

**GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARIN BAZI SINIFLARI**

**Turan LALE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2011  
ANKARA**

Turan LALE tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARIN  
BAZI SINIFLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu  
onaylarım.

Doç. Dr. Çetin VURAL

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim  
Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Çetin VURAL

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ahmet IRKAD

.....

Matematik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Tarih:

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini  
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Turan LALE

**GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARIN BAZI SINIFLARI**  
(Yüksek Lisans Tezi)

**Turan LALE**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ocak 2011**

**ÖZET**

**Handbook of Set Theoretic Topology** kitabında G. Gruenhage tarafından derlenen Generalized Metric Spaces bölümü genişletilerek okunmuş ve bu bağlamda şebeke ile  $\sigma$ -uzay ve  $\Sigma$ -uzay arasındaki ilişki ve katmanlanabilir, yarı-katmanlanabilir uzaylar ile diğer genelleştirilmiş metrik uzayalar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Bilim kodu** : 204.1.132

**Anahtar kelimeler** : Genelleştirilmiş metrik uzaylar, şebeke, Moore uzayı,  $G_\delta$ -köşegen,  $\sigma$ -uzayı,  $\Sigma$ -uzayı, katmanlanabilir uzaylar, yarı-katmanlanabilir uzaylar,  $M_1$ -uzayı,  $M_2$ -uzayı

**Sayfa Adedi** : 89

**Tez Yöneticisi** : Doç. Dr. Çetin VURAL

**SOME CLASSES OF GENERALIZED METRIC SPACES****(M.Sc. Thesis)****Turan LALE****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 2011****ABSTRACT**

**In Handbook of Set Theoretic Topology book, Generalized Metric Spaces chapter which was compiled by G. Gruenhage has been read widely, in this context, relations among networks and  $\sigma$ -spaces,  $\Sigma$ -spaces, moreover relations among stratifiable and semi-stratifiable spaces and other generalized metric spaces has been analysed.**

**Science Code : 204.1.132**

**Key Words : Generalized metric spaces, networks, Moore spaces,  $G_\delta$ -diagonal,  $\sigma$ -space,  $\Sigma$ -spaces, stratifiable spaces, semi stratifiable spaces,  $M_1$ -spaces,  $M_2$ -spaces**

**Page Number : 89**

**Adviser : Associate Prof. Dr. Çetin VURAL**

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Çetin VURAL'a ve tez yazım aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Emrah GÜNGÖR'e teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                        | <b>Sayfa</b> |
|------------------------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET.....                                                              | iv           |
| ABSTRACT.....                                                          | v            |
| TEŞEKKÜR.....                                                          | vi           |
| İÇİNDEKİLER.....                                                       | vii          |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                           | viii         |
| 1. GİRİŞ.....                                                          | 1            |
| 2. TEMEL TANIMLAR VE LEMMALAR.....                                     | 3            |
| 2.1. Kümeler Kuramı ile İlgili Temel Tanımlar.....                     | 3            |
| 2.2. Doğrusal Sıralı Uzaylarla İlgili Temel Tanımlar.....              | 4            |
| 2.3. Metriklenebilme ve Diğer Kavramlarla İlgili Temel Tanımlar.....   | 4            |
| 2.4. Örtü ve Örtü Özellikleri İle İlgili Temel Tanım ve Lemmalar.....  | 6            |
| 3. NETWORK(ŞEBEKE) KAVRAMI, $\sigma$ -UZAYLARI VE $\Sigma$ -UZAYLARI.. | 17           |
| 4. KATMANLANABİLİR VE YARI-KATMANLANABİLİR UZAYLAR...                  | 48           |
| KAYNAKLAR.....                                                         | 88           |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                          | 89           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler                         | Açıklama                                              |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                     | Doğal sayılar kümesi                                  |
| $\mathbb{Z}^+$                   | Pozitif tam sayılar kümesi                            |
| $\mathbb{R}$                     | Reel sayılar kümesi                                   |
| $A \subset B$                    | $A$ , $B$ 'nin alt kümesidir                          |
| $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  | $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ 'nin incelişidir.       |
| $\Rightarrow$                    | Gerektirme                                            |
| $\Leftarrow$                     | Yeterlilik                                            |
| $\Leftrightarrow$                | Ancak ve ancak                                        |
| $\overline{A}$                   | $A$ kümesinin kapanışı                                |
| $\tilde{A}$                      | $A$ kümesinin yığılma noktalarının kümesi             |
| $A^c$                            | $A$ kümesinin tümleyeni                               |
| $\omega$                         | İlk sonsuz ordinal                                    |
| $ A $                            | $A$ kümesinin kardinalitesi                           |
| $\mathcal{V} A$                  | $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}\}$                    |
| $\mathcal{V} \wedge \mathcal{O}$ | $\{A \cap B : A \in \mathcal{V}, B \in \mathcal{O}\}$ |



## 1. GİRİŞ

Metrik uzaylar ilk olarak Fransız Matematikçi Maurice Fréchet tarafından 1906 yılında “*Sur quelques du calcul fonctionnel* “ adlı doktora tezinde tanımlanarak literatüre girmiştir. Fréchet’ in bu tanımından sonra metrik uzaylar konusunda uzun yıllar boyunca önemli çalışmalar yapılmış ve metriklenebilme konusu zamanla daha çok ön plana çıkmıştır.

1920’li yıllardan itibaren birçok metriklenebilme kriteri ortaya konmuştur. Bu konuda ilk önemli gelişme 1923 yılında Rus Matematikçi Pavel Samuilovich Urysohn tarafından ispatlanan metriklenebilme teoremi olmuştur. (Sayılabilir tabana sahip olan normal uzaylar metriklenebilirdir.) Bu teoremin ardından uzayın sayılabilir tabana sahip olma şartı bir takım gelişmeler sonucu yerini daha zayıf koşullara bırakmıştır.

1944 yılında parakompaktlığın tanımlanması ve 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Bing, Nagata, ve Smirnov tarafından genel metriklenebilme teoreminin ispatlanmasından sonra metriklenebilme konusunda bir çok karakterizasyon verilmiştir. Üç matematikçinin teoremlerindeki temel farklılık Nagata ve Smirnov’ un  $\sigma$ -yerel sonlu tabanı, Bing’ in  $\sigma$ -ayrık tabanı kullanması olmuştur. 1948 yılında İngiliz Matematikçi Arthur Harold Stone yayınladığı doktora tezinde her metriklenebilir uzayın parakompakt olduğunu göstermiştir. Bu önemli kanıt Bing-Nagata-Smirnov Teoreminin esin kaynağı olmuştur.

Genel topoloji alanında  $\sigma$ -yerel sonlu baza sahip olan düzenli uzayın metriklenebilir olma durumunu veren Bing-Nagata-Smirov karakterizasyonu önemli bir sonuç oluşturmuştur. Daha sonra 1950’ lerin sonlarında Regüler uzaylarda E. Michael’ ın parakompaktlık karakterizasyonu;  $\sigma$ -yerel sonluluk,  $\sigma$ -kapanışı koruma ve diğer ilgili incelmışlik tipleri aracılığıyla J. Ceder tarafından 1961 yılında, genelleştirilmiş metrik uzayların doğal bir sınıfı olarak ortaya konulmuştur.

Genelleştirilmiş metrik uzayların önemli bir sınıfı olan katmanlanabilir uzaylar ilk olarak 1961 yılında J. Ceder tarafından çalışılmıştır[1]. J. Ceder  $M_1$ -uzay,  $M_2$ -uzay,  $M_3$ -uzay kavramlarını tanımlamış ve bunlar arasındaki ilişkileri araştırmıştır.  $M_3$ -uzaylarını daha sonra Borges [2] katmanlanabilir uzaylar olarak adlandırmıştır. Creede ve Kofner ise 1970 yılında semi-stratifiable(yarı – katmanlanabilir) uzayları tanımlayarak  $\sigma$ -uzayların yarı-katmanlanabilir olduğunu göstermişlerdir[3].

Bu çalışmada editörlüğünü K. Kunen ve J.E. Vaughan'nın yaptığı “*Handbook of Set Theoretic Topology*” kitabının G. Gruenhage tarafından derlenen “*Generalized Metric Space*” adlı onuncu bölümün 4. ve 5. alt bölümü, teoremlerin ispatları genişletilerek okunmuştur.

## 2. TEMEL TANIM VE LEMMALAR

### 2.1. Kümeler Kuramı ile ilgili Temel Tanımlar

#### 2.1.1 Tanım

$X$  bir küme ve " $<$ "  $X$  üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer " $<$ " bağıntısı

- i)  $x < y$  ve  $y < z$  ise  $x < z$  dir,
- ii)  $x < y$  ise  $y \not< x$  dir,
- iii)  $x \neq y$  ise  $x < y$  veya  $y < x$  dir.

özelliklerini sağlıyorsa " $<$ " bağıntısına  $X$  üzerinde bir lineer(doğrusal) sıralama bağıntısı,  $(X, <)$  ikilisine de doğrusal sıralı bir küme denir.

#### 2.1.2. Tanım

$(X, <)$  doğrusal sıralı bir küme olmak üzere eğer  $X'$  in boştan farklı tüm alt kümelerinin bu sıralamaya göre bir en küçük elemanı varsa bu doğrusal sıralamaya iyi sıralama,  $X$  kümesine de iyi sıralanmış bir küme denir.

#### 2.1.3. Tanım

$X$  bir küme olmak üzere eğer " $x \in X \Rightarrow x \subset X$  ve  $x \neq X$ " koşulu sağlanıyorsa  $X$  kümesine geçişli küme denir.

#### 2.1.4. Tanım

Eleman olma " $\in$ " bağıntısına göre iyi sıralanmış  $X$  geçişli kümesine bir ordinal sayı denir. Bu tanıma göre bir  $\alpha$  kümesine

- i)  $\alpha$  kümesinin tüm elemanları kümedir.
- ii)  $\beta \in \alpha$  ise  $\beta \subset \alpha$  ve  $\beta \neq \alpha$  dir.
- iii) " $\in$ " bağıntısı  $\alpha$  kümesinde bir iyi sıralamadır.

koşulları sağlanırsa bir ordinal sayı denir. İlk sonsuz ordinal sayı “ $\omega$ ”, ilk sayılamaz ordinal sayı “ $\omega_1$ ” ile gösterilir.

## 2.2. Doğrusal Sıralı Uzaylarla ilgili Temel Tanımlar

### 2.2.1. Tanım

$(X, \leq)$  doğrusal sıralı bir küme ve  $A \subset X$  olmak üzere  $p \leq q$  olan her  $p, q \in A$  için  $\{x \in X : p \leq x \leq q\} \subset A$  oluyorsa  $A$  kümesine  $X$ ' in bir konveks alt kümesi denir.

### 2.2.2. Tanım

$(X, \leq)$  doğrusal sıralı bir küme ve  $x, y \in X$  olmak üzere  $x < y$  olsun.  $(x, \rightarrow) = \{z \in X : x < z\}$ ,  $(\leftarrow, x) = \{z \in X : z < x\}$  ve  $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$  kümelerine açık aralıklar  $[x, \rightarrow) = \{z \in X : x \leq z\}$ ,  $(\leftarrow, x] = \{z \in X : z \leq x\}$  ve  $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$  kümelerine de kapalı aralıklar denir.  $X$  kümesinin bütün açık aralıklarından oluşan aile topoloji tabanı olma özelliklerini sağlar ve bu ailenin ürettiği topolojiye doğrusal sıralı topoloji denir. Bu topoloji  $\tau(\leq)$  ile gösterilir ve  $(X, \leq, \tau(\leq))$  üçlüsüne doğrusal sıralı topolojik uzay denir.

## 2.3. Metriklenebilme ve Diğer Kavramlarla İlgili Temel Tanımlar

### 2.3.1. Tanım

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  üzerinde tanımlı herhangi bir metriğin ürettiği topoloji  $\tau$  topolojisine eşitse  $X$  uzayına metriklenebilir topolojik uzay denir.

### 2.3.2. Tanım

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $\tau^* \subset \tau$  olacak biçimde  $X$  üzerinde bir  $\tau^*$  metriklenebilir topolojisi varsa  $(X, \tau)$  topolojik uzayına alt metriklenebilir uzay denir.

### 2.3.3. Tanım

$X, Y$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer  $X$  uzayındaki kapalı her  $A$  alt kümesinin  $f$  altındaki görüntüsü  $Y$  uzayında kapalı oluyorsa  $f$  dönüşümüne kapalı dönüşüm denir.

### 2.3.4. Tanım

$X, Y$  topolojik uzaylar olsun.  $X$  Hausdorff uzay olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu, sürekli, kapalı ve her  $y \in Y$  için  $f^{-1}(y) \subset X$  alt kümesi kompakt ise  $f$  ye mükemmel fonksiyon denir.

### 2.3.5. Tanım

$X, Y$  topolojik uzaylar olsun.  $X$  Hausdorff uzay olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu sürekli, kapalı ve her  $y \in Y$  için  $f^{-1}(y) \subset X$  alt kümesi sayılabilir kompakt ise  $f$  ye hemen hemen mükemmel fonksiyon denir.

## 2.4. Örtü ve Örtü Özellikleri İle İlgili Temel Tanım ve Lemmalar

### 2.4.1. Tanım

$X$  bir küme olmak üzere,  $\mathcal{V}$ ,  $X$ ' in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer  $X = \bigcup \{U : U \in \mathcal{V}\}$  ise  $\mathcal{V}$  ailesine  $X$  kümesinin bir örtüsüdür denir. Eğer  $\mathcal{V}$  ailesi sayılabilir ise  $\mathcal{V}$  ailesine sayılabilir örtü denir. Eğer  $X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{V}$  ailesinin üyeleri açık kümeler ise  $\mathcal{V}$  ailesine açık örtü denir.

### 2.4.2. Tanım

$X$  bir topolojik uzay,  $\mathcal{V}$   $X$ ' in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her  $x \in X$  için  $\{V \in \mathcal{V} : V \cap U \neq \emptyset\}$  kümesi sonlu olacak biçimde  $x$ ' in açık bir  $U$  komşuluğu varsa  $\mathcal{V}$  ailesine yerel sonlu aile denir.

### 2.4.3. Örnek

$\mathcal{B} = \{(n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $\mathbb{R}$  içinde yerel sonludur.

### 2.4.4. Tanım

$X$  bir topolojik uzay,  $\mathcal{V}$ ,  $X$ ' in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her  $x \in X$  için  $\{V \in \mathcal{V} : V \cap U \neq \emptyset\}$  ailesi en fazla bir elemanlı olacak biçimde  $x$ ' in bir  $U$  açık komşuluğu varsa,  $\mathcal{V}$  ailesine ayrık aile denir.

### 2.4.5. Örnek

$\mathcal{V} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $\mathbb{R}$  içinde ayrıktır.

#### 2.4.6. Tanım

$\mathcal{V}$  ailesi  $X'$  in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her  $x \in X$  için  $\{U \in \mathcal{V} : x \in U\}$  kümesi sonlu(sayılabılır) ise  $\mathcal{V}$  ailesine noktasal sonlu(noktasal sayılabılır) aile denir.

#### 2.4.7. Örnek

$\mathcal{A} = \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$  ailesi noktasal sonludur.

#### 2.4.8. Tanım

Sayılabılır sayıda yerel sonlu(ayrık) ailenin birleşimi olarak yazılabilen ailelere  $\sigma$ -yerel sonlu(ayrık) aile denir.

#### 2.4.9. Tanım

$\mathcal{V}$  ve  $\mathcal{S}$  bir  $X$  kümesinin örtüleri olsun. Her  $S \in \mathcal{S}$  için  $S \subset U$  olacak biçimde bir  $U \in \mathcal{V}$  varsa  $\mathcal{S}$  ailesine  $\mathcal{V}$  ailesinin bir incesidir (refinement) denir ve  $\mathcal{S} \prec \mathcal{V}$  şeklinde gösterilir.

#### 2.4.10. Tanım

$\mathcal{V}$  ve  $\mathcal{U}$   $X'$  in alt kümelerinin birer ailesi olmak üzere eğer her  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$  için  $\overline{\bigcup \{V : V \in \mathcal{W}\}} \subset \bigcup \{T(V) : V \in \mathcal{W}\}$  olacak biçimde bir  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  fonksiyonu varsa  $\mathcal{V}$  ailesine  $\mathcal{U}$  içinde cushioned (köşne) 'dir denir.  $\mathcal{V}$  ve  $\mathcal{U}$ ,  $X$  uzayının örtüleri olmak üzere eğer  $\mathcal{V}$  ailesi  $\mathcal{U}$  içinde cushioned(köşne) ise o zaman  $\mathcal{V}$  ailesine  $\mathcal{U}$  ' nun bir cushioned (köşne) incelmişidir denir.

#### 2.4.11. Tanım

$X$  bir küme,  $\mathcal{V}$ ,  $X$ ' in alt kümelerinin herhangi bir ailesi ve  $A \subset X$  olmak üzere  $\bigcup \{U \in \mathcal{V} : A \cap U \neq \emptyset\}$  kümesi  $st(A, \mathcal{V})$  ile gösterilir ve buna  $A$  kümesinin  $\mathcal{V}$  içindeki yıldızı adı verilir.  $x \in X$  olmak üzere  $st(\{x\}, \mathcal{V})$  kümesi  $st(x, \mathcal{V})$  ile gösterilir.  $st(x, \mathcal{V})$  kümesine  $x \in X$  elemanının  $\mathcal{V}$  içindeki yıldızı denir.  $st(st(x, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = st^2(x, \mathcal{V})$  biçiminde tanımlanır.

#### 2.4.12. Tanım

$\mathcal{V}$  ve  $\mathcal{S}$  aileleri bir  $X$  kümesinin örtüleri olmak üzere eğer  $\{st(x, \mathcal{S}) : x \in X\} \prec \mathcal{V}$  ise  $\mathcal{S}$  ailesine  $\mathcal{V}$  ailesinin yıldız incesi denir ve  $\mathcal{S} \prec^* \mathcal{V}$  şeklinde gösterilir.

#### 2.4.13. Tanım

$\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$   $X$ ' in açık örtülerinin bir dizisi olmak üzere  $X$ ' in her  $x$  elemanı için eğer  $\{st(x, \mathcal{V}_n) : n \in \omega\}$  ailesi  $x$  elemanın bir komşuluklar tabanı ise  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisine  $x$  için bir açınım (development) dizisi denir. Bir açınım dizisine sahip olan topolojik uzaya açılabilir (developable) uzay denir.

#### 2.4.14. Tanım

Açılabilir ve düzenli (regüler) uzaylara Moore uzayı denir.

#### 2.4.15. Tanım

$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$  kümesine  $X$  kümesinin köşegeni denir.



#### 2.4.16. Tanım

Bir  $X$  topolojik uzayında sayılabilir sayıda açık alt kümelerin kesişimi olarak yazılabilen kümelere  $G_\delta$ -küme denir.

#### 2.4.17. Örnek

$[0,1] = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \left(0 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$  olduğundan  $[0,1]$  aralığı  $\mathbb{R}$  içinde bir  $G_\delta$ -kümedir.

#### 2.4.18. Tanım

$X$  topolojik uzayının köşegeni  $X \times X$  uzayı içinde bir  $G_\delta$ -küme ise  $X$  uzayı  $G_\delta$ -köşegene sahiptir denir.

#### 2.4.19. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere, her  $x \in X$  için  $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \{x\}$  koşulunu sağlayan  $X'$  in açık örtülerinden oluşan  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisine  $X$  için bir  $G_\delta$ -köşegen dizisi denir.

#### 2.4.20. Lemma

Bir  $X$  uzayının  $G_\delta$ -köşegene sahip olması için gerekli ve yeterli koşul  $X$  için bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$   $G_\delta$ -köşegen dizisinin var olmasıdır.

### İspat

$\Rightarrow$ :  $X$  uzayı  $G_\delta$ -köşegene sahip olsun. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $U_n \subset X \times X$  açık küme olmak üzere,  $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$  dir. Her  $n \in \omega$  için  $\Delta \subset U_n$  olduğundan  $X'$  in her  $x$  noktası ver her  $n \in \omega$  için  $(x, x) \in U_n$  dir. O zaman  $X'$  in her  $x$  noktası ver her  $n \in \omega$  için  $G(n, x) \times G(n, x) \subset U_n$  olacak şekilde  $x'$  in bir  $G(n, x)$  açık komşuluğu vardır. Çünkü  $X'$  in her  $x$  noktası için  $(x, y) \in U(n, x) \times V(n, x) \subset U_n$  olacak biçimde  $x'$  in  $U(n, x)$  ve  $V(n, x)$  açık komşulukları vardır.  $U(n, x)$  ve  $V(n, x)$   $x'$  in açık komşulukları olduklarından  $U(n, x) \cap V(n, x)$  de  $x'$  in açık komşuluğudur.  $G(n, x) = U(n, x) \cap V(n, x)$  denilirse  $G(n, x) \subset U(n, x)$  ve  $G(n, x) \subset V(n, x)$  olur. Böylece  $G(n, x) \times G(n, x) \subset U(n, x) \times V(n, x) \subset U_n$  olur. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{V}_n = \{G(n, x) : x \in X\}$  olsun. Şimdi her  $x \in X$  için  $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \{x\}$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  için  $y \in \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$  olsun. O zaman her  $n \in \omega$  için  $\{x, y\} \subset G(n, z_n)$  olacak biçimde bir  $z_n \in X$  vardır. Buradan her  $n \in \omega$  için  $(x, y) \subset G(n, z_n) \times G(n, z_n) \subset U_n$  olur. Her  $n \in \omega$  için  $(x, y) \in U_n$  olduğundan  $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n = \Delta$  olur. Böylece  $x = y$  olur. Sonuç olarak  $(\mathcal{V}_n)$  dizisi  $X$  için bir  $G_\delta$ -köşegen dizisidir.

$\Leftarrow$ :  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$   $X$  için bir  $G_\delta$ -köşegen dizisi olsun. Her  $n \in \omega$  için  $U_n = \bigcup \{G \times G : G \in \mathcal{V}_n\}$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{V}_n$  ailesi  $X$  için bir örtü olduğundan  $\Delta \subset \bigcap_{n \in \omega} U_n$  olur.  $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $(x, y) \in U_n$  olup her  $n \in \omega$  için  $(x, y) \in G(n) \times G(n)$  olacak biçimde bir  $G(n) \in \mathcal{V}_n$  vardır. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $G(n) \subset \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$  olduğundan  $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \{x\}$  olup,  $x = y$  dir. O halde  $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subset \Delta$  olup  $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$  dir. Sonuç olarak  $X$  uzayı  $G_\delta$ -köşegene sahiptir. ■

#### 2.4.21. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $X'$  in açık örtülerinden oluşan ve her  $x \in X$  için  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \{x\}$  koşulunu sağlayan  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisine  $X$  için bir  $G_\delta^*$  - dizisi denir ve  $X$  uzayına da  $G_\delta^*$ -köşegene sahiptir denir.

#### 2.4.22. Tanım

$X$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olmak üzere eğer  $A$  kümesi, her biri  $A$  kümesini içeren sayılabilir sayıda açığın kapanışının arakesiti olarak yazılabiliyorsa  $A$  kümesine düzenli  $G_\delta$ -küme denir.

#### 2.4.23. Tanım

Eğer  $X$  topolojik uzayının köşegeni  $X \times X$  çarpım uzayında bir düzenli  $G_\delta$ -küme ise  $X$  uzayına düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahiptir denir.

#### 2.4.24. Lemma

$X$  topolojik uzayının düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahip olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in açık örtülerinin “  $x \neq y$  olacak biçimdeki her  $x, y \in X$  için  $x$  ve  $y$  nin öyle  $U_x, U_y$  açık komşulukları ve öyle bir  $n_0 \in \omega$  sayısı vardır ki, her  $G \in \mathcal{V}_{n_0}$  için  $G \cap U_x = \emptyset$  veya  $G \cap U_y = \emptyset$  ” koşulunu sağlayan bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisinin var olmasıdır.

### İspat

$\Rightarrow$ :  $X$  topolojik uzayı düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahip olsun. Öyleyse  $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  olacak biçimde  $U_n \subset X$  açık alt kümeleri vardır. Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $(x, x) \in U_n$  ve  $U_n \subset X \times X$  açık olduğundan her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $(x, x) \in H(n, x) \times T(n, x) \subset U_n$  olacak biçimde  $H(n, x), T(n, x) \subset X$  açık kümeleri vardır. Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $H(n, x) \cap T(n, x) = G(n, x)$  denilirse  $G(n, x) \subset X$  açık ve  $(x, x) \in G(n, x) \times G(n, x) \subset U_n$  olur. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{V}_n = \{G(n, x) : x \in X\}$  olsun.  $x, y \in X$  olmak üzere  $x \neq y$  olsun.  $x \neq y$  olduğundan  $(x, y) \notin \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  dir. Buradan  $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$  olduğundan  $(x, y) \in U \times V$  ve  $(U \times V) \cap U_{n_0} = \emptyset$  olacak biçimde  $U, V \subset X$  açık kümeleri vardır. Şimdi her  $G(n_0, z) \in \mathcal{V}_{n_0}$  için  $G(n_0, z) \cap U = \emptyset$  veya  $G(n_0, z) \cap V = \emptyset$  olduğunu görelim. Aksine  $G(n_0, z) \cap U \neq \emptyset$  ve  $G(n_0, z) \cap V \neq \emptyset$  olacak biçimde bir  $z \in X$  elemanının var olduğunu kabul edelim. Buradan  $p \in G(n_0, z) \cap U$  ve  $q \in G(n_0, z) \cap V$  olacak biçimde  $p, q \in X$  vardır. Böylece  $(p, q) \in G(n_0, z) \times G(n_0, z) \subset U_{n_0}$  ve  $(p, q) \in U \times V$  olur. Buradan  $(p, q) \in U_{n_0} \cap (U \times V)$  olur. Fakat bu durum  $U_{n_0} \cap (U \times V) = \emptyset$  olması ile çelişir.

$\Leftarrow$ :  $X'$  in açık örtülerinin hipotezdeki koşulu sağlayan bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisi var olsun. Her  $n \in \omega$  için  $U_n = \bigcup \{G \times G : G \in \mathcal{V}_n\}$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{V}_n$  açık örtü olduğundan her  $n \in \omega$  için  $U_n$  kümesi açık ve  $\Delta \subset U_n$  dir. Buradan  $\Delta \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  dir. Şimdi  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \subset \Delta$  olduğunu görelim. Aksine  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \not\subset \Delta$  olsun. Öyleyse  $x \neq y$  olmak üzere  $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  olacak biçimde  $x, y \in X$  vardır.  $x \neq y$  olduğundan hipotezden öyle bir  $n_0 \in \omega$  ve  $x$  ve  $y$ ' nin öyle  $U, V$  açık komşulukları

vardır ki, her  $G \in \mathcal{V}_{n_0}$  için  $G \cap U = \emptyset$  veya  $G \cap V = \emptyset$  dir.  $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $(x, y) \in \overline{U_n}$  olup  $U_{n_0} \cap (U \times V) \neq \emptyset$  dir. Buradan  $U_{n_0}$  kümesinin tanımından  $(U \times V) \cap (G_0 \times G_0) \neq \emptyset$  olacak biçimde bir  $G_0 \in \mathcal{V}_{n_0}$  vardır.  $(U \times V) \cap (G_0 \times G_0) \neq \emptyset$  olduğundan  $(p, q) \in (U \times V) \cap (G_0 \times G_0)$  olacak biçimde  $p, q \in X$  olup  $p \in U \cap G_0$  ve  $q \in V \cap G_0$  dir. Bu durum her  $G \in \mathcal{V}_{n_0}$  için  $G \cap U = \emptyset$  veya  $G \cap V = \emptyset$  olması ile çelişir. Böylece  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \subset \Delta$  dir. Sonuç olarak  $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$  olduğundan  $X$  uzayı düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahiptir. ■

Bu lemmayı kullanarak aşağıdaki sonucu verelim.

