aligned}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.4 $f_\alpha: I \rightarrow R$ ve $f = \sup_\alpha (f_\alpha)$ keyfi bir konveks fonksiyon ailesi olsun. Eğer $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ ise f, J üzerinde konvektir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Teorem 3.4.5 Eğer $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ bir dizi ve $f_n: I \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olsun. Her $n = 1, 2, 3, \dots$ için sonlu bir limit f fonksiyonuna I üzerinde f fonksiyonuna yakınsar ise f konveks fonksiyonu herhangi bir kapalı alt aralığında düzgün yakınsaktır. (Vivas ve Hernandez 2017).

Tanım 3.4.6 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f^\lambda(x)f^{1-\lambda}(y)$ eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna logaritmik konveks fonksiyon ya da çarpımsal konveks fonksiyon denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

3.5 Eşitsizlikler

Eşitsizlikler, fonksiyonel analiz, diferansiyel ve integral denklemler teorisi olasılık teorisi gibi matematiğin birçok dalında en önemli araçlardan biridir. Eşitsizlikler hakkında klasik çalışmalar Hardy vd. tarafından ortaya çıkarılmış ve matematikçiler arasında yerini almıştır. Bu çalışmada klasik ve yeni eşitsizlikler hakkında geniş çeşitlilik, problemler, sonuçlar, teoremler ve ispatlar sunulacaktır. Ayrıca mekanik, fizik ve diğer bilimlerde de kullanılır. Klasik eşitsizliklerin kesinleştirilmesi ve genişletilmesi yeni eşitsizlik türlerinin keşfedilmesine ve analizin bir çok bölümünde uygulanmasına öncü olmuştur. Günümüzde eşitsizlikler teorisi hala yoğun bir şekilde özellikle son zamanlarda yayınlanan bir çok kitap ve makale ile geliştirilmektedir. Dolayısıyla eşitsizlikler teorisi matematiğin bir alanı olarak kabul edilebilir. Ostrowski eşitsizliği için Alexander tarafından yıllar geçtikçe incelenen fonksiyonunun türevlerini içeren genellemeler yaptı. (Ostrowski 1938).

3.6 Klasik Eşitsizlikler

Teorem 3.6.1 Negatif olmayan a ve b sayıları için $a = b$ ise $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği n sayısı için genellemek mümkündür. (Vivas ve Hernandez 2017).

Teorem 3.6.2 Negatif olmayan $a_1, a_2, a_3, \dots$ için $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ olmak üzere,

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu eşitsizliğe Bernoulli eşitsizliği denir. (Beckenbach 1961).

Teorem 3.6.3 Eğer $h < -1$ ve n bir doğal sayı ise, Bernoulli eşitsizliği kullanılarak $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ bulunur. (Mitrinovic 1970).

Teorem 3.6.4: Eğer $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n$ ise

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

eşitsizliği Chebychev eşitsizliği olarak adlandırılır. (Mitrinovic 1964).

3.7 Jensen Eşitsizliği

Jensen eşitsizliği konveks fonksiyonlar için en temel eşitsizliklerden biridir. Jensen eşitsizliği için birçok araştırmalar yapılmaktadır. Jensen eşitsizliği diğer klasik eşitsizliklerin tüm serisini ifade ettiği için eşitsizliklerin kralı olarak adlandırılır.

Teorem 3.7.1 $f: I \subseteq R \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olsun. $\forall x_i \in I$ ve $t_i \in [0,1]$ olmak üzere $i = 1, 2, 3, \dots, n$ alınırsa, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ için $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ eşitsizliği sağlanır. (Jensen 1906).

3.8 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Hadamard analizdeki temel eşitsizlikleri araştırmış ve bunu da literatürde bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırmıştır ve 1881 yılında Mathesis dergisinde yayınlanmıştır. Sonraki yıllarda birçok araştırmacı çeşitli genellemeler, varyanslar ve çözümler elde etmişlerdir. Hermite-Hadamard eşitsizliği konveks fonksiyonlar için en temel integral eşitsizliklerinden biridir.

Teorem 3.8.1 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $[a, b] \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebiliyorsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. (Hadamard 1983).

3.9 Fejér-Hadamard Eşitsizliği

Teorem 3.9.1 $f: [a, b] \rightarrow R$ konveks fonksiyon ve $g: [a, b] \rightarrow R$, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir negatif olmayan, $\frac{a+b}{2}$ için simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. (Fejér 1906).

3.10 Ostrowski Eşitsizliği

Ostrowski eşitsizliği Alexander Ostrowski tarafından 1938 yılında tanıtılmış ve yıllar geçtikte fonksiyonun türevlerini içeren çalışmalar yapılmıştır.

Teorem 3.10.1 $f: I \subset [0, +\infty) \rightarrow R$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise,

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. (Ostrowski 1938).

3.11 Chebysev Eşitsizliği

Teorem 3.11.1 Eğer $f', g' \in L_\infty [a, b]$ ise,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \\ \leq \frac{1}{12} (b-a)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Mitrinovic vd. 1993).

3.12 Grüss Eşitsizliği

Teorem 3.12.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \\ \leq \frac{1}{4} (M-m)(N-n) \end{aligned}$$

M, m, N, n için $\forall x \in [a, b]$ olmak üzere $-\infty < m \leq f(x) \leq M \leq \infty$ ve $-\infty < n \leq g(x) \leq N \leq \infty$ şartları sağlanır. (Mitrinovic vd. 1993).

3.13 Simpson Eşitsizliği:

Teorem 3.13.1 $f: [a, b] \rightarrow R$ dört kez sürekli türevlere sahip fonksiyon ve

$$\begin{aligned} \|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty \text{ için,} \\ \left| \frac{1}{3} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Sarıkaya vd. 2010).

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKSLİK

Konvekslik matematikteki en önemli ve temel kavramlardan biridir. Son zamanlarda genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır ve h –konveks, güçlü konveks, p –konveks gibi yeni sonuçlar elde edilmiştir.

4.1 P - Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1 $I \subset \mathbb{R}$, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye P -konveks fonksiyon denir. (Dragomir, 1995).

4.2 Birinci ve İkinci Anlamda s - Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ iken $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $\forall x, y \in [0, \infty)$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa birinci anlamda s - konveks fonksiyonlar denir. (Hudzik ve Maligranda 1994).

.

Tanım 4.2.2 $0 < s \leq 1$ olsun. $\lambda \geq 0$ ve $\forall x, y \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda s - konveks fonksiyonlar denir. (Breckner 1978).

$[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan fonksiyonların konveksliği $s = 1$ için s -konveks fonksiyona dönüşür. Ayrıca,

a. f , s - konvekstir ancak ve ancak $\lambda \in [0,1]$ iken $\forall x, y \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y)$$

b. f , s - konveks ise ancak ve ancak f konvekstir.

c. f ikinci anlamda s - konveks ise $f(0) = 0$ iken f , birinci anlamda s -konvekstir.

4.3 m -Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.3.1 $\forall x, y \in [0, b]$ ve $m, t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow R$ fonksiyonu için,

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir. Ayrıca $-f$ fonksiyonu m -konveks ise f fonksiyonu m -konkavdır. Böylece $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı m -konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. (Toader 1984).

Uyarı 4.3.2 Ayrıca 1-konveks fonksiyon klasik fonksiyonlar ve 0-konveks fonksiyonlar ise "yıldız şekilli" fonksiyonlardır. Yani $t \in [0, 1]$ için $f(tx) \leq tf(x)$ eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlardır. Geometrik olarak bir fonksiyon $\forall x, y \in [0, b]$ için $f: [0, b] \rightarrow R$ ise m -konvekstir. O halde $x \leq y$ olsun. $(x, f(x))$ ve $(my, mf(y))$ noktaları arasındaki doğru $[x, my]$ aralığı f grafiği üzerindedir.

