

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİNİN TEKNOLOJİDEKİ YERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu SARIYALIM BOZAN

HAZİRAN - 2024

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİNİN TEKNOLOJİDEKİ YERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu SARIYALIM BOZAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

HAZİRAN - 2024

“GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİNİN TEKNOLOJİDEKİ YERİ” adlı tez çalışması adlı tez çalışması **Burcu SARIYALIM BOZAN** tarafından hazırlanmış olup aşağıdaki jüri tarafından **OY BİRLİĞİ** ile Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Kırklareli Üniversitesi

.....

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK

Kırklareli Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Vahide BULUT

İzmir Katip Çelebi Üniversitesi

.....

Tez Savunma Tarihi: 03/06/2024

.....

Doç. Dr. H. Hale KARAYER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Kırkırelı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez ve Proje Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum bilgileri, verileri ve dokümanları, değişik sonuç verebilecek şekilde araştırma araç gereçleri kullanmadan, işlem veya kayıt sonuçlarını değiştirmeden akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Burcu SARIYALIM BOZAN
03/06/2024

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİNİN TEKNOLOJİDEKİ YERİ

Burcu SARIYALIM BOZAN

Yüksek Lisans Tezi

Kırklareli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Haziran 2024, 63 sayfa

Teknoloji, mühendislik ve bilgisayar destekli geometrik tasarım gibi uygulamalarda ofset eğrileri önemli bir yere sahip olduğundan tez çalışmamızda ağırlıklı olarak düzlem ofset eğrileri incelenmiştir. Genelleştirilmiş ofset eğrileri, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrileri ve kesişim eğrileri irdelenmiş olup bu eğrilere ait uygulamalar yapılmıştır. Eğrilerin kesişim durumları ve tekilliklerinin hesaplanması gibi konular da ele alınmıştır. Genelleştirilmiş ofset eğrilerinin ve n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilerinin standart ofset eğrisi cinsinden ifade edilmesi irdelenmiş ve önermeler ile desteklenmiştir. Ele alınan bu konuların yanı sıra, karmaşık geometrik yapıların analiz edilmesinde kullanılan kesişim eğrilerinin, daha doğru ve verimli hesaplanabilmesi için yüksek mertebeli yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yaklaşım kapsamında, düzlem eğrileri, uzay eğrileri ve kesişim eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri için ayrı ayrı incelemeler yapılmıştır. Tanımlar ve uygulamalar ile desteklenen bu tez çalışması, ofset eğrileri ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin temel kavramlarını açıklayarak bilgisayar destekli geometrik tasarım ve diferansiyel geometri alanlarında literatüre katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: diferansiyel geometri, genelleştirilmiş ofset eğriler, ofset eğriler, kesişim eğrileri, bilgisayar destekli geometrik tasarım

ABSTRACT

THE POSITION OF GENERALIZED OFFSET CURVES IN TECHNOLOGY

Burcu SARIYALIM BOZAN

MSc Thesis

Kirklareli University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

June 2024, 63 pages

Due to the significant importance of offset curves in applications such as technology, engineering, and computer-aided geometric design, our thesis predominantly focuses on investigations conducted on planar curves. Generalized offset curves and intersection curves are addressed in detail. Generalized offset curves and n th-degree generalized offset curves are examined, accompanied by practical applications of these curves. Topics such as intersection scenarios of curves and computation of singularities are discussed. Additionally, the representation of generalized offset curves and n th-degree generalized offset curves in terms of standard offset curves is scrutinized and supported by propositions. Furthermore, in the analysis of complex geometric structures, higher-order approaches are necessary for the accurate and efficient calculation of intersection curves. Within this framework, separate examinations are conducted for planar curves, spatial curves, and intersection curves concerning generalized offset curves. Supported by definitions and applications, this thesis aims to contribute to the literature by elucidating the fundamental concepts of offset curves and generalized offset curves, thus enriching the fields of computer-aided geometric design and differential geometry.

Key Words: differential geometry, generalized offset curves, offset curves, intersection curves, computer aided geometric design

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışma sürecim boyunca, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, bilgilendirme ve yönlendirmeleri ile çalışmamın şekillenmesini sağlayan, manevi desteğiyle her zaman yanımda olan saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN'a, tez çalışmamın araştırılmasında ve yürütülmesinde destek olan Arş. Gör. Selcan KOCABAŞ'a katkılarından dolayı teşekkür ederim, ayrıca fedakarlıklarıyla hep yanımda olan, aileme ve eşim Berkan BOZAN'a teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1.GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Ön Bilgiler	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Teğet Vektörü ve Yay Uzunluğu	7
3.2. Asal Normal Vektörü ve Eğrilik.....	9
3.3. Binormal Vektörü ve Burulma.....	11
3.4. Serret-Frenet Formülleri	11
3.5. Ofset Eğrileri.....	11
3.5.1. Tekilliklerin sınıflandırılması.....	13
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLER	15
4.1. Genelleştirilmiş Ofset Eğriler	16
4.1.1.Genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tanımı.....	16
4.1.2. n. Dereceden genelleştirilmiş ofset eğri tanımı.....	17
4.1.3. Genelleştirilmiş ofset eğrisi uygulamaları.....	18
4.2. Eğrilerin Kesişim Durumları.....	26
4.2.1. Düzlem eğrinin ofset eğrisinin kendisiyle kesişimi	26
4.2.2. Düzlem eğrinin genelleştirilmiş ofset eğrisinin kendisiyle kesişimi.....	26
4.2.3. Farklı iki düzlem eğrinin ofset eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kendisiyle kesişimi	27
4.3. Tekilliklerin Hesaplanması	28
4.3.1. Düzlem eğrilerin tekilliklerinin hesaplanması	28
4.3.2 Genelleştirilmiş ofset eğrisi için tekilliklerinin hesaplanması	29
4.4. Ofset Eğrilerin Standart Ofset Eğrisi Cinsinden İfadesi	30
4.4.1. Genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi	31

4.4.2. n. Dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi	41
5. KESİŞİM EĞRİLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ	53
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	63



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge 1.1. Düzlem Eğrileri, Uzay Eğrileri ve Yüzeyler İçin Gösterimler.....	4
Çizelge 1.2. Kapalı, Açık ve Parametrik Formun Avantaj ve Dezavantajları.....	5



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 3. 1. $\Delta r, r(t)$ parametrik eğrisi üzerinde P noktasından Q noktasına olan değişim..	7
Şekil 3. 2. Bir eğrinin asal normal vektörü.....	9
Şekil 3. 3. Düzlem eğri boyunca normal vektör, teğet vektör ve büküm noktaları.....	10
Şekil 3. 4. Düzlem eğrinin teğet ve normal vektörleri.....	12
Şekil 3. 5. $r = (t, t^2)^T, -2 \leq t \leq 2$ parabol eğrisinin $d = -0.3, -0.5, -0.8$ ofset mesafelerine göre ofset eğrileri.	12
Şekil 4. 1. Çember eğrisi (mavi) ve çember eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı).....	19
Şekil 4. 2. Çember eğrisine ait baz eğrisi (mavi), genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), 2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (yeşil) ve 3. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (siyah)	21
Şekil 4. 3. Elips eğrisine ait baz eğrisi (mavi), genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı) ve 2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (yeşil)	23
Şekil 4. 4. Parabol eğrisi(mavi) ve parabol eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı).....	24
Şekil 4. 5. Sikloid eğrisi (yeşil) ve sikloid eğrisinin ofset eğrisi (kırmızı).....	25

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
α	Alfa eğrisi
s	Yay uzunluğu
α'	Alfa eğrisinin s parametresine göre türevi
$\dot{\alpha}$	Alfa eğrisinin t parametresine göre türevi
r	r eğrisi
r'	r eğrisinin s parametresine göre türevi
$\dot{r}$	r eğrisinin t parametresine göre türevi
T	Teğet vektörü
N	Asal normal vektörü
B	Binormal vektörü
κ	r eğrisinin eğriliği
τ	r eğrisinin burulması
E^3	Üç-boyutlu Öklid uzayı
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\hat{r} = \hat{r}(t)$	$r(t)$ eğrisinin düzlemsel ofset eğrisi
d	$\hat{r}(t)$ ofset eğrisi için ofset mesafesi

r_0	Genelleştirilmiş ofset eğrisi
d_1	Genelleştirilmiş ofset eğrisi için teğet vektörü yönünde ofset mesafesi
d_2	Genelleştirilmiş ofset eğrisi için normal vektörü yönünde ofset mesafesi
κ_0	Genelleştirilmiş ofset eğrisinin eğriliği
r_n	n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi
d_{2n+1}	n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin teğet vektörü yönünde ofset mesafesi
d_{2n+2}	n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin normal vektörü yönünde ofset mesafesi
κ_n	n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin eğriliği

Kısaltmalar

Açıklamalar

BDGT	Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım
BDÜ	Bilgisayar Destekli Üretim
BDT	Bilgisayar Destekli Tasarım
İHA	İnsansız Hava Araçları
NC	Nümerik Kontrol

1.GİRİŞ

Diferansiyel geometri; matematiksel yapıların, eğri ve yüzeylerin incelenmesinde temel olan, geometri ile analiz arasında köprü görevi gören bir disiplindir. Aynı zamanda karmaşık şekilleri, yüzeyleri ve sistemleri modellemede, analiz etmede gerekli olan teknik ve kavramlarıyla önemli bir araçtır (Do Carmo, 2016).

Diferansiyel geometrinin kökenleri, Mimar Sinan'ın mimari eserlerini inşa ederken kullandığı, henüz yeterince ele alınmamış matematik (geometri) hesaplarına ve sonrasında ise 18-19. yüzyıl matematikçilerinin çalışmalarına dayanmaktadır. Özellikle dönemin öncülerinden Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Bernhard Riemann'ın (1826-1866) çalışmaları sayesinde büyük bir ilerleme göstermiştir (Do Carmo, 2016). Tarihsel gelişim süreci içerisinde diferansiyel geometri; matematik, fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimleri gibi birçok disiplinde kendini var eden bir alan haline gelmiştir. Günümüzde önemli bir yer tutan bilgisayar destekli geometrik tasarım (BDGT) için de diferansiyel geometrinin giderek önem kazandığı görülmektedir (Shen & Zhang, 2016). Matematik ve bilgisayar tabanlı yöntemlerin birleşimiyle şekillerin, yüzeylerin ve katı cisimlerin bilgisayar ortamında modellenmesine olanak sağlayan BDGT ve diferansiyel geometri iş birliği, birçok konuda geometrik yapıların tasarımlarını mümkün kılmaktadır (Farin, 2002, Pottmann vd., 2006).

Ofset eğrileri, baz eğrinin belirli bir mesafeyle ötelenmesi sonucu elde edilen eğriler olup BDGT için önemli bir kavramdır. Bu eğriler; bilgisayar grafikleri, mühendislik tasarımları ve endüstriyel üretim gibi alanlarda kendini göstermektedir. Örneğin, bilgisayar animasyonlarında gölge, şekil ana hatları gibi efektlerin oluşturulmasında kullanılırken; kalıp ve süsleme gibi detaylar için de mimaride kullanıldığı görülmektedir. Bunların yanı sıra, otomotiv endüstrisinde mobil vasıtaların gövde panellerini tasarlamak ve aracın farklı parçaları arasında geçişler oluşturmak, havacılık endüstrisinde ise uçak bileşenlerini tasarlamak ve aerodinamik şekiller oluşturmak gibi amaçlarla ofset eğrilerin kullanıldığı bilinmektedir (Rogers, 2001, Liu & Li, 2018).

Genelleştirilmiş ofset eğrileri ise ofset eğrilerinin genişletilmiş bir versiyonu olup daha karmaşık şekillerin modellenmesinde ele alınırlar. Ofset eğrileri genellikle basit ve düz şekillerin analizinde kullanılırken, genelleştirilmiş ofset eğrileri daha karmaşık şekillerin modellenmesinde tercih edilirler (Choi & Kim, 2012).

Genelleştirilmiş ofset eğrileri; bilgisayar destekli üretim (BDÜ) sistemlerinden biri olan CNC işlemlerinde hammaddeden istenilen ürünün elde edilmesine yönelik adımların tespitinde işlevseldir. Mobilya, elektronik cihazlar, ambalaj ve benzeri ürünlerin şekillerinin belirlenmesinde, üretim kalıplarının oluşturulmasında kullanılırlar. Büyük gemilerin ve deniz araçlarının gövde tasarımında, modern ve karmaşık bina formlarının oluşturulmasında yine bu eğrilerin etkisi görülmektedir (Pottmann vd., 2006, Chen & Wang, 2013).

Diferansiyel geometride kesişim eğrisi en genel manada yüzey normalleri paralel olmayan, enine kesişen iki yüzeyin ortak noktalarından geçen eğridir. Kesişim eğrileri, karmaşık geometrik yapıların analiz edilmesinde, montaj süreçlerinin optimizasyonunda kullanılmaktadır (Patrikalakis & Maekawa, 2010). Özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarım (BDGT) ve bilgisayar destekli üretim (BDÜ) gibi alanlarda nesnelerin kesişim noktalarını belirlemek için kesişim eğrilerinden faydalanılır (Lee & Jung, 2012).

Tez çalışması kapsamında ele alınan konuların teknolojiye yerine ilişkin genel bir girişin ardından tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde; orijinal bulguların elde edilmesine yönelik kavram ve tanımlar ele alınmıştır. Dördüncü bölümde; ofset eğriler ve genelleştirilmiş ofset eğriler arasındaki ilişki, eğrilerin kesişim durumları, tekilliklerin hesaplanması, eğrilerin standart ofset eğrileri cinsinden ifade edilmesi gibi konular incelenmiştir. Ele alınan bu durumlar n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilere genişletilmiş olup uygulama ve önermeler ile desteklenmiştir. Beşinci bölümde; kesişim eğrileri tanıtılmış olup bu eğrileri karakterize eden eğrilik fonksiyonlarına değinilmiştir.

Çalışmamız neticesinde elde ettiğimiz bulguların, üretim süreçlerinden mühendislik tasarımlarına, bilgisayar grafiklerinden sanal gerçekliğe kadar birçok alanda kullanım potansiyelinin ortaya konması amaçlanırken, teorik manada da literatüre katkı sağlaması hedeflenmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmamızın sonraki bölümleri için gerekli olan bazı tanımlara yer verilecektir.

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha: I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir $\alpha(t)$ fonksiyonuna, E^n de koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri denir. $\alpha(t)$ eğrisinin parametrik gösterimi,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)]^T \quad (2.1)$$

şeklindedir. Buradaki $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.2. $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. J bir açık aralık olmak üzere $J \rightarrow I$ fonksiyonu ile h nın tersi $C^k(k \geq 1)$ sınıfından ise h fonksiyonuna α eğrisinin bir parametre dönüşümü denir (Kreyszig, 1959).

Tanım 2.1.3. $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\|\alpha'(t)\|$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı denir ve $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $v(t)$,

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right)^2} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig, 1959).

Tanım 2.1.4. $\alpha: I \rightarrow E^n$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s)) \quad (2.3)$$

eğrisi verilsin,

$$\|\alpha'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1 \quad (2.4)$$

ise birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.5. M, E^3 uzayının bir alt kümesi olsun. Her $P \in M$ için, P nin E^3 üzerinde bir V komşuluğu ve E^2 nin bir U açık kümesinden $V \cap M$ ye bir F diffeomorfizmi varsa, M kümesi E^3 de bir yüzeydir denir (O'Neill, 1966).