#### 2.4.25. Sonuç

$X$  topolojik uzayı düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahipse  $X'$  in  $G_\delta^*$ -köşegeni vardır.

#### *İspat*

$X$  uzayı düzenli  $G_\delta$ -köşegene sahip olsun. Bu durumda  $X'$  in 2.4.24. Lemma' daki özellikleri sağlayan bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisi vardır. Her  $x \in X$  için

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \{x\}$  olduğunu görelim.  $x \neq y$  olmak üzere  $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$  olsun.

2.4.24. Lemma' dan  $x \in U$ ,  $y \in V$  ve her  $G \in \mathcal{V}_{n_0}$  için  $G \cap U = \emptyset$  veya  $G \cap V = \emptyset$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  ve  $U, V \subset X$  açık kümeleri vardır. Buradan  $y \in V$ ,  $V \subset X$  açık ve  $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$  olduğundan  $V \cap \text{st}(x, \mathcal{V}_{n_0}) \neq \emptyset$  dir. O zaman  $x \in G_0$  ve  $V \cap G_0 \neq \emptyset$  olacak biçimde bir  $G_0 \in \mathcal{V}_{n_0}$  vardır.  $x \in G_0$  ve  $x \in U$  olduğundan  $G_0 \cap U \neq \emptyset$  dir. Böylece  $V \cap G_0 \neq \emptyset$  ve  $G_0 \cap U \neq \emptyset$  olur. Bu durum her  $G \in \mathcal{V}_{n_0}$

için  $G \cap U = \emptyset$  veya  $G \cap V = \emptyset$  olması ile çelişir. Sonuç olarak  $X$  uzayı  $G_\delta^*$ -köşegene sahiptir. ■

#### 2.4.26. Tanım

$X$  topolojik uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir açık incesi varsa  $X$  uzayına parakompakt uzay denir.

#### 2.4.27. Tanım

$X$  bir  $T_1$  topolojik uzay olsun.  $X'$  in kapalı alt kümelerinin her ayrık  $\{K_i : i \in I\}$  ailesi için  $K_i \subset V_i$  ve  $i \neq j$  için  $V_i \cap V_j = \emptyset$  olacak biçimde  $X'$  in bir  $\{V_i : i \in I\}$  açık alt kümeler ailesi bulunabiliyorsa  $X$  uzayına yığınsal-normal(collectionwise-normal) uzay denir.

#### 2.4.28. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $X'$  in kapalı her  $K$  alt kümesi ve  $x \notin K$  olacak biçimdeki her  $x \in X$  için  $f(K) \subset \{0\}$  ve  $f(x) = 1$  olacak biçimde sürekli bir  $f: X \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu varsa  $X$  uzayına tamamen düzenli (completely regular) uzay denir.

#### 2.4.29. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  uzayının her açık örtüsünün  $\sigma$ -ayrık kapalı bir incesi varsa, ya da buna denk olarak  $X'$  in her  $\mathcal{S}$  açık örtüsü için  $X'$  in açık örtülerinin öyle bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisi var ve her  $x \in X$  için  $st(x, \mathcal{V}_{n_0}) \subset U_0$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  ve bir  $U_0 \in \mathcal{S}$  bulunabiliyorsa,  $X$  uzayına subparakompakt uzay denir.

#### 2.4.30. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere eğer  $X'$  in her  $\mathcal{S}$  açık örtüsü için  $\mathcal{V}_n \prec \mathcal{S}$  olacak biçimde bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisi var öyle ki her  $x \in X$  için  $\{V \in \mathcal{V}_{n_0} : x \in V\}$  kümesi sonlu olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  bulunabiliyorsa  $X$  uzayına submetakompakt uzay denir. Bu biçimdeki  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisine  $\mathcal{S}'$  nin bir  $\theta$ -incesi denir.

#### 2.4.31. Tanım

$X$  bir topolojik uzay ve  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$   $X$  içinde bir ağ olsun.  $p \in X$  olmak üzere, eğer  $p'$  nin her  $U$  komşuluğu ve her  $\lambda \in \Lambda$  için  $x_\delta \in U$  ve  $\lambda < \delta$  olacak biçimde bir  $\delta \in \Lambda$  varsa  $p'$  ye  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  ağının bir değme noktası(cluster point) denir ve bu durum  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \succ p$  şeklinde gösterilir.

#### 2.4.32. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere  $A$ ,  $X'$  in boştan farklı bir alt kümesi olsun.  $p \in X$  olmak üzere  $p'$  nin her  $U$  komşuluğu için  $A \cap (U \setminus \{p\}) \neq \emptyset$  ise  $p'$  ye  $A$  kümesinin bir yığılma noktası denir ve  $p \in \tilde{A}$  şeklinde gösterilir.

#### 2.4.33. Tanım

$X$  bir topolojik uzay ve  $C \subset X$  olsun. Eğer  $X'$  in  $C = A \cup B$  ve  $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$  olacak biçimde boş olmayan  $A$  ve  $B$  alt kümeleri bulunamıyorsa  $C'$  ye bağlantılı küme denir.

#### 2.4.34. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $X'$  in her elemanının kapanışı kompakt olan açık bir komşuluğu varsa  $X$  uzayına yerel kompakt uzay denir.

#### 2.4.35. Tanım

$X$  topolojik uzayının her  $x$  elemanı ve  $x'$  in her  $U$  açık komşuluğu için  $x \in \overset{\circ}{C} \subset C \subset U$  olacak biçimde bağlantılı bir  $C$  kümesi varsa  $X$  uzayına yerel bağlantılı uzay denir.



### 3. NETWORK(ŞEBEKE) KAVRAMI, $\sigma$ VE $\Sigma$ -UZAYLARI

Network(Şebeke) kavramı, genelleştirilmiş metrik uzaylar teorisinde çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu bölümde öncelikle şebeke kavramı tanımlanarak, şebekenin bazı genelleştirilmiş metrik uzaylarla olan ilişkisi üzerinde durulduktan sonra,  $\sigma$  -uzayları ve  $\Sigma$  -uzayları tanımlanmış, bu uzayların birbirleriyle ve genelleştirilmiş metrik uzayların bazı sınıfları (Moore uzayları,  $G_\delta$  -köşegen, subparakompaktlık, M-uzay, Lindelöf vb) ile olan bağlantıları üzerinde durulmuştur. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe X topolojik uzayları düzenli alınacaktır.

#### 3.1.1. Tanım

Eğer X uzayı,  $x \in X$  olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $x_n \in st(x, \mathcal{V}_n)$  seçilerek oluşturulan  $\{x_n : n \in \omega\}$  dizisi X içinde bir değme noktasına sahip olacak biçimde bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisine sahipse, X uzayına  $w\Delta$  - uzay denir.

#### 3.1.2. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X' in

i) Her  $n \in \omega$  için  $x_n \in st(x, \mathcal{V}_n)$  olmak üzere  $\{x_n : n \in \omega\}$  dizisi X içinde bir değme noktasına sahip ve

ii) Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{V}_{n+1} \prec^* \mathcal{V}_n$

koşullarını sağlayan bir  $(\mathcal{V}_n)$  açık örtüler dizisi varsa X uzayına M- uzay denir.

### 3.1.3. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere “eğer  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin öyle bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisi varsa ki, her  $n \in \omega$  için  $V_n \in \mathcal{V}_n$  olmak üzere  $\bigcap_{n \in I} V_n \neq \emptyset$

biçimindeki her  $I \subset \omega$  için

i)  $\bigcap_{n \in I} \overline{V_n}$  kümesi kompakt

ii)  $\left\{ \bigcap_{i \leq n} \overline{V_i} : n \in \omega \right\}$  ailesi  $\bigcap_{n \in I} \overline{V_n}$  kümesi için bir dış şebekedir, yani  $\bigcap_{n \in I} \overline{V_n}$

kümesini içeren her  $V$  açık alt kümesi için  $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{V_i} \subset V$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$

vardır.”

koşulları sağlanıyorsa  $X$  topolojik uzayına bir  $p$ -uzayı denir.

### 3.1.4. Tanım

$\mathcal{F}$ ,  $X$ ' in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her  $x \in X$  ve  $x \in U$  olacak biçimdeki her  $U \subset X$  açığı için  $x \in F \subset U$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  varsa  $\mathcal{F}$  ailesine  $X$  için bir network(şebeke) denir.

### 3.1.5. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere  $X$  uzayının ağırlığı  $w(X) = \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ } X \text{ için bir baz} \}$  ve  $X$ ' in şebeke ağırlığı  $nw(X) = \min \{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ } X \text{ için bir şebeke} \}$  biçiminde tanımlanır.

### 3.1.6. Teorem

$X$  bir  $p$ -uzayı ise  $nw(X) = w(X)$  dir.

### İspat

Her baz bir şebeke olduğundan  $nw(X) \leq w(X)$  dir. Şimdi  $w(X) \leq nw(X)$  eşitsizliğinin var olduğunu görelim.  $X$  bir  $p$ -uzayı olmak üzere  $X$  üzerinde  $|F| \leq \kappa$  olacak biçimde bir  $\mathcal{F}$  şebekesini alalım.  $X$   $p$ -uzayı olduğundan  $X$ ' in açık örtülerinin 3.1.3. Tanım' daki koşulları sağlayan bir  $\{\mathcal{G}_n : n \in \omega\}$  açık örtüler dizisi vardır.  $\mathcal{A} = \{(F, n) \in \mathcal{F} \times \omega : \exists G \in \mathcal{G}_n : F \subset G\}$  olsun.  $F \cap F' = \emptyset$  olacak biçimdeki her  $F, F' \in \mathcal{F}$  için eğer mümkünse  $F \subset U(F, F') \subset \overline{U(F, F')} \subset X \setminus F'$  koşulunu sağlayan  $U(F, F')$  açığını seçelim. Her  $(F, n) \in \mathcal{A}$  için  $F \subset G(F, n)$  koşunu sağlayan bir  $G(F, n) \in \mathcal{G}_n$  kümesini seçelim. Teoremin ispatını tamamlamak için  $G(F, n)$  ve  $U(F, F')$  kümelerinin bütün sonlu arakesitlerinden oluşan  $\mathcal{B}$  ailesinin  $X$  için bir baz olduğunu göreceğiz.  $x \in X$  ve  $V \subset X$  açık olmak üzere  $x \in V$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $x \in G_n$  olacak biçimde bir  $G_n \in \mathcal{G}_n$  kümesi ve  $\mathcal{F}$  şebeke olduğundan  $x \in F_n \subset G_n$  olacak şekilde bir  $F_n \in \mathcal{F}$  kümesi vardır.  $\mathcal{A}$ ' nın tanımından  $(F_n, n) \in \mathcal{A}$  dır.  $K = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(F_n, n)}$  olarak tanımlanan  $K \subset X$  kümesi 3.1.3. Tanım (i)' den kompakttır. Şimdi  $y \in K \setminus V$  alalım,  $x \in V$  olduğundan  $x \neq y$  dir.  $X$   $p$ -uzayı olduğundan Hausdorff' tur. Buradan  $x$ ' in ve  $y$ ' nin  $O_x \cap O_y = \emptyset$  koşulunu sağlayan  $O_x$  ve  $O_y$  açık komşulukları vardır.  $\mathcal{F}$  şebeke olduğundan  $x \in F_x \subset O_x$  ve  $y \in F_y \subset O_y$  olacak şekilde  $F_x, F_y \in \mathcal{F}$  kümeleri vardır ve  $F_x \cap F_y = \emptyset$  dir. Bu durumda  $x \in F_x \subset O_x \subset \overline{O_x} \subset O_y^c \subset F_y^c$  olduğundan  $U(F_x, F_y) = O_x$  olmak üzere  $x \in F_x \subset U(F_x, F_y) \subset \overline{U(F_x, F_y)} \subset X \setminus F_y$  dir.  $B_y = U(F_x, F_y)$  olsun. Böylece her  $y \in K \setminus V$  için  $x \in B_y$  ve  $y \notin \overline{B_y}$  olacak biçimde bir  $B_y \in \mathcal{B}$  vardır. Böylece  $\{X \setminus \overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$  ailesi  $K \setminus V$  kümesi için bir açık örtüdür.  $K$  kompakt olduğundan,  $K$ ' nin kapalı alt kümesi olan  $K \setminus V$  de kompakttır. Bu durumda  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$  olacak biçimde sonlu bir  $\mathcal{B}'$  ailesi için  $\{X \setminus \overline{B} : B \in \mathcal{B}'\}$  ailesi  $K \setminus V$  kümesini örter. 3.1.3. Tanım (ii)' den  $\bigcap_{i \leq n_0} G(F_i, i) \subset V \cup \bigcup \{X \setminus \overline{B} : B \in \mathcal{B}'\}$  olacak biçimde

bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Her  $n \in \omega$  için  $x \in F_n$  ve  $F_n \subset G(F_n, n)$  olduğundan  $x \in G(F_n, n)$  dir. Buradan  $x \in \left( \bigcap_{i \leq n_0} G(F_i, i) \right)$  olur.  $\mathcal{B}'$  ailesinin elemanları  $U(F_x, F_y)$  kümelerinden oluştuğundan  $x \in \bigcap \mathcal{B}'$  dir. O zaman  $x \in \left( \bigcap_{i \leq n_0} G(F_i, i) \right) \cap (\bigcap \mathcal{B}') \subset V$  olur. Böylece  $\mathcal{B}$ ,  $X$  için bir bazdır. Burada  $|\mathcal{B}| \leq \kappa$  olduğu açıktır. ■

### 3.1.7. Tanım

$\sigma$ -ayrık bir şebekeye sahip olan uzaylara  $\sigma$ -uzayı denir.

### 3.1.8. Teorem

Her  $\sigma$ -uzayı subparakompakttır.

*İspat*

$X$  bir  $\sigma$ -uzayı olmak üzere  $\mathcal{O}$ ,  $X$  için bir açık örtü olsun.  $X$  bir  $\sigma$ -uzayı olduğundan  $X$ ' in bir  $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{A}_n$   $\sigma$ -ayrık şebekesi vardır. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $\mathcal{A}_n$  ayrık olduğundan  $\overline{\mathcal{A}_n} = \{\overline{A} : A \in \mathcal{A}_n\}$  ailesi de ayrıktır.  $X$  düzenli uzay olduğundan  $\mathcal{A}$  bir şebeke ise  $\overline{\mathcal{A}}$  da bir şebeke olur. Gerçekten  $\mathcal{A}$  bir şebeke olsun.  $x \in X$  olmak üzere  $x \in O$  olacak biçimde bir  $O \in \mathcal{O}$  açığını alalım.  $X$  uzayı düzenli olduğundan  $x \in V \subset \overline{V} \subset O$  olacak biçimde bir  $V \subset X$  açığı vardır.  $x \in V$ ,  $V \subset X$  açık ve  $\mathcal{A}$  bir şebeke olduğundan  $x \in A \subset V$  olacak biçimde bir  $A \in \mathcal{A}$  vardır. Buradan  $x \in \overline{A} \subset \overline{V} \subset O$  olur, yani  $x \in \overline{A} \subset O$  koşulunu sağlayan bir  $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$  bulunur.

Şimdi her  $n$  için  $\mathcal{F}_n = \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}_n : \exists O \in \mathcal{O} \text{ için } \bar{A} \subset O\}$  olsun.  $\mathcal{F}_n$  ailesi  $\mathcal{A}_n$  ailesinin alt ailesi olduğundan  $\mathcal{F}_n$  ayrıktır.  $\mathcal{F}_n$  ailesinin tanımlanışından  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \prec \mathcal{O}$  olduğu açıktır. Dolayısıyla  $\mathcal{F}, \mathcal{O}$  açık örtüsünün  $\sigma$ -ayrık kapalı bir incesi olup  $X$  uzayı subparakompakttır. ■

Şimdi bir sonraki teoremin ispatında kullanılacak olan lemmayı verelim.

### 3.1.9. Lemma

Her Moore uzayı subparakompakt uzaydır.

*İspat*

$X$  bir Moore uzayı olsun.  $\mathcal{V}, X'$  in herhangi bir açık örtüsü olsun.  $X$  Moore uzayı olduğundan  $X'$  in bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  açınım dizisi vardır. Öyleyse her  $x \in X$  için  $\{st(x, \mathcal{V}_n) : n \in \omega\}$ ,  $x$  için bir komşuluklar tabanıdır.  $x \in X$  olsun  $\mathcal{V}, X'$  in bir açık örtüsü olduğundan  $x \in U_0$  olacak biçimde bir  $U_0 \in \mathcal{V}$  vardır. O zaman  $st(x, \mathcal{V}_{n_0}) \subset U_0$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Böylece  $X$  uzayı subparakompakttır.

### 3.1.10. Teorem

Her Moore uzayı  $\sigma$ -uzayıdır.

### İspat

$X$  Moore uzayı olsun.  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$   $X$ ' in bir açınım dizisi olsun. 3.1.9. Lemma' dan  $X$  subparakompakt uzaydır. Öyleyse her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}_n \prec \mathcal{O}_n$  olacak biçimde bir  $\mathcal{F}_n = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{F}_m^n$   $\sigma$ -ayrık kapalı örtüsü vardır.  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  ailesinin  $X$  için bir  $\sigma$ -ayrık şebeke olduğunu görelim.  $x \in X$  ve  $x \in U$  olacak biçimde bir  $U \subset X$  açığını alalım.  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$  bir açınım dizisi olduğundan  $st(x, \mathcal{O}_{n_0}) \subset U$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $\mathcal{F}_{n_0} \prec \mathcal{O}_{n_0}$  olduğundan  $\mathcal{F}_{n_0}$  ailesi  $X$  için bir örtü olup  $x \in F$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}_{n_0}$  vardır.  $F \in \mathcal{F}_{n_0}$  ve  $\mathcal{F}_{n_0} \prec \mathcal{O}_{n_0}$  olduğundan  $F \subset O$  olacak biçimde bir  $O \in \mathcal{O}_{n_0}$  vardır. Böylece  $x \in O$  olur. Aynı zamanda  $st(x, \mathcal{O}_{n_0}) \subset U$  olduğundan  $x \in F \subset O \subset st(x, \mathcal{O}_{n_0}) \subset U$  olup  $x \in F \subset U$  olur. Böylece  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  ailesi  $X$  için  $\sigma$ -ayrık bir şebeke olup  $X$  bir  $\sigma$ -uzayıdır. ■

3.1.15. Teorem' in ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmaları ifade edip ispatlayalım.

### 3.1.11. Lemma

Lindelöf uzaylarda yerel sonlu her aile sayılabilir.

### İspat

$X$  bir Lindelöf uzay olmak üzere  $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$  yerel sonlu bir aile olsun. Bu durumda  $X$ ' in her  $x$  elemanı için  $x \in O_x$  ve  $\{\alpha \in I : O_x \cap F_\alpha \neq \emptyset\}$  ailesi sonlu olacak biçimde bir  $O_x$  açığı vardır. Öyleyse  $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$  ailesi  $X$  için bir açık örtüdür.  $X$  Lindelöf olduğundan  $\mathcal{O}$  ailesinin sayılabilir bir  $\tilde{\mathcal{O}} = \{O_{x_n} : n \in \omega\}$  alt örtüsü

vardır. Her  $n$  için  $I_n = \{\alpha \in I : O_{x_n} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}$  olsun o zaman  $I_n$  sonludur.  $I = \bigcup_{n \in \omega} I_n$  olduğunu görelim. Her  $n$  için  $I_n \subset I$  olduğundan  $I \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $\alpha \in I$  olmak üzere  $F_\alpha \neq \emptyset$  olsun. O zaman  $x \in F_\alpha$  olacak biçimde bir  $x \in X$  vardır.  $\tilde{\mathcal{O}}$  örtü olduğundan  $x \in O_{x_n}$  olacak biçimde bir  $O_{x_n} \in \tilde{\mathcal{O}}$  vardır. Böylece  $x \in O_{x_n} \cap F_\alpha$  olup  $O_{x_n} \cap F_\alpha \neq \emptyset$  olduğundan  $\alpha \in I_n$  dir. Buradan  $I = \bigcup_{n \in \omega} I_n$  olur.  $I_n$  aileleri sonlu olup  $I$  sayılabilir, dolayısıyla  $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$  ailesi sayılabilir. ■

### 3.1.12. Tanım

$X$  topolojik uzayının ikişer ikişer ayrık olan ve boş olmayan açık alt kümelerinden oluşan her ailesi sayılabilir ise  $X'$  e sayılabilir zincir koşulunu sağlıyor denir.

### 3.1.13. Lemma

Yoğun bir Lindelöf alt uzaya sahip olan parakompakt uzaylar Lindelöftür.

*İspat*

$X$  parakompakt bir uzay  $D \subset X$  olmak üzere  $\overline{D} = X$  ve  $D$  Lindelöf olsun.  $\mathcal{O} = \{O_\alpha : \alpha \in I\}$ ,  $X'$  in herhangi bir açık örtüsü olsun.  $X$  parakompakt olduğundan her  $\alpha \in I$  için  $\overline{V_\alpha} \subset O_\alpha$  olacak biçimde  $\mathcal{O}'$  nun yerel sonlu bir  $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$  açık incelmişi vardır.  $\overline{D} = X$  olduğundan her  $\alpha \in I$  için  $D \cap V_\alpha \neq \emptyset$  dir.  $\mathcal{V}$  ailesi yerel sonlu olduğundan  $J = \{D \cap V_\alpha : V_\alpha \in \mathcal{V}, V_\alpha \neq \emptyset\}$  ailesi,  $D$  içinde yerel sonlu olur.  $D$  Lindelöf olduğundan 3.1.11. Lemma' dan  $J$  sayılabilir.  $D = \bigcup_{\alpha \in J} (D \cap V_\alpha)$  olduğunu görelim.  $x \in D$  olsun.  $\mathcal{V}$ ,  $X$  için bir örtü olduğundan  $x \in V_\alpha$  olacak biçimde bir

$V_\alpha \in \mathcal{V}$  vardır. Buradan  $D \cap V_\alpha \neq \emptyset$  olduğundan  $\alpha \in J$  ve  $x \in \bigcup_{\alpha \in J} (D \cap V_\alpha)$  olur.

Böylece  $\overline{D} = X = \overline{\bigcup_{\alpha \in J} (D \cap V_\alpha)} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{(D \cap V_\alpha)} \subset \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha$  olduğundan  $\{O_\alpha : \alpha \in J\}$

ailesi  $\mathcal{O}$  'nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. Sonuç olarak  $X$  Lindelöftür. ■

3.1.13. Lemma' nın basit bir sonucunu, 3.1.15. Teorem' in ispatında kullanmak üzere ifade edelim.

3.1.14. Sonuç

$X$  parakompakt ve ayrılabilir ise Lindelöftür.

3.1.15. Teorem

$X$  parakompakt bir  $\sigma$  -uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- i)  $X$  Lindelöftür.
- ii)  $X$  ayrılabiliridir.
- iii)  $X$  sayılabilir zincir koşulunu sağlar.
- iv)  $X$  sayılabilir bir şebekeye sahiptir.

*İspat*

(i  $\Rightarrow$  iv):  $X$  bir  $\sigma$  -uzayı olduğundan  $X$ ' in  $\sigma$  -ayrık bir  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  şebekesi vardır.

3.1.11. Lemma' dan Lindelöf uzaylarda ayrık her aile sayılabilir olduğundan  $\mathcal{F}$  sayılabiliridir.



(iv  $\Rightarrow$  i):  $X$  sayılabilir bir  $\mathcal{A}$  şebekesine sahip olsun.  $\mathcal{O}$ ,  $X$  için bir açık örtü ve  $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A} : \exists O \in \mathcal{O} \text{ için } A \subset O\}$  olsun. Her  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  için  $A \subset O(A)$  olacak biçimde bir  $O(A) \in \mathcal{O}$  seçelim.  $\tilde{\mathcal{A}}$  sayılabilir olduğundan  $\{O(A) : A \in \tilde{\mathcal{A}}\}$  sayılabilir. Şimdi  $\{O(A) : A \in \tilde{\mathcal{A}}\}$  ailesinin  $X$  için bir örtü olduğunu görelim.  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{O}$ ,  $X$  için bir örtü olduğundan  $x \in O$  olacak biçimde bir  $O \in \mathcal{O}$  vardır.  $O \subset X$  açık ve  $\mathcal{A}$ ,  $X$  için bir şebeke olduğundan  $x \in A \subset O$  olacak biçimde bir  $A \in \mathcal{A}$  vardır. Böylece  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  olup  $x \in A \subset O(A)$  olur. Buradan  $\{O(A) : A \in \tilde{\mathcal{A}}\}$  ailesi  $X$  için bir örtü olup  $X$  Lindelöftür.

(iv  $\Rightarrow$  ii):  $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$  ailesi  $X$  için sayılabilir bir şebeke olsun. Her  $n \in \omega$  için bir  $x_n \in A_n$  seçelim.  $D = \{x_n : n \in \omega\}$  olsun.  $T \subset X$  açık ve  $T \neq \emptyset$  olsun.  $p \in T$  alalım.  $\mathcal{A}$  şebeke olduğundan  $p \in A_{n_0} \subset T$  olacak biçimde bir  $A_{n_0} \in \mathcal{A}$  vardır. Aynı zamanda  $x_{n_0} \in A_{n_0}$  olduğundan  $x_{n_0} \in T$  olup  $T \cap D \neq \emptyset$  olur. Buradan  $\overline{D} = X$  olup  $X$  ayrılabilir.

(ii  $\Rightarrow$  i): 3.1.14. Sonuç' tan  $X$  parakompakt ve ayrılabilir ise Lindelöftür.

(iii  $\Rightarrow$  iv):  $X$  sayılabilir zincir koşulunu sağlasın.  $X$  parakompakt olduğundan yığınsal normaldir.  $X$   $\sigma$ -uzayı olduğundan  $\sigma$ -ayrık bir  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  şebekesine sahiptir. Bu durumda  $\overline{\mathcal{F}_n} = \{\overline{F_{\alpha(n)}} : F_{\alpha(n)} \in \mathcal{F}_{\alpha(n)} \text{ ve } \alpha(n) \in I\}$  kapalılarından oluşan ayrık bir aile olduğundan ve  $X$  yığınsal normal olduğundan her  $\alpha(n) \in I(n)$  için  $\overline{F_{\alpha(n)}} \subset U_{\alpha(n)}$  olacak biçimde açıklardan oluşan ayrık bir  $\{U_{\alpha(n)} : \alpha(n) \in I(n)\}$  ailesi vardır.  $\{U_{\alpha(n)} : \alpha(n) \in I(n)\}$  ailesi ikişer ikişer ayrık olan açık alt kümelerden oluştuğundan ve  $X$  sayılabilir zincir koşulunu sağladığından

$\{U_{\alpha(n)} : \alpha(n) \in I(n)\}$  ailesi sayılabilir. Her  $\alpha(n) \in I(n)$  için  $\overline{F_{\alpha(n)}} \subset U_{\alpha(n)}$  olduğundan  $\overline{F_n}$  ailesi sayılabilir. Sonuç olarak  $X$  sayılabilir bir şebekeye sahiptir.