Örnek 4.3.3 $\forall m \in (0, \frac{1}{2}]$ için $x = 1$ 'de süreksiz ise m -konveks bir fonksiyondur.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & , & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

4.4 h -Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.4.1 $h: J \subset R \rightarrow R$ negatif olmayan fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $f: I \subset R \rightarrow R$ negatif olmayan fonksiyonu için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq htf(x) + h(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa h -konveks fonksiyon denir. (Varosanec 2007).

Bu tanımdan h -fonksiyon sınıfı Godunova-Levin fonksiyonların sınıfını içerir.

- Eğer $h(t) = 1$ ise h -konveks fonksiyon f bir P -fonksiyondur.
- Eğer $h(t) = t^s$, $s \in (0, 1]$ ise h -konveks fonksiyon f bir s -fonksiyondur.
- Eğer $h(t) = t^s$, $s = -1$ ise h -konveks fonksiyon f bir Godunova-Levin fonksiyondur.

Tanım 4.4.2 $h: J \rightarrow R$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall t \in (0,1)$ ve $A, B \in K \subset B(H)^+$ olmak üzere $f: I \subset R \rightarrow R$ sürekli fonksiyonu için

$$f(tA + (1-t)B) \leq h(t)f(A) + h(1-t)f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa K operatörlerine h - operatörleri denir. $B(H)^+$ için $S_p(A) \subset I$ ve $S_p(B) \subset I$ operatörleri C_-^* cebirinin değişmesi gösterilir. Hilbert uzayının H üzerindeki iç çarpımı $\langle, \rangle$ veya $S_p(\cdot) = \alpha(\cdot)$ 'dır. (Vivas ve Hernandez 2017).

4.5 η -Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.5.1 $f: I \rightarrow R$ fonksiyonu ve $\eta: R \times R \rightarrow R$ fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta(f(x), f(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna η - konveks fonksiyon denir. (Gordji vd. 2016). Klasik fonksiyonlar için $\eta(x, y) = x - y$ seçilirse η - konveks fonksiyonun sonuçlarına ulaşılır. Bazı sonuçlar η - konveksiyonun Hermite-Hadamard eşitsizliğinin versiyonu olarak bilinir. (Gordji vd. 2017).

4.6 GA- Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.6.1 $f: I \subset R_+ = (0, +\infty)$ fonksiyonu olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t, y^{(1-t)}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna GA- konveks fonksiyon denir.(Nicolescu 2006).

4.7 (s, m) Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.7.1 $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, $(s, m) \in [0,1]$ için,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^s f(x) + m(1-t^s)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna (s, m) konveks fonksiyon denir.(Milhesan1993).

Örnek 4.7.2 $g: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyon olsun,

$$g(x) = \begin{cases} a & , \quad x = 0 \\ bx^s + d & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$a, b, d \in R$ için $b \geq 0$ ve $d \leq a$ iken $s \in (0,1)$ ise $(s, 1)$ konveks fonksiyondur.

Örnek 4.7.3 $g: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyon olsun. Buna göre,

$$g(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x)$$

ise $\alpha(1,16/17)$ konvektir.

4.8 (m, h_1, h_2) Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.8.1 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ iken $h_1, h_2: [0,1] \rightarrow R_+$ ve $m \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq h_1(t)f(x) + mh_2(t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna (m, h_1, h_2) konveks fonksiyon denir. (Shi 2014).

Tersine ise (m, h_1, h_2) konkav fonksiyondur.

4.9 $(m, h_1, h_2) - GA$ Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.9.1 $f: (0, b] \rightarrow R_0$ fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ iken $h_i: [0,1] \rightarrow R_0$, $m_i: [0,1] \rightarrow (0,1)$ için $h_i \not\equiv 0$ ve $i = 1,2$ için

$$f(x^t \cdot y^{(1-t)} m^t) \leq h_1(t)f(x) + m(t)h_2(1-t)f(y) \quad (3.9.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(m, h_1, h_2) - GA$ konveks fonksiyon denir. (Bo-Yaw vd. 2016)

4.10 Bağlı m -logaritmik Yarı Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.10.1 $g: H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve K_g herhangi bir bağlı konveks küme olsun.

$\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$(1-t)u + tg(v) \in K_g$$

eşitsizliği sağlanır. (Noor 2008).

Uyarı: Eğer M bağıl konveks kümesi ise klasik bir konveks küme değildir. Ayrıca bazı Hadamard eşitsizlikleri yer alır. Örneğin, $\forall x \in R$ için $g(x) = x^2$ ve $M = [-1, -12] \cup [0,1]$ bağıl konveks kümedir ancak klasik bir konveks küme değildir. (Noor 2007).

Tanım 4.10.2 $g: H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve $f: K_g \rightarrow H$ bağıl konveks fonksiyon olsun.

$\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f((1-t)u + tg(v)) \leq (1-t)f(u) + tf(g(v))$$

eşitsizliği sağlanır. (Noor 2008).

Tanım 4.10.3 $g: H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve $f: K_g \rightarrow [0, \infty)$ yarı logaritmik bağıl bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f((1-t)u + tg(v)) \leq (f(u))^t (f(v))^{1-t}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

Tanım 4.10.4 $g: H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve $f: K_g \rightarrow (0, +\infty)$ için K_g bağıl fonksiyon kümesi olsun. $\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t, m \in (0,1)$ için,

$$f(m(1-t)u + tg(v)) \leq (f(u))^{m(1-t)} (f(v))^t$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bağıl m -logaritmik yarı konveks fonksiyon denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Tersine f fonksiyonuna m -logaritmik yarı konveks fonksiyon denir.

Uyarı 4.10.5

- a. Tanım 4.10.4'de $m = 1$ alınırsa yarı logaritmik konveks fonksiyon elde edilir.
- b. Tanım 4.10.4'de $g(x) = x$ alınırsa (s, m) logaritmik konveks fonksiyon elde edilir.

4.11 Genelleştirilmiş Konvekslikle İlgili Tanımlar

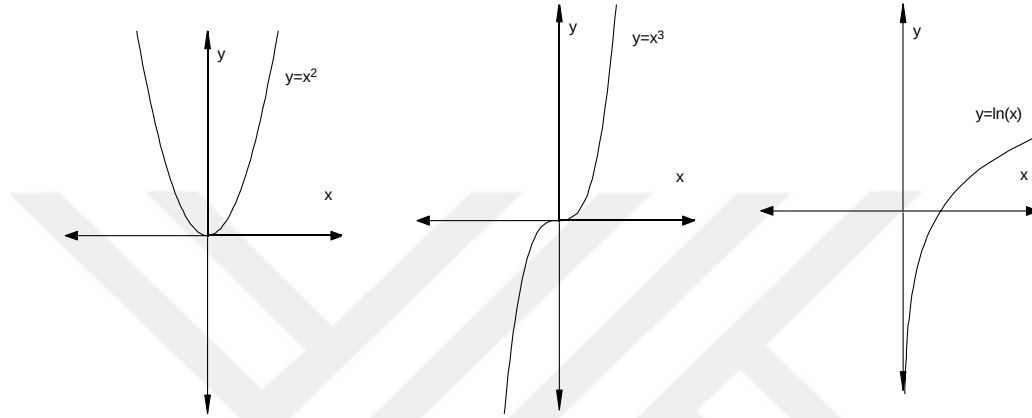
Genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar konveks kavramı üzerinde çalışmalara ve uygulamalara bağlı olarak genelleştirilmesidir.