Eğri ve yüzeylere ilişkin genel tanımlar kısaca verilmiş olup bu kavramlar incelenen duruma göre farklı formlarda tercih edilmektedir. Çizelge 1.1 de düzlem eğrileri, uzay eğrileri ve yüzeylere ilişkin açık, kapalı ve parametrik temsil formları özetlenmiştir:

Çizelge 1.1. Düzlem Eğrileri, Uzay Eğrileri ve Yüzeyler İçin Gösterimler

Geometri	Parametrik	Kapalı	Açık
Düzlem Eğrileri	$x = x(t), y = y(t),$ $t_1 \leq t \leq t_2$	$f(x, y) = 0$ veya $r = r(u, v) \cap \text{düzlem}$	$y = F(x)$
Uzay Eğrileri	$x = x(t), y = y(t),$ $z = z(t)$ $t_1 \leq t \leq t_2$	$f(x, y, z) \cap g(x, y, z) = 0$ veya $r = r(u, v) \cap f(x, y, z) = 0$ veya $r = p(\sigma, t) \cap r = q(u, v) = 0$	$y = Y(x) \cap z = Z(x)$
Yüzeyler	$x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ $u_1 \leq u \leq u_2$ $v_1 \leq v \leq v_2$	$f(x, y, z) = 0$	$z = F(x, y)$

Kaynak: (Patrikalakis & Maekawa, 2010)

Çizelge 1.2 de ise eğri ve yüzeylere ait açık, kapalı ve parametrik temsillerinin avantaj ve dezavantajları sunulmaktadır:

Çizelge 1.2. Kapalı, Açık ve Parametrik Formun Avantaj ve Dezavantajları

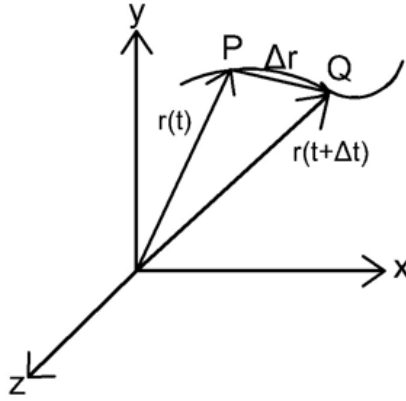
	Avantaj	Dezavantaj
Kapalı	• Çözümü kolaydır. • Bir eğri veya yüzeyi basit bir denklemlerle ifade eder; geometrik özelliklerinin kolayca analiz edilmesini sağlar. • Analitik hesaplamalar için uygundur.	• Kapalı ve çok değişkenli eğrilerin gösterimi zordur. • Eksene bağlıdır, dönüşümü zor veya karmaşıktır. • Bazı eğriler veya yüzeyler için çok karmaşık denklemlere yol açabilir. • Hesaplama ve çözüm süreçlerini zorlaştırabilir.
Açık	• Bir eğri veya yüzey, basit matematiksel algoritmalar kullanılarak hesaplanabilir. • Bir veri grubundaki noktaların sınıflandırılması kolaydır. • Kesişim eğrileri/ofset eğrileri temsil edilebilir. • Geometrik yapının daha kolay anlaşılmasını sağlayabilir.	• Kapalı forma göre daha az bilgi içerebilir ve çözümü zordur. • Eksene bağlıdır, dönüşümü karmaşık ve zordur. • Belirli bir formülle ifade edilmeyen serbest biçimli şekilleri ifade etmek ve düzenlemek zordur.
Parametrik	• Eğri veya yüzeyin her noktasını bir parametre cinsinden ifade ettiği için esneklik sağlar ve bu da eğri veya yüzeyin çeşitli özelliklerinin daha kolay kontrol edilmesine yardımcı olur. • Eksenden bağımsızdır ve belirli bir geometrik modelleme veya analiz problemi için daha esnek bir yaklaşım sağlar. • Bileşik eğriler oluşturmak kolaydır. • Çözümü kolaydır. • Serbest biçimli şekillerin kolayca düzenlenmesi mümkündür.	• Kesişimlerin ve veri grubundaki noktaların sınıflandırılmasını zorlaştırır. • Bazı durumlarda kapalı ve açık formlara göre daha karmaşık olabilir. • Birden fazla parametre ve denklem olduğunda, şekillerin ve yapıların davranışlarını anlamak ve kontrol etmek karmaşık hale gelebilir.

Kaynak: (Patrikalakis & Maekawa, 2010)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım'ın (BDGT) önemli bir konusu olan eğri ve yüzeylerin kısaca temel diferansiyel geometrisi ele alınacaktır ve sonraki bölüm için gerekli tanım ve bilgilere yer verilecektir. Bu bölümde sunulan şekillerin bazıları kendi çizimimiz ve bazıları da Patrikalakis, Maekawa'dan alınmıştır (Patrikalakis & Maekawa, 2010).

3.1. Teğet Vektörü ve Yay Uzunluğu



Şekil 3. 1. Δr , $r(t)$ parametrik eğrisi üzerinde P noktasından Q noktasına olan değişim

Bir $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ parametrik eğrisinin Şekil 3.1 de gösterildiği gibi $P(\mathbf{r}(t))$ ve $Q(\mathbf{r}(t + \Delta t))$ noktaları arasındaki bir Δs yay parçası alındığında bu Δs uzunluğu, $|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)|$ ile yaklaşık olarak tahmin edilebilir ve Taylor Açılımı ile

$$\Delta s \cong |\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} (\Delta t)^2 \right| \cong \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \Delta t, \quad (3.1)$$

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| dt = |\dot{\mathbf{r}}| dt = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt \quad (3.2)$$

olur.

$\mathbf{r}(t_0)$ ve $\mathbf{r}(t)$ noktaları arasındaki eğri parçasının uzunluğu, $t \in [t_0, t] \rightarrow \mathbf{r}(t)$

$$s(t) = \int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \quad (3.3)$$

olarak verilir ve bu eğrinin teğet vektörün büyüklüğü ile birim teğet vektörü sırasıyla

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \frac{ds}{dt} \quad \text{ve} \quad \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \equiv \mathbf{r}' \quad (3.4)$$

biçimindedir. Burada “ ’ ” gösterimleri sırasıyla, yay uzunluğuna göre ve “ · ” yay uzunluğu olmayan bir t parametresine göre alınan türevi ifade eder. Tez çalışması boyunca s ve t parametresine göre alınan türevler bu notasyonlar ile ifade edilecektir.

Tanım 3.1.1. I aralığında tanımlanan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ parametrik eğrisi için $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 0$ ise $\mathbf{r}(t)$ noktasına düzgün nokta, değilse tekil nokta denir. Her $t \in I$ için $\mathbf{r}(t)$ düzgün yani $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 0$ ise $\mathbf{r}(t)$ eğrisine düzgün eğri denir (Kreyszig, 1968).

Teğet vektörünün $\frac{ds}{dt}$ büyüklüğü, yay uzunluğu s nin t parametresine göre değişim hızıdır ve parametrik hız olarak adlandırılır. Eğer $\mathbf{r}$ eğrisi düzgün kabul edilirse tanım gereği $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ asla 0 değildir ve $\frac{ds}{dt}$ her zaman pozitifdir. $\frac{ds}{dt} = 1$ olduğunda eğri yay uzunluğu parametresine sahip olur ve bu eğriye birim hızlı eğri denir.

Tanım 3.1.2. $f(x, y) = 0$ düzlem kapalı eğrisinde $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ koşulları sağlanıyorsa (x_0, y_0) noktasına bu eğrinin tekil noktası denir (Patrikalakis & Maekawa, 2010).

Kapalı denkleme sahip $f(x, y) = 0$ düzlem eğrisinin birim teğet vektörü;

$$\mathbf{t} = \pm \frac{(f_y, -f_x)^T}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad (3.5)$$

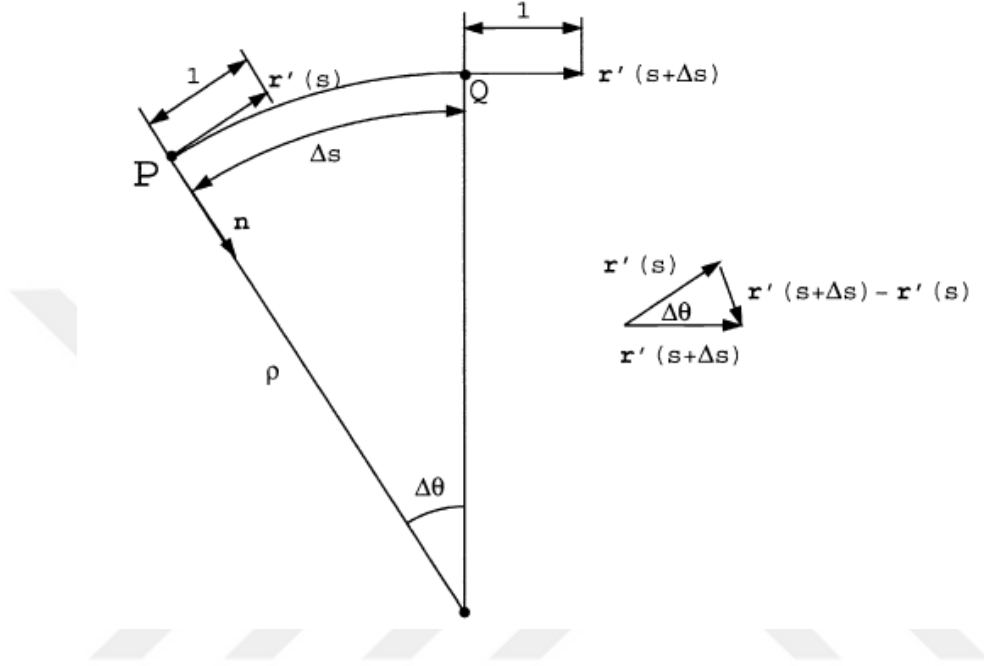
şeklindedir.

$f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ şeklinde verilen kapalı formdaki iki yüzey için, ∇f ve ∇g sırasıyla bu iki yüzeyin normal vektörleridir. İki yüzeyin kesişimi olan eğrinin birim teğet vektörü;

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\nabla f \times \nabla g}{|\nabla f \times \nabla g|} \quad (3.6)$$

olur, burada $|\nabla f \times \nabla g| \neq 0$ dır (Patrikalakis & Maekawa, 2010).

3.2. Asal Normal Vektörü ve Eğrilik



Şekil 3. 2. Bir eğrinin asal normal vektörü

$\mathbf{r}(s)$ eğrisi için s yay parametresi olmak üzere,

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$$

olup, eğrinin birim normal vektörü,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} \quad (3.7)$$

biçimindedir. Şekil 3.2. den, eğrilik fonksiyonu ve eğrilik vektörü, sırasıyla

$$|\mathbf{r}''(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\rho \Delta \theta} = \frac{1}{\rho} \equiv \kappa, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} \quad (3.9)$$

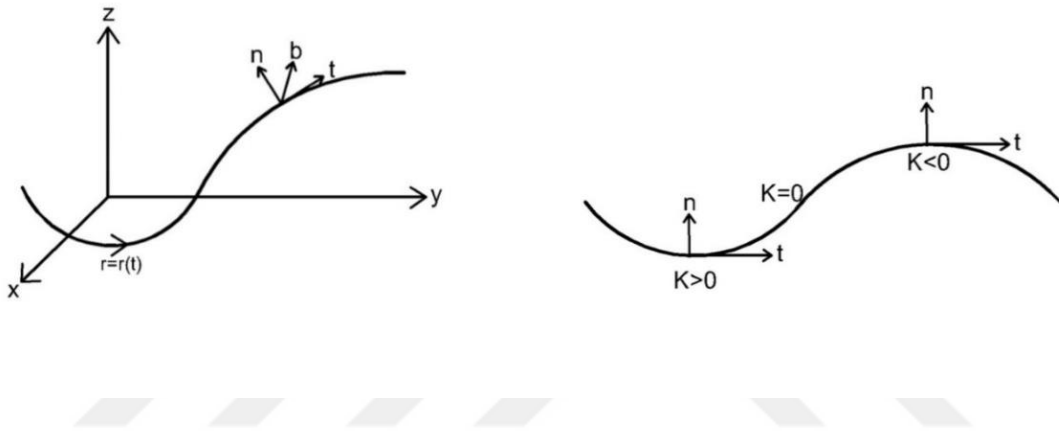
olarak gelir.

Birim hızlı olmayan eğriler için eğrilik fonksiyonu,

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \quad (3.10)$$

bağıntısı ile verilir.

Eğrilik fonksiyonu, eğrinin büküm noktalarını belirlemek için önemlidir. Herhangi bir eğride, eğriliğin işaret değiştirdiği noktaya büküm noktası denir. Şekil 3.3 de düzlem eğriye ait büküm noktaları gösterilmektedir.



Şekil 3. 3. Düzlem eğri boyunca normal vektör, teğet vektör ve büküm noktaları

Kapalı formda verilen bir düzlem eğrisi için birim asal normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(f_x, f_y)^T}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (3.11)$$

ve

$$\kappa = - \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_x^2f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.12)$$

bağıntılarıyla verilir.

3.3. Binormal Vektörü ve Burulma

Birim hızlı olmayan, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri için birim binormal vektörü,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir.

τ burulma fonksiyonu, eğrinin oskülatör düzleminden sapmasının ölçüsünü verir ve

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})} \quad (3.15)$$

şeklindedir. Düzlem eğriler için burulma her noktada sıfırdır.

3.4. Serret-Frenet Formülleri

E^3 uzayında $\mathbf{r}(s)$ birim hızlı eğrisi için Serret-Frenet vektörlerine ilişkin türev formülleri,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

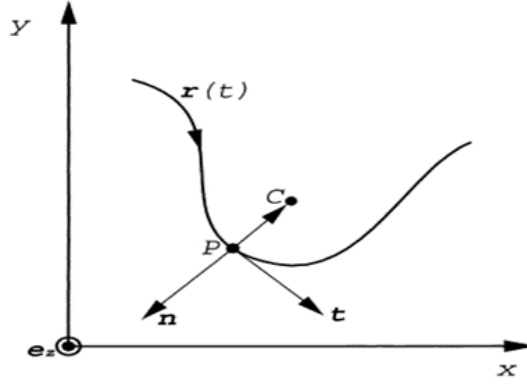
ile, birim hızlı olmayan eğriler için Serret-Frenet formülleri de

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

olarak verilir, burada, $\kappa = \kappa(s)$ eğrilik fonksiyonu ve $\tau = \tau(s)$ burulma fonksiyonu için verilen denklemlere eğrinin doğal denklemleri denir, $v = \frac{ds}{dt}$ parametrik skaler hızdır.

3.5. Ofset Eğrileri

Ofset eğriler, baz eğrisinin sabit bir mesafeyle ötelenmesi sonucu elde edilen eğrilerdir. Ofset eğriler klasik diferansiyel geometrinin önemli bir konusu olmasının yanı sıra teknoloji, endüstri ve mühendislik için de önemli bir yer tutmaktadır. Bu bölümde, düzlem ofset eğrilerinin elde edilmesine yönelik hesaplamalar sunulmaktadır.



Şekil 3. 4. Düzlem eğrinin teğet ve normal vektörleri (Maekawa & Patrikalakis, 1993)

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ birim hızlı olmayan düzlem eğrisi için $t_1 \leq t \leq t_2$ olmak üzere Serret-Frenet türev formülleri,

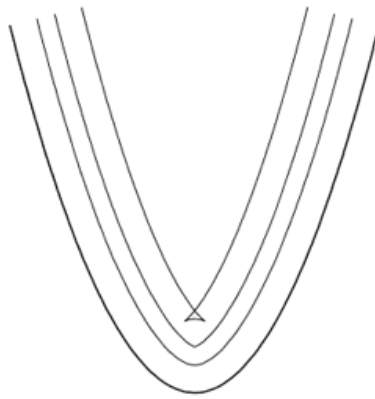
$$\dot{\mathbf{t}} = -v\kappa\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = v\kappa\mathbf{t} \quad (3.18)$$

şekline indirgenir, burada, $v = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$ parametrik hızdır.