(iv  $\Rightarrow$  iii):  $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ ,  $X'$  in sayılabilir bir şebekesi ve  $\theta = \{O_\lambda : \lambda \in I\}$   $X'$  in ikişer ikişer ayrık olan ve boş olmayan açık alt kümelerinden oluşan herhangi bir aile olsun.  $\theta$  ailesinin sayılabilir olduğunu görelim.  $\mathcal{A}$  şebeke olduğundan her  $\lambda \in I$  için  $A_{n(\lambda)} \subset O_\lambda$  olacak biçimde bir  $n(\lambda) \in \omega$  vardır.  $\lambda \neq \mu$  iken  $O_\lambda \cap O_\mu = \emptyset$  olduğundan  $A_{n(\lambda)} \neq A_{n(\mu)}$  olup  $n(\lambda) \neq n(\mu)$  olur. Bu durumda her  $\lambda \in I$  için  $f(\lambda) = n(\lambda)$  biçiminde tanımlanan  $f : I \rightarrow \omega$  fonksiyonu birebirdir. Bundan dolayı  $|I| \leq \omega$  olup  $X$  sayılabilir zincir koşulunu sağlar. ■

Şimdi genelleştirilmiş metrik uzayların sınıflandırılması için oldukça kullanışlı olan  $G_\delta$ -köşegen kavramıyla  $\sigma$ -uzayı arasındaki ilişkiyi veren teoremi ifade edip ispatını görelim.

### 3.1.16. Teorem

Her  $\sigma$ -uzayı  $G_\delta^*$ -köşegene sahiptir.

*İspat*

$X$  bir  $\sigma$ -uzayı ve  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ ,  $X$  uzayı için  $\sigma$ -ayrık bir şebeke olsun.  $\mathcal{F}$  ayrık bir aile iken  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  ailesinin de ayrık bir aile olduğunu görmek kolaydır. Şimdi  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} = \left( \bigcup_{n \in \omega} F_n \right) \times \left( \bigcup_{n \in \omega} F_n \right)$  ailesinin  $X \times X$  için bir şebeke olduğunu görelim.  $(x, y) \in X \times X$  ve  $G \subset X \times X$  açık olmak üzere  $(x, y) \in G$  olsun. Bu durumda  $(x, y) \in U \times V \subset G$  olacak biçimde  $U, V \subset X$  açıkları vardır.  $\mathcal{F}$  bir şebeke olduğundan  $x \in F_x \subset U$  olacak biçimde bir  $F_x \in \mathcal{F}_{n_0}$  ve  $y \in F_y \subset V$  olacak biçimde bir  $F_y \in \mathcal{F}_{m_0}$

vardır. Buradan  $(x, y) \in (F_x \times F_y) \in \mathcal{F}_{n_0} \times \mathcal{F}_{m_0} \in \left( \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n \right) \times \left( \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n \right) = \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  olur.

Böylece  $(x, y) \in (F_x \times F_y) \subset U \times V \subset G$  olacak biçimde  $F_x \times F_y \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  bulunduğundan  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ ,  $X \times X$  için  $\sigma$ -ayrık bir şebeke olur. O zaman  $X \times X$  bir  $\sigma$ -uzayıdır.  $\sigma$ -uzaylarda kapalı alt kümeler  $G_\delta$ -kümedir[7].  $X$  Hausdorff uzay olduğundan kapalı bir köşegene sahiptir. Buradan  $X$ ,  $G_\delta$ -köşegene sahiptir.  $X \times X$   $\sigma$ -uzayı olduğundan 3.1.8. Teorem' den  $X \times X$  uzayı subparakompakt olup subparakompakt her uzay submetakompakt olduğundan  $X \times X$  çarpım uzayı submetakompakttır.  $X$ ,  $G_\delta$ -köşegene sahip olduğundan, 2.4.20. Lemma' dan  $X$ ' in açık örtülerinden oluşan bir  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$  köşegen dizisi vardır. Bu durumda  $X$ ' in açık örtülerinden oluşan ve her  $x \in X$  için  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{O}_n)$  koşulunu sağlayan bir  $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$  dizisi vardır[7].  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$  bir  $G_\delta$ -köşegen dizisi olduğundan  $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{O}_n) = \{x\}$  dir.  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{O}_n)$  olduğundan  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \{x\}$  dir. Buradan  $X$  uzayı  $G_\delta^*$ -köşegene sahiptir.■

### 3.1.17. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun. Her  $x \in X$  için

a)  $C_x = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{O}_n)$  kümesi kompakt

b)  $\{\text{st}(x, \mathcal{O}_n) : n \in \omega\}$  ailesi  $C_x$  için bir taban

koşullarını sağlayan  $X$  ' in açık örtülerinin bir  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$  dizisi varsa  $X$  uzayına kesin p-uzayı denir. Her kesin p-uzayının bir p-uzayı olduğu açıktır.

Şimdi Moore uzayı ve metriklenebilme ile  $\sigma$ -uzayı arasındaki temel ilişkiyi veren aşağıdaki sonucu ifade edelim.

### 3.1.18. Sonuç

- i)  $X$  uzayının Moore uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in  $\sigma$ -uzayı ve  $p$ -uzayı olmasıdır.
- ii)  $X$  uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in  $\sigma$ -uzayı ve  $M$ -uzayı olmasıdır.

#### *İspat*

- i)  $X$  Moore uzayı olsun. O zaman 3.1.10. Teorem' den  $X$  bir  $\sigma$ -uzayıdır. Şimdi Moore uzayının  $p$ -uzayı olduğunu görelim.  $X$  Moore uzayı olsun. O zaman  $X'$  in açık örtülerinden oluşan bir  $\{\mathcal{O}_n : n \in \omega\}$  açınım dizisi vardır.  $X$  Hausdorff uzayı ve  $\{st(x, \mathcal{O}_n) : n \in \omega\}$  ailesi  $x$  noktasının bir komşuluklar tabanı olduğundan  $C_x = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \mathcal{O}_n) = \{x\}$  olup  $C_x$  kompakttır. Böylece  $(\mathcal{O}_n)$  açık örtüler dizisi 3.1.17. Tanım 'ın (a) ve (b) koşullarını sağladığından  $X$  kesin  $p$ -uzayı olup  $p$ -uzayıdır.

Şimdi  $X$   $\sigma$ -uzayı ve  $p$ -uzayı olsun. 3.1.8. Teorem' den  $\sigma$ -uzayı subparakompakt olduğundan  $X$  subparakompakt olup, subparakompakt uzay submetakompakt olduğundan  $X$  submetakompakt uzayıdır. Böylece  $X'$  in  $p$ -uzayı olması ile  $w\Delta$ -uzayı olması denktir[7]. Ayrıca 3.1.16. Teorem' den  $X$   $G_\delta^*$ -köşegene sahiptir.  $G_\delta^*$ -köşegene sahip olan her  $w\Delta$ -uzay açılabilir uzay olduğundan [7, Teorem 3.3]  $X$  uzayı açılabilir olup Moore uzayıdır[7].

- ii)  $X$  metriklenebilir uzay olduğundan Moore uzayıdır. 3.1.10. Teorem' den her Moore uzayı  $\sigma$ -uzayı olduğundan  $X$   $\sigma$ -uzayıdır. Metriklenebilir uzayların  $M$ -uzayı olduğu açıktır.

Şimdi de  $X$   $\sigma$ -uzay ve  $M$ -uzay olsun. O zaman 3.1.16 Teorem' den  $X$   $G_\delta$ -diagonale sahiptir. Ayrıca  $X$ ,  $M$ -uzayı olduğundan  $X$  uzayı metriklenebilirdir[7, Sonuç 3.8.]■

## 3.1.19. Teorem

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$   $X$  için  $\sigma$ -ayrık kapalı bir şebeke olmak üzere  $\mathcal{F}'$  nin elemanlarının sonlu arakesitlerinden oluşan  $\mathcal{B}$  ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i)  $\mathcal{B}$  ailesi  $X$  üzerindeki bir topoloji için bir bazdır.
- ii)  $\mathcal{B}$  ailesi  $\sigma$ -ayrıktır
- iii)  $\mathcal{B}$  ailesinin  $X$  üzerinde ürettiği topoloji  $\tau_{\mathcal{B}}$  olmak üzere  $\tau \subset \tau_{\mathcal{B}}$  dir.
- iv)  $\mathcal{B}$  ailesinin ürettiği topoloji düzenlidir.

*İspat*

- i)  $\mathcal{B} = \{B \subset X : \exists \mathcal{S} \subset \mathcal{F} \text{ sonlu}, B = \bigcap \mathcal{S}\}$  olmak üzere

$\bigcup \mathcal{B} = X$  ve her  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ve  $x \in B_1 \cap B_2$  olacak biçimdeki her  $x$  için  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$  olacak biçimde bir  $B_3 \in \mathcal{B}$  elemanının var olduğunu görelim.  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{F}$  şebeke olduğundan  $x \in F$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır.  $\{F\} \subset \mathcal{F}$  ve  $\{F\}$  sonlu olduğundan  $F \in \mathcal{B}$ , dolayısıyla  $x \in \bigcup \mathcal{B}$  olup  $X \subset \bigcup \mathcal{B}$  dir.  $\mathcal{B}$  ailesi'nin tanımlanışından  $\bigcup \mathcal{B} \subset X$  olduğu açıktır. Buradan  $X = \bigcup \mathcal{B}$  olur.  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ve  $x \in B_1 \cap B_2$  olsun.  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  olduğundan  $\mathcal{F}'$  nin  $B_1 = \bigcap \varphi$  ve  $B_2 = \bigcap \psi$  olacak biçimde, sonlu  $\varphi$  ve  $\psi$  alt aileleri vardır. Buradan  $x \in B_1 \cap B_2 = (\bigcap \varphi) \cap (\bigcap \psi) = \bigcap (\varphi \cap \psi) = B_3 \in \mathcal{B}$  olduğundan  $\mathcal{B}$  ailesi  $X$  üzerindeki bir topoloji için bir bazdır.

- ii) Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{B}_n = \{B \subset X : \exists \varphi \subset \mathcal{F}_n \text{ sonlu} : B = \bigcap \varphi\}$  ailesinin ayrık olduğunu görelim.  $x \in X$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}_n$  ayrık olduğundan, her  $n \in \omega$

için  $x \in U_n$  olacak biçimde bir  $U_n \subset X$  açığı vardır ve  $|\{F \in \mathcal{F}_n : U_n \cap F \neq \emptyset\}| \leq 1$  dir.  $\{F \in \mathcal{F}_n : U_n \cap F \neq \emptyset\} \subset \{F_n\}$  olsun.  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}_n$  ve  $\{F_n\}$  sonlu olduğundan  $F_n \in \mathcal{B}_n$  dir.  $\{F \in \mathcal{F}_n : U_n \cap F \neq \emptyset\} \subset \{F_n\}$  olduğundan  $\{B \in \mathcal{B}_n : U_n \cap B \neq \emptyset\} \subset \{F_n\}$  dir. Buradan  $|\{B \in \mathcal{B}_n : B \cap U_n \neq \emptyset\}| \leq 1$  olur. Böylece  $\mathcal{B}_n$  ailesi ayrıktır.  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$  olduğu açık olduğundan  $\mathcal{B}$  ailesi  $\sigma$ -ayrıktır

- iii)  $\mathcal{B}$  ailesinin ürettiği topoloji  $\tau_{\mathcal{B}}$  olmak üzere  $\tau \subset \tau_{\mathcal{B}}$  olduğunu görelim.  $T \in \tau$  olsun. Eğer  $T = \emptyset$  ise  $T \in \tau_{\mathcal{B}}$  olur.  $T \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda  $x \in T$  için  $x \in F \subset T$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır.  $F \in \mathcal{B}$  olduğundan  $T$ 'nin  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisine göre içi  $\overset{0}{T}$  olmak üzere  $x \in \overset{0}{T}$  olup  $T \in \tau_{\mathcal{B}}$  dir.
- iv) Şimdi  $\mathcal{B}$  ailesinin ürettiği  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisinin düzenli olduğunu görelim.  $x \in X$  ve  $x \in V$  olacak biçimde  $\tau_{\mathcal{B}}$  de bir  $V \subset X$  açığını alalım.  $\mathcal{F}$  şebeke olduğundan  $x \in F \subset V$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır.  $\mathcal{F}$  ailesinin elemanları  $\tau$  topolojisine göre kapalı olduğundan  $x \in F = \overline{F}^{\tau} \subset V$  dir. (iii)' den  $\tau \subset \tau_{\mathcal{B}}$  olduğundan  $\overline{F}^{\tau_{\mathcal{B}}} \subset \overline{F}^{\tau}$  olup  $x \in F \subset \overline{F}^{\tau_{\mathcal{B}}} \subset \overline{F}^{\tau} \subset V$  olur. Böylece  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisi düzenlidir. ■

Şimdi 3.1.19. Teorem' in basit bir sonucunu verelim.

### 3.1.20. Sonuç

3.1.19. Teorem' de tanımlanan  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisi metriklenebilirdir.

*İspat*

$\tau_{\mathcal{B}}$  'nin  $\mathcal{B}$  bazı  $\sigma$ -ayrık ve  $\tau_{\mathcal{B}}$  düzenli olduğundan Nagata-Smirnov teoreminden[5]  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisi metriklenebilirdir.■

### 3.1.21. Teorem

Kapanışı koruyan bir ailenin kapalı dönüşüm altındaki görüntüsü de kapanışı korur.

*İspat*

$\mathcal{F}$ ,  $X$ ' in alt kümelerinin kapanışı koruyan bir ailesi olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  sürekli dönüşümü kapalı olsun.  $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$  ailesinin  $Y$  içinde kapanışı koruduğunu görelim. Bunun için  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  olmak üzere;  $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(F)} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{f(F)}$  eşitliğini görmek

gerekir.  $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(F)} = \overline{f\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F\right)}$  dir.  $f$  kapalı ve sürekli olduğundan her  $K \subset X$  için

$f(\overline{K}) = \overline{f(K)}$  olup  $f\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F\right) = f\left(\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F}\right)$  olur. Ayrıca  $\mathcal{F}$  kapanışı koruduğundan

$f\left(\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F}\right) = f\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{F}\right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(\overline{F})$  olur yani  $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(F)} = f\left(\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F}\right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(\overline{F})$  dir.  $f$  kapalı

ve sürekli olduğundan  $\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(\overline{F}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{f(F)}$  olup  $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} f(F)} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{f(F)}$  dir. Böylece ispat

tamamlanır.■

3.1.19. Teorem' in bir başka sonucu olan 3.1.22. Teorem' i verelim.

### 3.1.22. Teorem

$(X, \tau)$  topolojik uzayının kardinalitesi en fazla  $\kappa$  olacak biçimde  $\sigma$ -ayrık kapalı bir şebekesi varsa  $X$  üzerinde  $\tau$  topolojisinden daha ince, metriklenebilir ve  $w((X, \zeta)) \leq \kappa$  olacak biçimde bir  $\zeta$  topolojisi vardır.

*İspat*

$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ ,  $X$ ' in  $\sigma$ -ayrık, kapalı bir şebekesi ve  $|\mathcal{F}| \leq \kappa$  olsun. 3.1.19. Teorem' de tanımlanan  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$  ailesi  $X$  üzerindeki  $\tau_{\mathcal{B}}$  topolojisi için bir bazdır.  $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{F}|$  olduğundan  $w(X, \tau_{\mathcal{B}}) \leq \kappa$  olur. Buradan 3.1.20. Sonuç' tan  $(X, \tau_{\mathcal{B}})$  metriklenebilirdir, ayrıca 3.1.19. Teorem' den  $\tau \subset \tau_{\mathcal{B}}$  dir. ■

### 3.1.23. Teorem

Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayının sayılabilir bir şebekesinin var olması için gerekli ve yeterli koşul,  $X$  uzayının ayrılabilir bir metrik uzayın sürekli bir görüntüsü olmasıdır.

*İspat*

$\Rightarrow$ :  $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$  ailesi  $X$  uzayı için sayılabilir bir şebeke olsun.  $X$  regüler olduğundan  $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A_n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$  ailesi de  $X$  için bir şebeke olur. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $\mathcal{F}_n = \{\overline{A_n}\}$  olmak üzere  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ ,  $X$  için  $\sigma$ -ayrık kapalı bir şebeke olur. O halde yukarıdaki teoremden  $X$  üzerinde  $\tau \subset \tau'$  olacak biçimde öyle bir  $\tau'$  topolojisi vardır ki  $(X, \tau')$  ikinci sayılabilir bir metriklenebilir uzaydır.

$I : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  özdeşlik dönüşümü,  $\tau \subset \tau'$  olduğundan süreklidir. İkinci sayılabilir her uzay ayrılabilir olduğundan  $(X, \tau')$  uzayı ayrılabilirdir. Böylece  $(X, \tau)$  uzayı ayrılabilir bir metrik uzayın sürekli bir görüntüsüdür.



$\Leftarrow$ :  $Y$  ayrılabilir bir metrik uzay olmak üzere  $f: Y \rightarrow X$  sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Ayrılabilir her metrik uzay ikinci sayılabilir olduğundan  $Y$  uzayının sayılabilir bir  $\mathcal{B}$  bazı vardır.  $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$  ailesinin  $X$  için bir şebeke olduğunu görelim.  $x \in X$  ve  $x \in U$  olacak biçimde bir  $U \subset X$  açığını alalım.  $f$  dönüşümü örten olduğundan  $y = f^{-1}(x) \in f^{-1}(U)$  olacak biçimde bir  $y \in Y$  elemanı vardır.  $f$  sürekli olduğundan  $f^{-1}(U)$ ,  $Y$ ' de açıktır.  $\mathcal{B}$ ,  $Y$ ' nin bazı olduğundan  $y \in B \subset f^{-1}(U)$  olacak biçimde bir  $B \in \mathcal{B}$  vardır. Buradan  $x \in f(B) \subset U$  olduğundan  $f(\mathcal{B})$ ,  $X$  için bir şebeke olur.  $\mathcal{B}$  ailesi sayılabilir olduğundan  $f(\mathcal{B})$  de sayılabilir. ■

### 3.1.24. Teorem

$(X, \tau)$  topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

- i)  $X$   $\sigma$ -ayrık bir şebekeye sahiptir.
- ii)  $X$   $\sigma$ -yerel sonlu bir şebekeye sahiptir.
- iii)  $X$   $\sigma$ -kapanışı koruyan bir şebekeye sahiptir.
- iv) Aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir  $h: \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu vardır:
  - a) Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x)$
  - b) Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $y \in h(n, x)$  ise  $h(n, y) \subset h(n, x)$
  - c) Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x_n)$  ise  $x_n \rightarrow x$  dir.
- v) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $h: \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu vardır:
  - a) Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x)$
  - b) Her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x_n)$  ve  $x_n \in h(n, y_n)$  ise  $y_n \rightarrow x$  dir.

### İspat

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Açıktır.

(iv)  $\Rightarrow$  (v) :  $h$  fonksiyonu (iv)' deki koşulları sağlasın. Her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x_n)$  ve  $x_n \in h(n, y_n)$  olsun. (iv) – (b) ' den  $x \in h(n, x_n) \subset h(n, y_n)$  olup (iv) – (c) ' den  $y_n \rightarrow x$  olur.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}_n$ , kapalı kümelerden oluşan ve kapanışı koruyan bir aile olmak üzere  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ ,  $X$  için bir şebeke olsun. Her  $n \in \omega$  ve her  $x \in X$  için

$h(n, x) = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F}_i : i \leq n, x \notin F\}$  olsun.  $h(n, x) \neq \emptyset$  olduğu açıktır. Her  $n \in \omega$

için  $y \in h(n, x)$  olsun.  $h(n, x)$  kümesinin tanımından  $y \notin \bigcup \{F \in \mathcal{F}_i : i \leq n, x \notin F\}$  olup

$i \leq n$  ve  $x \notin F$  olacak biçimdeki her  $F \in \mathcal{F}_i$  için  $y \notin F$  dir.  $z \in h(n, y)$  olsun.  $h(n, y)$

kümesinin tanımından  $i \leq n$  ve  $y \notin F$  olacak biçimdeki her  $F \in \mathcal{F}_i$  için  $z \notin F$  dir.

Öyleyse  $i \leq n$  ve  $x \notin F$  olacak biçimdeki her  $F \in \mathcal{F}_i$  için  $z \notin F$  dir. Buradan

$z \notin \bigcup \{F \in \mathcal{F}_i : i \leq n, x \notin F\}$  olup  $z \in h(n, x)$  dir. Böylece  $h(n, y) \subset h(n, x)$  olur. Şimdi

(c)' nin doğru olduğunu görelim. Her  $n$  için  $x \in h(n, x_n)$  olmak üzere  $x_n \rightarrow x$  olsun.

O zaman  $x \in U$  olacak biçimde öyle bir  $U \subset X$  açığı vardır ki,  $k_n \geq n$  olan her  $n$  için

$x_{k_n} \notin U$  dur.  $S = \{x_{k_n} : k_n \geq n, n \in \omega\}$  olsun.  $S \cap U = \emptyset$  olduğundan  $x \notin \bar{S}$  dir.  $\mathcal{F}$

şebeke olduğundan  $x \in F_0 \subset U$  olacak biçimde bir  $F_0 \in \mathcal{F}$  vardır ve  $U \cap S = \emptyset$

olduğundan  $F_0 \cap S = \emptyset$  olur.  $F_0 \in \mathcal{F}$  ve  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  olduğundan  $F_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$  olacak

biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Şimdi  $h(n_0, x_{k_{n_0}}) \cap F_0 = \emptyset$  olduğunu görelim.

$p \in h(n_0, x_{k_{n_0}})$  olsun.  $p \notin \bigcup \{F \in \mathcal{F}_i : i \leq n_0 \text{ ve } x_{k_{n_0}} \notin F\}$ ,  $F_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$  ve  $x_{k_{n_0}} \notin F_0$

olduğundan  $p \notin F_0$  olur. Böylece  $h(n_0, x_{k_{n_0}}) \cap F_0 = \emptyset$  dir. Ancak her  $n \in \omega$  için

$x \in h(n, x_n)$  olduğundan  $x \in h(k_n, x_{k_n})$  ve  $n \leq k_n$  olduğundan

$h(k_n, x_{k_n}) \subset h(n, x_{k_n})$  olup  $x \in h(n, x_{k_n})$  olur. Ayrıca  $x \in F_0$  olduğundan bu durum  $h(n_0, x_{k_{n_0}}) \cap F_0 = \emptyset$  olması ile çelişir. Böylece kabul yanlış olup  $x_n \rightarrow x$  olmak zorundadır.

(v)  $\Rightarrow$  (i) :  $h$  fonksiyonu (v)' deki koşulları sağlasın.  $g: \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu, her  $n \in \omega$  ve her  $x \in X$  için  $g(n, x) = \bigcap_{i=1}^n h(n, x)$  olacak biçimde tanımlanırsa, (a) ve (b)' yi sağlar. Ayrıca  $g(n+1, x) \subset g(n, x)$  dir. İyi sıralı olma prensibinden her küme üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı vardır.  $<, X$  kümesi için bir iyi sıralama bağıntısı olsun.  $x \in X$  ve  $i, n \in \omega$  için  $H(x, i, n) = X \setminus \left[ \left( \bigcup \{g(i, y) : y < x\} \right) \cup \left( \bigcup \{g(n, y) : y \notin g(i, x)\} \right) \right]$  olarak tanımlansın.  $H(x, i, n) \subset g(i, x)$  olduğu açıktır.  $\mathcal{H}(i, n) = \{H(x, i, n) : x \in X\}$  olsun.  $\mathcal{H}(i, n)$  ailesinin ayrık olduğunu görelim.  $z \in X$  ve  $y_0 = \min\{y \in X : z \in g(i, y)\}$  olsun. Eğer  $y_0 < x$  ise  $H(x, i, n)$ ' nin tanımlanışından  $g(i, y_0) \cap H(x, i, n) = \emptyset$  olur. Eğer  $x < y_0$  ise  $z \notin g(i, x)$  olur.  $H(x, i, n)$ ' nin tanımından  $H(x, i, n) \subset X \setminus \bigcup \{g(n, z) : z \notin g(i, x)\}$  olduğundan  $g(n, z) \cap H(x, i, n) = \emptyset$  olur. O zaman  $g(i, y_0) \cap g(n, z)$  kümesi  $z$ ' nin açık komşuluğudur ve  $\mathcal{H}(i, n)$  ailesinden en fazla bir elemanla kesişir. Buradan  $\mathcal{H}(i, n)$  ailesinin ayrık olduğu görülmüş olur.  $F(x, i, n, m) = \{y \in H(x, i, n) : x \in g(m, y)\}$  ve  $\mathcal{F}(i, n, m) = \{F(x, i, n, m) : x \in X\}$  olsun. O zaman  $F(x, i, n, m) \subset H(x, i, n)$  ve  $\{H(x, i, n) : x \in X\}$  ailesi ayrık olduğundan  $\mathcal{F}(i, n, m) = \{F(x, i, n, m) : x \in X\}$  ailesi ayrıktır. Şimdi  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(i, n, m) : i, n, m \in \omega\}$  ailesinin  $X$  için bir şebeke olduğunu görelim.  $p \in X$  olmak üzere  $p \in U$  olacak biçimde bir  $U \subset X$  açığını alalım. Her  $i \in \omega$  için  $x_i = \min\{x \in X : p \in g(i, x)\}$  olsun. O zaman  $n(i) \in \omega$  için  $p \notin \bigcup \{g(n(i), y) : y \notin g(i, x_i)\}$  olur. Aksi takdirde her  $n$  için  $y_n \notin g(i, x_i)$  ve  $p \in g(n, y_n)$  olacak biçimde bir  $y_n$  elemanı vardır. Buradan  $p \in g(n, y_n)$  ve

$y_n \in g(n, y_n)$  olduğundan (b)' den  $y_n \rightarrow p$  olur.  $p \in g(i, x_i)$  ve  $g(i, x_i)$  açık olduğundan her  $n > n_0$  için  $y_n \in g(i, x_i)$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Bu ifade her  $n$  için  $y_n \notin g(i, x_i)$  olmasıyla çelişir. Ayrıca  $x_i$ ' nin minimum oluşundan  $p \notin \bigcup \{g(i, y) : y < x_i\}$  olup  $p \in H(x_i, i, n(i)) \subset g(i, x_i)$  dir. Böylece (a) ve (b)' den  $x_i \rightarrow p$  olur.  $x_i \rightarrow p$  ve her  $m$  için  $p \in g(m, p)$  ve  $g(m, p)$  açık olduğundan her  $m$  için öyle bir  $j(m)$  vardır ki  $i \geq j(m)$  olacak biçimdeki her  $i$  için  $x_i \in g(m, p)$  dir.  $i(m) = \max\{m, j(m)\}$  denilirse  $i(m) \geq m$  ve  $x_{i(m)} \in g(m, p)$  olur. Böylece her  $m \in \omega$  için öyle bir  $i(m) \in \omega$  vardır ki  $i(m) \geq m$  olacak biçimdeki her  $i \in \omega$  sayısı için  $x_{i(m)} \in g(m, p)$  dir.  $F_m = F(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)), m)$  olsun. Bu durumda  $p \in F_m$  dir. İspatı tamamlamak için  $F_m \subset U$  olacak biçimde bir  $m$  sayısının var olduğunu görmek yeterlidir. Aksini düşünerek her  $m \in \omega$  için bir  $y_m \in F_m \setminus U$  seçelim. Buradan, her  $i \in \omega$  için  $p \in H(x_i, i, n(i))$  olup,  $p \in H(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)))$  dir.  $H(x_{i(m)}, i(m), n(i(m))) \subset g(i(m), x_{i(m)})$  olduğundan  $p \in g(i(m), x_{i(m)})$  elde edilir. Ayrıca  $y_m \in F_m$  olduğundan  $F_m$  kümesinin tanımından,  $y_m \in H(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)))$  ve  $x_{i(m)} \in g(m, y_m)$  dir.  $i(m) \geq m$  olduğundan  $g(i(m), x_{i(m)}) \subset g(m, x_{i(m)})$  olup  $p \in g(m, x_{i(m)})$  dir. (v) – (b)' den  $y_m \rightarrow p$  dir. Ancak  $p \in U$  ve  $y_m \notin U$  olduğundan çelişki oluşur. Buradan  $\mathcal{F}$  ailesinin  $X$  için  $\sigma$ -ayrık bir şebeke olduğu görülmüş olur. ■

### 3.1.25. Tanım

$X$  uzayının öyle bir  $\sigma$ -ayrık  $\mathcal{F}$  ailesi ve kapalı sayılabilir kompakt alt kümelerden oluşan öyle bir  $\mathcal{C}$  örtüsü varsa ki her  $C \in \mathcal{C}$  ve  $C \subset U$  olacak biçimde her  $U$  açığı için  $C \subset F \subset U$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  bulunabiliyorsa  $X$  uzayına  $\Sigma$ -uzayı denir.  $\mathcal{C}$  ailesinin elemanları sayılabilir kompakt yerine kompakt olursa  $X$  uzayına kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı denir.