4.11.1 Quasi Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.11.2 $f: D \subset X \rightarrow R$ fonksiyonu $t \in (0,1)$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna quasi konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlik tersine ise f fonksiyonu quasi konkav fonksiyon olur. (Diewert 1981).



Şekil 4.1 Quasi konveks fonksiyon grafikleri

Uyarı: Grafiklerden de görüleceği üzere konveks fonksiyonlar ve quasi konveks fonksiyonlar arasında kapsama ilişkisi bulunmaktadır.

Örnek 4.11.3 $f: [-2,2] \rightarrow R$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & , \quad -2 \leq x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

quasi konveks fonksiyondur ancak monoton bir fonksiyon değildir.

4.12 Wright Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.12.1 $f: D \subset R^n \rightarrow R$ fonksiyonu $x, y \in D$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) + f(ty + (1 - t)x) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna wright konveks fonksiyon denir. (Wright 1954).

4.13 Güçlü Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.13.1 $f: D \subset X \rightarrow R$ fonksiyonu $(X, ||\cdot||)$ bir reel normlu uzay ve I, X 'in konveks alt kümesi $c > 0$ olsun. $\forall x, y \in D$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + ct(1-t)||x - y||^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna güçlü konveks fonksiyon denir. (Polyak 1966).

4.14 Güçlü (s, m) Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.14.1 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu

$\forall x, y \in [0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için $(s, m) \in [0,1]^2$ iken,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^s f(x) + m(1-t)^s f(y) - ct(1-t)|x - y|^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda c modülüne göre (s, m) konveks fonksiyonlar denir. (Vivas 2016).

Örnek 4.14.2 Örnek 4.7.2'de $f(x) = g(x) + cx^2$ fonksiyonunda g güçlü $(s, 1)$ konveks fonksiyondur.

Örnek 4.14.3 Örnek 4.7.3'de $f(x) = g(x) + (9/12 + c)x^2$ fonksiyonunda $(1, 16/17)$ konveks fonksiyondur.

4.15 Bağlı Güçlü h - Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.15.1 $g: H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve $f: K_g \rightarrow H$ bağlı h - konveks fonksiyon olsun.

$\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t \in (0,1)$ iken $h: [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ için

$$f((1-t)u + tg(v)) \leq h(1-t)f(u) + h(t)f(g(v))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bağlı güçlü h - konveks fonksiyon denir. (Noor 2015).

Tanım 4.15.2 $f: D \subset X \rightarrow R$ fonksiyonu $(X, ||. ||)$ bir reel normlu uzay ve D , X 'in konveks alt kümesi $c > 0$ olsun. $\forall x, y \in D$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna kuvvetli h - konveks fonksiyon denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Tanım 4.15.3 $H \rightarrow H$ bir fonksiyon ve $f: K_g \rightarrow H$ bağıl konveks fonksiyon olsun.

$\forall u, v \in H: u, g(v) \in K_g$ ve $t \in (0,1)$ için, $c > 0$ iken $h: [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ ise

$$f((1-t)u + tg(v)) \leq h(1-t)f(u) + h(t)f(g(v)) - ct(1-t)||u - g(v)||^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bağıl kuvvetli h -konveks fonksiyon denir. (Vivas ve Hernandez 2017).

Uyarı 4.15.4

- a. Tanım 4.15.3'de $h(t) = t$ alınırsa c modülü ile bağıl güçlü konveks fonksiyonu elde edilir.
- b. Tanım 4.15.3'de $h(t) = t^s$ alınırsa bağıl güçlü c modülü h -konveks fonksiyonu s -konveks fonksiyona indirgenir.
- c. Tanım 4.15.3'de $h(t) = 1$ alınırsa c modülü ile güçlü P -konveks fonksiyonu elde edilir.
- d. Tanım 4.15.3'de $g(x) = x$ alınırsa güçlü h -konveks fonksiyonu elde edilir.
- e. Tanım 4.15.3'de $g(x) = x$ ve $h(t) = t$ alınırsa c modülü ile güçlü konveks fonksiyonu elde edilir.

4.16 İnvex Konveks Fonksiyonlar

Bir f fonksiyonunu konveks açık kümede $D \subset R^n$ türevlenebilirdir ancak ve ancak $y \in D$ için $f(y) - f(x) \leq \nabla f(x)(x - y)$ eşitsizliği vardır.

Tanım 4.16.1 $D \subset R^n \rightarrow R$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in D$ olmak üzere $\eta: R^n \times R^n \rightarrow R$ için $f(y) - f(x) \leq \nabla f(x) \cdot \eta(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna invex fonksiyon denir. (Craven 1981).

$f: D \subset R^n \rightarrow R$ türevlenebilir fonksiyonlar için $\eta(x - y) = x - y$ invex fonksiyondur.

4.17 δ -Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.17.1 $F: A \rightarrow Y$ kümesi için X, Y normlu uzaylar doğrusu olsun. $A \subset X$ açık konveks kümesi ve A üzerinde sürekli bir konveks fonksiyon ise $(f + y^* \circ F)$ için F fonksiyonuna δ -konveks fonksiyon denir. (Vesely ve Zajisec 1989). A sürekli konveks fonksiyon olacak şekilde $y^* \in Y^*$ ve $\|y\| = 1$ vardır. F için f fonksiyonu tarafından delta konveks eşleşmedir.

Delta konveks eşleşmeler diferansiyellenebilir konveks fonksiyon özelliklerine sahiptir. Bu yüzden integral ve diferansiyel denklemler delta-konveks fonksiyon özellikleri gösterir.



5. EŞİTSİZLİKLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKSLİK

Genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar konveks kavramı üzerinde çalışmalara ve uygulamalara bağlı olarak genelleştirilmesidir. Bu genellemelerden bazıları yarı-dışbükey (quasi-konveks), h -konveks, s -konveks, η -konveks, güçlü konveks v.b dir. Bu bölümde genelleştirilmiş konveks fonksiyonlardan η -konveks, s -konveks ve m -konveks fonksiyonları ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler verilecektir.

5.1 p –Konveks Fonksiyonlar

p –konveks fonksiyonu Hermite Hadamard eşitsizliğini gösterir.

Teorem 5.1.1 $f \in P(I)$ konveks bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ için $a < b$ ise, $f \in L([a, b])$ için $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq 2(f(a) + f(b))$ eşitsizliği sağlanır. (Boyan 1898).

Teorem 5.1.2 $f: I \subset R \rightarrow R$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $a, b \in (I)$ ile $a < b$ için $f''' \in L([a, b])$ olsun.

Eğer, $|f'''|^q$ ise p – konveks fonksiyon için $[a, b]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, o zaman,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^2}{24} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^3}{192} (|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q)^{1/2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanarak Hermite Hadamard eşitsizliği bulunabilir. (Vivas ve Hernandez 2017).

5.2 s –Konveks Fonksiyonlar

Dragomir ve Fitzpatrick Hermite Hadamard'ın ikinci anlamda s - konveks fonksiyonlar sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır. (Dragomir vd. 1999).

Teorem 5.2.1 $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyon olsun. Burada $s \in (0,1)$ ve $a, b \in [0, \infty)$ için $a < b$ olmak üzere. $f \in L([a, b])$ ise,

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği sağlanır. (Sarıkaya 2010).