Düzlemde ele alınan $\mathbf{r}(t)$ üreteç eğrisinin d ofset mesafesine ötelenmesiyle elde edilen eğri,

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t) \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{\mathbf{r}}(t)$ eğrisine, $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin düzlem ofset eğrisi denir. Şekil 3.6. da $\mathbf{r} = (t, t^2)^T$ parabol eğrisine ait ofset eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 3. 5. $\mathbf{r} = (t, t^2)^T, -2 \leq t \leq 2$ parabol eğrisinin $d = -0.3, -0.5, -0.8$ ofset mesafelerine göre ofset eğrileri (Farouki, 1986).

Ofset eğrisinin birim teğet vektörü ve normal vektörü,

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\dot{\hat{\mathbf{r}}}}{|\dot{\hat{\mathbf{r}}}|} = \frac{1 + \kappa d}{|1 + \kappa d|} \mathbf{t}, \quad (3.20)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{b} = \frac{1 + \kappa d}{|1 + \kappa d|} \cdot \mathbf{t} \times \mathbf{b} = \frac{1 + \kappa d}{|1 + \kappa d|} \cdot \mathbf{n} \quad (3.21)$$

şeklindedir.

$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\hat{\mathbf{r}}}}{|\dot{\hat{\mathbf{r}}}|^3}$ formülü ve (3.16) dan, eğrilik vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{|1 + \kappa d|} \mathbf{b} \text{ ve } \hat{\kappa} = \frac{\kappa}{|1 + \kappa d|}, \quad (3.22)$$

şeklinde olur (Farouki & Neff, 1990).

3.5.1. Tekilliklerin sınıflandırılması

Bu bölümde, ofset eğrilerin kendisiyle kesişme durumları incelenmektedir. Düzgün eğrinin ofset eğrileri üzerinde, düzensiz noktalar ve ofset eğrisinin kendisiyle kesiştiği noktalar gibi iki tür tekillik vardır. Düzensiz noktalar, ayırık noktaları ve sivri uçları içerir. Ofset eğrilerinin kendisiyle kesişimleri, düğümleri ve taknodları (düğüm noktalarının özel hali) kapsar.

$\mathbf{r}(t)$ eğrisi üzerindeki bir P noktasının komşuluğunda $\mathbf{r}(t)$ nin başka bir noktası yoksa, P ye, $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin ayırık noktası denir. Bu nokta, baz eğrisi R yarıçaplı bir çember iken ofset mesafesi $d = -R$ durumunda ortaya çıkar. Ofset eğrisinin sivri uç noktası, eğrinin teğet vektörünün sıfır olduğu, düzgün olmayan bir noktadır. $t = t_r$ deki sivri uçlar, $\dot{\kappa}(t_r) \neq 0$ olduğunda adi sivri uç; $\dot{\kappa}(t_r) = 0$ ve $\ddot{\kappa}(t_r) \neq 0$ olduğunda ise adi olmayan sivri uç olarak belirlenir.

$|\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t)| = 0$ olduğunda eğri üzerinde ayırık nokta ve sivri uç oluşur. (3.23) denklemi kullanılarak,

$$\kappa(t) = -\frac{1}{d} \quad (3.23)$$

bağıntısına indirgenir.

Bir ofset eğrisinin kendisiyle kesişimleri ise farklı parametre değerleri $\sigma \neq t$ çifti için,

$$\mathbf{r}(\sigma) + d\mathbf{n}(\sigma) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t) \quad (3.24)$$

denklemleri ile incelendiğinde çözüm kümesi, ofset eğrinin kendisiyle kesiştiği noktaları verir.

Ofset mesafesinin mutlak değeri, içbükey bölgelerde minimum eğrilik yarıçapını aştığında ofset eğri yerel olarak kendisiyle kesişir. Eğri üzerindeki iki nokta arasındaki mesafe yerel minimum olduğunda ofset eğrisi bu kez küresel olarak kendisiyle kesişir.

Eğrilerin kendisiyle kesişimleri, endüstri ve sanayide kullanılan frezeleme tekniği açısından önemli bir yer tutar. Kendisiyle kesişme durumlarında eğrilerin tüm bileşenlerini doğru bir şekilde tespit etmek ve kırılmış ofset eğrisini oluşturmak, frezeleme için olduğu kadar diğer pratik uygulamalar için de önemlidir. Kesici, kırılmış ofseti takip ederek fazla kesme veya oyuk açma durumlarını engeller bu yüzden de ham maddeden elde edilecek ürün için hata payını düşürmede önemli bir yer tutar.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLER

Paralel eğriler olarak da bilinen ofset eğrileri, üreteç eğrilerinden normal vektör boyunca sabit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak tanımlanır. Ofset eğrilerinin teorik manada özelliklerinin incelenmesine ek olarak pratik uygulamalar için de aktif bir araştırma alanı oluşturduğu bilinmektedir. Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT) alanında ofset eğrileri; tolerans analizi, geometrik optik ve robot yol planlaması gibi çeşitli pratik uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır (Krasauskas & Peternell, 2013.; Shen vd., 2010).

Bazı mühendislik uygulamalarında, standart ofset eğri kavramının genişletilmesine yönelik ihtiyaçlar, araştırmacıları bu eğrilerin genelleştirilmiş halini çalışmaya sevk etmiştir. Bu anlamda da genelleştirilmiş ofset eğrilerinin uygulama alanının bir hayli geniş olduğu görülmektedir. Örneğin İnsansız Hava Araçları (İHA) için çarpışmasız uçuş rotalarının planlanmasında, yine araçların hedef tespit ve güzergah takibinde ele alındığı bilinmektedir (Maekawa & Patrikalakis, 1993). Akıllı robotların hareket alanlarını veya nesneler arasındaki güvenlik mesafelerini belirlemede de kullanılırken bu durumun ev içi konfor ve güvenliğinde önemli bir rol oynadığını söyleyebiliriz (Tseng & Lai, 2019).

NC (Nümerik Kontrol) makineleri, işleme endüstrisindeki önemli araçlardan biri olup ham maddenin doğru bir şekilde işlenmesinde ve montajında gerekli olan frezeleme yollarını belirler. Bu makineler, genellikle 2 veya 3 boyutlu frezeleme için de kullanılmaktadır. Bu süreçte genelleştirilmiş ofset eğrileri, işlemedeki karmaşıklığı kolaylaştırmak ve parça üretimindeki kaliteyi artırmak için önemli bir role sahiptir (Patrikalakis & Maekawa, 2010).

Bunlara ek olarak tolerans bölgelerini belirlemede de işlevseldir. Tolerans bölgesi, parça geometrisindeki kabul edilebilir varyasyonları tanımlarken, genelleştirilmiş ofset eğrileri bu toleransları analiz etmek ve optimize etmek için kullanılmaktadır (Tseng & Lai, 2019).

Lin ve Chen'in (Chen & Lin, 2014) çalışmasında, düzlem eğrileri başta olmak üzere, eğri ve yüzeyler için genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tanımı verilmiş olup, genelleştirilmiş ofset eğriler ile ilgili analitik özellikler ve teoremler sunulmuştur. Biz de bu tez

çalışmamızda Lin ve Chen'den almış olduğumuz motivasyon ile, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilerin tanımını vereceğiz. n. Dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilerinin standart ofset eğrileri cinsinden ifade edilmesinin iki farklı yöntemi sunulacak olup uygulamalar ile desteklenecektir. Aynı zamanda, eğrilerin kesişim durumları, tekilliklerinin hesaplanması gibi konuların, genelleştirilmiş ofset eğriler için tarafımızca incelenişi bu bölümde yer alacaktır.

Yaptığımız çalışmaların temel amacı, bu alandaki araştırma ve uygulamalara katkıda bulunarak ülkemizdeki teknolojik gelişmelere katkı ve fayda sağlamaktır.

4.1. Genelleştirilmiş Ofset Eğriler

Bu bölümde, değişken ofset mesafesi ve yönüne sahip genelleştirilmiş ofset eğrileri incelenmiş olup, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tanımı tarafımızca verilmiştir. Bu eğrilere ait özel durumlar için uygulamalar yapılmıştır.

4.1.1. Genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tanımı

Tanım 4.1.1. Bir düzlem düzgün $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ parametrik eğrisi için $t \in [0, 1]$ olmak üzere değişken ofset mesafesi ve yönü ile $\mathbf{r}_0(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi:

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t)\mathbf{t} + d_2(t)\mathbf{n} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır, burada d_1 ve d_2 , t ye bağlı fonksiyonlar olup ofset yönü $d_1(t)\mathbf{t}$ ve $d_2(t)\mathbf{n}$ ve ofset mesafesinin de $\sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)}$ olduğu açıktır.

$\mathbf{r}_0(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin parametrik türevleri:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= \mathbf{r}' + d'_1\mathbf{t} + d_1\mathbf{t}' + d'_2\mathbf{n} + d_2\mathbf{n}' \\ &= |\mathbf{r}'|\mathbf{t} + d'_1\mathbf{t} + d_1(-\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} + d'_2\mathbf{n} + d_2(\kappa|\mathbf{r}'|\mathbf{t}) \\ &= (|\mathbf{r}'| + d'_1 + d_2\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{t} + (d'_2 - d_1\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Burada $\alpha = |\mathbf{r}'| + d'_1 + d_2\kappa|\mathbf{r}'|$ ve $\beta = d'_2 - d_1\kappa|\mathbf{r}'|$ kabul edilirse,

$$\mathbf{r}'_0 = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''_0 &= \alpha'\mathbf{t} + \alpha\mathbf{t}' + \beta'\mathbf{n} + \beta\mathbf{n}' \\ &= \alpha'\mathbf{t} + \alpha(-\kappa|\mathbf{r}'|\mathbf{n}) + \beta'\mathbf{n} + \beta(\kappa|\mathbf{r}'|\mathbf{t}) \\ &= (\alpha' + \beta\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{t} + (\beta' - \alpha\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olmak üzere, birim teğet vektörü, birim normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t}_0 = \frac{\mathbf{r}'_0}{|\mathbf{r}'_0|} = \frac{\alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \times \mathbf{b} = \frac{\alpha(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{n} \times \mathbf{b})}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha \mathbf{n} - \beta \mathbf{t}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (4.5)$$

$$\kappa_0 = \frac{(\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0) \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{r}'_0|^3} = \frac{(\alpha' \beta - \alpha \beta') + (\alpha^2 + \beta^2) \kappa |\mathbf{r}'|}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir.

4.1.2. n. Dereceden genelleştirilmiş ofset eğri tanımı

Bu kısımda, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tanımı tarafımızdan verilmiş olup bunlar ile ilgili bazı uygulamalar yapılmıştır.

$\mathbf{r}_0(t)$ baz eğrisi için genelleştirilmiş ofset eğrisi denklemi (4.1) den,

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_0(t) + d_3(t) \mathbf{t}_0 + d_4(t) \mathbf{n}_0$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{n}_1$ değerleri $\alpha_1 = (|\mathbf{r}'_0| + d'_3 + d_4 \kappa_0 |\mathbf{r}'_0|)$ ve $\beta_1 = (d'_4 - d_3 \kappa_0 |\mathbf{r}'_0|)$ olmak üzere sırasıyla,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\alpha_1 \mathbf{t}_0 + \beta_1 \mathbf{n}_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\alpha_1 \mathbf{n}_0 - \beta_1 \mathbf{t}_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$$

dir.

$\mathbf{r}_1(t)$ baz eğrisi için genelleştirilmiş ofset eğrisi denklemi (4.1) den,

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + d_5(t) \mathbf{t}_1 + d_6(t) \mathbf{n}_1$$

olur ve $\alpha_2 = (|\mathbf{r}'_1| + d'_5 + d_6 \kappa_1 |\mathbf{r}'_1|)$ ve $\beta_2 = (d'_6 - d_5 \kappa_1 |\mathbf{r}'_1|)$ olmak üzere,

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\alpha_2 \mathbf{t}_1 + \beta_2 \mathbf{n}_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\alpha_2 \mathbf{n}_1 - \beta_2 \mathbf{t}_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$$

dir.

Benzer şekilde hesaplamalar n. adıma kadar yapılırsa, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi,

$$\mathbf{r}_n(t) = \mathbf{r}_{n-1}(t) + d_{2n+1}(t)\mathbf{t}_{n-1} + d_{2n+2}(t)\mathbf{n}_{n-1} \quad (4.7)$$

olarak ifade edilir, α_n ve β_n sırasıyla,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (|\mathbf{r}'_{n-1}| + d'_{2n+1} + d_{2n+2}\kappa_{n-1}|\mathbf{r}'_{n-1}|), \\ \beta_n &= (d'_{2n+2} - d_{2n+1}\kappa_{n-1}|\mathbf{r}'_{n-1}|) \end{aligned} \quad (4.8)$$

olmak üzere, $\mathbf{t}_n$ ve $\mathbf{n}_n$ değerleri

$$\mathbf{t}_n = \frac{\alpha_n \mathbf{t}_{(n-1)} + \beta_n \mathbf{n}_{(n-1)}}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}, \quad \mathbf{n}_n = \frac{\alpha_n \mathbf{n}_{(n-1)} - \beta_n \mathbf{t}_{(n-1)}}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \quad (4.9)$$

şeklindedir.

4.1.3. Genelleştirilmiş ofset eğrisi uygulamaları

Bu bölümde çember, elips, parabol ve sikloid eğrilerinin farklı derecelerden genelleştirilmiş ofset eğrileri ifade edilecektir. Bu eğrilere ait α ve β değerleri hesaplanıp, grafikleri verilecektir. Ayrıca Örnek 4.1.'de çember eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisine ait $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0$ vektörleri hem Serret-Frenet formüllerinden hem de (4.4) ve (4.5) den hesaplanarak karşılaştırması yapılacaktır.

Örnek 4.1. Çember

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ birim hızlı çember eğrisi için, Serret-Frenet türev formüllerinden teğet, normal ve binormal vektörleri sırasıyla,

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \mathbf{t}' = \mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t, 0) \text{ ve } \mathbf{b} = (0, 0, 1)$$

dir. (4.4) denkleminde çemberin genelleştirilmiş ofset eğrisi, d_1 ve d_2 keyfi olmak üzere,

$$\mathbf{r}_0(t) = (\cos t, \sin t, 0) + d_1(-\sin t, \cos t, 0) + d_2(\cos t, \sin t, 0)$$

şeklinde elde edilir. Burada $d_1 = 1$ ve $d_2 = -1$ seçilirse, genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi

$$\mathbf{r}_0(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

olup, elde edilen bu eğrinin, $\mathbf{t}_0$ ve $\mathbf{n}_0$ vektörleri Serret-Frenet formüllerinden,

$$\mathbf{t}_0 = (-\cos t, -\sin t, 0) \text{ ve } \mathbf{n}_0 = (-\sin t, \cos t, 0)$$

bulunur.

Diğer taraftan, çemberin genelleştirilmiş ofset eğrisinin $\mathbf{t}_0$ ve $\mathbf{n}_0$ vektörleri için

$$\alpha = 1 + d'_1 + d_2, \beta = d'_2 - d_1$$

olur ve birim hızlı bir eğri olduğu için $\kappa = \|\mathbf{t}'\| = 1$ dir.