### 3.1.26. Teorem

Bir  $X$  uzayının kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in subparakompakt  $\Sigma$ -uzayı olmasıdır.

*İspat*

$\Leftarrow$ : Subparakompakt olan sayılabilir kompakt her uzay kompakt olduğundan[7] her subparakompakt  $\Sigma$ -uzayı, kuvvetli  $\Sigma$ -uzayıdır.

$\Rightarrow$ :  $X$  uzayı kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olsun. O zaman tanım gereği  $X'$  in öyle bir  $\sigma$ -ayrık

$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  ailesi ile elemanları kompakt olan öyle bir  $\mathcal{S}$  örtüsü vardır ki her  $S \in \mathcal{S}$  ve

$S \subset U$  olacak biçimdeki her  $U \subset X$  açığı için  $S \subset F \subset U$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır. Her kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı,  $\Sigma$ -uzay olduğundan ispatı tamamlamak için  $X'$  in subparakompakt olduğunu görmek yeterlidir.  $\mathcal{U}$ ,  $X$  için bir açık örtü olsun.  $X$  uzayı düzenli olduğundan  $\overline{\mathcal{O}} \prec \mathcal{U}$  olacak biçimde bir  $\mathcal{O}$  açık örtüsü vardır.  $\tilde{\mathcal{F}}$

$= \{F \in \mathcal{F} : \exists \mathcal{O}_F \subset \mathcal{O} \text{ sonlu} : F \subset \bigcup \mathcal{O}_F\}$  olmak üzere her  $F \in \tilde{\mathcal{F}}$  için  $F \subset \bigcup_{i=1}^{k(F)} O_i(F)$  olacak

biçimde  $k(F) \in \omega$  ve  $O_i(F) \in \mathcal{O}$  vardır. Her  $F \in \tilde{\mathcal{F}}$  için

$\mathcal{O}_F = \{O_1(F), O_2(F), \dots, O_{k(F)}(F)\}$  ve  $\mathcal{H}(i, n) = \{F \cap O_i(F) : F \in \mathcal{F}_n \text{ ve } F \in \tilde{\mathcal{F}}\}$  olsun.

$\mathcal{H}(i, n)$  ailesi  $\mathcal{F}_n$  ailesi ayrık olduğundan ayrıktır. Şimdi  $\mathcal{H} = \bigcup_{(i, n) \in \omega \times \omega} \mathcal{H}(i, n)$

ailesinin  $X$  için bir örtü olduğunu görelim.  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{S}$  ailesi  $X$  için bir örtü olduğundan  $x \in S$  olacak biçimde bir  $S \in \mathcal{S}$  vardır.  $S$  kompakt ve  $\mathcal{O}$ ,  $X$  için bir açık örtü olduğundan  $S \subset \bigcup \tilde{\mathcal{O}}$  olacak biçimde sonlu bir  $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$  ailesi vardır.  $\bigcup \tilde{\mathcal{O}} = O$

olsun.  $S \subset O$  ve  $O \subset X$  açık olduğundan hipotezden  $x \in S \subset F_0 \subset O$  olacak biçimde bir

$F_0 \in \mathcal{F}$  vardır.  $F_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$  olduğundan  $F_0$  için  $x \in F_0 \subset \bigcup \mathcal{O}_{F_0}$  koşulunu sağlayan sonlu bir

$\mathcal{O}_{F_0} = \{O_1(F_0), O_2(F_0), \dots, O_{k(F_0)}(F_0)\}$  ailesi seçilmiştir.

Buradan  $x \in O_{i_0}(F_0)$  ve  $1 \leq i_0 \leq k(F_0)$  olacak biçimde bir  $i_0$  vardır ve  $x \in F_0 \cap O_{i_0}(F_0)$  dir.  $F_0 \in \mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  olduğundan  $F_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $H = F_0 \cap O_{i_0}(F_0)$  denilirse  $H \in \mathcal{H}(n_0, i_0) \subset \mathcal{H}$  olur. Böylece  $x \in H$  ve  $H \in \mathcal{H}$  olduğundan  $\mathcal{H}$  örtüdür.  $\mathcal{K}(n, i) = \{\overline{H} : H \in \mathcal{H}(n, i)\}$  denilirse  $\mathcal{K} = \bigcup_{(n, i) \in \omega \times \omega} \mathcal{K}(n, i)$  ailesi kapalı kümelerden oluşan  $\sigma$ -ayrık bir ailedir. Aynı zamanda  $\mathcal{H} \prec \mathcal{O}$  olduğundan  $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{H}} \prec \overline{\mathcal{O}} \prec \mathcal{U}$  olup  $\mathcal{K} \prec \mathcal{U}$  olur. Böylece  $X$  uzayının subparakompakt olduğu görülür. ■

Şimdi 3.1.29. Teorem' in ispatında kullanmak üzere aşağıdaki Lemmaları verelim.

### 3.1.27. Lemma

$f: X \rightarrow Y$  sürekli dönüşüm olmak üzere  $\mathcal{F}$  ailesi  $Y$ ' de ayrık bir aile ise  $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$  ailesi  $X$ ' de ayrıktır.

*İspat*

$x \in X$  olsun.  $\mathcal{F}$  ailesi ayrık olduğundan  $f(x) \in V$  ve  $|\{F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \emptyset\}| \leq 1$  olacak biçimde bir  $V \subset Y$  açığı vardır.  $f$  dönüşümü sürekli olduğundan  $x \in f^{-1}(V) \subset X$  açıktır ve  $|\{f^{-1}(F) : f^{-1}(V) \cap f^{-1}(F) \neq \emptyset\}| \leq 1$  olduğu kolaylıkla görülebilir. ■

### 3.1.28. Lemma

$f: X \rightarrow Y$  dönüşümü yarı mükemmel dönüşüm olsun. Eğer  $Y$  uzayı sayılabilir kompakt ise  $X$  uzayı da sayılabilir kompakttır.

### İspat

$\mathcal{O} = \{O_n : n \in \omega\}$   $X$ ' in sayılabilir bir açık örtüsü olmak üzere, her  $n$  için  $V_n =$

$\left[ f \left( \left( \bigcup_{i=1}^n O_i \right)^c \right) \right]^c$  olsun.  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan her  $n$  için  $V_n$  kümesi  $Y$ ' de

açıktır. O zaman  $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$  ailesi  $Y$  için sayılabilir bir açık örtü olur..

Gerçekten;  $y \in Y$  olsun.  $f$  yarı mükemmel dönüşüm olduğundan  $f^{-1}(y) \subset X$

sayılabilir kompakttır. Buradan  $\mathcal{O}'$  nun sonlu  $\{O_{n(y)1}, O_{n(y)2}, \dots, O_{n(y)k(y)}\}$  alt örtüsü

vardır ve  $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{k(y)} O_{n(y)i}$  dir. Bu durumda  $y \in \bigcup_{i=1}^{k(y)} f(O_{n(y)i})$  olduğundan

$y \notin f \left( \left( \bigcup_{i=1}^{k(y)} O_{n(y)i} \right)^c \right)$  ve  $y \in \left[ f \left( \left( \bigcup_{i=1}^{k(y)} O_{n(y)i} \right)^c \right) \right]^c$  olur. Böylece  $y \in V_{k(y)}$  dir. Buradan

$\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$  ailesi  $Y$  için sayılabilir bir açık örtü olur.  $Y$  sayılabilir kompakt

olduğundan  $\mathcal{V}'$  nin sonlu bir  $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_{n_1}, \dots, V_{n_k}\}$  alt örtüsü vardır. Böylece

$\{f^{-1}(V_{n_j}) : 1 \leq j \leq k\}$  ailesi  $X$  için bir örtüdür. Ayrıca  $f^{-1}(V_{n_j}) \subset \bigcup_{i=1}^{n_j} O_i$  olur. Bunu

görmek için bir  $x \in X$  alalım.  $f(x) \in Y$  olup  $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_{n_1}, \dots, V_{n_k}\}$  ailesi  $Y$  için bir açık

örtü olduğundan  $f(x) \in V_{n_j}$  olacak biçimde bir  $1 \leq j \leq k$  vardır.  $V_{n_j} = \left[ f \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n_j} O_i \right)^c \right) \right]^c$

olduğundan  $f^{-1}(V_{n_j}) = f^{-1} \left( \left[ f \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n_j} O_i \right)^c \right) \right]^c \right) = \left[ f^{-1} \left( f \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n_j} O_i \right)^c \right) \right) \right]^c \subset \bigcup_{i=1}^{n_j} O_i$  dir.

Böylece  $\{O_{n_i} : 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq k\}$  ailesi  $\mathcal{O}'$  nun sonlu bir alt örtüsü olur. Buradan

$X$  sayılabilir kompakttır. ■

### 3.1.29. Teorem

$f: X \rightarrow Y$  dönüşümü yarı mükemmel olsun. Eğer  $Y$  uzayı  $\Sigma$ -uzayı ise  $X$  uzayı da  $\Sigma$ -uzayıdır.

*İspat*

$f: X \rightarrow Y$  yarı mükemmel dönüşümü olmak üzere,  $Y$ ,  $\Sigma$ -uzayı olsun. O zaman tanım gereği  $Y'$  de  $\Sigma$ -uzay tanımını sağlayan  $\sigma$ -ayrık  $\mathcal{F}$  ailesi ile elemanları sayılabilir kompakt ve kapalı olan  $\mathcal{C}$  ailesi vardır. 3.1.27. Lemma'dan  $f^{-1}(\mathcal{F})$  ailesi  $X$  de  $\sigma$ -ayrıktır. 3.1.28. Lemma'dan  $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$  ailesi,  $X$  için elemanları sayılabilir kompakt olan kapalı bir örtüdür. Şimdi  $C \in \mathcal{C}$  için  $f^{-1}(C) \subset U$  olacak biçimde bir  $U \subset X$  açığı alalım. Bu durumda  $U^c \subset [f^{-1}(C)]^c = f^{-1}(C^c)$  olduğundan  $U^c \subset f^{-1}(C^c)$  ve böylece  $f(U^c) \subset C^c$  olur. Buradan  $C \subset [f(U^c)]^c$  dir.  $f$  kapalı dönüşüm olduğundan  $[f(U^c)]^c \subset Y$  açıktır.  $Y$ ,  $\Sigma$ -uzayı olduğundan  $C \subset F \subset [f(U^c)]^c$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır. Buradan  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(F) \subset f^{-1}\left([f(U^c)]^c\right) \subset U$  olur. Böylece  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(F) \subset U$  olacak biçimde bir  $f^{-1}(F) \in f^{-1}(\mathcal{F})$  bulunduğundan  $X$   $\Sigma$ -uzayıdır. ■

Şimdi  $\sigma$ -uzayı,  $\Sigma$ -uzayı ve  $G_\delta$ -köşegen arasındaki ilişkiyi görmek için aşağıdaki teoremi verelim.



### 3.1.30. Teorem

Bir  $X$  topolojik uzayının  $\sigma$ -uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul  $X$ ' in  $G_\delta$ -köşegene sahip bir  $\Sigma$ -uzayı olmasıdır.

*İspat*

$\Rightarrow$ :  $X$  bir  $\sigma$ -uzayı olsun. O zaman  $X$ ' in  $\sigma$ -ayrık bir  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  şebekesi vardır.

Aynı zamanda  $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$  ailesi  $X$  için, elemanları kompakt, dolayısıyla sayılabilir kompakt olan kapalı bir örtüdür.  $x \in X$  olmak üzere  $x \in U$  olacak biçimde her  $U$  açığı için,  $\mathcal{F}$  bir şebeke olduğundan,  $x \in F \subset U$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır. Buradan  $X$ ,  $\Sigma$ -uzayıdır. Ayrıca 3.1.16. Teorem' den  $\sigma$ -uzayı  $G_\delta$ -köşegene sahiptir.

$\Leftarrow$ :  $X$   $G_\delta$ -köşegene sahip olan bir  $\Sigma$ -uzayı olsun.  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{C}$  aileleri  $\Sigma$ -uzayı tanımındaki koşulları sağlasın. 2.4.20. Lemma' dan  $X$ ' in bir  $G_\delta$ -köşegen dizisi vardır.  $G_\delta$ -köşegene sahip her sayılabilir kompakt uzay kompakt olduğundan[7]  $\mathcal{C}$  ailesinin elemanları kompakt olur. Böylece  $X$  kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olup 3.1.26. Teorem' den  $X$  subparakompakt olur. Subparakompakt uzaylar submetakompakt olduğundan  $X$ ' in bir  $(\mathcal{G}_n)$   $G_\delta^*$ -köşegen dizisi vardır[7]. Her  $n$  için  $\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n$  kabul edebiliriz.  $X$  subparakompakt ve her  $n$  için  $\mathcal{G}_n$ ,  $X$  için bir açık örtü olduğundan her  $n$  için  $\mathcal{G}_n$  ailesinin  $\sigma$ -ayrık kapalı  $\mathcal{H}_n = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{H}_{nm}$  incesi vardır.  $n, m, p \in \omega$  için  $\mathcal{K}(n, m, p) = \{H \cap P : H \in \mathcal{H}_{nm}, P \in \mathcal{F}_p\}$  olmak üzere  $\mathcal{K}(n, m, p)$  ailesinin ayrık olduğu açıktır. Teoremin ispatını tamamlamak için  $\mathcal{K} = \bigcup \{\mathcal{K}(n, m, p) : n, m, p \in \omega\}$  ailesinin  $X$  için bir şebeke olduğunu görmek gerekir.  $x \in X$  ve  $U \subset X$  açık olmak üzere  $x \in U$  olsun.  $\mathcal{C}$  örtü olduğundan  $x \in C$  olacak biçimde bir  $C \in \mathcal{C}$  vardır. Her  $n$  için  $\mathcal{G}_n$ ,  $X$ ' in bir açık örtüsü olduğundan her  $n$  için  $\mathcal{O}_n = \{S \cap C : S \in \mathcal{G}_n\}$  ailesi  $C$ ' nin bir açık örtüsüdür.  $C$  kompakt olduğundan  $\mathcal{O}_n$ ' nin  $C$ ' yi örten sonlu bir  $\tilde{\mathcal{O}}_n$

açık alt örtüsü vardır.  $x \in U \cap C$  ve  $U \cap C$ ,  $C$  içinde açık olmak üzere  $\{U \cap C\} \cup \left\{ \overline{\text{st}(x, \tilde{\mathcal{G}}_n)}^c : n \in \omega \right\}$  ailesi  $C$  için bir açık örtüdür.  $C \setminus (U \cap C)$  kümesi  $C$  içinde kapalı olduğundan kompakttır. Buradan  $C \setminus (U \cap C)$  kümesinin sonlu bir  $\left\{ \overline{\text{st}(x, \tilde{\mathcal{G}}_{n_i})}^c : 1 \leq i \leq k \right\}$  alt örtüsü vardır yani  $C \setminus (U \cap C) \subset \bigcup_{i=1}^k \left[ \overline{\text{st}(x, \tilde{\mathcal{G}}_{n_i})} \right]^c = \left( \bigcap_{i=1}^k \overline{\text{st}(x, \tilde{\mathcal{G}}_{n_i})} \right)^c$  dir. Buradan  $\bigcap_{i=1}^k \overline{\text{st}(x, \tilde{\mathcal{G}}_{n_i})} \subset U \cap C$  olur. Her  $n$  için  $\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n$  ve dolayısıyla  $\text{st}(x, \mathcal{G}_{n+1}) \subset \text{st}(x, \mathcal{G}_n)$  olduğundan  $\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k}) \cap C \subset U \cap C$  olur. Her  $C \setminus U$  için  $V_y \cap \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})} = \emptyset$  olacak biçimde  $y$ ' nin bir  $V_y$  açık komşuluğu vardır; gerçekten her  $y \in C \setminus U$  için  $y \notin U \cap C$  olduğundan  $y \notin \text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k}) \cap C$  dir.  $y \in C$  olduğundan  $y \notin \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})}$  dir. Buradan  $y$  nin  $V_y \cap \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})} = \emptyset$  olacak biçimde bir  $V_y$  açık komşuluğu vardır.  $V_y$  açık olduğundan  $V_y \cap \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})} = \emptyset$  olur. Ayrıca  $C \subset U \cup \left( \bigcup \{V_y : y \in C \setminus U\} \right)$  olduğundan  $C \subset F \subset U \cup \left( \bigcup \{V_y : y \in C \setminus U\} \right)$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır. Ayrıca her  $n$  için  $\mathcal{G}_n$  örtü olduğundan  $x \in X$  olmak üzere her  $n$  için  $x \in G_n$  olacak biçimde bir  $G_n \in \mathcal{G}_n$  vardır.  $\mathcal{H}_{n_k} \prec \mathcal{G}_{n_k}$  olduğundan  $x \in H \subset G_{n_k}$  olacak biçimde bir  $H \in \mathcal{H}_{n_k}$  vardır. Böylece  $x \in H \subset \text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})$  olur.  $\mathcal{K}$ ' nin tanımından  $H \cap F \in \mathcal{K}$ ' dir. Ayrıca  $x \in H \cap F \subset U$  olur; gerçekten  $p \in H \cap F$  için  $p \in H$  ve  $H \subset \text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})$  olduğundan  $p \in \text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})$  yani  $p \in \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})}$  dir. Aynı zamanda  $F \subset U \cup \left( \bigcup_{y \in C \setminus U} V_y \right)$  olduğundan  $p \in U \cup \left( \bigcup_{y \in C \setminus U} V_y \right)$  dir. O halde  $p \in U$  veya  $p \in \bigcup_{y \in C \setminus U} V_y$  dir.  $p \in \bigcup_{y \in C \setminus U} V_y$  ise  $p \in V_{y_0}$  olacak biçimde bir  $y_0 \in C \setminus U$  vardır. Ayrıca  $p \in \text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})$  olduğundan  $p \in V_{y_0} \cap \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})}$  olur. Ancak bu  $V_{y_0} \cap \overline{\text{st}(x, \mathcal{G}_{n_k})} = \emptyset$

olmasıyla çelişir. Öyleyse  $p \notin \bigcup_{y \in C \setminus U} V_y$  olup  $p \in U$  olmak zorundadır. Böylece  $\mathcal{K}$ ,  $X$

için  $\sigma$ -ayrık bir şebeke olup  $X$  bir  $\sigma$ -uzayıdır. ■

### 3.1.31. Teorem

(i): Kuvvetli  $\Sigma$ -uzayların sayılabilir çarpımları kuvvetli  $\Sigma$ -uzayıdır.

(ii): Parakompakt kuvvetli  $\Sigma$ -uzayların sayılabilir çarpımları parakompakt kuvvetli  $\Sigma$ -uzayıdır.

*İspat*

(i): Her  $i \in \omega$  için  $X_i$  uzayı kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olsun. Her  $i \in \omega$  için  $\mathcal{F}_i = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}(i, n)$

ve  $\mathcal{C}_i$  aileleri kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı tanımındaki şartları sağlasın.  $\prod_{i \in \omega} X_i$  'de tanımlanan

$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i \leq n} F_i \times \prod_{i > n} X_i : F_i \in \mathcal{F}_i, n \in \omega \right\}$  ve  $\mathcal{C} = \left\{ \prod_{i \in \omega} C_i : C_i \in \mathcal{C}_i \right\}$  ailelerinin kuvvetli  $\Sigma$ -

uzayı tanımındaki şartları sağladığını görelim.  $U \subset \prod_{i \in \omega} X_i$  açık olmak üzere

$\prod_{i \in \omega} C_i \subset U$  olsun. Wallace Teoremi'nden[5] her  $i$  için  $U_i$  açık ve  $i > n$  için  $U_i = X_i$

olmak üzere  $\prod_{i \in \omega} C_i \subset \prod_{i \in \omega} U_i \subset U$  olacak biçimde bir  $\prod_{i \in \omega} U_i \subset \prod_{i \in \omega} X_i$  açık kümesi

vardır. Buradan her  $i$  için  $C_i \subset U_i$  olur. Her  $i \in \omega$  için  $X_i$  kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı

olduğundan  $C_i \subset F_i \subset U_i$  olacak biçimde bir  $F_i \in \mathcal{F}_i$  vardır. Buradan  $i \leq n$  için

$C_i \subset F_i \subset U_i$  ve  $i > n$  için  $C_i \subset F_i \subset X_i$  olup

$\prod_{i \in \omega} C_i \subset \left( \prod_{i \leq n} F_i \times \prod_{i > n} F_i \right) \subset \left( \prod_{i \leq n} U_i \times \prod_{i > n} X_i \right) \subset U$  dir ve böylece

$\prod_{i \in \omega} C_i \subset \left( \prod_{i \leq n} F_i \times \prod_{i > n} X_i \right) \subset U$  sağlanır. Ayrıca kompakt kümelerin çarpımları da

kompakt olduğundan  $\mathcal{C}$  ailesi kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı tanımındaki koşulları sağlar. Şimdi

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i \leq n} F_i \times \prod_{i > n} X_i : F_i \in \mathcal{F}_i, n \in \omega \right\} \text{ ailesinin } \sigma\text{-ayrık olduğunu görelim. } k, n \in \omega$$

$$\text{olmak üzere } \varphi(n_1, \dots, n_k) = \left\{ F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j : F_1 \in \mathcal{F}(1, n_1), \dots, F_k \in \mathcal{F}(k, n_k) \right\}$$

ailesi ayrıktır. Gerçekten;  $x = (x_i)_{i \in \omega} \in X$  olsun. O zaman her  $i \in \omega$  için  $x_i \in X_i$  dir.

Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}(i, n)$  ailesi  $X_i$  uzayında ayrık olduğundan her  $n \in \omega$  için

$$x_i \in T(i, n) \text{ ve } \left| \{F \in \mathcal{F}(i, n) : T(i, n) \cap F \neq \emptyset\} \right| \leq 1 \text{ olacak biçimde bir } T(i, n) \subset X$$

açığı vardır. Buradan  $\prod_{i=1}^k T(i, n_i) \times \prod_{i=k+1}^{\infty} X_i \subset X$  açıktır ve  $x$

$$= (x_i)_{i \in \omega} \in \prod_{i=1}^k T(i, n_i) \times \prod_{i=k+1}^{\infty} X_i \text{ olur. } F_1 \in \mathcal{F}(1, n_1), F_2 \in \mathcal{F}(2, n_2), \dots, F_k \in \mathcal{F}(k, n_k)$$

$$\text{olmak üzere } \left( F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j \right) \cap \left( \prod_{i=1}^k T(i, n_i) \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j \right) \neq \emptyset \text{ ve}$$

$$K_1 \in \mathcal{F}(1, n_1), K_2 \in \mathcal{F}(2, n_2), \dots, K_k \in \mathcal{F}(k, n_k) \text{ olmak üzere}$$

$$\left( K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j \right) \cap \left( \prod_{i=1}^k T(i, n_i) \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j \right) \neq \emptyset \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$F_1, K_1 \in \mathcal{F}(1, n_1) \text{ için } F_1 \cap T(1, n_1) \neq \emptyset \text{ ve } K_1 \cap T(1, n_1) \neq \emptyset \text{ olması çelişki}$$

$$\text{olduğundan } \mathcal{F}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \left\{ F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} X_j : F_1 \in \mathcal{F}(1, n_1), \dots, F_k \in \mathcal{F}(k, n_k) \right\}$$

ailesi ayrık olur. Öyleyse  $\mathcal{F} = \bigcup \{ \varphi(n_1, n_2, \dots, n_k) : n_1, n_2, \dots, n_k \in \omega \text{ ve } k \in \omega \}$  ailesi  $\sigma$ -ayrıktır.

(ii): Her  $i \in \omega$  için  $X_i$  parakompakt ve kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olsun. Bu durumda  $X$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} X_i \text{ olmak üzere } X \text{ uzayının parakompakt ve kuvvetli } \Sigma\text{-uzayı olduğunu}$$

görelim. İspatın (i) bölümünden  $X$  kuvvetli  $\Sigma$ -uzayıdır. Buradan ispatı tamamlamak

için  $X'$  in parakompakt olduğunu görmek yeterlidir.  $\mathcal{O}$ ,  $X'$  in açık bir örtüsü olsun.

$F \in \mathcal{F}$  olmak üzere eğer varsa  $F \subset \bigcup \mathcal{O}(F)$  olacak biçimde  $\mathcal{O}'$  'nun sonlu bir  $\mathcal{O}(F)$  alt ailesini seçelim.  $\tilde{\mathcal{F}} = \{F \in \mathcal{F} : \exists \mathcal{O}_F \subset \mathcal{O} \text{ sonlu} : F \subset \bigcup \mathcal{O}_F\}$  olsun.  $x \in X$  olsun.  $\mathcal{C}$ ,  $X$  için bir örtü olduğundan  $x \in C$  olacak biçimde bir  $C \in \mathcal{C}$  vardır.  $C$  kompakt olduğundan  $C \subset \bigcup \tilde{\mathcal{O}}$  olacak biçimde  $\mathcal{O}'$  'nun sonlu bir  $\tilde{\mathcal{O}}$  alt ailesi vardır.  $X$  kuvvetli  $\Sigma$  - uzayı olduğundan  $C \subset F \subset \bigcup \tilde{\mathcal{O}}$  olacak biçimde bir  $F \in \mathcal{F}$  vardır. Bu durumda  $F \in \tilde{\mathcal{F}}$  olup  $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(F)$  için  $x \in \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{O}(F)$  olur. Böylece  $X \subset \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{O}(F)$  elde edilir.  $\mathcal{O}(F) = \{O_j(F) : j \leq k(F)\}$  olsun. Ayrıca  $X_i$  uzayı regüler olduğundan (i)' de tanımlanan  $\mathcal{F}(i, n)$  ailelerini kapalı alabiliriz. Aynı zamanda parakompakt her uzay yığınsal normal olduğundan [4, 2.2. Lemma] her  $i \in \omega$  için  $X_i$  uzayı yığınsal normaldir. Böylece  $\mathcal{F}(i, n)$  kapalı ayrık bir aile ve her  $i \in \omega$  için  $X_i$  yığınsal normal olduğundan, her  $F \in \mathcal{F}(i, n)$  için  $F \subset V(F)$  olacak biçimde açık kümelerden oluşan ayrık bir  $\{V(F) : F \in \mathcal{F}(i, n)\}$  ailesi vardır. Buradan  $\mathcal{W}(k_0, k_1, \dots, k_n, j) = \{O_j(F) \cap V(F) : F = \prod_{i \leq n} F_i \times \prod_{i > n} X_i, F_i \in \mathcal{F}_i, n \in \omega\}$  ailesi ayrıktır. Böylece  $\mathcal{W} = \bigcup \{\mathcal{W}(k_0, k_1, \dots, k_n, j) : n, j, k_i \in \omega\}$  ailesi  $\mathcal{O}$  açık örtüsü için  $\sigma$ -ayrık açık bir incelmış olup  $X$  uzayı parakompakttır. ■

Bu teoremin bir sonucunu verelim.