Teorem 5.2.2 $f: I \subset [0, \infty) \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Burada $a < b$ için $f' \in L_1([a, b])$ ve $a, b \in (I)$ olmak üzere,

$|f'|$ ve s -konveks fonksiyon ise, $[a, b]$ sabitler için $s \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$\left| \frac{1}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \frac{(s-4)6^{s+1} + 2x5^{s+2} - 2x3^{s+2} + 2}{6^{s+2}(s+1)(s+2)} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği sağlanır. (Alomari 2010).

Teorem 5.2.3 $f: I \subset [0, \infty) \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Burada $a < b$ için $f' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ olmak üzere, $|f'|^q$ ve s -konveks fonksiyon ise, $[a, b]$ sabitler için $s \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ ise $|f'(x)| \leq M$ sağlanıyor ise $x \in [a, b]$ olsun. O zaman, $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq M \left(\frac{2}{s+1} \right)^{1/q} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2(b-a)} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

5.3 h –Konveks Fonskiyonlar

5.3.1 Self Adjoint Operatörlerde Hilbert Uzayları

Bu bölümde self-adjoint operatörler hakkında temel bilgiler verilecektir. Ayrıca Hilbert Uzayları ortamındaki self-adjoint operatörlerde Vivas, M ve Hernandez, J tanımı vardır. (Vivas 2016-2017).

Teorem 5.3.1.1 $(0,1) \subset J$ olsun. $h: I \rightarrow R$ negatif ve sıfır olmayan alt çarpımsal bir fonksiyon olsun. $f: I \rightarrow R$ bir fonksiyon ise. $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ pozitif gerçel sayılar kümesinde h -konveks fonksiyonu tanımlanmıştır. Burada, $I \subset [0, \infty)$ için, $K \subset B(H)^+$ ve $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in K$ ile $\sigma(A_i) \subset I$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere, $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$ için,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(A_i)$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: $n \geq 2$ olsun. Tümevarım yöntemiyle, Eğer $n = 2$ ise Tanım 4.4.1 elde edilir.

Burada, h - konveks fonksiyon ile $t = \frac{t_1}{T_2}, (1-t) = \frac{t_2}{T_2}, x = A_1, y = A_2$ olmak üzere,

Kabul edilsin $n - 1$ için n herhangi bir pozitif tam sayıdır. O zaman,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i A_i\right) = f\left(\frac{t_n}{T_n} A_n + \frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^{n-1} t_i A_i\right) = f\left(\frac{t_n}{T_n} A_n + \frac{t_{n-1}}{T_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{T_{n-1}} A_i\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Önceki eşitsizliğin sağ tarafındaki Tanım 4.4.1 kullanılarak,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i A_i\right) \leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(A_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{T_{n-1}} A_i\right)$$

elde edilir. Şimdi $n - 1$ için doğru olduğu gösterilsin,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i A_i\right) &\leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(A_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) f(A_i) \\ &= h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) f(A_i) \end{aligned}$$

doğrudur. h alt çarpımsal bir fonksiyon olduğu için,

$$h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) \leq h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n} \frac{t_i}{T_{n-1}}\right) = h\left(\frac{t_i}{T_n}\right)$$

elde edilen eşitsizliği kullanarak buradan,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i A_i\right) \leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(A_i) = \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(A_i)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1.2 f fonksiyonu h -konveks bir fonksiyon olsun. Eğer, $h(1/2) \neq 0$ ve $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ise,

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=1}^n f(x_i) - f\left(\sum_{n=1}^n \frac{f(x_i)}{n}\right) \right] \\ & \geq \frac{|1 - h(1/n)|}{2h(1/2)} \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n + x_1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: f fonksiyonu bir h -konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n + x_1}{2}\right) \leq 2h\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^n f(x_i).$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) &= \frac{|1 - h(1/n)|}{|1 - h(1/n)|} \sum_{n=1}^n f(x_i) \\ &\geq \frac{1 - h(1/n)}{|1 - h(1/n)|} \sum_{n=1}^n f(x_i) \\ &= \frac{1}{|1 - h(1/n)|} \left[\sum_{n=1}^n f(x_i) - h\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{n=1}^n f(x_i) \right] \\ &\leq \frac{1}{|1 - h(1/n)|} \left[\sum_{n=1}^n f(x_i) - f\left(\sum_{n=1}^n \frac{f(x_i)}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} & \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{|1 - h(1/n)|} \left[\sum_{n=1}^n f(x_i) - f\left(\sum_{n=1}^n \frac{f(x_i)}{n}\right) \right] \\ & \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n + x_1}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.1.3 $f: I \rightarrow R$ bir h - konveks fonksiyon olsun. $I \subset [0, \infty)$ için, $K \subset B(H)^+$ olmak üzere, $A_i \in K$ için ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ise,

$$\begin{aligned} & \frac{2h(\frac{1}{2})}{\left|1 - h\left(\frac{1}{n}\right)\right|} \left[\sum_{n=1}^n f(A_i) - f\left(\sum_{n=1}^n \frac{f(A_i)}{n}\right) \right] \\ & \geq f\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{A_{n-1} + A_n}{2}\right) + f\left(\frac{A_n + A_1}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

Sonuç 5.3.1.4 Eğer $h: J \subset R$ negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$f: I \rightarrow R$ bir h - konveks fonksiyonu olsun. $I \subset [0, \infty)$ için $K \subset B(H)^+$ olmak üzere, $A_i \in K$ ($i = 1, \dots, n$) ise,

$$f(B_1) + \dots + f(B_n) \leq \frac{1}{\left|1 - h\left(\frac{1}{n}\right)\right|} \left[\sum_{n=1}^n f(A_i) - f\left(\sum_{n=1}^n \frac{f(A_i)}{n}\right) \right]$$

Burada,

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{n}$$

$$B_i = \frac{nA - A_i}{n-1}, (i = 1, \dots, n)$$

eşitsizliği sağlanır. (Taghavi 2015).

Teorem 5.3.1.5 f, h - konveks fonksiyonunun bir operatörü olsun. O zaman,

$$\frac{1}{2h(1/2)} f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \int_0^1 f(tB + (1-t)A) dt \leq (f(A) + f(B)) \int_0^1 h(t) dt$$

eşitsizliği elde edilir. (Vivas 2017).

Teorem 5.3.1.6 Eğer $(0,1) \subset J$ ise, $h: J \rightarrow R$ için $h(\frac{1}{2}) \neq 0$ negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $f: I \rightarrow R$, h - konveks fonksiyonunun $I \subset [0, \infty)$ ve $K \subset B(H)^+$ operatörleri olsun. O zaman, $A, B \in K$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} \left((1-\lambda)f\left(\frac{(1-\lambda)A + (1+\lambda)B}{2}\right) + \lambda f\left(\frac{(2-\lambda)A + \lambda B}{2}\right) \right) \\ & \leq \int_0^1 f(1-t)A + tB) dt \\ & \leq \left(f((1-\lambda)A + \lambda B) + \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) \right) \int_0^1 h(t) dt \\ & \leq [(h(1-\lambda) + \lambda)f(A) + (h(\lambda) + 1 - \lambda)f(B)] \int_0^1 h(t) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: $f, I \subset [0, \infty)$ aralığında h - konveks bir fonksiyon olsun, $K \subset B(H)^+$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{(1-\lambda)A + (1+\lambda)B}{2}\right) \leq \int_0^1 f(1-t)((1-\lambda)A + \lambda B) + tB) dt \\ & \leq \left(f((1-\lambda)A + \lambda B) + f(B) \right) \int_0^1 h(t) dt \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{(2-\lambda)A + \lambda B}{2}\right) \\ & \leq \int_0^1 f(1-t)A + t((1-\lambda)A + \lambda B)) dt \leq \left(f(A) + f((1-\lambda)A + \lambda B) \right) \int_0^1 h(t) dt. \end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik $(1-\lambda) > 0$ ve ikinci eşitsizlik $\lambda > 0$ ile çarpıp toplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1-\lambda}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{(1-\lambda)A + (1+\lambda)B}{2}\right) + \frac{\lambda}{2h(1/2)} f\left(\frac{(2-\lambda)A + \lambda B}{2}\right) \\ & \leq (1-\lambda) \int_0^1 f(1-t)((1-\lambda)A + \lambda B) + tB) dt \\ & \quad + \lambda \int_0^1 f(1-t)A + t((1-\lambda)A + \lambda B)) dt \\ & \leq (1-\lambda) \left(f((1-\lambda)A + \lambda B) + f(B) \right) \int_0^1 h(t) dt \\ & \quad + \lambda \left(f(A) + f((1-\lambda)A + \lambda B) \right) \int_0^1 h(t) dt \end{aligned}$$