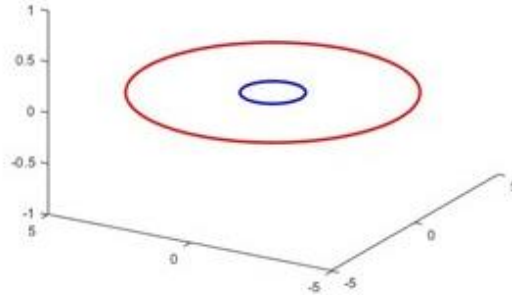
$d_1 = 1$ ve $d_2 = -1$ için, $\alpha = 0$ ve $\beta = -1$ olarak hesaplanır. (4.4) ve (4.5) denklemlerinden,

$$\mathbf{t}_0 = (-\cos t, -\sin t, 0) \text{ ve } \mathbf{n}_0 = (-\sin t, \cos t, 0)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, Örnek 4.1.'de iki farklı yöntem kullanılarak hesaplanan $\mathbf{t}_0$ ve $\mathbf{n}_0$ vektörlerinin aynı olduğu görülmüştür.

Çember eğrisi için, keyfi ofset mesafeleri yukarıdaki değerlerden farklı olarak, $d_1 = 2$ ve $d_2 = 3$ alındığında çember eğrisine ve çember eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisine ait grafik, Şekil 4.1'deki gibidir:



Şekil 4. 1. Çember eğrisi (mavi) ve çember eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı)

Çember eğrisinin 2. ve 3. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrileri aşağıda gösterilmiştir:

Çember eğrisi için keyfi ofset mesafeleri $d_1 = 2$ ve $d_2 = 3$ seçildiğinde genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi,

$$\mathbf{r}_0 = (4\cos t - 2\sin t, 4\sin t + 2\cos t)$$

şeklindedir. $\mathbf{r}_0(t)$ eğrisi için teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t}_0 = \frac{(-2\sin t - \cos t, 2\cos t - \sin t)}{\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{n}_0 = \frac{(2\cos t - \sin t, 2\sin t + \cos t)}{\sqrt{5}},$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

dır. Bunlar (4.7) denkleminde yerine yazılır ve $d_3 = 3\sqrt{5}$ ve $d_4 = -2\sqrt{5}$ olarak seçilirse 2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_1 = (-8\sin t - 4\cos t, 8\cos t - 4\sin t)$$

elde edilir. $\mathbf{r}_1(t)$ eğrisine ait α_1 ve β_1 değerleri ise,

$$\alpha_1 = 2\sqrt{5} - 1 \text{ ve } \beta_1 = -4\sqrt{5}$$

olarak hesaplanır ve $\mathbf{r}_1(t)$ eğrisi için teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{(-2\cos t + \sin t, -2\sin t - \cos t)}{\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{(-2\sin t - \cos t, 2\cos t - \sin t)}{\sqrt{5}},$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{80}$$

dir. Bu değerler (4.7) denkleminde kullanılıp, $d_5 = 5\sqrt{5}$ ve $d_6 = -4\sqrt{5}$ olarak seçilirse çember eğrisinin 3. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_2 = (5\sin t - 10\cos t, -5\cos t - 10\sin t)$$

olarak hesaplanır. $\mathbf{r}_2(t)$ eğrisine ait α_2 ve β_2 değerleri ise,

$$\alpha_2 = 4\sqrt{5} - 1,$$

$$\beta_2 = -\frac{5}{4}$$

dir ve bu eğrinin teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu,

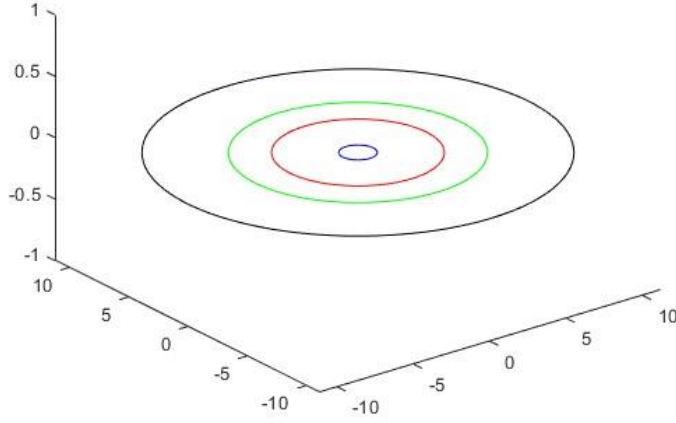
$$\mathbf{t}_2 = \frac{(\cos t + 2\sin t, \sin t - 2\cos t)}{\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{(\sin t - 2\cos t, -\cos t - 2\sin t)}{\sqrt{5}},$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{125}$$

şeklindedir.

Çember eğrisine ve çember eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrilerine ait grafik Şekil 4.2 deki gibidir:



Şekil 4. 2. Çember eğrisine ait baz eğrisi (mavi), genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), 2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (yeşil) ve 3. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (siyah)

Örnek 4.2. Elips

$I = \{t | 0 \leq t \leq 2\pi\}$ olmak üzere elips eğrisi,

$$\mathbf{r}: I \rightarrow E^2$$

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

şeklinde tanımlanır. $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ olduğundan birim hızlı olmayan elips eğrisi için teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-asint, bcost, 0),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (bcost, asint, 0),$$

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur.

Elde edilen bu değerler (4.1) denkleminde yerine yazılırsa, elips eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) = (acost, bsint) &+ \frac{d_1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-asint, bcost) \\ &+ \frac{d_2}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (bcost, asint) \end{aligned}$$

şeklinde olur.

α ve β değerleri ise

$$\alpha = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + d'_1 + d_2 \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$\beta = d'_2 - d_1 \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

dir. $a = 3, b = 3, d_1 = 2$ ve $d_2 = 2$ olarak seçildiğinde elips eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_0(t) = (5cost - 2sint, 5sint + 2cost)$$

olarak bulunur. Birim hızlı olmayan $\mathbf{r}_0(t)$ eğrisi için teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t}_0 = \frac{(-5sint - 2cost, 5cost - 2sint)}{\sqrt{29}},$$

$$\mathbf{n}_0 = \frac{(5cos - 2sin, 5sin + 2cos)}{\sqrt{29}},$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

şeklinde gelir. $d_3 = 2\sqrt{29}$ ve $d_4 = -2\sqrt{29}$ olarak seçilip (4.7) denklemi tekrar yazılırsa elips eğrisinin 2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi,

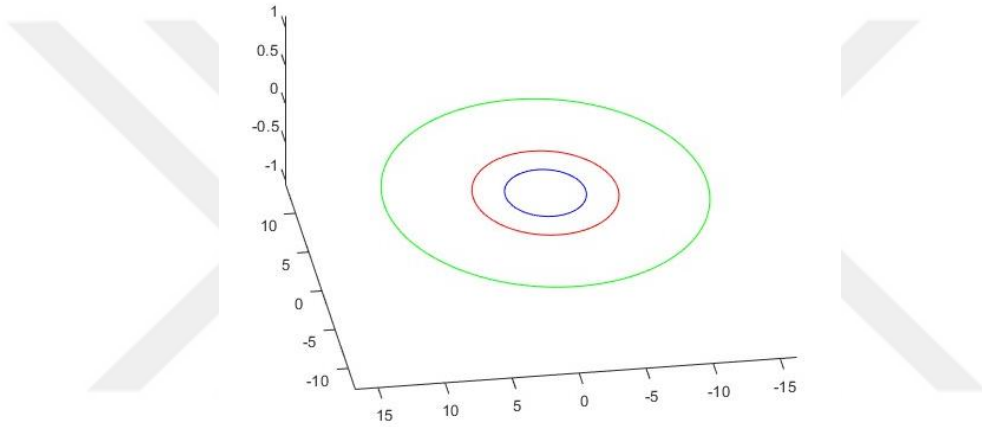
$$\mathbf{r}_1(t) = (-9\cos t - 8\sin t, -9\sin t + 8\cos t)$$

elde edilir. (4.8) ve (4.9) denklemlerinden α_1 ve β_1 değerleri,

$$\alpha_1 = -\sqrt{29} \text{ ve } \beta_1 = -2\sqrt{29}$$

olarak hesaplanır.

Elips eğrisine ve elips eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrilerine ait grafik Şekil 4.3 de verilmiştir:



Şekil 4. 3. Elips eğrisine ait baz eğrisi (mavi), genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı) ve

2. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi (yeşil)

Örnek 4.3. Parabol

Parabol eğrisi, $I = \{t \mid -2 \leq t \leq 2\}$ olmak üzere,

$$\mathbf{r}: I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (at, bt^2, 0)$$

şeklinde ifade edilir. $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}$ olduğundan, parabol eğrisine ait teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}}(a, 2bt, 0),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} (2bt, -a, 0),$$

$$\kappa = \frac{2ab}{(a^2 + 4b^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur. (4.1) denkleminde parabol eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi,

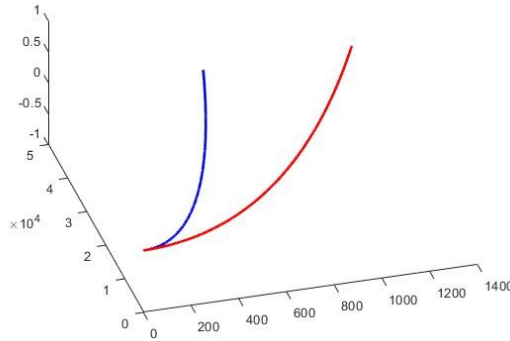
$$\mathbf{r}_0(t) = (at, bt^2, 0) + \frac{d_1}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} (a, 2bt, 0) + \frac{d_2}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} (2bt, -a, 0)$$

şeklinde hesaplanır. α ve β değerleri ise,

$$\alpha = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2} + d'_1 + d_2 \cdot \frac{2ab}{a^2 + 4b^2t^2},$$

$$\beta = d'_2 - d_1 \frac{2ab}{a^2 + 4b^2t^2}$$

olur. $a = 5, b = 3$ ve $d_1 = d_2 = \sqrt{25 + 36t^2}$ olarak seçildiğinde, parabol eğrisi ve parabol eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisine ait grafik Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4. 4. Parabol eğrisi(mavi) ve parabol eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı)

Örnek 4.4. Sikloid

Sikloid eğrisi, $I = R$ olmak üzere,

$$\mathbf{r}: I \rightarrow E^2$$

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (at - asint, a - acost, 0)$$

biçimde verilir. $|\mathbf{r}'(t)| = a\sqrt{2-2\cos t}$ olduğundan sikloid eğrisine ait teğet vektörü, normal vektörü ve eğrilik fonksiyonu sırasıyla,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos t}}(1 - \cos t, \sin t, 0),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos t}}(\sin t, \cos t - 1, 0),$$

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}a\sqrt{(1 - \cos t)}}$$

dır. (4.1) denkleminde sikloid eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi,

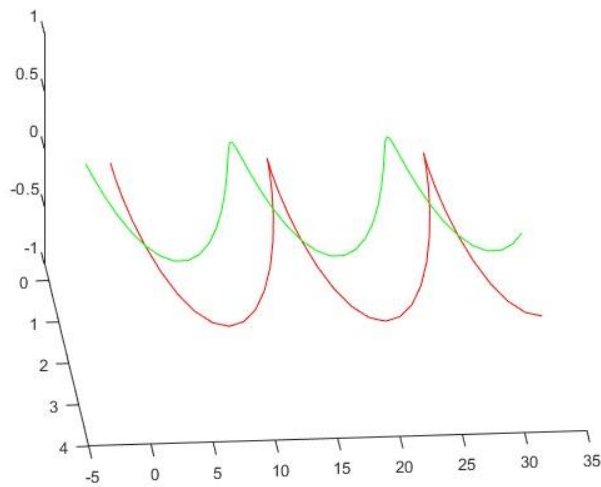
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) = & (at - a\sin t, a - a\cos t, 0) + d_1 \frac{1}{\sqrt{2-2\cos t}}(1 - \cos t, \sin t, 0) \\ & + d_2 \frac{1}{\sqrt{2-2\cos t}}(\sin t, \cos t - 1, 0) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. α ve β değerleri sırasıyla,

$$\alpha = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} + d_1' + \frac{d_2}{2},$$

$$\beta = d_2 - \frac{d_1}{2}$$

olur. Bunlara ek olarak, $a = 2$ ve $d_1 = d_2 = \sqrt{2-2\cos(t)}$ olarak seçildiğinde bu eğriye ve onun genelleştirilmiş ofset eğrisine ait grafik ise Şekil 4.5 de verilmiştir.



Şekil 4. 5. Sikloid eğrisi (yeşil) ve sikloid eğrisinin ofset eğrisi (kırmızı)

4.2. Eğrilerin Kesişim Durumları

Bu bölümde, ilk olarak bir düzlem eğrinin ofset eğrisinin ve genelleştirilmiş ofset eğrisinin kendisiyle kesişimleri incelenmiş olup ardından farklı iki düzlem eğrinin ofset eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kendisiyle kesişimleri analiz edilmiştir.

4.2.1. Düzlem eğrinin ofset eğrisinin kendisiyle kesişimi

Binormal vektörü $\mathbf{b} = (0,0,1)$ olan $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ düzlem eğrisi için, σ ve t parametrelerini seçerek kendisiyle kesişim durumu (3.24) denkleminde,

$$\mathbf{r}(\sigma) + d\mathbf{n}(\sigma) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t)$$

dir. Seçilen parametreler $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ eğrisinde yerine yazılıp, $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ denklemi kullanılırsa,

$$(x(\sigma), y(\sigma)) + d \frac{(\dot{y}(\sigma), -\dot{x}(\sigma))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} = (x(t), y(t)) + d \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$$

bağıntısı gelir ve

$$\begin{aligned} x(\sigma) + \frac{d\dot{y}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} &= x(t) + \frac{d\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \\ y(\sigma) - \frac{d\dot{x}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} &= y(t) - \frac{d\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitlik sistemi elde edilir.

4.2.2. Düzlem eğrinin genelleştirilmiş ofset eğrisinin kendisiyle kesişimi

Düzlem eğrinin ofset eğrisinin kendisiyle kesişim durumuna benzer şekilde genelleştirilmiş ofset eğrisinin de kendisiyle kesişim durumu incelenecektir.

Binormal $\mathbf{b} = (0,0,1)$ olan $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ düzlem eğrinin genelleştirilmiş ofseti için, σ ve t parametrelerini seçilip, (4.1) denkleminde kullanılırsa,

$$\mathbf{r}(\sigma) + d_1\mathbf{n}(\sigma) + d_2\mathbf{t}(\sigma) = \mathbf{r}(t) + d_1\mathbf{n}(t) + d_2\mathbf{t}(t)$$

eşitliği ve $\mathbf{n} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})^T}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ ve $\mathbf{t} = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (x(\sigma), y(\sigma)) + d_1 \frac{(\dot{y}(\sigma), -\dot{x}(\sigma))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} + d_2 \frac{(\dot{x}(\sigma), \dot{y}(\sigma))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} \\ = (x(t), y(t)) + d_1 \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} + d_2 \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Diğer bir deyişle, düzlemsel eğrinin genelleştirilmiş ofsetinin kendisiyle kesişimlerinin yeri,

$$\begin{aligned} x(\sigma) + \frac{d_1 \dot{y}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} + \frac{d_2 \dot{x}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} \\ = x(t) + \frac{d_1 \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} + \frac{d_2 \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve

$$\begin{aligned} y(\sigma) - \frac{d_1 \dot{x}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} + \frac{d_2 \dot{y}(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} \\ = y(t) - \frac{d_1 \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} + \frac{d_2 \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak belirlenir.