### 3.1.32. Sonuç

Parakompakt  $\sigma$ -uzayların sayılabilir çarpımları parakompakt  $\sigma$ -uzayıdır.

### *İspat*

Her  $n \in \omega$  için  $X_n$  parakompakt  $\sigma$ -uzayı olsun  $\prod_{n \in \omega} X_n$ 'nin de parakompakt  $\sigma$ -uzayı olduğunu görmek gerekir. Her  $n \in \omega$  için  $X_n$  parakompakt ve  $\sigma$ -uzayı ise  $\prod_{n \in \omega} X_n$  uzayı  $\sigma$ -uzayıdır[7]. Ayrıca her  $n \in \omega$  için  $X_n$  parakompakt ve  $\sigma$ -uzayı olduğundan  $X_n$  parakompakt ve kuvvetli  $\Sigma$ -uzayı olur[7]. Böylece 3.1.31. Teorem'den  $\prod_{n \in \omega} X_n$  parakompakt olur. Sonuç olarak  $\prod_{n \in \omega} X_n$  uzayı parakompakt ve  $\sigma$ -uzayı olur. ■

### 3.1.33. Tanım (*Fréchet Uzayı*)

$X$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olmak üzere her  $x \in \overline{A}$  için  $(x_n) \rightarrow x$  olacak biçimde bir  $(x_n) \subset A$  dizisi varsa  $X$  uzayına Fréchet Uzayı denir.

### 3.1.34. Lemma

$X$  uzayı birinci sayılabilir ise Fréchet uzayıdır.

### *İspat*

$X$  uzayı birinci sayılabilir olmak üzere  $x \in \overline{A}$  olacak biçimde bir  $A \subset X$  kümesini alalım.  $X$  uzayı birinci sayılabilir olduğundan her  $x$  in sayılabilir ve iç içe bir  $\sigma(x) = \{U_n : n \in \omega\}$  komşuluklar tabanı vardır.  $x \in \overline{A}$  ise her  $n$  için  $A \cap U_n \neq \emptyset$  olur. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $x_n \in A \cap U_n$  alınarak oluşturulan  $(x_n) \subset A$  dizisi için  $x_n \rightarrow x$  olur. ■

### 3.1.35. Teorem

Eğer  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü mükemmel dönüşüm ise o zaman  $Y$ 'nin kompakt her  $Z$  alt uzayı için  $f^{-1}(Z)$  kompaktır[5].

### İspat

Hausdorff uzayların her alt kümesi Hausdorff olduğundan  $f^{-1}(Z)$ 'nin Hausdorff olduğu açıktır. Birleşimleri  $f^{-1}(Z)$ 'yi kapsayacak biçimdeki  $X$ 'in açık alt kümelerinden oluşan  $\{U_s\}_{s \in S}$  ailesi için  $f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s$  olacak biçimde  $S$ 'nin sonlu

bir  $S_0$  alt kümesi vardır, şöyle ki;  $\tau$ ,  $S$  kümesinin sonlu alt kümelerinin bir ailesi olsun ve her  $T \in \tau$  için  $U_T = \bigcup_{s \in T} U_s$  olsun. Mükemmel dönüşüm tanımından her  $z \in Z$

için  $f^{-1}(z)$  kompakt olduğundan  $f^{-1}(z) \subset \bigcup_{s \in T} U_s = U_T$  olacak biçimde bir  $T \in \tau$

vardır. Böylece  $z \in Y \setminus f(X \setminus U_T)$  olduğundan  $Z \subset \bigcup_{T \in \tau} (Y \setminus f(X \setminus U_T))$  olur.

$Y \setminus f(X \setminus U_T)$  kümeleri açık ve  $Z$  kompakt olduğundan  $Z \subset \bigcup_{i=1}^k (Y \setminus f(X \setminus U_{T_i}))$  dir.

Buradan

$$f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_{T_i})) = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus f^{-1}f(X \setminus U_{T_i})) \subset \bigcup_{i=1}^k (X \setminus (X \setminus U_{T_i})) = \bigcup_{i=1}^k U_{T_i}$$

oldüğundan ve  $S_0 = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$  olacak biçimde  $\bigcup_{i=1}^k U_{T_i} = \bigcup_{s \in S_0} U_s$  olduğundan ve

$$f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s \text{ olup } f^{-1}(Z) \text{ kompakt olur.} \blacksquare$$

#### 4. KATMANLANABİLİR VE YARI KATMANLANABİLİR UZAYLAR

##### 4.1.1. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X'$  in her  $U$  açık alt kümesi için,

$$1) \quad \text{Her } n \text{ için } \overline{U_n} \subset U$$

$$2) \quad \bigcup_{n \in \omega} U_n = U$$

$$3) \quad U, V \subset X \text{ açık olmak üzere } U \subset V \text{ ise her } n \text{ için } U_n \subset V_n$$

şartlarını sağlayan açık kümelerin bir  $\{U_n : n \in \omega\}$  dizisi varsa  $X'$  e Stratifiable(Katmanlanabilir) uzay denir. Burada  $\{U_n : n \in \omega\}$  dizisine  $U'$  nun bir katmanlayıcısı denir.

4.1.2. Not: Her  $n$  için  $\tilde{U}_n = \bigcup_{i \leq n} U_i$  alınarak,  $\{U_n : n \in \omega\}$  dizisi artan yapılabilir.

##### 4.1.3. Tanım

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X'$  in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi  $\mathcal{K}$  olmak üzere,

$$(i) \quad F \subset G(n, F)$$

$$(ii) \quad F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$$

$$(iii) \quad F \subset K \text{ ise } G(n, F) \subset G(n, K)$$

koşullarını sağlayan bir  $G : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$  fonksiyonu varsa  $X'$  e Semi-Stratifiable(Yarı-Katmanlanabilir) uzay denir.  $G$  fonksiyonu ilaveten



(iv)  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)}$  şartını sağlarsa  $X$  Stratifiable(Katmanlanabilir) uzaydır.

#### 4.1.4. Lemma

Bir katmanlanabilir uzay için Tanım 4.1.1. ile Tanım 4.1.3. birbirini gerektirir.

*İspat*

4.1.3. Tanım' daki dört koşulu da sağlayan bir  $G : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$  fonksiyonu var olsun. Bu durumda;  $U \subset X$  açık bir küme olmak üzere, her  $n \in \omega$  için  $U_n = \left( \overline{G(n, U^c)} \right)^c$  olarak tanımlanırsa

(1) Her  $n$  için  $\overline{U_n} \subset U$  olur. Bu kapsamayı kanıtlamak için  $x \in \overline{U_n}$  olsun. Eğer  $x \notin U$  ise  $x \in U^c$  olduğundan 4.1.3. Tanım' daki (iv)' den  $x \in U^c = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, U^c)}$  olup her  $n$  için  $x \in \overline{G(n, U^c)}$  olur.  $X, T_1$ -uzayı olduğundan  $\{x\}$  kapalıdır. Buradan (i)' den  $\{x\} \subset G(n, \{x\})$  olur.  $\{x\} \subset U^c$  olduğundan (iii)' den  $G(n, \{x\}) \subset G(n, U^c)$  olur. Ayrıca  $G(n, \{x\}) \subset X$  açık ve  $x \in G(n, \{x\})$  olup  $x \in \overline{U_n}$  olduğundan  $G(n, \{x\}) \cap U_n \neq \emptyset$  dur.  $U_n$  tanımından  $G(n, \{x\}) \cap \left( \overline{G(n, U^c)} \right)^c \neq \emptyset$  dur. Ancak bu ifade,  $G(n, \{x\}) \subset G(n, U^c) \subset \overline{G(n, U^c)}$  ve dolayısıyla  $G(n, \{x\}) \cap \left( \overline{G(n, U^c)} \right)^c = \emptyset$  olmasıyla çelişir. Böylece kabul yanlış olup  $x \in U$  olur.

(2)  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n = U$  dur. Şöyle ki: Her  $n$  için  $U_n \subset U$  olduğundan

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n \subset U \text{ olur...}(1)$$

Şimdi  $U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n$  olduğunu görelim.  $x \in U$  olsun.  $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda her  $n$  için  $x \in \overline{G(n, U^c)}$  olduğundan  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, U^c)} = U^c$  olup bu ifade  $x \in U$  olmasıyla çelişir. Böylece  $x \in \bigcup_{n \in \omega} U_n$  olur ve  $U \subset \bigcup_{n \in \omega} U_n \dots (2)$  elde edilir.

(1) ve (2) ifadesinden  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n$  dur.

(3)  $U, V \subset X$  açık olmak üzere  $U \subset V$  ise her  $n$  için  $U_n \subset V_n$  dir. Şöyle ki:

$U \subset V$  ise  $\overline{G(n, V^c)} \subset \overline{G(n, U^c)}$  olup  $\left(\overline{G(n, U^c)}\right)^c \subset \left(\overline{G(n, V^c)}\right)^c$  olduğundan, ayrıca  $U_n$  ve  $V_n$  tanımından  $U_n \subset V_n$  elde edilir.

Şimdi de 4.1.1. Tanım' daki şartlar sağlansın.  $G: \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$  fonksiyonunu her  $n$  ve her  $F \in \mathcal{K}$  için  $G(n, F) = X \setminus \overline{(X \setminus F)_n}$  biçiminde tanımlayalım.

(i)  $F \subset G(n, F)$  dir. Şöyle ki:  $F \subset X$  kapalı olduğundan  $F^c \subset X$  açık olup  $F^c$  nin  $\{U_n(F^c) : n \in \omega\}$  katmanlayıcısı vardır. 4.1.1. Tanım' daki (1) şartından her  $n$

için  $\overline{U_n(F^c)} \subset F^c$  olduğundan  $F \subset \left(\overline{U_n(F^c)}\right)^c = G(n, F)$  olur.

(ii)  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$  dir. Şöyle ki; her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $F \subset G(n, F)$  olduğundan

$F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$  olur. ... (1)  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$  alalım. Buradan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için

$x \in G(n, F)$  dir.  $G(n, F) = \left(\overline{(X \setminus F)_n}\right)^c$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $x \notin \overline{(X \setminus F)_n}$  olup  $x \notin (X \setminus F)_n$  dir. O zaman  $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (X \setminus F)_n = X \setminus F$  olduğundan  $x \in F$  olur.

Böylece  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F) \subset F$  elde edilir... (2) O halde (1) ve (2) den  $F =$

$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$  dir.

(iii)  $F, K \subset X$  kapalı olmak üzere  $F \subset K$  iken  $G(n, F) \subset G(n, K)$  olduğunu görelim.  $F \subset K$  ise  $F^c, K^c \subset X$  açık olmak üzere  $K^c \subset F^c$  olduğundan (3) şartından dolayı her  $n$  için  $U_n(F^c) \subset V_n(K^c)$  olacak biçimde  $F^c$  nin  $\{U_n(F^c) : n \in \omega\}$  ve  $K^c$  nin  $\{V_n(K^c) : n \in \omega\}$  katmanlayıcısı vardır.  $U_n(F^c) \subset V_n(K^c)$  olduğundan  $\overline{U_n(F^c)} \subset \overline{V_n(K^c)}$  olup buradan  $\left(\overline{U_n(F^c)}\right)^c \subset \left(\overline{V_n(K^c)}\right)^c$  dir. Böylece  $G(n, F) \subset G(n, K)$  elde edilir.

(iv) Son olarak  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)}$  olduğunu görelim. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $F \subset X$  kapalı olmak üzere  $F \subset G(n, F)$  olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $F \subset \overline{G(n, F)}$  dir. Buradan  $F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)}$  dir. Şimdi de kapsamanın diğer yönünü görelim.  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)}$  olsun. Buradan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $x \in \overline{G(n, F)}$  dir.  $x \notin F$  olduğunu kabul edelim.  $F^c \subset X$  açık küme ve  $x \in F^c$  olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $F^c \cap G(n, F) \neq \emptyset$  dir. O zaman her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y_n \in F^c$  ve  $y_n \in G(n, F)$  olacak biçimde bir  $y_n \in X$  elemanı vardır.  $G(n, F) = \left(\overline{U_n(F^c)}\right)^c$  olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y_n \notin \overline{U_n(F^c)}$  ve  $y_n \in F^c$  dir. Buradan  $y_n \notin \bigcup_{n \in \omega} U_n(F^c)$  ve  $\bigcup_{n \in \omega} U_n(F^c) = F^c$  olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y_n \notin F^c$  ve  $y_n \in F^c$  olur. Bu ise bir çelişki olup  $x \in F$  dir. Böylece  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)} \subset F$  olup  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{G(n, F)}$  elde edilir. ■

#### 4.1.5. Tanım

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $\mathcal{P} = \{(P_1, P_2) : P_1 \subset X \text{ açık}, P_1 \subset P_2 \subset X\}$  ailesi için eğer; her  $x \in X$  ve  $x \in U$  olacak biçimdeki her  $U \subset X$  açığı için  $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$  olacak

biçimde bir  $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}$  varsa  $\mathcal{P}'$  ye ikili baz (pair-baz) denir. Eğer ilaveten her  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$  için  $\overline{\bigcup_{P=(P_1, P_2) \in \mathcal{P}'} P_1} = \bigcup_{P=(P_1, P_2) \in \mathcal{P}'} P_2$  sağlanırsa  $\mathcal{P}'$  ye köşne(cushioned) ikili-baz denir[1].

#### 4.1.6. Teorem

$X'$  in katmanlanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in bir  $\sigma$  - köşne ikili bazının var olmasıdır[1].

#### *İspat*

$\Rightarrow$ :  $X$  katmanlanabilir uzay olsun.  $X'$  in her  $U$  açık alt kümesi için 4.1.1. Tanım' daki koşulları sağlayan, açıkların bir  $\{U_n : n \in \omega\}$  dizisini alalım. Her  $n$  için  $\mathcal{P}_n = \{(U_n, U) : U \subset X \text{ açık}\}$  olmak üzere  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$  ailesinin  $X$  için bir  $\sigma$ -köşne ikili baz olduğunu görelim. Bunun için öncelikle  $\mathcal{P}$  ailesinin ikili baz olduğunu görelim.  $x \in X$  olmak üzere  $x \in U$  olacak biçimde bir  $U \subset X$  açığını alalım. 4.1.1. Tanım' daki (2)' den  $x \in U = \bigcup_{n \in \omega} U_n$  olduğundan  $x \in U_{n_0}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $x \in U_{n_0} \subset U$  olduğundan  $(U_{n_0}, U) \in \mathcal{P}_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$  olup  $\mathcal{P}$  bir ikili bazdır.

Şimdi her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{P}_n$  ailesinin köşne olduğunu, yani;  $\tilde{\mathcal{P}}_n \subset \mathcal{P}_n$  biçimindeki her  $\tilde{\mathcal{P}}_n$  ailesi için  $\overline{\bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U_n} \subset \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U$  olduğunu görelim.  $T = \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U$  kümesi açık ve  $X$  katmanlanabilir olduğundan  $T$  kümesinin bir  $\{T_n : n \in \omega\}$  katmanlayıcısı vardır. Bu durumda 4.1.1. Tanım (1)' den her  $n$  için  $\overline{T_n} \subset T$  olduğundan

$$\overline{\left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n} \subset \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \text{ olur... (1) \quad Şimdi } \overline{\bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U_n} \subset \overline{\left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n} = \overline{T_n}$$

olduğunu görelim.  $x \in \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U_n$  ise  $x \in U_n$  olacak biçimde bir  $(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n$  vardır.

$(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n$  için  $U \subset \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U$  olduğundan 4.1.1. Tanım (3)' den her  $n \in \omega$  için

$$U_n \subset \left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n \text{ olur. } x \in U_n \text{ olduğundan } x \in \left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n \text{ olup } x \in \overline{\left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n}$$

$$\text{dir. Böylece } \overline{\bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U_n} \subset \overline{\left( \bigcup_{(U_n, U) \in \tilde{\mathcal{P}}_n} U \right)_n} \text{ dir... (2)}$$

(1) ve (2)' den istenilen eşitlik sağlanmış olur.

$\subseteq$ :  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$ ,  $X$  için  $\sigma$ -köşne ikili baz olsun.  $U \neq \emptyset$  olmak üzere  $U \subset X$  açık

olsun.  $x \in U$  alalım.  $U \subset X$  açık,  $x \in U$  ve  $\mathcal{P}$  ikili baz olduğundan  $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$

olacak biçimde bir  $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}$  vardır. Her  $n \in \omega$  için  $U_n =$

$\bigcup \{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n \text{ ve } P_2 \subset U\}$  olmak üzere  $\{U_n : n \in \omega\}$  ailesinin  $U$ ' nun

katmanlayıcısı olduğunu görelim.  $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n$  olmak üzere  $P_1 \subset P_2 \subset U$  olduğundan

her  $n \in \omega$  için  $U_n \subset U$  olduğu açıktır.  $\mathcal{P}_n$  köşne olduğundan  $\overline{U_n} =$

$$\overline{\bigcup_{\substack{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n \\ P_2 \subset U}} P_1} \subset \bigcup_{\substack{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n \\ P_2 \subset U}} P_2 \subset U \text{ olup her } n \in \omega \text{ için } \overline{U_n} \subset U \text{ olur.}$$

Şimdi  $\bigcup_{n \in \omega} U_n = U$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  için  $U_n \subset U$  olduğundan  $\bigcup_{n \in \omega} U_n \subset U$

dur. Kapsamanın tersini görmek için  $p \in U$  alalım.  $\mathcal{P}$  ikili baz olduğundan  $P_1 \subset X$

açık olmak üzere  $p \in P_1 \subset P_2 \subset U$  olacak biçimde bir  $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}$  vardır.  $\mathcal{P} =$

$\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$  olduğundan  $P \in \mathcal{P}_{n_0}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Bu durumda

$$P_1 \subset \bigcup_{\substack{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{n_0} \\ P_2 \subset U}} P_1 = U_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \omega} U_n \quad \text{olduğundan} \quad x \in \bigcup_{n \in \omega} U_n \quad \text{olup} \quad U \subset \bigcup_{n \in \omega} U_n \quad \text{dir.}$$

Buradan  $U = \bigcup_{n \in \omega} U_n$  elde edilir.

Şimdi de  $U, V \subset X$  açık olmak üzere  $U \subset V$  iken her  $n$  için  $U_n \subset V_n$  olduğunu görelim.  $y \in U_n$  olsun. Bu durumda  $y \in P_1$  ve  $P_2 \subset U$  olacak biçimde bir  $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n$  vardır.  $y \in P_1 \subset P_2 \subset U \subset V$  olduğundan  $y \in \bigcup \{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n \text{ ve } P_2 \subset V\} = V_n$  olup  $U_n \subset V_n$  dir. Böylece 4.1.1. Tanım'ın koşulları sağlandığından  $X$  topolojik uzayı katmanlanabilirdir. ■

Parakompakt uzayların Michael karakterizasyonu olarak bilinen aşağıdaki teoremin ispatı [6]' da bulunabilir.

#### 4.1.7. Teorem

$X$  topolojik uzayının parakompakt olması için gerekli ve yeterli koşul  $X$  uzayının her açık örtüsünün  $\sigma$ -köşne bir açık incelmışe sahip olmasıdır.

Katmanlanabilir uzaylar ile parakompaktlık arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem J. Ceder tarafından ispatlanmıştır[1].

#### 4.1.8. Teorem

Katmanlanabilir uzaylar parakompakttır.

#### *İspat*

$X$  katmanlanabilir bir uzay ve  $\mathcal{O}$   $X$  için herhangi bir açık örtü olsun.  $X$  katmanlanabilir olduğundan 4.1.6. Teorem' den  $X$ ' in bir  $\sigma$ -köşne  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$  ikili

bazı vardır. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{W}'_n = \{P_1 : \exists P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_n \text{ ve } \exists O \in \mathcal{O} : P_1 \subset P_2 \subset O\}$  olsun. Her  $W \in \mathcal{W}'_n$  için  $W = P_1 \subset P_2 \subset O_{W,n}$  olacak biçimde bir  $O_{W,n} \in \mathcal{O}$  seçelim ve  $T_n : \mathcal{W}'_n \rightarrow \mathcal{O}$  fonksiyonunu  $T_n(W) = O_{W,n}$  biçiminde tanımlayalım.  $\mathcal{P}_n$  aileleri köşne olduğundan  $\mathcal{W}'_n$  ailelerinin  $\mathcal{O}$  içinde köşne olduğu kolaylıkla görülebilir. Aynı zamanda  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}'_n$  ailesi  $\mathcal{O}$  nun bir açık incelməsi olup  $\mathcal{W}$   $\mathcal{O}$  ' nun bir  $\sigma$ -köşne açık incelməsidir. O halde yukarıdaki teoremden  $X$  parakompakt uzaydır.

#### 4.1.9. Lemma

Açınımlanabilir her uzay yarı-katmanlanabilirdir.

*İspat*

$X$  açınımlanabilir bir uzay olsun. Öyleyse, her  $x \in X$  için  $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \omega\}$  ailesi  $x$ ' in bir komşuluklar tabanı olacak biçimde  $X$ ' in açık örtülerinin bir  $(\mathcal{G}_n)$  dizisi vardır.  $F \subset X$  kapalı olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $G(n, F) = st(F, \mathcal{G}_n)$  olsun. İspatı tamamlamak için;

$$(i) \quad F \subset X \text{ kapalı olmak üzere } F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$$

$$(ii) \quad F, K \subset X \text{ kapalı olmak üzere } F \subset K \text{ ise } G(n, F) \subset G(n, K) \text{ olduğunu görmek gerekir.}$$

Her  $n$  için  $\mathcal{G}_n$  ailesi  $X$  için bir örtü olduğundan, her  $n$  için  $F \subset st(F, \mathcal{G}_n)$  olup  $F \subset G(n, F)$  dir. O halde  $F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F)$  dir. Şimdi  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, F) \subset F$  olduğunu görelim.  $x \notin F$  olsun. O zaman  $x \in F^c$  ve  $F^c \subset X$  açık olup  $(\mathcal{G}_n)$  açınım dizisi olduğundan  $st(x, \mathcal{G}_{n_0}) \subset F^c$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Buradan  $x \in G$  olacak biçimdeki her  $G \in \mathcal{G}_{n_0}$  için  $G \subset F^c$  olup  $G \cap F = \emptyset$  dur. Öyleyse  $x \notin st(F, \mathcal{G}_{n_0})$  olup

$x \notin \bigcap_{n \in \omega} G(n, F)$  dir. Böylece  $\bigcap_{n \in \omega} G(n, F) \subset F$  olup  $F = \bigcap_{n \in \omega} G(n, F)$  elde edilir. Şimdi  $F, K \subset X$  kapalı ve  $F \subset K$  olmak üzere  $G(n, F) \subset G(n, K)$  olduğunu görelim.  $x \in G(n, F)$  olsun. Buradan  $x \in G$  ve  $F \cap G \neq \emptyset$  olacak biçimde bir  $G \in \mathcal{G}_n$  vardır.  $F \subset K$  olduğundan  $K \cap G \neq \emptyset$  olur. Böylece  $x \in \text{st}(K, \mathcal{G}_n)$  olup  $x \in G(n, K)$  dir. Buradan  $G(n, F) \subset G(n, K)$  dir. ■

#### 4.1.10. Teorem

Metrik uzaylar katmanlanabilir.

*İspat*

$(X, d)$  bir metrik uzay olsun.  $F \subset X$  kapalı ve  $n \in \omega$  olmak üzere  $G(n, F) = \left\{ x \in X : d(x, F) < \frac{1}{2^n} \right\}$  olsun. Öncelikle  $F \subset G(n, F)$  olduğunu görelim.  $x \in F$  olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $d(x, F) = 0 < \frac{1}{2^n}$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $x \in G(n, F)$  olup her  $n \in \omega$  için  $F \subset G(n, F)$  dir. Şimdi;

- (i)  $X'$  in kapalı her  $F$  alt kümesi için  $F = \bigcap_{n \in \omega} G(n, F)$
- (ii)  $F, K \subset X$  kapalı ve  $F \subset K$  iken  $G(n, F) \subset G(n, K)$
- (iii)  $H = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, F)}$

olduğunu görmek istiyoruz.

(i) Her  $n \in \omega$  için  $F \subset G(n, F)$  olduğundan

$$F \subset \bigcap_{n \in \omega} G(n, F) \text{ dir. } \dots (1)$$



$\bigcap_{n \in \omega} G(n, F) \subset F$  olduğunu görelim.  $y \in \bigcap_{n \in \omega} G(n, F)$  olsun. O zaman her  $n \in \omega$  için

$y \in G(n, F)$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $d(y, F) < \frac{1}{2^n}$  dir.

$0 \leq d(y, F) \leq \lim_n \frac{1}{2^n} = 0$  ve  $d(y, F) = 0$  elde edilir. Bu ise  $y \in \bar{F} = F$  olmasını

gerektirir. Böylece  $\bigcap_{n \in \omega} G(n, F) \subset F$  dir... (2)

(1) ve (2) den  $F = \bigcap_{n \in \omega} G(n, F)$  olur.

(ii)  $F, K \subset X$  kapalı ve  $F \subset K$  iken  $G(n, F) \subset G(n, K)$  olduğunu görelim.  $y \in G(n, F)$

olsun. Bu durumda  $d(y, F) < \frac{1}{2^n}$  dir. Eğer  $y \in K$  ise  $d(y, K) = 0 < \frac{1}{2^n}$  olup

$y \in G(n, K)$  dir.  $y \notin K$  olsun.  $d(y, F) < \frac{1}{2^n}$  olduğundan  $d(y, h) < \frac{1}{2^n}$  olacak biçimde

bir  $h \in F$  vardır.  $F \subset K$  olduğundan  $h \in K$  olup  $d(y, K) = \inf \{d(y, k) : k \in K\} \leq$

$d(y, h) < \frac{1}{2^n}$  olup  $y \in G(n, K)$  dir. Böylece  $G(n, F) \subset G(n, K)$  elde edilir.

(iii)  $F = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, F)}$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  için  $F \subset G(n, F) \subset \overline{G(n, F)}$

olduğundan  $F \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, F)}$  dir. Şimdi  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, F)} \subset F$  olduğunu görmek gerekir.

$x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, F)}$  olsun. Buradan her  $n \in \omega$  için  $G(n, F) \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$  olur. Bu

nedenle her  $n \in \omega$  için  $x_n \in G(n, F) \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$  olacak biçimde bir  $(x_n) \subset X$  dizisi

vardır. Buradan her  $n \in \omega$  için  $d(x_n, F) < \frac{1}{2^n}$  olup  $d(x_n, F) \rightarrow 0$  dir. Her  $n \in \omega$  için

$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$  dir. Böylece  $d(x_n, x) \rightarrow 0$

olup  $(x_n) \rightarrow x$  dir.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = d(x, F)$  şeklinde tanımlanan  $f$  fonksiyonu

süreklidir. Buradan  $(x_n) \rightarrow x$  olduğundan  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dir. O halde

$d(x_n, F) \rightarrow d(x, F)$  ve  $d(x_n, F) \rightarrow 0$  olup  $X$  Hausdorff olduğundan  $d(x, F) = 0$  olmak zorundandır. Sonuç olarak  $x \in \bar{F} = F$  dir. ■

Şimdi katmanlanabilir ve yarı-katmanlanabilir uzayların incelenmesinde oldukça önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi verelim. Bu teorem, bu uzayların yer aldığı teorem ve lemmalarda sıklıkla kullanılacaktır.

#### 4.1.11. Teorem

Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayının yarı-katmanlanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul,  $x \in X$  olmak üzere;

$$(i) \quad \{x\} = \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$$

$$(ii) \quad y \in g(n, x_n) \text{ ise } x_n \rightarrow y$$

şartlarını sağlayan bir  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonun var olmasıdır.