f fonksiyonunun h - konveks fonksiyon özelliği kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1.7 Eğer $(0,1) \subset J$ ise, $h: J \rightarrow R$ için negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $f: [a, b] \rightarrow R$, h -konveks fonksiyonunun $I \subset [0, \infty)$ operatörleri için, $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olduğundan $K \subset B(H)^+$ ve $g: [a, b] \rightarrow R$ negatif olmayan simetrik fonksiyondur.

O zaman, $A, B \in K$ olmak üzere, $[a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)dt \\ & \leq (f(A) + f(B)) \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (Vivas 2017).

İspat: $A, B \in K$ olsun. $t \in [0,1]$ için, $[A, B] = \{z \in x : z = tA + (1-t)B, t \in [0,1]\}$

Buradan,

$$f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B) \leq (h(t)f(A) + h(1-t)f(B))g(tA + (1-t)B)$$

$$f((1-t)A + tB)g(tA + (1-t)B) \leq (h(1-t)f(A) + h(t)f(B))g((1-t)A + tB)$$

Her iki eşitsizlik eklenerek integre edildikten sonra,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)dt \\ & + \int_0^1 f((1-t)A + tB)g((1-t)A + tB)dt \\ & \leq \int_0^1 h(t)f(A)g(tA + (1-t)B) \\ & + h(1-t)f(B)g(tA + (1-t)B) \\ & + h(1-t)f(A)g((1-t)A + tB) \\ & + h(t)f(B)g((1-t)A + tB)dt \\ & = \int_0^1 f(A)[h(t)g(tA + (1-t)B) \\ & + h(1-t)g((1-t)A + tB)]dt \\ & + f(B)[h(1-t)g(tA + (1-t)B) + h(t)g((1-t)A + tB)]dt \end{aligned}$$

g simetrik ve $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olduğundan,

$$\int_0^1 (1-t)g((1-t)A + tB)dt = \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt$$

ve buradan,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)dt + \int_0^1 f((1-t)A + tB)g((1-t)A + tB)dt \\ & \leq 2f(A) \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt \\ & \quad + 2f(B) \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt \\ & = 2(f(A) + f(B)) \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt \end{aligned}$$

elde edilen eşitsizlik sol tarafta yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)dt \\ & \leq (f(A) + f(B)) \int_0^1 h(t)g(tA + (1-t)B)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1.8 $h(\frac{1}{2}) \neq 0$ negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$f: I \rightarrow R$ ve h -konveks fonksiyonunun $I \subset [0, \infty)$ ve $K \subset B(H)^+$ operatörleri olsun.

$A, B \in K$ için, $h: [0, \max\{1, b-a\}] \rightarrow R$ negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir

fonksiyon olsun. Burada, $f: [a, b] \rightarrow R$ için, h -konveks fonksiyonunun $I \subset [0, \infty)$

operatörleri olmak üzere, ve $K \subset B(H)^+$ ve $g: [a, b] \rightarrow R$ negatif olmayan ve

simetrik bir fonksiyon ise, $(\frac{a+b}{2})$ için,

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_0^1 g(tA + (1-t)B)dt} \int_0^1 [f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)]dt$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: f fonksiyonunun h -konveks fonksiyon özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A+B}{2}\right) &= f\left(\frac{tA + (1-t)A + tB + (1-t)B}{2}\right) \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(tA + (1-t)B) + f(tB + (1-t)A)] \end{aligned}$$

g pozitif ve simetrik ise, $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ için,

$$\begin{aligned} &g(tA + (1-t)B)f\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(tA + (1-t)B) + g(tA + (1-t)B)] \\ &\quad + f(tB + (1-t)A)g(tB + (1-t)A)] \end{aligned}$$

eşitsizlikler birleştirilirse,

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_0^1 g(tA + (1-t)B)dt} \int_0^1 [f(tA + (1-t)B)g(tA + (1-t)B)]dt$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1.9 $h_1, h_2: J \rightarrow R$ iki negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $(h_1, h_2) \in L_1(J)$ olmak üzere, $f: J \rightarrow R$ konveks fonksiyonu için h_1 -konveks fonksiyonların operatörü ve $g: J \rightarrow R$ konveks fonksiyonu için h_2 -konveks fonksiyonların operatörü ise $K \subset B(H)^+$ vardır. O zaman,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle \langle g(tB + (1-t)A)x, x \rangle dt \\ &\leq M(A, B) \int_0^1 h_1(t)h_2(t) dt + N(A, B) \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\ M(A, B) &= \langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \\ N(A, B) &= \langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: $\forall x \in H$ için $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\langle tA + (1-t)B)x, x \rangle = t\langle Ax, x \rangle + (1-t)\langle Bx, x \rangle \in I$$

Önce $\langle Ax, x \rangle \in Sp(A) \subset I$ ve $\langle Bx, x \rangle \in Sp(B) \subset I$ alalım.

f ve g fonksiyonları sürekli olduğu için,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(tB + (1-t)A) dt \\ & \int_0^1 g(tB + (1-t)A) dt \\ & \int_0^1 f(tB + (1-t)A) g(tB + (1-t)A) dt \end{aligned}$$

$t \in [0,1]$ için h -konveks fonksiyon özelliğinden,

$$\begin{aligned} \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle & \leq h_1(t) \langle f(A)x, x \rangle + h_1(1-t) \langle f(B)x, x \rangle \\ \langle (g(tB + (1-t)A))x, x \rangle & \leq h_2(t) \langle g(A)x, x \rangle + h_2(1-t) \langle g(B)x, x \rangle \\ \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle \times \langle (g(tB + (1-t)A))x, x \rangle \\ & \leq h_1(t)h_2(t) \langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \\ & \quad + h_1(1-t)h_2(1-t) \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \\ & \quad + h_1(t)h_2(1-t) \langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \\ & \quad + h_1(1-t)h_2(t) \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \end{aligned}$$

eşitsizlikler birleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle \langle (g(tB + (1-t)A))x, x \rangle dt \\ & \leq \langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \int_0^1 h_1(t) h_2(t) dt \\ & \quad + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \int_0^1 h_1(1-t) h_2(1-t) dt \\ & \quad + \langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle \int_0^1 h_1(t) h_2(1-t) dt \\ & \quad + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \int_0^1 h_1(1-t) h_2(t) dt \\ & \int_0^1 h_1(1-t) h_2(1-t) dt = \int_0^1 h_1(s) h_2(s) ds \\ & \int_0^1 h_1(1-t) h_2(t) dt = \int_0^1 h_1(s) h_2(1-s) dt \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle \langle (g(tB + (1-t)A))x, x \rangle dt$$