4.2.3. Farklı iki düzlem eğrinin ofset eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kendisiyle kesişimi

Bu kısımda ise iki farklı $\mathbf{r}^A(\sigma)$ ve $\mathbf{r}^B(t)$ düzlem eğrilerinin ofset eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kesişim durumları sırasıyla irdelenecektir:

$\mathbf{r}^A(\sigma)$ ve $\mathbf{r}^B(t)$ eğrileri normal vektör yönünde d ofset mesafesine ötelenmiş ofset eğrilerinin kesişimlerinin yeri,

$$x^A(\sigma) + \frac{d \dot{y}^A(\sigma)}{\sqrt{(\dot{x}^A)^2(\sigma) + (\dot{y}^A)^2(\sigma)}} = x^B(t) + \frac{d \dot{y}^B(t)}{\sqrt{(\dot{x}^B)^2(t) + (\dot{y}^B)^2(t)}}, \quad (4.13)$$

$$y^A(\sigma) - \frac{d\dot{x}^A(\sigma)}{\sqrt{(\dot{x}^A)^2(\sigma) + (\dot{y}^A)^2(\sigma)}} = y^B(t) - \frac{d\dot{x}^B(t)}{\sqrt{(\dot{x}^B)^2(t) + (\dot{y}^B)^2(t)}} \quad (4.14)$$

şeklindedir.

$\mathbf{r}^A(\sigma)$ ve $\mathbf{r}^B(t)$ eğrilerinin hem normal vektör hem de teğet vektör yönünde genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kesişimleri tarafımızca incelenmiş olup, bu denklem sistemleri,

$$\begin{aligned} & x^A(\sigma) + \frac{d_1 \dot{y}^A(\sigma)}{\sqrt{(\dot{x}^A)^2(\sigma) + (\dot{y}^A)^2(\sigma)}} + \frac{d_2 \dot{x}^A(\sigma)}{\sqrt{(\dot{x}^A)^2(\sigma) + (\dot{y}^A)^2(\sigma)}} \\ &= x^B(t) + \frac{d_1 \dot{y}^B(t)}{\sqrt{(\dot{x}^B)^2(t) + (\dot{y}^B)^2(t)}} + \frac{d_2 \dot{x}^B(t)}{\sqrt{(\dot{x}^B)^2(t) + (\dot{y}^B)^2(t)}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & y^A(\sigma) - \frac{d_1 \dot{x}^A(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} + \frac{d_2 \dot{y}^A(\sigma)}{\sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}} \\ &= y^B(t) - \frac{d_1 \dot{x}^B(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} + \frac{d_2 \dot{y}^B(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak hesaplanmıştır.

4.3. Tekilliklerin Hesaplanması

Bu kısımda, düzlem eğrilerinin tekilliklerinin hesabı ve ara işlemler sunulmuştur. Genelleştirilmiş ofset eğrisi için tekilliklerinin hesaplanması tarafımızca verilmiştir.

4.3.1. Düzlem eğrilerin tekilliklerinin hesaplanması

Binormal vektörü $\mathbf{b} = (0,0,1)^T$ olan $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ düzlem eğrisi için

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \text{ ve } \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$$

şeklindedir. (3.10) dan,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) \times (\ddot{x}, \ddot{y}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \quad (4.17)$$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.19)$$

olarak hesaplanır. Maksimum ofset mesafesi şartı göz önünde bulundurularak, (4.19) ve (3.23) eşitlenirse

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{d},$$

$$d[\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y] = -[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}},$$

$$d[\ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y}] - \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] = 0 \quad (4.20)$$

sonucu elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi $r(t)$ polinom eğrisine ait düzensiz noktaların yerini verir (Patrikalakis & Maekawa, 2010).

4.3.2 Genelleştirilmiş ofset eğrisi için tekilliklerinin hesaplanması

Düzlem eğrilere ait tekil nokta hesaplamalarından yola çıkarak, genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tekil nokta hesapları tarafımızca yapılmıştır.

Genelleştirilmiş ofset eğrileri için eğrilik denklemi (4.6) dan

$$\kappa_0 = \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta') + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \kappa \cdot |\mathbf{r}'|}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dır. $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ için κ_0 tanımsızdır. Bu sebeple $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ için ayrı ayrı durum incelemeleri yapılacaktır:

1) $\alpha = 0$ için:

(4.8) denkleminde $\alpha = |\mathbf{r}'| + d'_1 + d_2\kappa|\mathbf{r}'|$ dır. O halde

$$d_2\kappa|\mathbf{r}'| = -|\mathbf{r}'| - d'_1,$$

$$\kappa = \frac{-|\mathbf{r}'| - d'_1}{d_2|\mathbf{r}'|},$$

$$\kappa = -\frac{1}{d_2} \left[1 + \frac{d'_1}{|\mathbf{r}'|} \right]$$

ve (4.19) denklemindeki κ değeri ile α yı tanımsız yapan değer eşitlenirse,

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{d_2} \left[1 + \frac{d'_1}{|\mathbf{r}'|} \right]$$

olup, (4.18) den,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{1}{d_2} \left[1 + \frac{d'_1}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \\ -d_2[\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}] &= [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}} + d_1[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] \\ [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}} + d_1[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] + d_2[\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir.

2) $\beta = 0$ için:

$\alpha = 0$ olma durumuna benzer şekilde, (4.2) denkleminde,

$$\beta = d'_2 - d_1\kappa|\mathbf{r}'| = 0,$$

$$d_1\kappa|\mathbf{r}'| = d'_2,$$

$$\kappa = \frac{1}{d_1} \left[\frac{d'_2}{|\mathbf{r}'|} \right]$$

olup, (4.19) denklemindeki κ değeri ile eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{1}{d_2} \left[\frac{d'_2}{|\mathbf{r}'|} \right] \\ d_1[\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}] &= d'_2[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] \\ d_1[\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}] - d'_2[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

denklemini elde edilir.

4.4. Ofset Eğrilerin Standart Ofset Eğrisi Cinsinden İfadesi

Bu bölümde genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden iki farklı gösterimine yer verilecek olup ayrıca önerme ile desteklenecektir. Aynı zamanda bu yapılanlar tarafımızca, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisine uyarlanmış olup Kısım 4.4.2 de sunulacaktır.

4.4.1. Genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{t} + d_2 \mathbf{n}$$

olup, $A\mathbf{t} + B\mathbf{n}$ eklenip çıkarılırsa, A ve B , t ye bağlı birer fonksiyon olmak üzere,

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{r} + A\mathbf{t} + B\mathbf{n}) + (d_1 - A)\mathbf{t} + (d_2 - B)\mathbf{n}$$

elde edilir.

$$\mathbf{r} + A\mathbf{t} + B\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 ,$$

$$(d_1 - A)\mathbf{t} + (d_2 - B)\mathbf{n} = d\mathbf{n}_1 \quad (4.23)$$

şeklinde kabul edilirse ve $\mathbf{r}_1$ yeni bir düzgün parametrik düzlem eğri, d sabit ve $\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1$ in birim normal vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{r}_0 \triangleq \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1 , \quad (4.24)$$

$$d = \sqrt{(d_1 - A)^2 + (d_2 - B)^2} ,$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_1 - A}{d} \mathbf{t} + \frac{d_2 - B}{d} \mathbf{n}$$

olur.

(4.24) deki $\mathbf{r}_1$ eğrisinin birinci mertebeden türevi alındığında,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}' + A'\mathbf{t} + A\mathbf{t}' + B'\mathbf{n} + B\mathbf{n}' \\ &= (|\mathbf{r}'| + A' + B\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{t} + (B' - A\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden yazılabilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir:

i) $\langle d\mathbf{n}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle = 0$ olmalıdır yani

$$(d_1 - A)(|\mathbf{r}'| + A' + B\kappa|\mathbf{r}'|) + (d_2 - B)(B' - A\kappa|\mathbf{r}'|) = 0 \quad \text{dir.} \quad (4.26)$$

ii) $(d_1 - A)^2 + (d_2 - B)^2$ sabit, yani $d' = 0$ olmalıdır.

$(d_1 - A)^2 + (d_2 - B)^2$ ifadesinin birinci mertebeden türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$2[(d_1 - A)(d'_1 - A') + (d_2 - B)(d'_2 - B')] = 0 \quad (4.27)$$

olur, (4.26) ve (4.27) denklemlerinin sıfıra eşit olma durumundan,

$$(d_1 - A)(|r'| + A' + B\kappa|r'|) + (d_2 - B)(B' - A\kappa|r'|) + 2[(d_1 - A)(d'_1 - A') + (d_2 - B)(d'_2 - B')] = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$A(|r'| + d_2\kappa|r'| + d'_1) = B(d_1\kappa|r'| - d'_2) + (d_1|r'| + d_1d'_1 + d_2d'_2) \quad (4.28)$$

eşitliği sağlanmış olur.

(4.2) bağıntısından, $\alpha = |r'| + d'_1 + d_2\kappa|r'|$ değeri d_1 ile, $\beta = d'_2 - d_1\kappa|r'|$ değeri ise d_2 ile genişletilip toplanırsa,

$$\alpha d_1 + \beta d_2 = d_1|r'| + d_1d'_1 + d_2d'_2 \quad (4.29)$$

olup (4.28) denklemindeki $(d_1|r'| + d_1d'_1 + d_2d'_2)$ ifadesiyle $(\alpha d_1 + \beta d_2)$ ifadesinin eşit olduğu görülür. Bu durumda (4.28) denklemi,

$$\alpha A = -\beta B + \alpha d_1 + \beta d_2$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak,

$$\alpha(d_1 - A) + \beta(d_2 - B) = 0 \quad (4.30)$$

eşitliğine ulaşılır.

(4.30) denkleminde yer alan A ve B değerlerine ilişkin dört farklı durum analizi mevcuttur:

1) $\alpha = \beta = 0$:

$\alpha = \beta = 0$ değerleri için (4.26) ve (4.27) den,

$$(d_1 - A)^2 + (d_2 - B)^2 = C_1 \quad (4.31)$$

yazılır, burada $C_1 > 0$ keyfi bir sabittir. A ve B den biri keyfi olarak seçilirse yani

$A = g(t)$ için,

$$\begin{aligned}
(d_1 - g(t))^2 + (d_2 - B)^2 &= C_1, \\
(d_2 - B) &= \pm \sqrt{C_1 - (d_1 - g(t))^2}, \\
B &= d_2 \pm \sqrt{C_1 - (d_1 - g(t))^2}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir.

2) $\alpha \neq 0$ ve $\beta = 0$:

(4.33) denkleminde $\beta = 0$ olduğundan,

$$\alpha(d_1 - A) = 0$$

gelir, $\alpha \neq 0$ kabulünden $(d_1 - A) = 0$ dır, yani $d_1 = A$ ve $d'_1 = A'$ olur. (4.27) denkleminde,

$$(d_2 - B)(d'_2 - B') = 0$$

elde edilir, burada $(d_2 - B) \neq 0$ olduğundan,

$$(d'_2 - B') = 0$$

gelir, yani $d'_2 = B'$ olur. Bu durumda,

$$B = d_2(t) + C_2 \tag{4.33}$$

elde edilir, burada C_2 sıfırdan farklı keyfî bir sabittir.

3) $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$:

Durum (2) ye benzer şekilde, (4.30) denkleminde,

$$\beta(d_2 - B) = 0$$

olur, buradan da $d_2 = B$ ve $d'_2 = B'$ durumu elde edilir ve bunlar (4.27) denkleminde yerlerine koyulursa,

$$(d_1 - A)(d'_1 - A') = 0$$

eşitliğine ulaşılır, $(d_1 - A) \neq 0$ olduğundan $(d'_1 - A') = 0$ ve $d'_1 = A'$ dır.

Sonuç olarak,

$$A = d_1(t) + C_3 \tag{4.34}$$

elde edilir ve C_3 sıfırdan farklı keyfi bir sabittir.

4) $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$:

(4.33) denkleminde A değeri çekilecek olursa:

$$(d_1 - A) = -\frac{\beta}{\alpha}(d_2 - B)$$

olur ve bu değer (4.31) de yerine koyulursa,

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}(d_2 - B)^2 + (d_2 - B)^2 = C ,$$

$$(d_2 - B)^2(\alpha^2 + \beta^2) = C\alpha^2 ,$$

$$|d_2 - B| = \frac{C\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

elde edilir. Buradan da C sabit olmak üzere, B değeri:

$$B = d_2 \pm \frac{C\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (4.35)$$

şeklinde hesaplanır. A değerini hesaplamak için, (4.30) denkleminde $(d_2 - B)$ değeri çekilirse,

$$(d_2 - B) = -\frac{\alpha}{\beta}(d_1 - A)$$

olur. (4.31) denkleminde,

$$(d_1 - A)^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(d_1 - A)^2 = C ,$$

$$(d_1 - A)^2 = \frac{C\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} ,$$

$$|d_1 - A| = \frac{C\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

elde edilir, buradan da A değeri,

$$A = d_1 \pm \frac{C\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (4.36)$$

olarak hesaplanır.

Yukarıda ele alınan durumlar neticesinde, A ve B değerleri için $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{t} + d_2 \mathbf{n}$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1$ standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + A \mathbf{t} + B \mathbf{n}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \left(d_1 - \frac{\beta C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{t} + \left(d_2 + \frac{\alpha C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{n}, \quad (4.38)$$

$$d = \sqrt{(d_1 - A)^2 + (d_2 - B)^2} = |C|, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \mathbf{t} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \mathbf{n} \quad (4.40)$$

şeklindedir, burada $\mathbf{r}_1$ yeni bir düzgün parametrik düzlem eğrisi, d sabit ve $\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1$ in birim normal vektörüdür; ayrıca d_1, d_2, A ve B ise t ye bağlı fonksiyonlardır.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesine ait farklı bir gösterim ise aşağıda incelenecektir:

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1$ standart ofset eğrisi için $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{n}_1$ değerleri sırayla

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + A \mathbf{t} + B \mathbf{n}$$

ve

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_1 - A}{d} \mathbf{t} + \frac{d_2 - B}{d} \mathbf{n} \quad (4.41)$$

şeklinde olup $\mathbf{r}_1$ eğrisinin türevi alınırsa,

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' + A' \mathbf{t} + A \mathbf{t}' + B' \mathbf{n} + B \mathbf{n}'$$

elde edilir. $\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'| \mathbf{t}$, $\mathbf{t}' = -\kappa |\mathbf{r}'| \mathbf{n}$ ve $\mathbf{n}' = \kappa |\mathbf{r}'| \mathbf{t}$ olduğundan,

$$\mathbf{r}'_1 = |\mathbf{r}'| \mathbf{t} + A' \mathbf{t} - \kappa |\mathbf{r}'| \mathbf{n} A + B' \mathbf{n} + \kappa |\mathbf{r}'| \mathbf{t} B$$

$$\mathbf{r}'_1 = (|\mathbf{r}'| + A' - A \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{t} + (B' + B \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n}$$

şeklinde olup $\lambda = |\mathbf{r}'| + A' - A \kappa |\mathbf{r}'|$ ve $\omega = B' + B \kappa |\mathbf{r}'|$ olarak seçildiğinde,

$$\mathbf{r}'_1 = \lambda \mathbf{t} + \omega \mathbf{n} \quad (4.42)$$

olarak yazılır.

Sonuç olarak $\mathbf{r}_1$ eğrisinin Serret-Frenet elemanları:

$$\kappa_1 = \frac{(\lambda'\omega - \lambda\omega') + (\lambda^2 + \omega^2)\kappa|\mathbf{r}'|}{(\lambda^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_1'}{|\mathbf{r}_1'|} = \frac{\lambda\mathbf{t} + \omega\mathbf{n}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\lambda\mathbf{n} - \omega\mathbf{t}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \quad (4.45)$$

bağıntılarıyla verilir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi denklemi (4.24) ün birinci mertebeden türevi $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'_1 + d\mathbf{n}'_1$ dir. $\mathbf{n}' = \kappa|\mathbf{r}'|\mathbf{t}$ olduğundan $\mathbf{n}'_1 = \kappa|\mathbf{r}'_1|\mathbf{t}_1$ ve $|\mathbf{r}'_1| = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}$ den $\mathbf{r}'_0$ denklemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}\mathbf{t}_1 + d\kappa_1\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}\mathbf{t}_1 \\ \mathbf{r}'_0 &= (1 + d\kappa_1)\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}\mathbf{t}_1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

olarak yazılır. Genelleştirilmiş ofset eğrisinin κ_0 eğrilik fonksiyonunun standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi (3.40) dan,

$$\kappa_0 = \frac{1}{|1 + d\kappa_1|} \kappa_1 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{t}_0|\mathbf{r}'_0| = \mathbf{t}_0\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}$$

olur.