Ayrıca  $X'$  in katmanlanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul yukarıdakilere ilaveten

(iii)  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $y \notin H$  ise  $y \notin \overline{\bigcup \{g(n, x) : x \in H\}}$  olacak biçimde negatif olmayan bir  $n$  sayısının var olmasıdır.

#### İspat

$\Rightarrow$ :  $X$  yarı-katmanlanabilir olmak üzere  $G: \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$  fonksiyonu 4.1.3. Tanım' daki (i),(ii) ve (iii) koşullarını sağlasın. Her  $n \in \omega$  için  $g(n, x) = G(n, \{x\})$  olsun.  $X$   $T_1$ - uzayı olduğundan her  $x \in X$  için  $\{x\} \subset X$  kapalıdır.  $H \subset X$  kapalı olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $G(n+1, H) \subset G(n, H)$  almak genelliği bozmaz.  $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} G(n, \{x\}) = \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$  olup böylece (i) sağlanır. (ii)' nin sağlandığını görelim. Her  $n$  için  $y \in g(n, x_n)$  olmak üzere  $x_n \not\rightarrow y$  olduğunu varsayalım. Bu durumda  $y \in U$  olacak

biçimde öyle bir  $U \subset X$  açığı var ki her  $n \in \omega$  için  $k_n > n$  olacak biçimde bir  $k_n \in \omega$  vardır ve  $x_{k_n} \notin U$  dur.  $A = \{k_n : \text{her } n \in \omega \text{ için } k_n > n \text{ olacak biçimde bir } k_n \in \omega \text{ vardır ve } x_{k_n} \notin U\}$  olsun. Böylece  $A \subset \omega$  sonsuz kümesi için  $U \cap \{x_n : n \in A\} = \emptyset$  olup  $y \notin \overline{\{x_n : n \in A\}}$  dir.  $\overline{\{x_n : n \in A\}} = \bigcap_{m \in \omega} G(m, \overline{\{x_n : n \in A\}})$  olduğundan  $y \notin G(m_0, \overline{\{x_n : n \in A\}})$  olacak biçimde bir  $m_0 \in \omega$  vardır.  $n \geq m_0$  koşulunu sağlayan bir  $n \in A$  alalım. O zaman  $y \in g(n, x_n) = G(n, \{x_n\}) \subset G(n, \overline{\{x_n : n \in A\}})$  elde edilir. Aynı zamanda  $n \geq m_0$  için  $G(n, \overline{\{x_n : n \in A\}}) \subset G(m_0, \overline{\{x_n : n \in A\}})$  ve  $y \in G(m_0, \overline{\{x_n : n \in A\}})$  olması bir çelişkidir. Böylece  $x_n \rightarrow y$  olup (ii) sağlanır. Şimdi  $X$ ' in katmanlanabilir olduğunu kabul edip (iii)' nin sağlandığını görmek için  $H \subset X$  kapalı bir küme olmak üzere  $y \notin H$  alalım.  $H = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)}$  olduğundan  $y \notin \overline{G(n_0, H)}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $\bigcup_{x \in H} G(n_0, \{x\}) \subset G(n_0, H)$  olduğundan  $y \notin \bigcup_{x \in H} \overline{G(n_0, \{x\})}$  ve buradan  $y \notin \overline{\bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\}}$  elde edilir.

$\Leftarrow$ :  $n \in \omega$  ve  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $G(n, H) = \bigcup_{x \in H} g(n, x)$  olsun.  $x \in H$  olsun.

Her  $n \in \omega$  için  $x \in g(n, x)$  ve  $g(n, x) \subset G(n, H)$  olup  $H \subset G(n, H)$  dir. Şimdi 4.1.3.

Tanım' daki koşulların sağlandığını görelim. Her  $n \in \omega$  için  $H \subset G(n, H)$  olduğundan  $H \subset \bigcap_{n \in \omega} G(n, H)$  dir. Şimdi  $\bigcap_{n \in \omega} G(n, H) \subset H$  olduğunu görelim.

$y \in \bigcap_{n \in \omega} G(n, H)$  olsun. O zaman her  $n \in \omega$  için  $y \in G(n, H)$  olur.  $G(n, H) = \bigcup_{x \in H} g(n, x)$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $y \in g(n, h_n)$  olacak biçimde bir  $h_n \in H$  vardır.

Hipotezden  $h_n \rightarrow y$  olur.  $(h_n) \subset H$ ,  $y \in \overline{H}$  ve  $H \subset X$  kapalı olduğundan  $y \in H$  dir.

Böylece  $\bigcap_{n \in \omega} G(n, H) \subset H$  sağlanır. Şimdi de  $H, K \subset X$  kapalı ve  $H \subset K$  olmak üzere

$G(n, H) \subset G(n, K)$  olduğunu görelim. Aksine  $y \in G(n, H)$  ve  $y \notin G(n, K)$  olacak biçimde bir  $y \in X$  elemanının olduğunu varsayalım.  $G(n, H) = \bigcup_{x \in H} g(n, x)$  olduğundan  $y \in g(n, x)$  olacak biçimde bir  $x \in H$  vardır.  $H \subset K$  olduğundan  $y \in g(n, x)$  olacak biçimde bir  $x \in K$  olup  $y \in G(n, K)$  bulunur. O halde  $G(n, H) \subset G(n, K)$  dir.

Şimdi de (iii) şartını kabul edip  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $H = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)}$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  için  $H \subset G(n, H)$  olduğundan  $H \subset \overline{G(n, H)}$  olup buradan  $H \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)}$  dir. Şimdi  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)} \subset H$  olduğunu görelim.  $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)}$  olsun. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $y \in \overline{G(n, H)}$  dir.  $y \notin H$  olduğunu kabul edelim. (iii)' den dolayı  $y \notin \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $\overline{G(n_0, H)} = \overline{\bigcup_{x \in H} g(n_0, x)}$  olduğundan  $y \notin G(n_0, H)$  olup, bu bir çelişkidir. öyleyse  $y \in H$  olmak zorundadır. ■

Aşağıdaki teorem ispatlanırken 3.1.24. Teorem' den yoğun bir şekilde faydalanılacaktır.

#### 4.1.12. Teorem

Her katmanlanabilir uzay bir  $\sigma$ -uzayı ve her  $\sigma$ -uzayı da bir yarı-katmanlanabilir uzaydır.

*İspat*

$X$ ,  $\sigma$ -uzayı olsun. 3.1.24. Teorem' den öyle bir  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu vardır ve

- a) Her  $n \in \omega$  ve her  $x \in X$  için  $x \in g(n, x)$

b) Her  $n \in \omega$  için  $y \in g(n, x)$  ise  $g(n, y) \subset g(n, x)$

c) Her  $n \in \omega$  için  $x \in g(n, x_n)$  ise  $x_n \rightarrow x$  şartları sağlanır.

Şimdi her  $x \in X$  için  $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  ve her  $x \in X$  için  $x \in g(n, x)$  olduğundan  $\{x\} \subset \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$  olur. Tersine  $y \in \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$  ise her  $n \in \omega$  için  $y \in g(n, x)$  dir. Her  $n \in \omega$  için  $x_n = x$  alırsak  $(x_n) = (x) \rightarrow x$  dir. Aynı zamanda (c)' den  $(x_n) = (x) \rightarrow y$  olup  $X$  uzayı Hausdorff olduğundan  $x = y$  olur. Böylece  $\bigcap_{n \in \omega} g(n, x) \subset \{x\}$  olup  $\bigcap_{n \in \omega} g(n, x) = \{x\}$  elde edilir. O halde  $g$  fonksiyonu 4.1.11. Teorem' in (i) ve (ii) koşullarını sağladığından  $X$  uzayı yarı-katmanlanabilir uzay olur.

$X$  uzayı katmanlanabilir uzay olsun. Öyleyse bir önceki teoremdaki (i) – (iii) şartlarını sağlayan bir  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu vardır.  $x \in X$  olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $g(n+1, x) \subset g(n, x)$  olduğunu kabul edebiliriz. Teoremin ispatını tamamlamak için 3.1.24. Teorem – (v)' deki (a) ve (b)' nin sağlandığını görmemiz yeterlidir. (a)' nın sağlandığı açıktır. Şimdi her  $n$  için  $x \in g(n, x_n)$  ve  $x_n \in g(n, y_n)$  olsun. İspatı tamamlamak için  $y_n \rightarrow x$  olduğunu yani:  $(y_n)$  dizisinin her  $S = \{y_{n(k)} : k \in \omega\}$  alt dizisi için  $x \in \bar{S}$  olduğunu görmemiz yeterlidir.  $S_0, (y_n)$  dizisinin bir alt dizisi olmak üzere  $x \notin \bar{S}_0$  olduğunu varsayalım. 4.1.11. Teorem (iii)' den  $x \notin \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $\left( \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}} \right)^c \subset X$  açık ve  $x \in \left( \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}} \right)^c$  olmak üzere  $\left( \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}} \right)^c \cap \{x_{n(k)} : n(k) \geq n_0\} = \emptyset$  dir. Şöyle ki  $n(k) \geq n_0$  olmak üzere  $x_{n(k)} \in \left( \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}} \right)^c$  olsun. Buradan  $x_{n(k)} \notin \overline{\bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}}$  olup  $x_{n(k)} \notin \bigcup \{g(n_0, z) : z \in \bar{S}_0\}$  dir. Ancak bu durum her  $n \in \omega$  için  $x_n \in g(n, y_n)$  olması ve dolayısıyla  $x_{n(k)} \in g(n(k), y_{n(k)})$

olmasıyla çelişir. Buradan  $x \notin \overline{\{x_{n(k)} : n(k) \geq n_0\}}$  olur. Ancak bu durum da  $x_{n(k)} \rightarrow x$  olmasıyla çelişir. ■

#### 4.1.13. Teorem

Yarı-katmanlanabilir ile katmanlanabilir uzaylar kalıtımsal ve sayılabilir çarpımsaldır.

*İspat*

$(X, \tau)$  yarı-katmanlanabilir bir topolojik uzay olsun. Bu durumda 4.1.11. Teorem’ den öyle bir  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$ ,  $(n, x) \rightarrow g(n, x)$  fonksiyonu vardır ki;  $x \in X$  için

- (i)  $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$
- (ii)  $y \in g(n, x_n)$  ise  $x_n \rightarrow y$  dir.

Eğer  $X$  uzayı katmanlanabilir ise ilaveten

- (iii)  $H \subset X$  kapalı küme olmak üzere eğer  $y \notin H$  ise  $y \notin \overline{\bigcup_{n \in \omega} \{g(n, x) : x \in H\}}$  olacak biçimde bir  $n \in \omega$  vardır.

Şimdi  $A \subset X$  olmak üzere  $X$  yarı-katmanlanabilir iken  $A$ ’nın da yarı-katmanlanabilir olduğunu görelim. Bunun için 4.1.11. Teorem’deki (i) ve (ii)’nin sağlandığını görmek yeterlidir.  $h$  fonksiyonunu  $x \in A$  için  $h : \omega \times A \rightarrow \tau_A$ ,  $(n, x) \rightarrow h(n, x) = A \cap g(n, x)$  olarak tanımlayalım. İlk olarak  $x \in A$  için  $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} h(n, x)$  olduğunu

görelim.  $\bigcap_{n \in \omega} h(n, x) = \bigcap_{n \in \omega} (A \cap g(n, x)) = A \cap \bigcap_{n \in \omega} g(n, x) = A \cap \{x\} = \{x\}$  dir.

Buradan (i) sağlanır. (ii) için  $(a_n) \subset A$  olmak üzere her  $n$  için  $y \in h(n, a_n)$  ise  $a_n \xrightarrow{\tau_A} y$  olduğunu görelim.  $y \in h(n, a_n) = A \cap g(n, a_n)$  olup buradan  $y \in A$  ve  $y \in g(n, a_n)$  olduğundan  $y \in A$  ve  $a_n \xrightarrow{\tau_A} y$  dir. Bu durumda  $A$  yarı-

katmanlanabilir olur. Şimdi  $X$  katmanlanabilir olsun.  $A'$  'nın katmanlanabilir olduğunu görmek için  $A'$  'nın (iii)' yi sağladığını görelim.  $y \in A$  ve  $F \subset A$  kapalı olmak üzere  $y \notin F$  olsun. Bu durumda  $F \subset A$  kapalı olduğundan  $F = A \cap F'$  olacak biçimde bir  $F' \subset X$  kapalı vardır. Böylece  $y \notin F$  için  $y \notin F'$  ve  $X$  katmanlanabilir olduğundan  $y \notin \overline{\bigcup \{g(n, x) : x \in F'\}}$  olacak biçimde bir  $n \in \omega$  vardır. Bu durumda  $y \notin \overline{\bigcup \{h(n, x) : x \in F'\}}^A$  olduğundan  $A$  katmanlanabilir olur.

Şimdi de  $i \in \omega$  olmak üzere  $X_i$  topolojik uzayları katmanlanabilir iken  $X = \prod_{i \in \omega} X_i$  çarpım uzayının da katmanlanabilir olduğunu görelim.  $i \in \omega$  olmak üzere  $\tilde{g}_i : \omega \times X_i \rightarrow \tau_i$  fonksiyonu 4.1.11. Teorem' deki koşulları sağlasın. Buradan  $i \in \omega$  olmak üzere  $g_i : \omega \times X_i \rightarrow \tau_i$ ,  $(n, x) \rightarrow g_i(n, x) = \bigcap_{k \leq n} \tilde{g}_i(k, x)$  fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda  $i \in \omega$  olmak üzere  $g_i$  fonksiyonu 4.1.11. Teorem' deki koşulları sağlar ve  $n < m$  için  $g_i(m, x) \subset g_i(n, x)$  dir.  $g(n, x) = \prod_{i \leq n} g_i(n, x_i) \times \prod_{i > n} X_i$  olmak üzere  $g$ ' nin 4.1.11. Teorem' deki (i), (ii) ve (iii)' yi sağladığını görelim.  $y = (y_i)_{i \in \omega} \in \bigcap_{n \in \omega} g(n, x)$  olsun. Bu durumda  $y \in g(1, x)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(1, x_1)$  ve  $i > 1$  için  $y_i \in X_i$  olur.  $y \in g(2, x)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(2, x_1)$ ,  $y_2 \in g_2(2, x_2)$  ve  $i > 2$  için  $y_i \in X_i$  olur. Bu şekilde devam edilirse  $y_1 \in \bigcap_{n \in \omega} g_1(n, x_1) = \{x_1\}$  olup  $y_1 = x_1$  dir.  $y \in g(3, x)$  ise  $y_1 \in g_1(3, x_1)$ ,  $y_2 \in g_2(3, x_2)$ ,  $y_3 \in g_3(3, x_3)$  ve  $i > 3$  için  $y_i \in X_i$  olur. Bu şekilde devam edilirse  $g_i(n, x)$  ' ler azalan olduğundan  $y_2 \in \bigcap_{n \in \omega} g_2(n, x_2) = \{x_2\}$  olup  $y_2 = x_2$  dir.  $x_1$  ve  $x_2$  için yapılan işlemler benzer biçimde  $i > 2$  için yapılırsa  $i > 2$  için

$y_i = x_i$  olur. Böylece  $y = x$  dir. (ii)' nin sağlandığını görmek için  $y = (y_i)_{i \in \omega} \in \prod_{i \in \omega} X_i$  olmak üzere her  $n$  için  $(y_i)_{i \in \omega} \in g(n, x_n) = \prod_{i \leq n} g_i(n, x_i^n) \times \prod_{i > n} X_i$

alalım. Bu durumda;

$y \in g(1, x_1)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(1, x_1^1)$  ve  $i > 1$  için  $y_i \in X_i$  dir.

$y \in g(2, x_2)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(2, x_1^2)$ ,  $y_2 \in g_2(2, x_2^2)$  ve  $i > 2$  için  $y_i \in X_i$  dir.

$y \in g(3, x_3)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(3, x_1^3)$ ,  $y_2 \in g_2(3, x_2^3)$ ,  $y_3 \in g_3(3, x_3^3)$  ve  $i > 3$  için  $y_i \in X_i$  dir.

Benzer şekilde devam edilirse  $y \in g(n, x_n)$  olduğundan  $y_1 \in g_1(n, x_1^n)$ ,  $y_2 \in g_2(n, x_2^n)$ ,  $y_3 \in g_3(n, x_3^n)$  ve  $y_n \in g_n(n, x_n^n)$  olur. Bir diziden sonlu sayıda terimin çıkartılması o dizinin karakteristiğini değiştirmeyeceğinden her  $i \in \omega$  için  $x_i^n \rightarrow y_i$  olup buradan  $x_n \rightarrow y$  dir. (iii)' nin sağlandığını görmek için  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $y = (y_i)_{i \in \omega} \notin H$  ise  $y \notin \left( \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\} \right)$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$

olduğunu görelim.  $H \subset \prod_{i \in \omega} X_i$  kapalı olmak üzere  $y \notin H$  ise  $y \in H^c$  ve  $H^c \subset X$  açık

olduğundan  $V_1 \subset X_1$ ,  $V_2 \subset X_2, \dots, V_n \subset X_n$  açıkları vardır ve  $(y_i)_{i \in \omega} \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \times \prod_{i > n} X_i \subset H^c$  dir. Bu durumda  $y_1 \notin V_1^c$  olup  $V_1^c \subset X_1$

kapalı olduğundan  $y_1 \notin \overline{\bigcup \{g_1(n_1, x) : x \in V_1^c\}}$  olacak biçimde bir  $n_1 \in \omega$  vardır.

Benzer şekilde  $y_n \in V_n^c$  olup  $V_n^c \subset X_n$  kapalı olduğundan  $y_n \notin \overline{\bigcup \{g_n(n_n, x) : x \in V_n^c\}}$  dir.  $y_1 \notin \overline{\bigcup \{g_1(n_1, x) : x \in V_1^c\}}$  olduğundan

$T_1 \cap \bigcup \{g_1(n_1, x) : x \in V_1^c\} = \emptyset$  ve  $y \in T_1$  olacak biçimde bir  $T_1 \subset X_1$  açığı vardır.

Benzer şekilde  $y_n \notin \overline{\bigcup \{g_n(n_n, x) : x \in V_n^c\}}$  olduğundan

$T_n \cap \bigcup \{g_n(n_n, x) : x \in V_n^c\} = \emptyset$  ve  $y_n \in T_n$  olacak biçimde bir  $T_n \subset X_n$  açığı

vardır. Buradan  $y \in T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \times \prod_{i > n} X_i \subset X$  açık olup



$\left( T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \times \prod_{i>n} X_i \right) \cap \left( \bigcup \{g(n, x) : x \in H\} \right) = \emptyset$  dir. Şöyle ki;  
 $p \in T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \times \prod_{i>n} X_i$  ve  $p \in \left( \bigcup \{g(n, x) : x \in H\} \right)$  olsun. Buradan  $p \in g(n, x)$   
 olacak biçimde bir  $x \in H$  vardır.  $g(n, x) = \prod_{i \leq n} g_i(n, x_i) \times \prod_{i>n} X_i$  olduğundan  
 $p_i \in g_i(n, x_i)$  olacak biçimde bir  $i \leq n$  vardır. Ayrıca  $x \in H$  olduğundan  
 $x \notin \prod_{i \leq n} V_i \times \prod_{i>n} X_i$  olup  $x_{n_0} \notin V_{n_0}$  olacak biçimde bir  $1 \leq n_0 \leq n$  vardır. Böylece  
 $p_{n_0} \in T_{n_0} \cap g_{n_0}(n_0, x)$  olup  $T_{n_0} \cap \left( \bigcup \{g_{n_0}(n_0, x) : x \in V_{n_0}^c\} \right) \neq \emptyset$  olur ki bu bir  
 çelişkidir. Böylece kabul yanlış olup  $y \notin \left( \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\} \right)$  dir. ■

Aşağıda vereceğimiz teorem yarı-katmanlanabilir uzay ile  $G_\delta^*$ -köşegen ve subparakompakt uzay arasındaki ilişkiyi içerir.

#### 4.1.14. Teorem

Yarı-katmanlanabilir her uzay  $G_\delta^*$ -köşegene sahip olan bir subparakompakt uzaydır.

*İspat*

$(X, \tau)$  yarı-katmanlanabilir bir topolojik uzay olsun. Önceki teoremden  $X^2$  yarı-  
 katmanlanabilir uzaydır.  $h : \omega \times X^2 \rightarrow \tau^2, (n, x) \rightarrow h(n, x)$  fonksiyonu 4.1.11.  
 Teorem' deki (i) ve (ii)' yi sağlasın. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $U_n =$   
 $\bigcup_{x \in X} g(n, \{(x, x)\})$  olmak üzere  $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$  dir. Gerçekten ;  $x_1, x_2 \in X$  olmak üzere  
 $(x_1, x_2) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n$  olsun. Buradan her  $n \in \omega$  için  $(x_1, x_2) \in U_n$  olur.  $U_n$ ' nin  
 tanımından her  $n \in \omega$  için  $(x_1, x_2) \in h(n, \{x_n, x_n\})$  olacak biçimde bir  $x_n \in X$  vardır.  
 4.1.11. Teorem (ii)' den  $x_n \rightarrow x_1$  ve  $x_n \rightarrow x_2$  olup  $X$  uzayı Hausdorff olduğundan

$x_1 = x_2$  olmak zorundadır. Böylece  $X$  uzayı,  $G_\delta$ -köşegene sahiptir.  $G_\delta$ -köşegene sahip olan submetakompakt uzaylar  $G_\delta^*$ -köşegene sahip olduğundan[7] ve subparakompakt her uzay submetakompakt olduğundan[7]  $X'$  in subparakompakt olduğunu görmek yeterlidir.  $\mathcal{U}$ ,  $X'$  in herhangi bir açık örtüsü olsun. İyi sıralama prensibinden  $\mathcal{U}$  üzerinde bir “ $<$ ” iyi sıralama bağıntısı vardır.  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu 4.1.11. Teorem’deki (i) ve (ii)’yi sağlasın. Bu durumda her  $U \in \mathcal{U}$  ve her  $n \in \omega$  için  $U_n = U \setminus \left[ \left( \bigcup \{U' \in \mathcal{U} : U' < U\} \right) \cup \left( \bigcup \{g(n, y) : y \notin U\} \right) \right]$  olsun. Her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}_n = \{ \overline{U_n} : U \in \mathcal{U} \}$  ve  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$  olmak üzere  $\mathcal{F}$ ’nin örtü olduğunu görelim.  $x \in X$  olmak üzere  $U(x)$ ,  $\mathcal{U}$ ’nin  $x \in U$  olacak biçimdeki en küçük elemanı olsun. 4.1.11. Teorem (ii)’den  $x \notin \{g(n, y) : y \notin U(x)\}$  olacak biçimde bir  $n \in \omega$  vardır. Bu durumda  $x \in U(x)_n$  olduğundan  $x \in \overline{U(x)_n}$  dir. Böylece  $\overline{\mathcal{F}}$  ailesi  $X$  için bir örtü olur. Ayrıca her  $n \in \omega$  için  $\overline{U_n} \subset U$  dur. Şöyle ki;  $z \notin U$  alalım. O zaman  $g(n, z) \subset X$  açık ve  $z \in g(n, z)$  olmak üzere  $g(n, z) \cap U_n = \emptyset$  olduğunu görelim.  $p \in g(n, z)$  ve  $p \in U \setminus \left[ \left( \bigcup \{U' \in \mathcal{U} : U' < U\} \right) \cup \left( \bigcup \{g(n, y) : y \notin U\} \right) \right]$  olsun.  $p \notin \bigcup \{g(n, z) : z \notin U\}$  olup bu bir çelişkidir. Böylece  $g(n, z) \cap U_n = \emptyset$  olduğundan  $z \notin \overline{U_n}$  olup  $\overline{U_n} \subset U$  olur. Buradan  $\mathcal{F} < \mathcal{U}$  dur. Şimdi her  $n \in \omega$  için  $\mathcal{F}_n$  ailesinin ayrık olduğunu görelim. Bunun için  $\{U_n : U \in \mathcal{U}\}$  ailesinin ayrık olduğunu görmek yeterlidir.  $x \in X$  olsun.  $U(x)$ ,  $\mathcal{U}$ ’nin  $x \in U$  olacak biçimdeki en küçük elemanı olsun. Bu durumda  $U_n$ ’nin tanımlanışından dolayı eğer  $U > U(x)$  ise  $U(x) \cap U_n = \emptyset$ , eğer  $U < U(x)$  ise  $g(n, x) \cap U_n = \emptyset$  olur. Böylece  $g(n, x) \cap U_n$  kümesi  $x$  için bir açık komşuluk olup  $\{U_n : U \in \mathcal{U}\}$  ailesinin en fazla bir elemanı ile kesişir. Böylece  $\mathcal{F}_n$  ailesi ayrık olur. ■

#### 4.1.15. Sonuç

i) Bir  $X$  uzayının Moore uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in yarıkatmanlanabilir ve  $w\Delta$ -uzayı veya  $p$ -uzayı olmasıdır.

ii) Bir  $X$  uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul  $X$ ' in katmanlanabilir ve  $w\Delta$  -uzayı veya  $p$ -uzayı olmasıdır.

*İspat*

i)  $\Rightarrow$ :  $X$  Moore uzayı olsun. 3.1.10. Teorem' den  $X$   $\sigma$  -uzayı olup 4.1.12. Teorem' den yarı-katmanlanabilirdir. Ayrıca her Moore uzayı  $p$ -uzayı ve  $w\Delta$  - uzayıdır[7].

$\Leftarrow$ :  $X$  yarı-katmanlanabilir uzay olmak üzere,  $X$   $w\Delta$ -uzayı veya  $p$ -uzayı olsun. 4.1.14. Teorem' den her yarı-katmanlanabilir uzay subparakompakt ve  $G_\delta^*$ -köşegene sahip olup subparakompakt uzaylarda  $w\Delta$ -uzaylar ile  $p$ -uzaylar denk olduğundan[7] ayrıca  $G_\delta$ -köşegene sahip  $w\Delta$ -uzaylar açınımlanabilir olduğundan[7]  $X$  Moore uzayıdır.

ii)  $\Rightarrow$ :  $X$  uzayı metriklenebilir olsun. 4.1.10. Teorem' den metriklenebilir uzaylar katmanlanabilir olduğundan  $X$  katmanlanabilirdir. Ayrıca metriklenebilir uzaylar Moore uzayı ve her Moore uzayı  $p$ -uzayı ve  $w\Delta$ -uzayı uzayı olduğundan[7]  $X$   $p$ -uzayı ve  $w\Delta$ -uzayıdır.

$\Leftarrow$ :  $X$  uzayı katmanlanabilir ve  $w\Delta$  - uzayı veya  $p$ -uzayı olsun. Katmanlanabilir uzaylar parakompakt olduğundan  $X$  parakompakttır. Parakompakt  $p$ -uzayı veya  $w\Delta$  -uzayı ile parakompakt  $M$ - uzayı denk olduğundan[7]  $X$  parakompakt  $M$ -uzayıdır. Ayrıca yarı-katmanlanabilir uzaylar  $G_\delta^*$ -köşegene sahip olduğundan,  $X$   $G_\delta$ -köşegene sahiptir.  $G_\delta$ -köşegene sahip olan  $M$ -uzaylar metriklenebilir olduğundan[7]  $X$  metriklenebilirdir. ■

#### 4.1.16. Teorem

Yarı-katmanlanabilir uzayların kapalı görüntüsü de yarı-katmanlanabilirdir.