$$\begin{aligned} &\leq (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) \int_0^1 h_1(t) h_2(t) dt \\ &+ (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) \int_0^1 h_1(t) h_2(1-t) dt \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle (f(tB + (1-t)A))x, x \rangle \langle (g(tB + (1-t)A))x, x \rangle dt \\ &\leq M(A, B) \int_0^1 h_1(t) h_2(t) dt + N(A, B) \int_0^1 h_1(t) h_2(1-t) dt \\ &\leq N(A, B) = (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1.10 $h_1, h_2: J \rightarrow R$ iki negatif ve sıfır olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $(h_1, h_2) \in L_1(J)$ olmak üzere, $f: I \rightarrow R$ konveks fonksiyonu için h_1 -konveks fonksiyonların operatörü ve $g: J \rightarrow R$ konveks fonksiyonu için h_2 -konveks fonksiyonların operatörü ise $K \subset B(H)^+$ vardır. O zaman,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)} \langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle \langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle \\ &\leq \int_0^1 \langle f(tA + (1-t)B)x, x \rangle \langle g(tA + (1-t)B)x, x \rangle \\ &+ 2(M(a, b) \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt + N(a, b) \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt) \end{aligned}$$

ve buradan $x \in H$ için $\|x\| = 1$ ise,

$$\begin{aligned} M(a, b) &= (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle) \\ N(a, b) &= (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2017).

İspat: İlk olarak,

$$\begin{aligned}
\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle &= \langle f\left(\frac{tA + (1-t)A + tB + (1-t)B}{2}\right)x, x \rangle \\
\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle &= \langle g\left(\frac{tA + (1-t)A + tB + (1-t)B}{2}\right)x, x \rangle \\
&\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle \langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x \rangle \\
&\langle f\left(\frac{tA + (1-t)A + tB + (1-t)B}{2}\right)x, x \rangle \\
&\times \langle g\left(\frac{tA + (1-t)A + tB + (1-t)B}{2}\right)x, x \rangle \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) (\langle f(tA + (1-t)B)x, x \rangle \\
&+ \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle) \times (\langle g(tA + (1-t)B)x, x \rangle \\
&+ \langle g((1-t)A + tB)x, x \rangle) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) \{[f(tA + (1-t)B)x, x] \langle g(tA \\
&+ (1-t)B)x, x \rangle \\
&+ \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle \langle g((1-t)A + tB)x, x \rangle] \\
&+ h_1(t) \langle f(A)x, x \rangle + h_1(1-t) \langle f(B)x, x \rangle \\
&\times (h_2(1-t) \langle g(A)x, x \rangle + h_2(t) \langle g(B)x, x \rangle) \\
&+ h_1(1-t) \langle f(A)x, x \rangle + h_1(t) \langle f(B)x, x \rangle \\
&\times (h_2(t) \langle g(A)x, x \rangle + h_2(1-t) \langle g(B)x, x \rangle)\} \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) \times \{h_2(1-t) \langle g(B)x, x \rangle\} \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\times \{[\langle f(tA + (1-t)B)x, x \rangle \langle (tA + (1-t)B)x, x \rangle \\
&+ \langle f((1-t)A + tB)x, x \rangle \langle g((1-t)A + tB)x, x \rangle] \\
&+ (h_1(t)h_2(1-t) + h_1(1-t)h_2(t)) \\
&\times (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle) \\
&+ (h_1(t)h_2(t) + h_1(1-t)h_2(1-t)) \\
&\times (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle)\}
\end{aligned}$$

$[0,1]$ aralığı integre edilirse,

$$\frac{\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 \langle f(tA + (1-t)B)x, x \rangle \langle g(tA + (1-t)B)x, x \rangle dt \\ &\quad + 2M(a, b) \int_0^1 (h_1(t)h_2(1-t))dt + 2N(a, b) \int_0^1 (h_1(t)h_2(t))dt \\ M(a, b) &= (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle) \\ N(a, b) &= (\langle f(A)x, x \rangle \langle g(B)x, x \rangle + \langle f(B)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve böylelikle ispat tamamlanır.

5.3.2 Reel Ortamda Fraktal Kümeler

Vivas ve Hernandez tarafından reel ve düz fraktallar kümesi 2016 yılında tanımlanmıştır.

Teorem 5.3.2.1 $(t_1, \dots, t_n)$ pozitif reel sayılar olsun. Eğer, $h: J \rightarrow R^\alpha$ negatif olmayan fonksiyon ve $h \neq 0$ altçarpımsal tanımından $J \subset R$ ve $(0,1) \subset J$ için $f: J \rightarrow R^\alpha$ olacak şekilde bir fonksiyon üzerinde tanımlanmıştır. Buradan $I \subset R$ ve h –konveks fonksiyon özelliğinden $x_1, \dots, x_n \in I$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(x_i) \\ T_n &= \sum_{i=1}^n t_i \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2016).

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılırsa,

Eğer $n = 2$ için h - konveks fonksiyon tanımından, $t = \frac{t_1}{T_2}$, $(1-t) = \frac{t_2}{T_2}$, $x = x_1$ ve $y = x_2$ alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. Kabul edilsin, n herhangi bir pozitif tam sayı olduğunda $n - 1$ için eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f\left(\frac{t_n}{T_n} x_n + \frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i\right) \\
&= f\left(\frac{t_n}{T_n} x_n + \frac{T_{n-1}}{T_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{T_{n-1}} x_i\right)
\end{aligned}$$

önceki eşitsizliğin sağ tarafındaki tanımı kullanılırsa,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{T_{n-1}} x_i\right)$$

Şimdi $n - 1$ için doğru olduğu kabul edilsin,.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &\leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) f(x_i) \\
&= h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) f(x_i)
\end{aligned}$$

Ayrıca h – altçarpımsal bir fonksiyon olduğundan,

$$h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) \leq h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n} \frac{t_i}{T_{n-1}}\right) = h\left(\frac{t_i}{T_n}\right)$$

elde ettiğimiz bu eşitsizlik kullanılırsa,

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(x_i) = \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.2.2 $h: J \rightarrow R^\alpha$ negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $h \neq 0$ bir $J \subset R$ üzerinden tanımlanmış ve $(0,1) \subset J$ ve $f: I \rightarrow R^\alpha$ olacak şekilde h –konveks fonksiyon, negatif olmayan ve $a, b \in I$ ile $a < b$ için integrallenebilen bir fonksiyondur. O zaman,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 - (-1)^\alpha h(1/2)^r(1 + \alpha))} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^\alpha} \alpha I_b^{(\alpha)} f \\
&\leq (f(b) - (-1)^\alpha f(a)) {}_0 I_1^\alpha h
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: Kabul edilsin, $\forall t \in [0,1]$ olsun.

$$ta + (1-t)b + (1-t)a + tb = ta + b - tb + a - ta + tb = a + b$$

ve h -konveks fonksiyon olduğu için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h(1/2)f(ta + (1-t)b) + h(1/2)f((1-t)a + tb) \\ &= h(1/2)f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \end{aligned}$$

Böylece her iki taraf birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)(dt)^\alpha &\leq h(1/2) \int_0^1 f(ta + (1-t)b)(dt)^\alpha \\ &\quad + h(1/2) \int_0^1 f((1-t)a + tb)(dt)^\alpha \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b)(dt)^\alpha &= \frac{-(-1)^\alpha}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(x)(dx)^\alpha \\ \int_0^1 f((1-t)a + tb)(dt)^\alpha &= \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(x)(dx)^\alpha \\ \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)(dt)^\alpha &\leq \frac{h(1/2)}{(b-a)^\alpha} (1 - (-1)^\alpha) \int_a^b f(x)(dx)^\alpha \\ \frac{1^\alpha}{(1 - (-1)^\alpha)h(1/2)\Gamma(1+\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^\alpha} {}^{\alpha}I_1^{(\alpha)} f \end{aligned}$$