$\mathbf{t}_0$ ve $\mathbf{n}_0$ vektörlerine ilişkin bağıntılar ise aşağıdaki gibidir:

$$\sqrt{\lambda^2 + \omega^2} \mathbf{t}_0 = (1 + d\kappa_1)\sqrt{\lambda^2 + \omega^2} \mathbf{t}_1$$

olduğundan,

$$\mathbf{t}_0 = (1 + d\kappa_1)\mathbf{t}_1$$

elde edilir. Ayrıca yönden dolayı,

$$\mathbf{t}_0 = \text{sgn}(1 + d\kappa_1)\mathbf{t}_1 \quad (4.48)$$

yazılır. Benzer şekilde normal vektörü için,

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \times \mathbf{b}$$

olur, (4.48) denkleminde,

$$\mathbf{n}_0 = \text{sgn}(1 + d\kappa_1)\mathbf{t}_1 \times \mathbf{b}$$

elde edilir, $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{b} = \mathbf{n}_1$ den,

$$\mathbf{n}_0 = \text{sgn}(1 + d\kappa_1)\mathbf{n}_1 \quad (4.49)$$

şeklinde verilir.

Bu denklemlerde κ_0 ve κ_1 sırayla $\mathbf{r}_0$ ve $\mathbf{r}_1$ eğrilerinin eğrilik fonksiyonlarıdır. $\mathbf{r}_0$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin tekil noktası $\mathbf{r}(t_0)$,

$$|\mathbf{r}_0'| = |1 + d\kappa_1||\mathbf{r}_1'| = |1 + d\kappa_1|\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}, \quad (4.50)$$

bağıntısıyla verilir, burada $\lambda \neq 0$ ve $\omega \neq 0$ dir. Ayrıca $\mathbf{r}(t_0)$ noktasındaki teğeti sıfır olduğundan,

$$\kappa_1 = -\frac{1}{d}$$

elde edilir.

Evolüt (Mebsut) Eğri:

Eğriliği her noktada sıfırdan farklı düzgün $\alpha(t)$ eğrisinin eğrilik vektörü κ_1 ve normal vektör alanı $\mathbf{n}(t)$ olmak üzere,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa_1}\mathbf{n}(t)$$

şeklinde tanımlanan $\beta(t)$ eğrisine, $\alpha(t)$ eğrisinin bir evolüt eğrisi denir (O'Neill, 2006).

Önerme 4.4.1

Evolüt eğri denklemi,

$$\mathbf{r}_\epsilon(t) = \mathbf{r}_1(t) - \rho_1(t)\mathbf{n}_1 \quad (4.51)$$

olmak üzere, $\rho_1 = \rho_1(t) = \frac{1}{\kappa_1}$ ($\kappa_1 \neq 0$) için:

$$d_1 + \frac{\beta}{\kappa_0\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A + \frac{\omega}{\kappa_1\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \quad (4.52)$$

ve

$$d_2 - \frac{\alpha}{\kappa_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = B - \frac{\lambda}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \quad (4.53)$$

eşitlikleri sağlanır (Chen & Lin, 2014).

İspat: (4.51) evolüt eğrisi ele alınsın. Burada $\rho_1 = \rho_1(t) = \frac{1}{\kappa_1}$ ($\kappa_1 \neq 0$) olmak üzere, tekil $\mathbf{r}(t_0)$ noktasında, $\rho_1 = \frac{1}{\kappa_1} = -d$ olup,

$$\mathbf{r}_0(\tau) = \mathbf{r}_1(\tau) + d\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1(\tau) - \rho_1\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_\epsilon(\tau) \quad (4.54)$$

elde edilir. (4.37) ve (4.40) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(\tau) &= \mathbf{r} + A\mathbf{t} + B\mathbf{n}, \\ \rho_1 &= -\frac{1}{\kappa_1}, \\ \mathbf{n}_1 &= \frac{d_1 - A}{d}\mathbf{t} + \frac{d_2 - B}{d}\mathbf{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.51) eşitliğinde yerine koyulup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} + \left(\frac{Ad\kappa_1 + A - d_1}{d\kappa_1} \right) \mathbf{t} + \left(\frac{Bd + B - d_2}{d\kappa_1} \right) \mathbf{n} &= \mathbf{r}_\epsilon, \\ \mathbf{r} - \frac{d_1 - A(1 + d\kappa_1)}{d\kappa_1} \mathbf{t} - \frac{d_2 - B(1 + d\kappa_1)}{d\kappa_1} \mathbf{n} &= \mathbf{r}_\epsilon \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\mathbf{r}_0 - \frac{1}{\kappa_0} \mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_1 - \frac{1}{\kappa_1} \mathbf{n}_1 \quad (4.56)$$

olduğu kabul edilsin. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ olduğundan (4.5), (4.45) ve (4.41) denkleminin d ile genişletilmiş hali (4.56) da kullanılırsa;

$$\mathbf{r}_1 + (d_1 - A)\mathbf{t} + (d_2 - B)\mathbf{n} - \frac{1}{\kappa_0} \frac{\alpha_n - \beta_t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \mathbf{r}_1 - \frac{\lambda}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \mathbf{n} + \frac{\omega}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \mathbf{t}$$

eşitliği elde edilir ve

$$\begin{aligned} & \left(d_1 + \frac{\beta}{\kappa_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{t} + \left(d_2 - \frac{\alpha}{\kappa_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{n} \\ &= \left(A + \frac{\omega}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \right) \mathbf{t} + \left(B - \frac{\lambda}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

yazılır. Sonuç olarak;

$$d_1 + \frac{\beta}{\kappa_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A + \frac{\omega}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}$$

ve

$$d_2 - \frac{\alpha}{\kappa_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = B - \frac{\lambda}{\kappa_1 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}$$

eşitlikleri elde edilir.

Evolüt eğrisine benzer olarak Bertrand eğri çiftleri tarafımızca Önerme 4.4.2. de incelenmiştir.

Bertrand Eğri Çiftleri:

$M, N \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ Frenet r-ayaklıları $\forall s \in I$ için $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine Bertrand eğri çifti denir (Do Carmo, 2016).

Önerme 4.4.2.

Bertrand eğri çiftleri denklemi,

$$\mathbf{r}_B(s) = \mathbf{r}_1(s) + \rho_1(s) \mathbf{n}_1 \quad (4.57)$$

için $\rho_1 = \rho_1(s)$ sabit olmak üzere,

$$d_1 - \frac{\rho_1 \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A - \frac{\rho_1 \omega}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \quad (4.58)$$

ve

$$d_2 + \frac{\rho_1 \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = B + \frac{\rho_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \quad (4.59)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.60) Bertrand eğri çifti ele alınsın. Burada $\rho_1 = \rho_1(s)$ sabit olduğundan,

$\rho_1 = \rho_1(s) = d$ gelir, o halde

$$\mathbf{r}_0(s) = \mathbf{r}_1(s) + d\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1(s) + \rho_1\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_B(s) \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.37) ve (4.40) denklemlerinden,

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r} + A\mathbf{t} + B\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_1 - A}{d}\mathbf{t} + \frac{d_2 - B}{d}\mathbf{n}$$

elde edilir ve (4.57) denkleminde,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r} + \left(\frac{d_1\rho_1 + A(1 - \rho_1)}{d} \right)\mathbf{t} + \left(\frac{d_2\rho_1 + B(1 - \rho_1)}{d} \right)\mathbf{n} \quad (4.61)$$

ulaşılır. Ayrıca,

$$\mathbf{r}_0 + \rho_1\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_1 + \rho_1\mathbf{n}_1 \quad (4.62)$$

olduğu kabul edilsin. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ eşitliğine ek olarak (4.5), (4.45) ve (4.41) denkleminin d ile genişletilmiş hali (4.62) de yerine koyulursa,

$$\mathbf{r}_1 + (d_1 - A)\mathbf{t} + (d_2 - B)\mathbf{n} + \rho_1 \frac{\alpha_n - \beta_t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \mathbf{r}_1 + \frac{\rho_1\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}\mathbf{n} - \frac{\rho_1\omega}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}\mathbf{t}$$

gelir ve

$$\begin{aligned} & \left(d_1 - \frac{\rho_1\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)\mathbf{t} + \left(d_2 + \frac{\rho_1\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)\mathbf{n} \\ &= \left(A - \frac{\rho_1\omega}{\kappa_1\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \right)\mathbf{t} + \left(B + \frac{\rho_1\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \right)\mathbf{n} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$d_1 - \frac{\rho_1\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A - \frac{\rho_1\omega}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}},$$

$$d_2 + \frac{\rho_1\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = B + \frac{\rho_1\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}$$

bağıntıları elde edilir.

Sonuç olarak, genelleştirilmiş ofset eğrisi, standart ofset eğrisi cinsinden iki farklı şekilde ifade edilebilir ve bu iki ifade birbirine denktir. Bu denklik, Önerme 4.4.1 ve Önerme 4.4.2 ile gösterilmiştir.

4.4.2. n. Dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesi

Bu bölümde, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart bir ofset eğrisi olarak ifade edilmesi, tarafımızca verilmiş olup önerme ile desteklenmiştir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi,

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} + d_{2n+1}\mathbf{t}_{n-1} + d_{2n+2}\mathbf{n}_{n-1}$$

olmak üzere, $(A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1})$ eklenip çıkarılırsa;

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1}) + (d_{2n+1} - A)\mathbf{t}_{n-1} + (d_{2n+2} - B)\mathbf{n}_{n-1}$$

elde edilir, burada A ve B de t ye bağlı birer fonksiyondur.

$$(\mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1}) = \mathbf{r}_1$$

$$(d_{2n+1} - A)\mathbf{t}_{n-1} + (d_{2n+2} - B)\mathbf{n}_{n-1} = d\mathbf{n}_1 \quad (4.63)$$

kabul edilirse ve burada $\mathbf{r}_1$ yeni bir düzgün parametrik düzlem eğridir, d sabittir ve $\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1$ in birim normal vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{r}_n \triangleq \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1, \quad (4.64)$$

$$d = \sqrt{(d_{2n+1} - A)^2 + (d_{2n+2} - B)^2},$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_{2n+1} - A}{d}\mathbf{t}_{n-1} + \frac{d_{2n+2} - B}{d}\mathbf{n}_{n-1}$$

olarak ifade edilebilir.

(4.64) den türev alınarak,

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_{n-1} + A'\mathbf{t}_{n-1} + A\mathbf{t}'_{n-1} + B'\mathbf{n}_{n-1} + B\mathbf{n}'_{n-1}$$

$$\mathbf{r}'_1 = (|\mathbf{r}'_{n-1}| + A' + B\kappa_{n-1}|\mathbf{r}'_{n-1}|)\mathbf{t}_{n-1} + (B' - A\kappa_{n-1}|\mathbf{r}'_{n-1}|)\mathbf{n}_{n-1} \quad (4.65)$$

dir.

n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifade edilebilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir:

i) $\langle d_{2n+1}, r'_{n-1} \rangle = 0$ olmalıdır. O halde,

$$(d_{2n+1} - A)(|r'_{n-1}| + A' + B\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|) + (d_{2n+2} - B)(B' - A\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|) = 0 \quad (4.66)$$

elde edilir.

ii) $(d_{2n+1} - A)^2 + (d_{2n+2} - B)^2$ sabit olmalıdır, yani $d' = 0$ olur.

O zaman,

$$2[(d_{2n+1} - A)(d'_{2n+1} - A') + (d_{2n+2} - B)(d'_{2n+2} - B')] = 0 \quad (4.67)$$

dır. (4.43) ve (4.44) denklemlerinden,

$$(d_{2n+1} - A)(|r'_{n-1}| + A' + B\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|) + (d_{2n+2} - B)(B' - A\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|) + 2[(d_{2n+1} - A)(d'_{2n+1} - A') + (d_{2n+2} - B)(d'_{2n+2} - B')] = 0$$

olur. Buradan,

$$A(-|r'_{n-1}| - d_{2n+2}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}| - d'_1) + B(d_{2n+1}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}| - d'_{2n+2}) + (d_{2n+1}|r'_{n-1}| + d_{2n+1}d'_{2n+1} + d_{2n+2}d'_{2n+2}) = 0$$

ve

$$A(|r'_{n-1}| + d_{2n+2}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}| + d'_{2n+1}) = B(d_{2n+1}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}| - d'_{2n+2}) + (d_{2n+1}|r'_{n-1}| + d_{2n+1}d'_{2n+1} + d_{2n+2}d'_{2n+2}) \quad (4.68)$$

eşitliği elde edilir.

(4.8) ve (4.9) eşitliklerinden, $\alpha_n = |r'_{n-1}| + d'_{2n+1} + d_{2n+2}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|$ değeri d_{2n+1} ile $\beta_n = d'_{2n+2} - d_{2n+1}\kappa_{n-1}|r'_{n-1}|$ değeri ise d_{2n+2} ile genişletilip toplanırsa:

$$\alpha_n d_{2n+1} + \beta_n d_{2n+2} = d_{2n+1}|r'_{n-1}| + d_{2n+1}d'_{2n+1} + d_{2n+2}d'_{2n+2} \quad (4.69)$$

elde edilir, bir diğer deyişle (4.68) denklemindeki $(d_{2n+1}|r'_{n-1}| + d_{2n+1}d'_{2n+1} + d_{2n+2}d'_{2n+2})$ ifadesinin $(\alpha_n d_{2n+1} + \beta_n d_{2n+2})$ ifadesine eşit olduğu görülür.

Bulunan değerler ile (4.68) denklemi aynı zamanda,

$$\alpha_n A = -\beta_n B + \alpha_n d_{2n+1} + \beta_n d_{2n+2}$$

şeklinde de ifade edilir ve

$$\alpha_n(d_{2n+1} - A) + \beta_n(d_{2n+2} - B) = 0 \quad (4.70)$$

bağıntısına ulaşılır.

(4.70) denkleminde verilen A ve B değerleri için dört durum analizi mevcuttur:

1) $\alpha_n = \beta_n = 0$:

$\alpha_n = \beta_n = 0$ değerleri için (4.63) ve (4.64) durumları sağlanır.

$$(d_{2n+1} - A)^2 + (d_{2n+2} - B)^2 = C_1 \quad (4.71)$$

burada $C_1 > 0$ keyfi bir sabittir. Böylece A ve B den biri keyfi olarak seçildiğinde, $A = g(t)$ için,

$$\begin{aligned} (d_{2n+1} - g(t))^2 + (d_{2n+2} - B)^2 &= C_1, \\ (d_{2n+2} - B) &= \pm \sqrt{C_1 - (d_{2n+1} - g(t))^2}, \\ B &= d_{2n+2} \pm \sqrt{C_1 - (d_{2n+1} - g(t))^2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

elde edilir.

2) $\alpha_n \neq 0$ ve $\beta_n = 0$:

$\beta_n = 0$ dan (4.70) denklemi,

$$\alpha_n(d_{2n+1} - A) = 0$$

olur, $\alpha_n \neq 0$ olduğu için $(d_{2n+1} - A) = 0$ gelir, yani, $d_{2n+1} = A$ ve $d'_{2n+1} = A'$ olur.