### İspat

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  kapalı bir dönüşüm olsun.  $\mathcal{K}$   $X$ ' in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi olmak üzere  $G: \omega \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$ ,  $(n, K) \rightarrow G(n, K)$  fonksiyonu 4.1.3. Tanım' daki (i) ve (ii)' yi sağlasın.  $f^*(U) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\}$  olmak üzere her  $H \subset X$  kapalı kümesi için  $G'(n, H) = f^*(G(n, f^{-1}(H)))$  olsun. Eğer  $U \subset X$  açık ise  $f^*(U)$  açık olduğundan  $G'(n, H)$  kümesi de açıktır  $H$ ' yi içerir. Teoremin ispatını tamamlamak için  $G'$  nün yarı-katmanlanabilir tanımındaki (i) ve (ii)' yi sağladığını görelim. Bunun için ilk olarak  $H \subset Y$  kapalı olmak üzere  $H = \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  olduğunu görelim. Her  $n \in \omega$  için  $H \subset G'(n, H)$  olduğundan  $H \subset \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  dir. Şimdi de  $\bigcap_{n \in \omega} G'(n, H) \subset H$  olduğunu görelim.  $y \in Y$  olmak üzere  $y \in \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  olsun. Buradan her  $n \in \omega$  için  $y \in G'(n, H) = f^*(G(n, f^{-1}(H)))$  ve her  $n \in \omega$  için  $y \in f^*(G(n, f^{-1}(H)))$  olur. Bu durumda her  $n \in \omega$  için  $f^{-1}(y) \subset G(n, f^{-1}(H))$  olur. O zaman  $f^{-1}(y) \subset \bigcap_{n \in \omega} G(n, f^{-1}(H)) = f^{-1}(H)$  ve  $f(f^{-1}(y)) \subset f(f^{-1}(H)) \subset H$  olup  $y \in H$  dir. Böylece (i) sağlanmış olur. (ii)' nin sağlandığını görmek için  $H, K \subset X$  kapalı olmak üzere  $H \subset K$  iken  $G'(n, H) \subset G'(n, K)$  olduğunu görelim.  $y \in G'(n, H)$  olmak üzere  $y \notin G'(n, K)$  olsun.  $y \in G'(n, H)$  olduğundan  $y \in f^*(G(n, f^{-1}(H)))$  olup  $f^{-1}(y) \subset G(n, f^{-1}(H))$  dir.  $y \notin f^*(G(n, f^{-1}(K)))$  olduğundan  $f^{-1}(y) \not\subset G(n, f^{-1}(K))$  olur. Bu durumda  $G(n, f^{-1}(H)) \not\subset G(n, f^{-1}(K))$  dir. Ancak bu durum  $H \subset K$  için  $f^{-1}(H) \subset f^{-1}(K)$  olması ve  $X$  yarı-katmanlanabilir olduğundan  $G(n, f^{-1}(H)) \subset G(n, f^{-1}(K))$  olmasıyla çelişir. Böylece  $G'(n, H) \subset G'(n, K)$  olur. ■

Topolojide iyi bilinen ayrıştırma teoremlerinden biri Lasnev ayrıştırma teoremidir. Önce hatırlatma amaçlı olarak bu teoremin ifadesini verelim.

*Lasnev Ayrıştırma Teoremi :*

$X$  metriklenabilir bir uzay  $f: X \rightarrow Y$  kapalı ve örten bir dönüşüm ise  $Y'$  nin  $\sigma$ -ayrık kapalı öyle bir alt kümesi vardır ki, bu alt kümenin dışındaki bütün  $y \in Y$  elemanları için  $f^{-1}(y)$  kompakttır. Yani  $Y_n \subset Y$  olacak biçimde öyle  $Y_n$  kapalı ayrık alt kümeleri vardır ki eğer  $y \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right)^c$  ise  $f^{-1}(y)$  kompakttır.

Lasnev ayrıştırma teoreminin bir versiyonu 1984 de G. Gruenhage tarafından, metriklenabilir  $X$  uzayı yerine yarı-katmanlanabilir normal uzayların yarı-mükemmel ön görüntüsü olan  $X$  topolojik uzayları için verilmişti[7]. Fakat sonradan bu ispatta bir boşluk olduğu J. Chaber tarafından fark edilmiştir[11]. 1996 yılından S. Lin, [10] da, Gruenhage tarafından verilen ispattaki boşluğu,  $Y$  uzayı üzerine,  $Y$  uzayının her noktasının bir  $G_\delta$ -küme olması koşulunu getirerek gidermiştir. S. Lin tarafından verilen teorem aşağıdadır.

#### 4.1.17. Teorem

$X$  yarı-katmanlanabilir normal bir uzayın yarı-mükemmel bir ön görüntüsü ve  $Y$  her noktası bir  $G_\delta$ -küme olan bir topolojik uzay olsun. Eğer  $f: X \rightarrow Y$  kapalı ve örten bir dönüşüm ise  $Y'$  nin öyle bir  $\sigma$ -ayrık kapalı alt kümesi vardır ki bu alt kümede yer almayan bütün  $y \in Y$  elemanları için  $f^{-1}(y)$  sayılabilir kompakttır.

Bu teoremin ispatına hazırlık amacıyla aşağıdaki tanım ve lemmaları verelim.

## 4.1.18. Tanım

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere eğer;

a) Her  $x \in X$  için  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x)$

b) Eğer her  $n$  için  $x \in g(n, x_n)$  ise  $\{x_n : n \geq 1\}^{\sim} \neq \emptyset$  koşulları sağlayan bir  $g : \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonu varsa  $X$  topolojik uzayına bir  $\beta$ -uzay denir.  $g$  fonksiyonuna da  $X$ ' in bir  $\beta$ -fonksiyonu denir.

## 4.1.19. Lemma

Bir  $X$  topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

- i)  $X$  bir  $\beta$ -uzayıdır.  
 ii)  $X$  in her  $U$  açık alt kümesi için  $X$ ' in kapalı alt kümelerinin öyle bir  $\{F_n(U) : n \geq 1\}$  dizisi vardır ki;

a)  $F_n(U) \subset U$

b)  $U \subset V$  ise  $F_n(U) \subset F_n(V)$

c)  $\{U_n : n \geq 1\}$  dizisi  $X$ ' in artan bir açık örtüsü ise  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(U_n)$  dir.

koşulları sağlanır.

- iii)  $X$ ' in her kapalı alt kümesi için  $X$ ' in açık alt kümelerinin öyle bir  $\{U_n(F) : n \geq 1\}$  dizisi vardır ki;

a)  $F \subset U_n(F)$

b)  $F \subset K$  ise  $U_n(F) \subset U_n(K)$

c)  $\{F_n : n \geq 1\}$   $X$ ' in kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$  ise

$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(F_n) = \emptyset$  koşulları sağlanır.

### *İspat*

(ii  $\Leftrightarrow$  iii) gerektirmeleri açıktır.

(i  $\Rightarrow$  iii)' yi görmek için  $g : \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow \tau$ ,  $X$  in bir  $\beta$ -fonksiyonu olsun.  $F \subset X$  kapalı ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $U_n(F) = \bigcup_{x \in F} g(n, x)$  olsun.

$\{U_n(F) : n \geq 1\}$  açıklar dizisinin (a) ve (b) koşullarını sağladığı açıktır. (c)' nin sağlandığını görelim.  $\{F_n : n \geq 1\}$   $X'$  in kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$  olsun.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(F_n) \neq \emptyset$  ise bir  $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(F_n)$  elemanı var olup her  $n$  için

$p \in g(n, x_n)$  olacak biçimde bir  $x_n \in F_n$  vardır.  $g$ ,  $X'$  in bir  $\beta$ -fonksiyonu olduğundan  $\{x_n : n \in \omega\}$  dizisinin bir yığılma noktası vardır. Bu durumda

$\{F_n : n \geq 1\}$  dizisi azalan ve  $F_n$ ' ler kapalı olduğundan  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$  olur ki bu bir

çelişkidir. Öyleyse  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(F_n) = \emptyset$  olmak zorundadır.

(iii  $\Rightarrow$  i) gerektirmesini görelim.  $X'$  in kapalı her  $F$  alt kümesi ve her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için (iii)' deki koşulları sağlayan bir  $\{U_n(F) : n \geq 1\}$  dizisi var olsun.  $g : \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow \tau$

fonksiyonunu  $g(n, x) = U_n(\{x\})$  biçiminde tanımlayalım.  $g$ ' nin  $X'$  in bir  $\beta$ -fonksiyonu olduğunu gösterelim. Her  $n$  için  $\{x\} \subset U_n(\{x\})$  olduğundan

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x)$  dir. Şimdi  $p \in X$  olmak üzere her  $n$  için  $p \in g(n, x_n)$  olsun.  $\{x_n : n \geq 1\}$

dizisinin yığılma noktasının olmadığını kabul edelim. Yani  $\{x_n : n \geq 1\}^{\sim} = \emptyset$  olsun.

Her  $n$  için  $F_n = \{x_k : k \geq n\}$  olmak üzere  $\{F_n : n \geq 1\}$   $X'$  in kapalı alt kümelerinin

azalan bir dizisidir ve  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$  dir. Öyleyse  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(F_n) = \emptyset$  olmalıdır. Fakat

$\bigcup_{x \in F_n} g(n, x) \subset U_n(F_n)$  ve  $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{x \in F_n} g(n, x) \right)$  olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece

$\{x_n : n \geq 1\}^{\sim} \neq \emptyset$  olup  $X$  bir  $\beta$ -uzayıdır. ■

#### 4.1.20. Lemma

$\beta$ -uzaylar kapalı dönüşüm altında korunurlar.

*İspat*

$f: X \rightarrow Y$  kapalı ve örten bir dönüşüm ve  $X$  bir  $\beta$ -uzayı olsun.  $U \subset X$  açık olmak üzere  $\{F_n(U) : n \geq 1\}$  dizisi 4.1.19. Lemma (ii)' deki koşulları sağlayan bir dizisi olsun.  $Y$ ' nin her  $V$  açık alt kümesi ve her  $n$  için  $K_n(V) = f(F_n(f^{-1}(V)))$  olmak üzere  $Y$ ' nin kapalı alt kümelerinin  $\{K_n(V) : n \geq 1\}$  dizisi 4.1.19. Lemma (ii)' deki koşullarını sağlar. Öyleyse  $Y$  bir  $\beta$ -uzayıdır. ■

#### 4.1.21. Lemma

Yarı-katmanlanabilir uzaylar  $\beta$ -uzayıdır.

*İspat*

$X$  yarı-katmanlanabilir uzay olsun. Bu durumda 4.1.11. Teorem' den bir

$g: \omega \times X \rightarrow \tau, (n, x) \rightarrow g(n, x)$  fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon

$$(i) \{x\} = \bigcap_n g(n, x)$$

$$(ii) y \in g(n, x_n) \text{ ise } x_n \rightarrow y$$

koşulları sağlanır.



$\{x\} = \bigcap_n g(n, x)$  olduğundan  $x \in \bigcap_n g(n, x)$  olup  $y \in g(n, x_n)$  için  $x_n \rightarrow y$  olduğundan  $y$ ,  $\{x_n : n \geq 1\}$  dizisinin bir yığılma noktasıdır. ■

#### 4.1.22. Lemma

$f: X \rightarrow Y$  yarı-mükemmel ve  $Y$  bir  $\beta$ -uzayı ise  $X$  de bir  $\beta$ -uzayıdır.

*İspat*

$Y$ ,  $\beta$ -uzayı olduğundan  $Y$ 'nin bir  $g: \mathbb{Z}^+ \times Y \rightarrow \tau(Y)$ ,  $(n, y) \rightarrow g(n, y)$   $\beta$ -fonksiyonu vardır.  $h(n, x) = f^{-1}(g(n, f(x)))$  biçiminde tanımlanan  $h: \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow \tau(X)$  fonksiyonu  $X$  için bir  $\beta$ -fonksiyonudur. Şöyle ki;  $Y$ ,  $\beta$ -uzayı olduğundan ve  $f$  örten olduğundan  $y = f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, f(x))$  olup her  $n \in \omega$  için  $f(x) \in g(n, f(x))$  olur. Böylece  $x \in \bigcap_n f^{-1}(g(n, f(x)))$  olduğundan  $x \in \bigcap_n h(n, x)$  dir. Şimdi eğer her  $n \in \omega$  için  $x \in h(n, x_n)$  olsun.  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}^{\sim} = \emptyset$  olduğunu kabul edelim. Her  $n$  için  $x \in h(n, x_n)$  ise  $x \in f^{-1}(g(n, f(x_n)))$  olduğundan her  $n$  için  $f(x) \in g(n, f(x_n))$  olup  $g$ ,  $Y$ 'nin bir  $\beta$ -fonksiyonu olduğundan  $\{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}^{\sim} \neq \emptyset$  dir.  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}^{\sim} = \emptyset$  olduğundan  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset X$  kapalı ve ayrıktır.  $f$  kapalı dönüşüm olduğundan  $f(\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}) \subset Y$  kapalıdır.  $f$  yarı-mükemmel olduğundan  $n \neq m$  için  $f(x_n) \neq f(x_m)$  olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü  $I \subset \mathbb{Z}^+$  ve  $I$  sonsuz olmak üzere her  $n \in I$  için  $h(x_n) = h(x_{n_0})$  ise  $x_n \in h^{-1}(h(x_{n_0}))$  olup  $h^{-1}(h(x_{n_0}))$  sayılabilir kompakt olduğundan  $\{x_n : n \in I\}$  kümesinin bir yığılma noktası var olur. Ancak bu durum  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}^{\sim} = \emptyset$  olmasıyla çelişir. Bu durumda  $f(\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}) =$

$\{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$  olup  $\{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$  kapalıdır. Kapalı kümelerin yığılma noktaları kümeye ait olduğundan  $f(x_{n_0}) \in \{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}^\sim$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  vardır.  $\{x_n : n \neq n_0\}^\sim \subset \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}^\sim = \emptyset$  olup  $\{x_n : n \neq n_0\}^\sim$  kapalıdır.  $f$  kapalı olduğundan  $f(\{x_n : n \neq n_0\}) = \{f(x_n) : n \neq n_0\}$  kapalıdır.  $f(x_{n_0}) \in (\{f(x_n) : n \neq n_0\})^c \subset Y$  açık ve  $f(x_{n_0}) \in \{f(x_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}^\sim$  olduğundan bu bir çelişkidir.

Şimdi 4.1.17. Teorem' in ispatını görelim.

$Z$ , normal yarı-katmanlanabilir bir uzay ve  $h: X \rightarrow Z$  yarı mükemmel ve örten bir dönüşüm olsun.  $Z$  yarı-katmanlanabilir olduğundan

- i) Her  $H \subset X$  kapalı ve her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $H \subset G(n, H)$
- ii) Her  $H \subset Z$  kapalı olmak üzere  $H = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} G(n, H)$
- iii)  $H \subset K$  ise  $G(n, H) \subset G(n, K)$
- iv)  $G(n+1, H) \subset G(n, H)$

koşullarını sağlayan bir  $G : \mathbb{Z}^+ \times \tau'(Z) \rightarrow \tau(Z)$ ,  $(n, H) \rightarrow G(n, H)$  fonksiyonu vardır. Her  $K \subset X$  kapalı ve her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $U_n(K) = h^{-1}(G(n, h(K)))$  biçiminde tanımlansın. 4.1.20. Lemma'dan  $Z$ ,  $\beta$ -uzayı olup 4.1.21. Lemma'dan  $X$  bir  $\beta$ -uzayıdır. Öyleyse 4.1.19. Lemma' dan  $Y$  bir  $\beta$ -uzayı olup  $Y$ ' nin bir  $\mu : \mathbb{Z}^+ \times Y \rightarrow \tau(Y)$   $\beta$ -fonksiyonu vardır.  $Y$ ' nin herhangi bir elemanı için  $\{y\}$  bir  $G_\delta$ -küme olduğundan her  $y \in Y$  için  $\{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n(y)$  olacak biçimde  $T_n(y) \subset Y$  açıkları vardır.

Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için ve her  $y \in Y$  için  $g(n, y) = \bigcap_{k \leq n} (T_k(y) \cap \mu(k, y))$  biçiminde tanımlanan  $g : \mathbb{Z}^+ \times Y \rightarrow \tau(Y)$  fonksiyonu

- 1)  $g(n+1, y) \subset g(n, y)$

$$2) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, y) = \{y\}$$

koşullarını sağlar.  $f: X \rightarrow Y$  kapalı bir dönüşüm olduğundan ve her  $y \in Y$ , her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $\{y\} \subset Y$ ,  $U_n(f^{-1}(y)) \subset X$  açık,  $f^{-1}(y) \subset U_n(f^{-1}(y))$  olduğundan her  $y \in Y$  ve her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y \in V_n(y)$  ve  $f^{-1}(V_n(y)) \subset U_n(f^{-1}(y))$  [5] olacak biçimde bir  $V_n \subset Y$  vardır. Aynı zamanda her  $n \geq 1$  için  $y \in g(n, y)$  ve  $g(n, y) \subset Y$  açık olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $V_n(y) \cap g(n, y) = O_n(y)$  denilirse her  $y \in Y$  ve her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için

$$i) \quad y \in O_n(y)$$

$$ii) \quad f^{-1}(O_n(y)) \subset U_n(f^{-1}(y))$$

$$iii) \quad O_n(y) \subset g(n, y)$$

sağlanır. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $Y_n = \{y \in Y : p \neq y \text{ ise } y \notin O_n(p)\}$  olsun. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $Y_n$ ,  $Y$ 'nin kapalı ve ayrık bir uzayıdır. Bunu görmek için her  $y \in Y$  için  $y \in O_y$  ve  $|O_y \cap Y_n| \leq 1$  olacak biçimde bir  $O_y \subset Y$  açığının var olduğunu görmek yeterlidir.  $O_n(y) \cap Y_n \subset \{y\}$  olduğunu görelim. Eğer  $y \in Y_n$  ise  $O_n(y) \cap Y_n = \{y\}$  dir. Çünkü  $y \in O_n(y)$  ve  $y \in Y_n$  olduğundan  $\{y\} \subset O_n(y) \cap Y_n$  dir.  $y \neq p$  olmak üzere  $p \in O_n(y) \cap Y_n$  olsun. Bu durumda  $p \in Y_n$  ve  $y \neq p$  olduğundan  $p \notin O_n(y)$  olup  $O_n(y) \cap Y_n = \{y\}$  dir. Eğer  $y \notin Y_n$  ise  $O_n(y) \cap Y_n = \emptyset$  dir. Çünkü  $z \neq y$  için  $z \in O_n(y) \cap Y_n$  ise  $z \in Y_n$  ve  $z \in O_n(y)$  olup  $z \in Y_n$  ve  $z \neq y$  olduğundan  $z \notin O_n(y)$  dir.  $Y_0 = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right)^c$  olmak üzere  $y \in Y_0$  olsun.  $y \in Y_0$  ise her  $n \geq 1$  için  $y \notin Y_n$  dir. Bu

durumda her  $n$  için  $y_n \neq y$  iken  $y \in O_n(y)$  olmak üzere bir  $y_n \in Y$  vardır. Buradan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y \in g(n, y_n)$  dir. Şimdi  $\{y_n : n \geq 1\}$  dizisinin sonsuz elemanlı olduğunu görelim. Bu amaçla  $\{y_n : n \geq 1\}$  kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\{y_n : n \geq 1\}$  dizisinin öyle bir  $\{y_{n_k}\}$  alt dizisi vardır ki her  $k \geq 1$  için  $y_{n_k} =$

$y_{n_0}$  dir. Bu durumda  $y \in g(n_k, y_{n_k}) \subset g(k, n_0)$  olup  $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} g(k, y_{n_0})$  elde eldir. Öte yandan  $\bigcap_{k=1}^{\infty} g(k, y_{n_0}) = \{y_{n_0}\}$  olduğundan  $y = y_{n_0}$  olur ki bu her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y_n \neq y$  olması ile çelişir. O halde  $\{y_n : n \geq 1\}$  dizisi sonsuz elemanlı bir dizi olup  $y_n$  'leri birbirinden farklı kabul edebiliriz. Her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $y \in (n, x_n)$  olduğundan ve  $\mu, Y$  'nin bir  $\beta$ -fonksiyonu olduğundan  $\{y_n : n \geq 1\}$  dizisinin ve dolayısıyla her sonsuz alt dizinin bir yığılma noktası vardır. Şimdi  $f^{-1}(y)$  'nin sayılabilir kompakt olduğunu görelim. Mümkünse  $f^{-1}(y)$  sayılabilir kompakt olmasın. Bu durumda  $f^{-1}(y)$  'nin yığılma noktasına sahip olmayan bir  $\{x_n : n \geq 1\}$  alt kümesi vardır.  $h$  yarı-mükemmel olduğundan  $m \neq n$  için  $h(x_n) \neq h(x_m)$  olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü  $I \subset \mathbb{Z}^+$  ve  $I$  sonsuz olmak üzere her  $n \in I$  için  $h(x_n) = h(x_{n_0})$  ise  $x_n \in h^{-1}(h(x_{n_0}))$  olup  $h^{-1}(h(x_{n_0}))$  sayılabilir kompakt olduğundan  $\{x_n : n \in I\}$  kümesinin bir yığılma noktası var olur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde sadece sonlu çokluktaki  $n$  için  $h(x_n)$  'ler birbirine eşit olacaktır. Öyleyse  $n \neq m$  biçimindeki her  $n, m \in \mathbb{Z}^+$  için  $h(x_n) \neq h(x_m)$  kabul edebiliriz. Böylece  $\{h(x_n) : n \geq 1\}$ ,  $Z$  'nin birbirinden farklı elemanlarından oluşan kapalı, ayrık bir alt kümesidir.  $Z$  normal olduğundan  $Z$  'nin açık alt kümelerinin öyle bir ayrık  $\{V_n : n \geq 1\}$  ailesi vardır ki her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $h(x_n) \in V_n$  dir. Diğer yandan  $x_n \in f^{-1}(y) \subset \bigcap_{k \geq n} f^{-1}(O_k(y_k)) \subset \bigcap_{k \geq n} U_k(f^{-1}(y_k)) = \bigcap_{k \geq n} h^{-1}(G(k, h(f^{-1}(y_k)))) \subset h^{-1}\left(\bigcap_{k \geq n} G\left(k, \overline{\bigcup_{k \geq n} h(f^{-1}(y_k))}\right)\right) = h^{-1}\left(\overline{\bigcup_{k \geq n} h(f^{-1}(y_k))}\right) = h^{-1}\left(\overline{h\left(\bigcup_{k \geq n} f^{-1}(y_k)\right)}\right)$  olup  $h(x_n) \in \overline{h\left(\bigcup_{k \geq n} f^{-1}(y_k)\right)}$  dir. Aynı zamanda  $h(x_n) \in V_n$  ve  $V_n$  açık olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $V_n \cap h\left(\bigcup_{k \geq n} f^{-1}(y_k)\right) \neq \emptyset$  olup  $\{y_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$  dizisinin öyle bir  $\{y_{k_i} : i \in \mathbb{Z}^+\}$  alt dizisi ve  $\{V_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$  ailesinin öyle bir

$\{V_{n_i} : i \in \mathbb{Z}^+\}$  alt ailesi vardır ki her  $i \in \mathbb{Z}^+$  için  $V_{n_i} \cap h(f^{-1}(y_{k_i})) \neq \emptyset$  dir. Öyleyse her  $i \in \mathbb{Z}^+$  için bir  $z_i \in V_{n_i} \cap h(f^{-1}(y_{k_i}))$  seçebiliriz. Her  $i$  için  $z_i \in h(f^{-1}(y_{k_i}))$  olduğundan her  $i$  için  $z_i = h(p_i)$  olacak biçimde bir  $p_i \in f^{-1}(y_{k_i})$  vardır.  $\{y_n : n \geq 1\}$  dizisinin her sonsuz alt dizisinin bir yığılma noktasına sahip olduğunu söylemiştik. Öyleyse  $\{y_{k_i} : i \in \mathbb{Z}^+\}$  alt dizisi  $Y$  içinde bir yığılma noktasına sahiptir. Bu durumda  $\{p_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ ,  $X'$  in kapalı ve ayrık bir alt kümesi olamaz (olsaydı  $\{f(p_i) = y_{k_i} : i \in \mathbb{Z}^+\}$  kapalı ve ayrık olurdu ki bu durumda  $\{y_{k_i} : i \in \mathbb{Z}^+\}$  yığılma noktasına sahip olmazdı)  $\{p_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$   $X$  içinde kapalı ve ayrık olmadığından  $\{h(p_i) = z_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ ,  $Z$  içinde kapalı ve ayrık değildir. Fakat bu  $\{V_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$  açıkla- r ailesinin ayrık oluşu ile çelişir. Böylece  $f^{-1}(y)$  sayılabilir kompakttır. ■

#### 4.1.23. Tanım

Eğer bir  $X$  uzayının kapalı ve ayrık her  $H, K$  alt kümeleri için

- (i)  $H \subset D(H, K) \subset \overline{D(H, K)} \subset X \setminus K$
- (ii) Eğer  $H \subset H'$  ve  $K \supset K'$  ise  $D(H, K) \subset D(H', K')$

özelliklerini sağlayan bir  $D(H, K)$  açık alt kümesi varsa  $X$  uzayına Monoton normal uzay denir.  $D'$  ye de Monoton normallik operatörü denir. Burada  $D(H, K) \cap D(K, H) = \emptyset$  alınabilir. ( $D'$   $X$  üzerindeki bir normallik operatörü olmak üzere  $D(H, K) = D'(H, K) \cap X \setminus \overline{D'(K, H)}$  olarak alınması yeterlidir.)

#### 4.1.24. Teorem

Bir  $X$  uzayının katmanlanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul  $X'$  in yarı- katmanlanabilir ve monoton normal uzay olmasıdır.

### İspat

$\Rightarrow$ :  $X$  uzayı katmanlanabilir olsun.  $G$  fonksiyonu 4.1.3. Tanım' daki koşulları sağlasın.  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $G(n+1, H) \subset G(n, H)$  kabul edebiliriz. Katmanlanabilir uzay yarı-katmanlanabilir olduğundan ispatı tamamlamak için  $X$ ' in monoton normal olduğunu görmek yeterlidir. 4.1.8. Teorem' den katmanlanabilir uzaylar parakompakt olup parakompakt uzaylar da normal olduğundan  $X$  normaldir. Şimdi  $X$ ' in monoton normal olduğunu görelim.  $H, K \subset X$  kapalı ve  $H \cap K = \emptyset$  olmak üzere  $D(H, K) = \bigcup_n G(n, H) \setminus G(n, K)$  olsun.  $H \subset D(H, K)$  olduğu açıktır.  $y \in K$  alalım.  $H \cap K = \emptyset$  olduğundan  $y \notin H$  olup  $H = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G(n, H)}$  olduğundan  $y \notin \overline{G(m, H)}$  olacak biçimde bir  $m \in \omega$  vardır. Burada  $(X \setminus \overline{G(m, H)}) \cap G(m, K)$ ,  $y$  ' yi içeren bir açık kümedir. Şimdi  $(X \setminus \overline{G(m, H)}) \cap G(m, K) \cap D(H, K) = \emptyset$  olduğunu görelim. Aksine  $z \in X \setminus \overline{G(m, H)}$ ,  $z \in G(m, K)$  ve  $z \in D(H, K)$  olacak biçimde bir  $z \in X$  olsun. Bu durumda  $z \notin \overline{G(m, H)}$ ,  $z \in G(m, K)$  ve  $D(H, K) = \bigcup_n G(n, H) \setminus G(n, K)$  olduğundan  $z \in G(n_0, H) \setminus \overline{G(n_0, K)}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır.  $n_0 < m$  olsun. Bu durumda  $K \subset X$  kapalı olduğundan  $G(m, K) \subset G(n_0, K)$  dır. Ancak bu durum  $z \in G(n_0, H)$  ve  $z \in G(m, K)$  olmasıyla çelişir.  $m < n_0$  olsun. Bu durumda  $H \subset X$  kapalı olduğundan  $G(n_0, H) \subset G(m, H)$  dır. Ancak bu durum  $z \in G(n_0, H)$  ve  $z \notin \overline{G(m, H)}$  olmasıyla çelişir. Böylece  $y \notin \overline{D(H, K)}$  olup  $\overline{D(H, K)} \subset X \setminus K$  dır. İspatı tamamlamak için  $H \subset H'$  ve  $K \supset K'$  iken  $D(H, K) \subset D(H', K')$  olduğunu görelim.  $y \in D(H, K)$  olsun.  $D(H, K) = \bigcup_n G(n, H) \setminus G(n, K)$  olduğundan  $y \in G(n_0, H) \setminus \overline{G(n_0, K)}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$  vardır. Bu durumda  $y \in G(n_0, H)$  ve  $y \notin \overline{G(n_0, K)}$  olup  $H \subset H'$  ve dolayısıyla da  $G(n_0, H) \subset G(n_0, H')$  olduğundan  $y \in G(n_0, H')$  olur. Ayrıca  $K \supset K'$

olduğundan  $\overline{G(n_0, K)} \subset \overline{G(n_0, K')}$  olup  $y \notin \overline{G(n_0, K')}$  dir. Böylece  $y \in G(n_0, H') \setminus \overline{G(n_0, K')}$  olup  $y \in \bigcup_n G(n, H') \setminus G(n, K') = D(H', K')$  olur.