Böylelikle Teorem 5.3.2.2’de eşitsizliğin sol tarafı elde edilir. Herhangi bir $x \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için, $x = ta + (1-t)b$ eşitsizliği vardır. f fonksiyonunun h -konvekslik özelliğinden,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)(dx)^\alpha &= (b-a)^\alpha \int_0^1 f((1-t)a + tb)(dt)^\alpha \\ &= (b-a)^\alpha (f(a) \int_0^1 h(1-t)(dt)^\alpha + f(b) \int_0^1 h(t)(dt)^\alpha) \\ &= (b-a)^\alpha (-f(a)(-1)^\alpha \int_0^1 h(t)(dt)^\alpha + f(b) \int_0^1 h(t)(dt)^\alpha) \\ &= (b-a)^\alpha (-(-1)^\alpha f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t)(dt)^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-a)^\alpha} {}^\alpha I_b^{(\alpha)} f &\leq (-(-1)^\alpha f(a) + f(b)) {}_0 I_1^{(\alpha)} h \\ \frac{1}{(1 - (-1)^\alpha h(1/2)^r(1+\alpha))} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^\alpha} {}^\alpha I_b^{(\alpha)} f \\ &\leq f(b) - (-1)^\alpha f(a)) {}_0 I_1^{(\alpha)} h \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve böylelikle ispat tamamlanır.

5.4 m –Konveks Fonskiyonlar

Teorem 5.4.1 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ ve $m \in (0,1]$ için $[a, b]$ aralığında integrallenebilir m -konveks fonksiyon olsun. Burada, $a, b \in [0, \infty)$ ve $g: [a, b] \rightarrow R$ için, $(a + b/2)$ 'ye göre simetrik olan negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right) g(x)dx \\ &\quad + \frac{m}{2} \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] \int_b^a \left(\frac{x-a}{b-a}\right) g(x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2016).

İspat: g fonksiyonu, $(\frac{a+b}{2})$ 'ye göre simetrik olan negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b (f(x) + f(a+b-x))g(x)dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(f\left(a\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + b\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right) + f\left(a\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + b\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right) \right) g(x)dx \end{aligned}$$

Böylece f fonksiyonun m -konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)g(x)dx \\
& \leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[\left(\frac{b-x}{b-a} \right) f(a) + m \left(\frac{x-a}{b-a} \right) f\left(\frac{b}{m}\right) + m \left(\frac{x-a}{b-a} \right) f\left(\frac{a}{m}\right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) f(b) \right] g(x)dx \\
& = \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a} \right) g(x)dx \\
& \quad + \frac{m}{2} \left[f\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{a}{m}\right) \right] \int_a^b \frac{(x-a)}{(b-a)} g(x)dx
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 5.4.2 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ ve $m \in (0,1]$ için $[a, b]$ aralığında integrallenebilir m -konveks fonksiyon olsun. Burada, $0 \leq a < b < \infty$ ve $g: [a, b] \rightarrow R$ olmak üzere, $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ simetrik olan negatif olmayan bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{m}{2} \int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right) g(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas 2016).

İspat: f fonksiyonun m -konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx &= \int_a^b f\left(\frac{a+b+x-x}{2}\right) g(x)dx \\
&\leq \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b-x}{2}\right) + \frac{m}{2} f\left(\frac{x}{m}\right) \right] g(x)dx \\
&= \int_a^b f\left(\frac{a+b-x}{2}\right) g(x)dx + \int_a^b \frac{m}{2} f\left(\frac{x}{m}\right) g(x)dx
\end{aligned}$$

Ayrıca g fonksiyonunun hipotezleri son eşitsizliğe eşittir.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f\left(\frac{a+b-x}{2}\right)g(a+b-x)dx + \frac{m}{2} \int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right)g(x)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{m}{2} \int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right)g(x)dx
\end{aligned}$$

böylelikle ispat tamamlanır.

Lemma 5.4.3 Eğer $f: [0,1] \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon olsun. Burada $m \in (0,1]$ için $x \in [a,b] \subset [0,\infty)$ ise $\alpha = \alpha_x \in [0,1]$ olmak üzere,

$$f(a+b-x) \leq m(1-\alpha) \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] + \alpha(f(a) + f(b)) - f(x)$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

Teorem 5.4.4 $f: [0,\infty) \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olsun. Burada $a,b \in [0,\infty)$ ve $g: [a,b] \rightarrow R$ olmak üzere $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ simetrik olan negatif olmayan bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left\{ \frac{m}{2} \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. (Vivas ve Hernandez 2017).

İspat: Lemma ve g fonksiyonunun $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ için simetrisi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b f(a+b-x)g(x)dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x)g(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[m(1-\alpha) \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] + \alpha(f(a) + f(b)) - f(x) \right] g(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left\{ \frac{m}{2} \left[f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right] + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

5.5 GA –Konveks Fonksiyonlar:

Latif M.A.tarafından 2014 yılında tanımlanmıştır.

Lemma 5.5.1 $f: I \subset R_+ \rightarrow R$, I aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ise o halde,

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\int_0^1 b^{1+t} a^{1-t} f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt + \int_0^1 b^{1-t} a^{1+t} f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right)$$

eşitsizliği sağlanır. (Latif 2014).

Teorem 5.5.2 $f: I \subset R_+ \rightarrow R$ ve I aralığı üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$ ve $q \geq 1$ için, $[a, b]$ olmak üzere,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^{1-1/q}}{2^{1/q} + 1} \{ b[(L(a, b) - a)|f'(a)|^q$$

$$+ (2b - a - L(a, b))|f'(b)|^q]^{1/q} + [(b - 2a)$$

$$- L(a, b))|f'(b)|^q + (b - L(a, b))|f'(b)|^q]^{1/q} \}$$

eşitsizliği sağlanır. (Latif 2014).

İspat: Lemma (5.5.1) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\frac{ab(\ln(b) - \ln(a))}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^t \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt + \int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^t \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right| dt \right]$$

$$\leq \frac{ab(\ln(b) - \ln(a))}{2} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^t dt \right\}^{1-1/q} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^t |f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)|^q dt \right)^{1/q}$$

$$+ \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^t dt \right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^t |f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)|^q dt \right)^{1/q} \quad (5.1)$$

$|f'|^q$ için GA- konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t |f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)|^q dt \\
& \leq |f'(a)|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1-t}{2}\right) dt + |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1+t}{2}\right) dt \\
& = |f'(a)|^q \frac{L(a,b) - a}{2a(\ln b - \ln a)} + |f'(b)|^q \frac{2b - a - L(a,b)}{2a(\ln b - \ln a)} \tag{5.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t |f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)|^q dt \leq |f'(a)|^q \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \\
& \leq |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left(\frac{1-t}{2}\right) dt \\
& = |f'(a)|^q \frac{2b - a - L(a,b)}{2a(\ln b - \ln a)} + |f'(b)|^q \frac{L(a,b) - a}{2a(\ln b - \ln a)} \tag{5.3}
\end{aligned}$$

(5.1), (5.2) ve (5.3) kullanılarak sonuç elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Konveks fonksiyonlar ile yeni sonuçlar elde etmek için genelleştirilmiş konveks fonksiyonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tezde konveks fonksiyon tiplerinin tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Bu tezde konvekslik üzerine matematiksel uygulama çalışması yapılması amaçlanmıştır. Konveksliğin temel durumu ile çok uzun zamandır ayrıntılı şekilde çalışılmış ve pek çok sonuç bulunmuştur. Uygulama alanına göre klasik konvekslikten daha iyi sonuç veren genelleştirilmiş konvekslik çeşitleri ortaya konulmuş ve üzerinde ayrıntılı incelemeler yapılmaya başlanmıştır. Bu doğrultuda son zamanlarda oldukça popüler olan genelleştirilmiş konveks fonksiyonları tanıttık ve bununla beraber Jensen tipi, Hermite-Hadamard tipi, Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikleri elde ettik.