(4.67) denkleminde,

$$(d_{2n+2} - B)(d'_{2n+2} - B') = 0$$

elde edilir. Burada $(d_{2n+2} - B) \neq 0$ olduğundan,

$$(d'_{2n+2} - B') = 0$$

dır ve $d'_{2n+2} = B'$ olur. Sonuç olarak,

$$B = d_{2n+2}(t) + C_2 \quad (4.73)$$

elde edilir, burada C_2 sıfırdan farklı keyfi bir sabittir.

3) $\alpha_n = 0$ ve $\beta_n \neq 0$:

Durum (2)'ye benzer şekilde, (4.67) denkleminde,

$$\beta_n(d_{2n+2} - B) = 0$$

olur, buradan da $d_{2n+2} = B$ ve $d'_{2n+2} = B'$ durumu elde edilir ve bunlar (4.61) denkleminde yerlerine koyulursa:

$$(d_{2n+1} - A)(d'_{2n+1} - A') = 0$$

elde edilir ve $(d'_{2n+1} - A') = 0$ ve $d'_{2n+1} = A'$ olur. Buradan,

$$d_{2n+1}(t) + C_3 = A \quad (4.74)$$

olur ve C_3 sıfırdan farklı keyfî bir sabittir.

4) $\alpha_n \neq 0$ ve $\beta_n \neq 0$:

(4.70) denkleminde A değeri çekilecek olursa,

$$(d_{2n+1} - A) = -\frac{\beta_n}{\alpha_n}(d_{2n+2} - B)$$

dır. Bu değer (4.71)'te yerine konulursa,

$$\frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}(d_{2n+2} - B)^2 + (d_{2n+2} - B)^2 = C ,$$

$$(d_{2n+2} - B)^2(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = C\alpha_n^2 ,$$

$$|d_{2n+2} - B| = \frac{C\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}$$

olur. Buradan da C sabit olmak üzere B değeri,

$$B = d_{2n+2} \pm \frac{C\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \quad (4.75)$$

şeklinde hesaplanır. Bu adımlara benzer şekilde A değeri için, (4.64) denkleminde $(d_{2n+2} - B)$ değeri çekilirse,

$$(d_{2n+2} - B) = -\frac{\alpha_n}{\beta_n}(d_{2n+1} - A)$$

olur. (4.65) denkleminde,

$$(d_{2n+1} - A)^2 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}(d_{2n+1} - A)^2 = C,$$

$$(d_{2n+1} - A)^2 = \frac{C\beta_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$|d_{2n+1} - A| = \frac{C\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}$$

gelir. Dolayısıyla

$$A = d_{2n+1} \pm \frac{C\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \quad (4.76)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin A ve B fonksiyonlarının farklı durumları göz önüne alınarak elde edilen standart ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{n-1} + \left(d_{2n+1} - \frac{\beta_n C}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}\right)\mathbf{t}_{n-1} + \left(d_{2n+1} + \frac{\alpha_n C}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}\right)\mathbf{n}_{n-1}, \quad (4.78)$$

$$d = \sqrt{(d_{2n+1} - A)^2 + (d_{2n+2} - B)^2} = |C|, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}\mathbf{t}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}\mathbf{n}_{n-1} \quad (4.80)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{r}_1$ yeni bir düzgün parametrik düzlem eğrisi, d sabit ve $\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1$ in birim normal vektörüdür; d_{2n+1}, d_{2n+2}, A ve B ise t ye bağlı fonksiyonlardır.

n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesine ait farklı bir gösterim ise aşağıdaki şekilde incelenmiştir:

$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ standart ofset eğrisi için $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{n}_1$ değerleri sırayla

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1}$$

ve

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_{2n+1} - A}{d} \mathbf{t}_{n-1} + \frac{d_{2n+2} - B}{d} \mathbf{n}_{n-1} \quad (4.81)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{r}_1$ eğrisinin türevi alındığında,

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_{n-1} + A' \mathbf{t}_{n-1} + A \mathbf{t}'_{n-1} + B' \mathbf{n}_{n-1} + B \mathbf{n}'_{n-1}$$

dir. $\mathbf{r}'_{n-1} = |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{t}_{n-1}$, $\mathbf{t}'_{n-1} = -\kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{n}_{n-1}$ ve $\mathbf{n}'_{n-1} = \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{t}_{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{t}_{n-1} + A' \mathbf{t}_{n-1} - \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{n}_{n-1} \cdot A + B' \mathbf{n}_{n-1} + \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'| \mathbf{t}_{n-1} B \\ &= (|\mathbf{r}_{n-1}'| + A' - A \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'|) \mathbf{t}_{n-1} + (B' + B \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'|) \mathbf{n}_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\lambda_n = |\mathbf{r}_{n-1}'| + A' - A \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'|$ ve $\omega_n = B' + B \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'|$ olarak kabul edilirse;

$$\mathbf{r}'_1 = \lambda_n \mathbf{t}_{n-1} + \omega_n \mathbf{n}_{n-1} \quad (4.82)$$

yazılır ve $\mathbf{r}'_1$ eğrisi için,

$$\kappa_1 = \frac{(\lambda_n' \omega_n - \lambda_n \omega_n') + (\lambda_n^2 + \omega_n^2) \cdot \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}_{n-1}'|}{(\lambda_n^2 + \omega_n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r}'_1|} = \frac{\lambda_n \mathbf{t}_{n-1} + \omega_n \mathbf{n}_{n-1}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}}, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\lambda_n \mathbf{n}_{n-1} - \omega_n \mathbf{t}_{n-1}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \quad (4.85)$$

olduğu görülür.

n . dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden ifadesine ait Serret-Frenet vektör elemanlarına ilişkin hesaplamalar ise aşağıda sunulmuştur:

$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1$, n . dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin türevi,

$$\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}'_1 + d \mathbf{n}'_1$$

dir. $\mathbf{n}'_{n-1} = \kappa_{(n-1)} |\mathbf{r}'_{n-1}| \mathbf{t}_{n-1}$ olduğundan,

$$\mathbf{n}'_1 = \kappa_{n-1} |\mathbf{r}'_1| \mathbf{t}_1$$

gelir. $|\mathbf{r}'_1| = \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}$ için r'_n denklemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_n &= \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2} \mathbf{t}_1 + d\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2} \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{r}'_n &= (1 + d\kappa_1) \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2} \mathbf{t}_1 \end{aligned} \quad (4.86)$$

olur.

Eğrilik fonksiyonuna ilişkin hesaplamalar için (3.40) dan,

$$\kappa_n = \frac{1}{|1 + d\kappa_1|} \kappa_1 \quad (4.87)$$

olarak yazılır. $\mathbf{r}'_n = \mathbf{t}_n \cdot |\mathbf{r}'_n| = \mathbf{t}_0 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2} &= (1 + d\kappa_1) \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2} \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{t}_n &= (1 + d\kappa_1) \mathbf{t}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca yönden dolayı,

$$\mathbf{t}_n = \text{sgn}(1 + d\kappa_1) \mathbf{t}_1 \quad (4.88)$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde normal vektörü incelenecek olursa $\mathbf{n}_n = \mathbf{t}_n \times \mathbf{b}$ ve (4.88) den,

$$\mathbf{n}_n = \text{sgn}(1 + d\kappa_1) \mathbf{t}_1 \times \mathbf{b}$$

gelir, $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{b} = \mathbf{n}_1$ eşitliğinden

$$\mathbf{n}_n = \text{sgn}(1 + d\kappa_1) \mathbf{n}_1 \quad (4.89)$$

şeklinde verilir.

Bu denklemlerde κ_n ve κ_1 sırasıyla $\mathbf{r}_n$ ve $\mathbf{r}_1$ eğrilerinin eğrilik fonksiyonlarıdır.

n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisi $\mathbf{r}_n$ nin düzensiz noktası $\mathbf{r}(t_n)$:

$$|\mathbf{r}'_n| = |1 + d\kappa_1| \cdot |\mathbf{r}'_1| = |1 + d\kappa_1| \cdot \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}, \quad (4.90)$$

olur, burada $\lambda_n \neq 0$ ve $\omega_n \neq 0$ dir. $\mathbf{r}(t_n)$ noktasında eğrinin teğeti sıfır olduğundan,

$$\kappa_1 = -\frac{1}{d}$$

yazılır.

Önerme 4.4.3.

$$\mathbf{r}_\epsilon(t) = \mathbf{r}_1(t) - \rho_1(t)\mathbf{n}_1 \quad (4.91)$$

şeklinde verilen evolüt eğrisi için, $\rho_1 = \rho_1(t) = \frac{1}{\kappa_1}$ ($\kappa_1 \neq 0$) olmak üzere:

$$d_{2n+1} + \frac{\beta_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} = A + \frac{\omega_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \quad (4.92)$$

ve

$$d_{2n+2} - \frac{\alpha_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} = B - \frac{\lambda_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \quad (4.93)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4. 88) den, $\rho_1 = \rho_1(t) = \frac{1}{\kappa_1}$ ($\kappa_1 \neq 0$) dir. $r(t_0)$ tekil noktasında, $\rho_1 = \frac{1}{\kappa_1} = -d$ olur ve

$$\mathbf{r}_0(\tau) = \mathbf{r}_1(\tau) + d\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1(\tau) - \rho_1\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_\epsilon(\tau) \quad (4.94)$$

elde edilir. (4.77) ve (4.80) denklemlerinden,

$$\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1},$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\kappa_1},$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d_{2n+1} - A}{d}\mathbf{t}_{n-1} + \frac{d_{2n+2} - B}{d}\mathbf{n}_{n-1}$$

olur ve bu ifadeler (4.91) de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n-1} + \left(\frac{Ad\kappa_1 + A - d_{2n+1}}{d\kappa_1} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(\frac{Bd + B - d_{2n+2}}{d\kappa_1} \right) \mathbf{n}_{n-1} &= \mathbf{r}_\epsilon \\ \mathbf{r}_{n-1} - \frac{d_{2n+1} - A(1 + d\kappa_1)}{d\kappa_1} \mathbf{t}_{n-1} - \frac{d_{2n+2} - B(1 + d\kappa_1)}{d\kappa_1} \mathbf{n}_{n-1} &= \mathbf{r}_\epsilon \end{aligned} \quad (4.95)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\mathbf{r}_n - \frac{1}{\kappa_n} \mathbf{n}_n = \mathbf{r}_1 - \frac{1}{\kappa_1} \mathbf{n}_1 \quad (4.96)$$

olduğu kabul edilsin. $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ eşitliğine ek olarak (4.5), (4.85) ve (4.81) denkleminin d ile genişletilmiş hali (4.94) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_1 + (d_{2n+1} - A)\mathbf{t}_{n-1} + (d_{2n+2} - B)\mathbf{n}_{n-1} - \frac{1}{\kappa_0} \frac{\alpha_n - \beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \\ &= \mathbf{r}_1 - \frac{\lambda_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \mathbf{n}_{n-1} + \frac{\omega_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \mathbf{t}_{n-1} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır, buradan

$$\begin{aligned} & \left(d_{2n+1} + \frac{\beta_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(d_{2n+2} - \frac{\alpha_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \right) \mathbf{n}_{n-1} \\ &= \left(A + \frac{\omega_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(B - \frac{\lambda_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \right) \mathbf{n}_{n-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{2n+1} + \frac{\beta_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} &= A + \frac{\omega_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}}, \\ d_{2n+2} - \frac{\alpha_n}{\kappa_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} &= B - \frac{\lambda_n}{\kappa_1 \sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir.

Önerme 4.4.4.

$$\mathbf{r}_B(s) = \mathbf{r}_1(s) + \rho_1(s)\mathbf{n}_1 \quad (4.97)$$

Bertrand eğri çiftleri için, $\rho_1 = \rho_1(s)$ sabit olmak üzere,

$$d_{2n+1} - \frac{\rho_1 \beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} = A - \frac{\rho_1 \omega_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \quad (4.98)$$

ve

$$d_{2n+2} + \frac{\rho_1 \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} = B + \frac{\rho_1 \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \quad (4.99)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.97) de $\rho_1 = \rho_1(s)$ sabit alındığında, $\rho_1 = \rho_1(s) = d$ olur, o halde,

$$\mathbf{r}_0(s) = \mathbf{r}_1(s) + d\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1(s) + \rho_1\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_B(s) \quad (4.100)$$

elde edilir. (4.37), ve (4.40) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(s) &= \mathbf{r}_{n-1} + A\mathbf{t}_{n-1} + B\mathbf{n}_{n-1}, \\ \mathbf{n}_1 &= \frac{d_{2n+1} - A}{d}\mathbf{t}_{n-1} + \frac{d_{2n+2} - B}{d}\mathbf{n}_{n-1} \end{aligned}$$

ifadeleri (4.97) eşitliğinde yerine koyulursa:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_{n-1} + \left(\frac{d_{2n+1}\rho_1 + A(1 - \rho_1)}{d} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(\frac{d_{2n+2}\rho_1 + B(1 - \rho_1)}{d} \right) \mathbf{n}_{n-1} \quad (4.101)$$

gelir. Ayrıca,

$$\mathbf{r}_n + \rho_1\mathbf{n}_n = \mathbf{r}_1 + \rho_1\mathbf{n}_1 \quad (4.102)$$

olduğu kabul edilsin. $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ eşitliğine ek olarak (4.5), (4.85) ve (4.81) denkleminin d ile genişletilmiş hali (4.100) de kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + (d_{2n+1} - A)\mathbf{t}_{n-1} + (d_{2n+2} - B)\mathbf{n}_{n-1} + \rho_1 \frac{\alpha_n - \beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \\ = \mathbf{r}_1 + \frac{\rho_1\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}}\mathbf{n}_{n-1} - \frac{\rho_1\omega_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}}\mathbf{t}_{n-1} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır, buradan,

$$\begin{aligned} \left(d_{2n+1} - \frac{\rho_1\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(d_{2n+2} + \frac{\rho_1\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} \right) \mathbf{n}_{n-1} \\ = \left(A - \frac{\rho_1\omega_n}{\kappa_1\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \right) \mathbf{t}_{n-1} + \left(B + \frac{\rho_1\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \right) \mathbf{n}_{n-1}, \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} d_{2n+1} - \frac{\rho_1\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} &= A - \frac{\rho_1\omega_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}}, \\ d_{2n+2} + \frac{\rho_1\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}} &= B + \frac{\rho_1\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \omega_n^2}} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç olarak, n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin, standart ofset eğrisi cinsinden yazımına ilişkin verilen iki farklı gösterimin birbirine denk olduğu önerme 4.4.3 ve önerme 4.4.4. ile gösterilmiştir.





5. KESİŞİM EĞRİLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Bu bölümde kesişim eğrilerinin diferansiyel geometri özellikleri incelenecektir. Kesişim eğrileri en genel manada yüzey normalleri paralel olmayan, enine kesişen iki yüzeyin ortak noktalarından geçen eğrilerdir (Patrikalakis & Maekawa, 2010). Kesişim eğrileri, karmaşık geometrik yapıların analiz edilmesinde kullanılırken bu eğrileri daha doğru ve verimli bir şekilde hesaplamak için onların yüksek mertebeli yaklaşımına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yaklaşım kapsamında, kesişim eğrilerinin yalnızca teğet vektörlerinin değil, aynı zamanda eğrilik vektörlerinin de yüksek mertebeli hesabı, eğrilerin daha ayrıntılı incelenmesine olanak sağlamaktadır.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ parametrik formdaki düzlem kesişim eğrisi için, s yay parametresi olmak üzere,

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{r}''(s) = \mathbf{k} = \kappa \mathbf{n} \quad (5.2)$$

dir, burada $\mathbf{t}$ birim teğet vektör ve $\mathbf{k}$ eğrilik vektörüdür. (5.2) den,

$$\kappa^2 = \kappa \mathbf{n} \cdot \kappa \mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' \quad (5.3)$$

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' \quad (5.4)$$

sonuçları elde edilir. Serret-Frenet türev formülleri (3.33) den,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} \quad (5.5)$$

elde edilir.