$\Leftarrow$ :  $X$  yarı-katmanlanabilir ve monoton normal bir uzay olsun.  $G$  fonksiyonu 4.1.3. Tanım' daki (i),(ii) ve (iii) koşullarını ve  $D$  operatörü de 4.1.23. Tanım' daki şartları sağlasın.  $H \subset X$  kapalı olmak üzere her  $n \in \omega$  için  $G'(n, H) = D(H, X \setminus G(n, H))$  olsun. İspatı tamamlamak için  $\kappa$   $X$  uzayının bütün kapalı alt uzaylarının ailesi olmak üzere  $G' : \omega \times \mathcal{K} \rightarrow \tau$ ,  $(n, H) \rightarrow G'(n, H)$  fonksiyonun katmanlanabilir uzay tanımındaki (i)-(iii)' yi sağladığını görelim.  $H \subset G'(n, H)$  olduğu açıktır. (i)' yi görmek için  $H \subset X$  kapalı olmak üzere  $H = \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  olduğunu görelim.  $H \subset \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  olduğu açık olduğundan  $\bigcap_{n \in \omega} G'(n, H) \subset H$  olduğunu görelim.  $y \in \bigcap_{n \in \omega} G'(n, H)$  ise her  $n \in \omega$  için  $y \in G'(n, H)$  ve  $G'(n, H) = D(H, X \setminus G(n, H))$  olduğundan her  $n \in \omega$  için  $y \in D(H, X \setminus G(n, H))$  dir.  $X$  monoton normal olduğundan  $D(H, X \setminus G(n, H)) \subset G(n, H)$  olup  $y \in \bigcap_{n \in \omega} G(n, H)$  dir.  $H = \bigcap_{n \in \omega} G(n, H)$  olduğundan  $y \in H$  dir. Şimdi (ii)' yi görmek için  $H, K \subset X$  kapalı olmak üzere  $G'(n, H) \subset G'(n, K)$  olduğunu görelim.  $y \in G'(n, H) = D(H, X \setminus G(n, H))$  olsun.  $H \subset K$  ve  $X \setminus G(n, H) \supset X \setminus G(n, K)$  olduğundan 4.1.23. Tanım (ii)' den  $D(H, X \setminus G(n, H)) \subset D(K, X \setminus G(n, K))$  olup buradan  $y \in D(K, X \setminus G(n, K)) = G'(n, K)$  dir. Şimdi de (iii)' yi görmek için  $H = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G'(n, H)}$  olduğunu görelim. Bunun için  $H \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{G'(n, H)}$  olduğundan  $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G'(n, H)} \subset H$  olduğunu görmek yeterlidir.  $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G'(n, H)}$  alalım. Buradan her  $n \in \omega$  için  $y \in \overline{D(H, X \setminus G(n, H))}$

$\subset G(n, H)$  olup her  $n \in \omega$  için  $y \in G(n, H)$  dir. Böylece  $y \in \bigcap_{n \in \omega} G(n, H) = H$  olur. ■

#### 4.1.25. Teorem

Monoton normal uzaylar ve katmanlanabilir uzaylar kapalı dönüşümler altında korunurlar.

#### *İspat*

$X$  katmanlanabilir uzay olsun. 4.1.16. Teorem' den yarı-katmanlanabilir bir uzayın kapalı görüntüsü de yarı-katmanlanabilirdir. Buradan 4.1.24. Teorem gereğince ispatı tamamlamak için  $X$  monoton normal uzayının kapalı görüntüsünün de monoton normal uzay olduğunu görmek yeterlidir.  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu kapalı olsun.  $D_x$  operatörü 4.1.23. Tanım' daki (i) ve (ii)' yi sağlayan, bir operatör olsun.  $H, K \subset X$  kapalı olmak üzere  $H \cap K = \emptyset$  olsun.  $f^*(U) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\}$  olmak üzere  $D_y(H, K) = f^*(D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K)))$  olsun. Eğer  $U \subset X$  açık ise  $f^*(U)$  açık olup  $D_y(H, K)$  açıktır. Ayrıca  $H \subset D_y(H, K)$  dir. Şöyle ki;  $y \in H$  alalım. Buradan  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(H)$  dir.  $f^{-1}(H) \subset D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K))$  olduğundan  $f^{-1}(y) \subset D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K))$  elde edilir.  $f^*$  tanımından  $y \in f^*(D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) = D_y(H, K)$  dir. Böylece  $H \subset D_y(H, K)$  dir. Şimdi 4.1.23. Tanım (ii)' nin sağlandığını yani  $H, H', K, K' \subset Y$  kapalı olmak üzere eğer  $H \subset H'$  ve  $K \supset K'$  ise  $D_y(H, K) \subset D_y(H', K')$  olduğunu görelim.  $y \in Y$  olmak üzere  $y \in D_y(H, K)$  alalım. Buradan  $H \subset H'$  ise  $f^{-1}(H) \subset f^{-1}(H')$  ve  $K \supset K'$  ise  $f^{-1}(K) \supset f^{-1}(K')$  dir.  $f$  kapalı olup  $X$  monoton normal olduğundan  $D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K)) \subset D_x(f^{-1}(H'), f^{-1}(K'))$  dir. Böylece  $f^{-1}(y) \subset D_x(f^{-1}(H), f^{-1}(K))$  ve  $f^{-1}(y) \subset D_x(f^{-1}(H'), f^{-1}(K'))$  olup



$y \in f^* \left( D_x \left( f^{-1}(H'), f^{-1}(K') \right) \right)$  dir. Buradan  $y \in D_y (H', K')$  olur. Teoremin ispatını tamamlamak için  $\overline{D_y (H, K)} \subset Y \setminus K$  olduğunu görmek yeterlidir.  $y \in K$  alalım.  $y \in Y \setminus f \left( \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)} \right)$  dir. Şöyle ki;  $X$  monoton normal olduğundan  $f^{-1}(H) \subset D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right) \subset \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)} \subset \left[ f^{-1}(K) \right]^c$  olup  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(K)$  olduğundan  $f^{-1}(y) \notin \left[ f^{-1}(K) \right]^c$  dir. Buradan  $f^{-1}(y) \notin \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)}$  olup  $y \notin f \left( \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)} \right)$  dir. Şimdi de  $\left[ Y \setminus f \left( \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)} \right) \right] \cap D_y (H, K) = \emptyset$  olduğunu görelim. Aksine  $y \notin f \left( \overline{D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right)} \right)$  ve  $y \in D_y (H, K) = f^* \left( D_x \left( f^{-1}(H), f^{-1}(K) \right) \right)$  dir. Bu bir çelişki olduğundan  $y \notin \overline{D_y (H, K)}$  dir. Böylece  $\overline{D_y (H, K)} \subset Y \setminus K$  olur. ■

#### 4.1.26. Teorem

Monoton normal her uzay yığınsal normaldir.

*İspat*

$\mathcal{K}$ ,  $X'$  in kapalı alt kümelerinin ayrık bir ailesi olsun. Her  $F \in \mathcal{K}$  için  $F^* = \bigcup \{H : H \neq F, H \in \mathcal{K}\} \subset X$  kümesi kapalıdır. Çünkü  $\mathcal{K}$  ailesi ayrık ise yerel sonlu olup kapanışı korur. Ayrıca her  $F \in \mathcal{K}$  için  $F \cap F^* = \emptyset$  dir.  $X$  uzayı monoton normal uzay olduğundan  $X'$  in kapalı ve ayrık  $A, B$  alt küme çifti için  $D(A, B) \subset X$  açık olmak üzere;

- i)  $D(A, B) \cap D(B, A) = \emptyset$
- ii)  $A \subset D(A, B) \subset \overline{D(A, B)} \subset B^c$
- iii)  $A \subset A'$  ve  $B \subset B'$  ise  $D(A, B) \subset D(A', B')$

koşullarını sağlayan bir  $D$  monoton normallik operatörü vardır. Her  $F \in \mathcal{K}$  için  $U_F = D(F, F^*)$  olsun. (ii) özelliğinden  $F \subset D(F, F^*)$  ve  $F \subset U_F$  olur.  $H, F \in \mathcal{K}$  ve  $H \neq F$  olsun.  $H \subset F^*$  ve  $F \subset F$  olduğundan (iii) özelliğinden  $D(F, F^*) \subset D(F, H)$  elde edilir. Aynı şekilde  $F \subset H^*$  ve  $H \subset H$  olduğundan (iii) özelliğinden  $D(H, H^*) \subset D(H, F)$  olur.  $U_H \cap U_F = D(H, H^*) \cap D(F, F^*) \subset D(H, F) \cap D(F, H)$  olur. (i) özelliğinden  $D(H, F) \cap D(F, H) = \emptyset$  olduğundan  $U_H \cap U_F = \emptyset$  dir. Sonuç olarak her  $H, F \in \mathcal{K}$  için  $F \subset U_F$ ,  $H \subset U_H$  olacak şekilde ikişer ikişer ayrık ve açık kümelerin bir  $\{U_H : H \in \mathcal{K}\}$  ailesi bulunabildiğinden  $X$  uzayı yığılmsal normal uzaydır. ■

#### 4.1.27. Teorem

$(X, \tau)$  topolojik uzayının monoton normal olması için gerekli ve yeterli koşul “ $f((x, U)) \cap f((y, V)) \neq \emptyset$  olacak biçimdeki her  $(x, U), (y, V) \in \mathcal{P}$  için  $x \in V$  veya  $y \in U$ ” koşulunu sağlayan bir  $f : \mathcal{P} = \{(x, U) \in X \times \tau : x \in U\} \rightarrow \tau$  fonksiyonun var olmasıdır.

#### İspat

$\Rightarrow$ :  $D$  operatörü 4.1.23. Tanım’ daki koşulları sağlasın. Burada  $H, K \subset X$  kapalı ve  $H \cap K = \emptyset$  için  $D(H, K) \cap D(K, H) = \emptyset$  kabul edebiliriz.  $\mathcal{P} = \{(x, U) \in X \times \tau : x \in U\}$  olsun.  $x \in U$  ve  $U \subset X$  açık olmak üzere  $U_x = D(\{x\}, X \setminus U)$  olsun.  $f : \mathcal{P} \rightarrow \tau$ ,  $(x, U) \rightarrow f((x, U)) = U_x$  fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi  $x, y \in X$ ,  $U, V \subset X$  açık olmak üzere  $x \in U$  ve  $y \in V$  olsun.  $x \notin V$  ve  $y \notin U$  olduğunu kabul edelim.  $y \notin U$  olduğundan  $\{y\} \subset U^c$  olup tanım (ii)’ den  $D(\{x\}, X \setminus U) \subset D(\{x\}, \{y\})$  dir. Ayrıca benzer şekilde  $V_y = D(\{y\}, X \setminus V)$  olduğundan

$V_y \subset D(\{y\}, \{x\})$  olur. Buradan  $D(\{x\}, \{y\}) \cap D(\{y\}, \{x\}) = \emptyset$  olduğundan  $U_x \cap V_y = \emptyset$  olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

$\subseteq$ :  $f: \mathcal{P} \rightarrow \tau$  fonksiyonu hipotezdeki koşulu sağlasın.  $(x, U) \in \mathcal{P}$  olmak üzere  $U_x = f((x, U))$  olsun.  $H, K \subset X$  kapalı ve  $H \cap K = \emptyset$  olmak üzere  $D(H, K) = \bigcup \{U_x : x \in H \text{ ve } U \cap K = \emptyset\}$  olsun. Buradan  $D(H, K)$  açık olup  $H'$  yi içerir.  $y \in K$  alalım.  $x \in H$  ve  $U \cap K = \emptyset$  olmak üzere  $(X \setminus H)_y \cap U_x = \emptyset$  dir. Şöyle ki; aksine  $(X \setminus H)_y \cap U_x \neq \emptyset$  olsun. Hipotezden  $x \in X \setminus H$  veya  $y \in U$  olup bu bir çelişkidir.

Böylece  $y \notin \overline{D(H, K)}$  olup

$\overline{D(H, K)} \subset X \setminus K$  dir. Buradan  $X$  monoton normal uzaydır. ■

#### 4.1.28. Teorem

Monoton normal uzayların her alt uzayı monoton normaldir.

*İspat*

$X$  monoton normal bir uzay olmak üzere  $Y$ ,  $X$  in herhangi bir alt uzayı olsun. Bu durumda  $x \in Y$  olmak üzere  $x \in U$  olacak biçimde bir  $U \subset Y$  açığı alalım.  $Y$  alt uzay olduğundan  $U = U' \cap Y$  olacak biçimde bir  $U' \subset X$  açığı vardır. Buradan  $x \in U'$  olup  $X$  monoton normal uzay olduğundan  $x \in U'_x$  olmak üzere  $U'_x \subset X$  açığı 4.1.27. Teorem 'in koşullarını sağlar.  $f: \mathcal{P} = \{(x, U) \in Y \times \tau_Y : x \in U\} \rightarrow \tau_Y$ ,  $f((x, U)) = U'_x \cap Y = U_x$  fonksiyonunu tanımlayalım. Teoremin ispatını tamamlamak için  $(x, U), (y, V) \in \mathcal{P}$  olmak üzere  $f((x, U)) \cap f((y, V)) \neq \emptyset$  iken  $x \in V$  veya  $y \in U$  olduğunu görmek yeterlidir.  $f((x, U)) \cap f((y, V)) \neq \emptyset$  ise  $(U'_x \cap Y) \cap (V'_y \cap Y) \neq \emptyset$  olup buradan  $U'_x \cap V'_y \neq \emptyset$  dir.  $X$  monoton normal olduğundan  $x \in V'$  veya  $y \in U'$  dur. Bu durumda  $x \in V$  veya  $y \in U$  olur. ■

#### 4.1.29. Teorem

Her doğrusal sıralı uzay monoton normaldir.

*İspat*

$X$  doğrusal sıralı bir uzay olsun.  $X'$  in her  $U$  açık alt kümesi ve her  $x \in U$  için  $x'$  i içeren ve “  $U_x \cap V_y \neq \emptyset$  ise  $x \in V$  veya  $y \in U$  ” koşulunu sağlayan bir  $x \in U_x$  olacak biçimde açık kümesinin var olduğunu görmemiz yeterlidir.  $\alpha$ ,  $X$  üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı olsun.  $U \subset X$  açık ve  $x \in U$  olsun.  $X$  doğrusal sıralı uzay olduğundan  $x \in (a, b) \subset U$  olacak biçimde  $a, b \in X$  vardır.  $p_x = \min_{\alpha} \{p : a \leq p < x\}$  ve  $q_x = \min_{\alpha} \{q : x < q \leq b\}$  olsun.  $U_x = (p_x, q_x)$  denilirse  $x \in U_x$  ve  $U_x \subset X$  açık olur.  $U_x$  ' in “  $U_x \cap V_y \neq \emptyset$  ise  $x \in V$  veya  $y \in U$  ” koşulunun sağlandığını görmek zor değildir. Böylece  $X$  monoton normal uzay olur. ■

#### 4.1.30. Tanım

Eğer bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayının  $\sigma$ -kapanışı koruyan bir bazı varsa  $X$  uzayına  $M_1$ -uzayı denir.

#### 4.1.31. Tanım

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\mathcal{B}$ ,  $X'$  in alt kümelerinin bir ailesi olsun.  $x \in U$  olacak biçimdeki her  $U \subset X$  açığı için  $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset U$  olacak biçimde bir  $B \in \mathcal{B}$  varsa  $\mathcal{B}$  ailesine  $X$  uzayının bir quasi(yarı) bazı denir. Eğer bir  $X$  uzayının  $\sigma$ -kapanışı koruyan bir quasi(yarı) bazı varsa  $X$  uzayına  $M_2$ -uzayı denir.

Yukarıdaki tanımlardan her  $M_1$ -uzayının bir  $M_2$ -uzayı olduğu açıktır.

Şimdi bir bakıma  $M_2$  -uzayının karakteristiğini veren ve aynı zamanda  $M_2$  -uzayı ile katmanlanabilir uzayın ilişkisini belirleyen teoremi verelim.

#### 4.1.32. Teorem

Bir  $X$  uzayının  $M_2$  -uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul; bir  $g : \omega \times X \rightarrow \tau$  fonksiyonunun var olması ve  $x \in X$  için

$$i) \quad \{x\} = \bigcap_n g(n, x)$$

$$ii) \quad x \in g(n, x_n) \text{ ise } x_n \rightarrow x$$

iii) Eğer  $H \subset X$  kapalı ve  $y \notin H$  ise  $y \notin \overline{\bigcup \{g(n, x) : x \in H\}}$  olacak biçimde bir  $n \in \omega$  vardır.

$$iv) \quad y \in g(n, x) \text{ ise } g(n, y) \subset g(n, x)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

*İspat*

$\Rightarrow$ :  $X$  bir  $M_2$  -uzayı olmak üzere  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$ ,  $X$  için bir yarı baz ve  $g(n, x) = X \setminus$

$\bigcup \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_i, i \leq n, x \notin B\}$  olsun. 3.1.24. Teorem' den (ii) ve (iv)' nin sağlandığı

açıktır. Şimdi (i)' nin sağlandığını görelim. 3.1.24. Teorem (i)' den her  $x \in X$  ve her  $n \in \omega$  için  $x \in g(n, x)$  olduğundan  $x \in \bigcap_n g(n, x)$  dir.  $\bigcap_n g(n, x) \subset \{x\}$  olduğunu

görelim.  $y \in \bigcap_n g(n, x)$  ve  $y \neq x$  olsun.  $X$  Hausdorff uzayı olduğundan  $y \in U$  ve  $x \in V$

olacak biçimde  $U, V \subset X$  açıkları vardır ve  $U \cap V = \emptyset$  dur.  $V \subset X$  açık olduğundan

$\bar{U} \cap V = \emptyset$  olur.  $y \in U$ ,  $U \subset X$  açık ve  $\mathcal{B}$ , yarı-baz olduğundan  $y \in \bar{B}^0 \subset B \subset U$  olacak

biçimde bir  $B \in \mathcal{B}$  vardır.  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$  olduğundan  $B \in \mathcal{B}_{n_0}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$

vardır. Buradan  $y \in \bar{B}$  dir. Ayrıca  $x \notin \bar{B}$  dir. Çünkü  $x \in \bar{B}$  olsaydı  $x \in \bar{U}$  olup

$x \in \bar{U} \cap V$  olurdu ki bu da  $\bar{U} \cap V = \emptyset$  olmasıyla çelişir.

$\bar{B} \in \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_1, i \leq n_0, x \notin \bar{B}\}$  olduğundan  $\bar{B} \subset \bigcup \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_1, i \leq n_0, x \notin \bar{B}\}$  dir.

buradan  $g(n_0, x) \subset (\bar{B})^c$  dir. Fakat bu  $y \in g(n_0, x)$  ve  $y \in \bar{B}$  olmasıyla çelişir.

Buradan kabul yanlış olup  $x = y$  olur. İspatın bu yönünü tamamlamak için (iii)' nin sağlandığını görelim.  $y \in H^c$  ve  $H^c \subset X$  açık olup  $X$  uzayı düzenli olduğundan  $y \in V \subset \bar{V} \subset H^c$  olacak biçimde bir  $V \subset X$  açığı vardır.  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$  yarı-baz

olduğundan  $y \in \overset{0}{B}_0 \subset B_0 \subset V$  olacak biçimde bir  $B_0 \in \mathcal{B}_{n_0}$  vardır.  $n_0$  bu özelliği

sağlayan ilk eleman olsun.  $\overset{0}{B}_0 \subset X$  açık ve  $y \in \overset{0}{B}_0$  olmak üzere

$\overset{0}{B}_0 \cap \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\} = \emptyset$  olduğunu görelim. Aksine

$\overset{0}{B}_0 \cap \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\} \neq \emptyset$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$\overset{0}{B}_0 \cap g(n_0, x_0) \neq \emptyset$  olacak biçimde bir  $x_0 \in H$  vardır. O halde  $z \in \overset{0}{B}_0$  ve

$z \notin \bigcup \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_1, i \leq n_0, x_0 \notin \bar{B}\}$  olacak biçimde bir  $z \in X$  vardır.  $x_0 \in H$  olduğundan

$x_0 \notin V$  ve  $x_0 \notin \bar{B}_0$  dir. Bu durumda  $\bar{B}_0 \subset \bigcup \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_1, i \leq n_0, x_0 \notin \bar{B}\}$  dir. Ancak

$z \notin \bigcup \{\bar{B} : B \in \mathcal{B}_1, i \leq n_0, x_0 \notin \bar{B}\}$  olduğundan  $z \notin \bar{B}_0$  olup  $z \notin \overset{0}{B}_0$  dir. Bu bir çelişki

olduğundan kabul yanlış olup  $y \notin \bigcup \{g(n_0, x) : x \in H\}$  dir.

$\Leftarrow$ :  $g$  fonksiyonu (i) – (iv) şartlarını sağlasın.  $\mathcal{G}_n = \{g(n, x) : x \in X\}$  ve  $\mathcal{B}_n =$

$\{X \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{G}}_n : \tilde{\mathcal{G}}_n \subset \mathcal{G}_n\}$  olsun. İspatın bu yönünü tamamlamak için  $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$  'nin  $X$

için  $\sigma$ -kapanışı koruyan bir yarı baz olduğunu görmemiz yeterlidir.  $x \in X$  olmak

üzere  $x \in U$  olacak biçimdeki bir  $U \subset X$  açığını alalım. Bu durumda  $x \notin U^c$  olup

$U^c \subset X$  kapalı olduğundan  $x \notin \bigcup \{g(n_0, p) : p \in U^c\}$  olacak biçimde bir  $n_0 \in \omega$

vardır.  $\tilde{\mathcal{G}}_{n_0} = \{g(n_0, p) : p \in U^c\}$  olmak üzere  $B = \left(\bigcup \tilde{\mathcal{G}}_{n_0}\right)^c \in \mathcal{B}_{n_0}$  ise  $U^c \subset \bigcup \tilde{\mathcal{G}}_{n_0}$

ve  $B = \left(\bigcup \tilde{\mathcal{G}}_{n_0}\right)^c \subset U$  olur. Şimdi de  $x \in \overset{0}{B}$  olduğunu görelim.

$\left(\overline{\bigcup\{g(n_0, p) : p \in U^c\}}\right)^c \subset X$  açık ve  $x \in \left(\overline{\bigcup\{g(n_0, p) : p \in U^c\}}\right)^c$  olmak üzere

$\left(\overline{\bigcup\{g(n_0, p) : p \in U^c\}}\right)^c \cap \left(\bigcup \tilde{\mathcal{G}}_{n_0}\right) = \emptyset$  olduğundan  $x \in \overset{0}{B}$  olup  $\overset{0}{B} \subset B \subset U$  olur.

İspatı tamamlamak için her  $n$  için  $\mathcal{B}_n$  ailesinin kapanışı koruduğunu görelim.

$\tilde{\mathcal{G}}_n \subset \mathcal{G}_n$  olsun. iv)' den eğer  $y \in \bigcap \tilde{\mathcal{G}}_n$  ise  $g(n, y) \subset \bigcap \tilde{\mathcal{G}}_n$  dir. Buradan  $\bigcap \tilde{\mathcal{G}}_n$  açıktır.

Her  $\alpha \in \Lambda$  için  $\mathcal{G}_n(\alpha) \subset \mathcal{G}_n$  olsun. O zaman  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus \bigcup \mathcal{G}_n(\alpha)) = X \setminus \bigcap \left( \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}_n(\alpha) \right)$

kapalı olduğundan  $\mathcal{B}_n$  ailesi kapanışı korur. ■

Şimdi bu teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu verelim.

#### 4.1.33. Sonuç

Metriklenebilir her uzay  $M_1$ -uzayı, her  $M_1$ -uzayı da katmanlanabilir uzaydır.

*İspat*

$X$  metriklenebilir uzay olsun. Bu durumda Nagata-Smironov teoreminden[5]  $X'$  in  $\sigma$ -kapanışı koruyan bir bazı vardır. Buradan  $X$ ,  $M_1$ -uzayıdır. Şimdi de  $X'$  in katmanlanabilir uzay olduğunu görelim.  $X$ ,  $M_1$ -uzayı olduğundan  $M_2$ -uzayıdır.

4.1.32. Teorem' den  $X$  katmanlanabilir uzaydır. ■

## KAYNAKLAR

1. Ceder J., "Some generalizations of metric spaces", *Pacific J. Math.*, 11: 105-125 (1961).
2. Borges, C.R., "On stratifiable spaces", *Pacific J. Math.*, 17: 1-16 (1966).
3. Creede, G., "Concerning semi-stratifiable spaces", *Pacific J. Math.*, 32: 47-54 (1970).
4. Kunen, K. And Vaughan, J.E., "Handbook of Set-Theoretic Topology", *North-Holland Publishing Co*, Ch. 9, 347-422 (1984).
5. Engelking, R., "General Topology" *Heldermann Verlag*, Berlin, (1989).
6. Michael E., "Yet another note on paracompact space", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10: 309-414 (1959).
7. Kunen, K. And Vaughan, J.E., "Handbook of Set-Theoretic Topology", *North-Holland Publishing Co*, Ch. 10: 425-497 (1984).
8. Gruenhage, G., "Stratifiable spaces are  $M_2$ ", *Topology Proc.*, 1: 221-226 (1976).
9. Mill Husek, "Recent Progress in General topology", *North-Holland, Amsterdam*, 264 (1992).
10. Shou Lin, "A note on Lasnev decomposition theorems", *Topology Proceedings*, 21: (1996).
11. Chaber J., "Conditions which imply compactness in countably compact spaces", *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math.*, 24: 993-998 (1976).



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : LALE, Turan  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 24.06.1987 Ankara  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : 0 (542) 718 49 66  
e-mail : [turan\\_lale@hotmail.com](mailto:turan_lale@hotmail.com)

### Eğitim

| Derece        | Eğitim Birimi                      | Mezuniyet tarihi |
|---------------|------------------------------------|------------------|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü | 2011             |
| Lisans        | Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü | 2008             |
| Lise          | İnönü Lisesi                       | 2004             |

### Yabancı Dil

İngilizce

### Hobiler

Kitap, Bilgisayar, Yüzme