Uygulamalar üzerine daha iyi sonuçlar veren ve ihtiyaca göre genelleştirilen farklı konvekslik biçimleri üzerine çalışmalar yapılması da oldukça ileri seviye ve pek çok veri içeren bir araştırma olacaktır. Araştırmacıların genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar sınıfını kullanarak ve bu fonksiyonlar için teoremlerden yararlanarak konvekslik çeşitleri için de benzer çalışmalar yapılabileceği düşünülmektedir.

Genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ile ilgili sonuçların derlemesinde geliştirilen alanda araştırmayı teşvik etmek amacıyla bazı açık problemler öneriyoruz.

Problem 6.1 Chebyshev ve Gruss gibi genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ile bazı eşitsizlikler kurulabilir. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ İki mutlak sürekli fonksiyon için,

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx\right)$$

eşitsizlikleri ile sağlanan integraller vardır.

$$T(f, g) \leq \frac{1}{12} (b-a)^2 \|f'\|_{\infty}$$

$$T(f, g) \leq \frac{1}{4} (M-m)(N-n)$$

eşitsizlikleri ile sağlanan m, M, n ve N koşulları gerçekte sayılardır.

$$-\infty < m \leq f(x) \leq M < \infty$$

$$-\infty < n \leq g(x) \leq N < \infty$$

Bu eşitsizliklerle ilgili bazı sonuçlara ulaşalım. İlk olarak Grüss tipi eşitsizlikler için ikinci türevi olan fonksiyonlar konveks fonksiyonlardır.

$f, g: [a, b] \rightarrow R$ kesin sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $|f''|$ ve $|g''|$ konveks fonksiyonları, $[a, b]$ ve $f'', g'' \in L_p [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} T(f, g) &\leq \frac{1}{12(b-a)^2} \times \int_a^b [2|b-a|^{1/p}(|f(x)||g''(x)| + |g(x)||f''(x)|) \\ &\quad + (|f(x)||g''|_p + |g(x)||f''|_p)Q(x)] dx \\ Q(x) &= \left[\frac{(b-x)^{2q+1} + (x-a)^{2q+1}}{2q+1} \right]^{1/q} \end{aligned}$$

ve $1/p + 1/q = 1$ bulunur. Bir sonraki teorem Chebyshev eşitsizliğini oluşturur.

Teorem 6.2 $f, g: [a, b] \rightarrow R$ kesin sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $|f''|$ ve $|g''|$ konveks fonksiyonları, $[a, b]$ ve $f'', g'' \in L_p [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} |\check{T}(f, g)| &\leq \frac{1}{36(b-a)^3} \times \\ &\int_a^b \{[|g(x)|(2|f''(x)|(b-a)^{1/p} + |f''|_p)] \\ &\quad \times [|f(x)|(2|g''(x)|(b-a)^{1/p} + |g''|_p)]\} Q^2(x) dx \end{aligned}$$

Bu teoremle ilgili fonksiyonların ikinci türevinde konvekslik koşulu gözlemlenebilir.

7. KAYNAKLAR

- Ando T, Hiai F, 2014, Operator Log-Convex Functions and Operator Means, arXiv, 0911.5267v5.
- Awan M U, Noor M A, Noor K I, Safdar F, 2017, On Strongly Generalized Convex Functions, Filomat, 31, 5783–5790.
- Bacak V, Turkmen R, 2013, New Inequalities for Operator Convex Functions, Journal of Inequalities and Applications, 191.
- Bain A, Crisan D, 2009, Fundamentals of Stochastic Filtering, Stochastic Modelling and Applied Probability, 60, Springer, New York.
- Beckenbach E F, Bellman R, 1961, Inequalities, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Bhatia R, 1996, Matrix Analysis, Springer, New York.
- Cambini A, Martein L, 2009, Generalized Convexity and Optimization, Theory and Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical System, 616, Springer.
- Carlson B.C, 1977, Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press, New York.
- Cloud M J, Drachman B C, 1998, Inequalities: With Applications to Engineering, Springer Verlag, New York, Inc.
- Cristescu G, Gianu M, 2010, Detecting the Non-Convex Sets With Youness and Noor Types Convexities, Bul. Stiint. Univ Politeh. Timis., Ser. Mat. Fiz, 55(69),1,20–27.
- Dragomir S.S, 2010, Hermite Hadamard's Type Inequalities for Operator Convex Functions, Journal of Mathematical Inequalities, 4 (4),587–591.

- Dragomir S S, Agarwal R P, 1998, Two Inequalities for Differentiable Mapingsand Applications to Special Means of Real Number Sandto Trapezoidal Formula, App. Math. Lett, 11(5), 91–95.
- Dragomir S.S, Fitzpatrick S, 1999, The Hadamard’s Inequality in The Second Sense, Demonstratio Mathematica, 32(4), 687–696.
- Erdem Y, Öğünmez H, Budak H, 2017, Some Generalized Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Strongly s -Convex Functions, Biska, New Trends in Mathematical Sciences, 5(3), 22–32.
- Erdem Y, Öğünmez H, Budak, H, 2017, On Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for Strongly s -Convex Functions, Biska, New Trends in Mathematical Sciences, 5(3), 154–161.
- Gordji M E, Delavar M R, Dragomir S S, 2015, “An Inequality Related to n -Convex Funtions”, International Journal of Nonlimear Analysis and Applications, 62,27–33.
- Hudziki H, Maligranda L, 1994, Some Remarks on s -convex Functions, Aequationes Mathematicae, 48, 100–111.
- Işcan, 2014, Hermite-Hadamard, Type Inequalities For Harmonically Convex Functions, Hacet J. Math. Stat., 43(6), 935–942.
- Jensen J L W, 1906, Sur Les Fonctions Convexes Et Le Inequalities Entre Les Valeurs Moyennes, Acta Math., 32, 175–193.
- Noor M A, 2008, Differentiable non-Convex Functions and General Variational Inequalities, Appl. Math Comp., 199,623630.
- Noor M A, Noor K I, Awan M U, 2015, Generalized Convexity and Integral Inequalities, Appl. Mayh. Inf. Sci, 9q, 23–243.
- Özdemir M E, Yıldız C, Akdemir A O, Set E, 2016, On (h,m) -Convexity and Hadamard Type Inequalities, Transylv. J. Math. Mech, 8(1),51–58.

- Sarikaya M Z, Sağlam A, Yıldırım H, 2015, On Some Hadamard-Inequalities for h -Convex Functions, Journal of Mathematical Inequalities, 3pp, 335–341.
- Vivas-Cortez M J, Hernandez H J E, 2017, Refinements for Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator h -Convex Function, Apple. Math. Inf. Sci, 11(5), 1–9.
- Vivas-Cortez M J, Hernandez H J E, 2016, On Relative m -Semi Logarithmically Convexity Functions, Appl. Math. Inf. Sci, 11(6), 1–10.