$\kappa \equiv 0$ için eğri, doğru olur ve Serret-Frenet çatısı tanımlanamaz. Bu yüzden $\kappa = 0$ durumunun yalnızca ayırık noktalarda meydana geldiği kabul edilir.

(5.5) denkleminde $\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ olma durumu için,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}'$$

dir ve $\kappa \mathbf{n}' = 0$ olacağından, (5.4) denklemi,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} \quad (5.6)$$

bağıntısına indirgenir, burada $(\kappa')^2 = \mathbf{r}'''' \cdot \mathbf{r}''''$ şeklindedir.

(5.6) denkleminde $\kappa = \kappa' = 0$ ve $\kappa'' \neq 0$ olma durumu için,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa'' \mathbf{n} + \kappa' \mathbf{n}'$$

gelir ve $\kappa' \mathbf{n}' = 0$ olduğundan,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa'' \mathbf{n} \quad (5.7)$$

olur, burada $(\kappa'')^2 = \mathbf{r}^{(4)} \cdot \mathbf{r}^{(4)}$ biçimindedir.

Benzer şekilde, (5.7) denkleminde $\kappa = \kappa' = \kappa'' = 0$ ve $\kappa''' \neq 0$ durumu incelenirse,

$$\mathbf{r}^{(5)}(s) = \kappa''' \mathbf{n} + \kappa'' \mathbf{n}'$$

gelir ve $\kappa'' \mathbf{n}' = 0$ olduğundan,

$$\mathbf{r}^{(5)}(s) = \kappa''' \mathbf{n} \quad (5.8)$$

elde edilir ve burada, $(\kappa''')^2 = \mathbf{r}^{(5)} \cdot \mathbf{r}^{(5)}$ olarak gelir.

Yukarıdaki adımlar genelleştirilirse, $\kappa = \kappa' = \kappa'' = \dots = \kappa^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa^{(j)} \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathbf{r}^{(j+2)}(s) = \kappa^{(j)} \mathbf{n} \quad (5.9)$$

bağıntısı elde edilir, ve $(\kappa^{(j)})^2 = \mathbf{r}^{(j+2)} \cdot \mathbf{r}^{(j+2)}$ şeklindedir.

Düzlem eğrisi için ele alınan durum uzay eğrileri için incelenecek olursa, eğrilik fonksiyonuna ek olarak burulma fonksiyonu da değerlendirilir.

Kapalı formdaki $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ veya parametrik formdaki $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ kesişim eğrisi bir uzay eğrisi için, s yay parametresi olmak üzere,

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{r}''(s) = \mathbf{k} = \kappa \mathbf{n}, \quad (5.15)$$

olur. Burada $\mathbf{t}$ birim teğet vektör ve $\mathbf{k}$ eğrilik vektörüdür. (5.15) den

$$\kappa^2 = \kappa \mathbf{n} \cdot \kappa \mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' \quad (5.16)$$

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}', \quad (5.17)$$

gelir. Serret-Frenet formülleri $\mathbf{n}'$ için kullanılırsa,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b} \quad (5.18)$$

olur. (5.18) eşitliğinin iki tarafı da $\mathbf{b}$ binormal vektörü ile skaler çarpım yapılırsa,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}'''(s) = \kappa \tau$$

elde edilir ve burulma fonksiyonu,

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}'''}{\kappa} \quad (5.19)$$

şeklinde verilir, burada $\kappa \neq 0$ dır.

(5.15) de $\kappa \equiv 0$ için birim asal normal vektörü tanımlı değildir. $\kappa \equiv 0$ olan noktalarda asal normal vektörünü elde etmek için eğrinin daha yüksek mertebeli türevleri dahil edilir.

(5.15) de $\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ durumu için,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}'$$

gelir ve $\kappa \mathbf{n}' = 0$ olduğundan (5.17) den,

$$\mathbf{r}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} \quad (5.20)$$

şekline indirgenir, ve $(\kappa')^2 = \mathbf{r}''' \cdot \mathbf{r}'''$ olarak yazılır.

(5.17) den, $\kappa = \kappa' = 0$ ve $\kappa'' \neq 0$ durumu için,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa'' \mathbf{n} + \kappa' \mathbf{n}'$$

gelir ve $\kappa' \mathbf{n}' = 0$ olduğundan,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa'' \mathbf{n} \quad (5.21)$$

şeklindedir, burada $(\kappa'')^2 = \mathbf{r}^{(4)} \cdot \mathbf{r}^{(4)}$ biçimindedir.

Benzer şekilde, $\kappa = \kappa' = \kappa'' = 0$ ve $\kappa''' \neq 0$ için,

$$\mathbf{r}^{(5)}(s) = \kappa''' \mathbf{n} + \kappa'' \mathbf{n}'$$

elde edilir ve $\kappa'' \mathbf{n}' = 0$ olduğundan,

$$\mathbf{r}^{(5)}(s) = \kappa''' \mathbf{n} \quad (5.22)$$

gelir ve burada, $(\kappa''')^2 = \mathbf{r}^{(5)} \cdot \mathbf{r}^{(5)}$ olarak gelir.

Bu adımlar genelleştirilirse, $\kappa' = \kappa'' = \dots = \kappa^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa^j \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathbf{r}^{(j+2)}(s) = \kappa^j \mathbf{n} \quad (5.23)$$

bağıntısı yazılır ve $(\kappa^{(j)})^2 = \mathbf{r}^{(j+2)} \cdot \mathbf{r}^{(j+2)}$ şeklindedir.

$\kappa = 0$ için burulma fonksiyonunun analizi, eğrilik fonksiyonuna benzer biçimde yapılır.

$\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ olduğunda, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin dördüncü mertebeden türevi değerlendirilir.

(5.18) ve Serret-Frenet türev formüllerinden,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \mathbf{n}(\kappa'' - \kappa\tau^2 - \kappa^3) + \mathbf{b}(2\kappa'\tau + \kappa\tau') - 3\kappa\kappa'\mathbf{t} \quad (5.24)$$

dır, burada $\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ olduğundan,

$$\mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa''\mathbf{n} + 2\mathbf{b}\kappa'\tau \quad (5.25)$$

gelir. Şimdi eşitliğin iki tarafı da $\mathbf{b}$ binormal vektörü ile skaler çarpım yapılırsa,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}^{(4)}(s) = \kappa'' + 2\kappa'\tau$$

elde edilir, buradan da burulma fonksiyonu,

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}^{(4)}}{2\kappa'} \quad (5.26)$$

bağıntısıyla verilir.

Benzer şekilde bir mertebe daha türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(5)}(s) = & \mathbf{t}(-4\kappa\kappa'' - 3(\kappa')^2 + \kappa^4 + \kappa^2\tau^2) + \mathbf{n}(\kappa''' - 6\kappa^2\kappa' - 3\kappa'\tau - 3\kappa\tau\tau') \\ & + \mathbf{b}(3\kappa''\tau + 3\kappa'\tau' - \kappa^3\tau - \kappa\tau^3 + \kappa\tau'') \end{aligned} \quad (5.27)$$

olur. $\kappa = \kappa' = 0$ ve $\kappa'' \neq 0$ için burulma fonksiyonu,

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}^{(5)}(s)}{3\kappa''} \quad (5.28)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak burulma fonksiyonunun genelleştirilmiş hali, $\kappa = \kappa' = \dots = \kappa^{(j+3)} = 0$ ve $\kappa^{(j)} \neq 0$ olmak üzere,

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}^{(j+3)}(s)}{(j+1)\kappa^j} \quad (5.29)$$

bağıntısıyla verilir (Ye & Maekawa, 1999).

Düzlem ve uzay kesişim eğrileri için incelenen durumlar, düzlem kesişim eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri için de aşağıdaki şekilde ele alınmıştır:

$\mathbf{r}_0(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi için, s yay parametresi olmak üzere,

$$\mathbf{r}_0'(s) = \mathbf{t}_0 \quad (5.30)$$

$$\mathbf{r}_0''(s) = \mathbf{k}_0 = -\kappa_0 \mathbf{n}_0 \quad (5.31)$$

şeklindedir, burada $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü, $\mathbf{k}_0$ eğrilik vektörüdür. (5.31) den,

$$\kappa_0^2 = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_0 = \mathbf{r}_0'' \cdot \mathbf{r}_0'' \quad (5.32)$$

olur. (5.31) den $\mathbf{r}_0'''(s)$,

$$\mathbf{r}_0'''(s) = \kappa_0' \mathbf{n}_0 + \kappa_0 \mathbf{n}_0' \quad (5.33)$$

$$\mathbf{r}_0'''(s) = \kappa_0^2 \mathbf{t}_0 + \kappa_0' \mathbf{n}_0 \quad (5.34)$$

şeklinde gelir.

Genelleştirilmiş ofset eğri tanımından,

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}' + d_1' \mathbf{n} + d_1 \mathbf{n}' + d_2 \mathbf{t} + d_2 \mathbf{t}'$$

yazılır. $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$, $\mathbf{n}' = \kappa \mathbf{t}$ ve $\mathbf{t}' = -\kappa \mathbf{n}$ bağıntılarından,

$$\mathbf{r}'_0 = (1 + d_1 \kappa + d_2) \mathbf{t} + (d_1' - d_2 \kappa) \mathbf{n}$$

elde edilir. $1 + d_1 \kappa + d_2 = \alpha(s)$ ve $d_1' - d_2 \kappa = \beta(s)$ olduğundan,

$$\mathbf{r}'_0 = \alpha(s) \mathbf{t} + \beta(s) \mathbf{n} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{r}''_0 = (\alpha'(s) + \beta(s)) \mathbf{t} + (\beta'(s) - \alpha(s) \kappa) \mathbf{n} \quad (5.36)$$

şeklindedir.

κ_0 genelleştirilmiş ofset eğrisinin eğrilik fonksiyonu,

$$\kappa_0 = \frac{|\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0|}{|\mathbf{r}'_0|^3},$$

$$|\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0| = \beta(s)\alpha'(s) + \beta^2(s)\kappa - \alpha(s)\beta'(s) + \alpha^2(s)\kappa$$

ve

$$|\mathbf{r}'_0| = \sqrt{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}$$

eşitliklerinden,

$$\kappa_0 = \frac{\beta(s)\alpha'(s) + \beta^2(s)\kappa - \alpha(s)\beta'(s) + \alpha^2(s)\kappa}{(\alpha^2(s) + \beta^2(s))^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.37)$$

şeklinde elde edilir. $\kappa_0 = 0$ ve $\kappa'_0 \neq 0$ için (5.37) den,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'''_0(s) &= \kappa'_0 \mathbf{n}_0 \\ &= \left[\frac{\beta(s)(\alpha'(s) + \beta(s)\kappa) - \alpha(s)(\beta'(s) - \alpha(s)\kappa)}{(\alpha^2(s) + \beta^2(s))^{\frac{3}{2}}} \right]' \frac{(\alpha(s)\mathbf{n} - \beta(s)\mathbf{t})}{\sqrt{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

bağıntısına ulaşılır.

(5.38) de $\kappa_0 = \kappa'_0 = 0$ ve $\kappa''_0 \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(4)}_0(s) &= \kappa''_0 \mathbf{n}_0 \\ &= \left[\frac{\beta(s)(\alpha'(s) + \beta(s)\kappa) - \alpha(s)(\beta'(s) - \alpha(s)\kappa)}{(\alpha^2(s) + \beta^2(s))^{\frac{3}{2}}} \right]'' \frac{(\alpha(s)\mathbf{n} - \beta(s)\mathbf{t})}{\sqrt{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

şeklindedir, burada $(\kappa'')^2 = \mathbf{r}^{(4)}_0 \cdot \mathbf{r}^{(4)}_0$ olur.

Benzer biçimde bu adımlar genelleştirilirse, $\kappa_0 = \kappa'_0 = \dots = \kappa_0^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa_0^j \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(j+2)}_0(s) &= \kappa_0^{(j)} \mathbf{n}_0 \\ &= \left[\frac{\beta(s)(\alpha'(s) + \beta(s)\kappa) - \alpha(s)(\beta'(s) - \alpha(s)\kappa)}{(\alpha^2(s) + \beta^2(s))^{\frac{3}{2}}} \right]^{(j)} \frac{(\alpha(s)\mathbf{n} - \beta(s)\mathbf{t})}{\sqrt{\alpha^2(s) + \beta^2(s)}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

bağıntısı elde edilir, burada $(\kappa_0^{(j)})^2 = \mathbf{r}^{(j+2)}_0 \cdot \mathbf{r}^{(j+2)}_0$ şeklindedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;

- Genelleştirilmiş ofset eğrileri ve n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrileri incelenmiş ve bu eğrilere ait uygulamalar yapılmıştır.
- Bir düzlem eğrinin ofset eğrisinin ve genelleştirilmiş ofset eğrisinin kendisiyle kesişimi incelenmiştir.
- Farklı iki düzlem eğrinin, ofset eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin kendisiyle kesişim durumları analiz edilmiştir.
- Düzlem eğrilerinin ve genelleştirilmiş ofset eğrilerinin tekilliklerinin hesabı incelenmiştir.
- Genelleştirilmiş ofset eğrisi ve n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi cinsinden farklı iki gösterimlerine yer verilmiş olup önermeler ile desteklenmiştir.
- Kesişim eğrilerinin diferansiyel geometri özellikleri incelenmiş olup, düzlem eğri, uzay eğri ve genelleştirilmiş ofset eğrileri için ayrı ayrı ele alınmıştır.

Tezde ağırlıklı olarak genelleştirilmiş ofset eğrileri ve n. dereceden genelleştirilmiş ofset eğrileri incelenmiştir. Bu eğrilerin, endüstri ve mühendislik problemlerine optimal çözümler üretme noktasında ele alındığı bilinmektedir.

Çalışmamızda elde edilen bulguların, yüksek dereceden genelleştirilmiş ofset eğrileri üzerine yapılacak araştırmalara fayda sunmasının yanı sıra karmaşık şekil modellemelerinde de kolaylık sağlaması öngörülmektedir. Ayrıca ofset eğrilerinin genelleştirilmiş durumlarına ilişkin yapılan bu analiz ve irdelemelerin literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

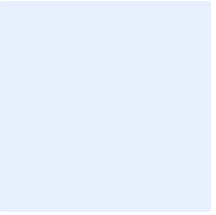


KAYNAKLAR

- Bulut, V., & Caliskan, A.** (2015). The Exchange Variations of Offset Curves and Surfaces. *Results in Mathematics*, 67(3–4), 303–332. <https://doi.org/10.1007/s00025-015-0445-3>
- Chen, X., & Lin, Q.** (2014). Properties of Generalized Offset Curves and Surfaces. *Journal of Applied Mathematics*, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/124240>
- Chen, X., & Wang, J.** (2013). Generalized Offset Curves and Surfaces for Computer-Aided Design. *Computer-Aided Design*, 45(2), 591–604.
- Cheng, K.-P.** (1989). Using Plane Vector Fields to Obtain All the Intersection Curves of Two General Surfaces. In W. Strasser & H. Seidel (Eds.), *Theory and Practice of Geometric Modeling* (pp. 187–204). Springer-Verlag.
- Choi, J. H., & Kim, Y. H.** (2012). Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9116–9124. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.02.064>
- Encheva, R. P., & Georgiev, G. H.** (2009). Similar Frenet Curves. *Results in Mathematics*, 55(3), 359–372. <https://doi.org/10.1007/s00025-009-0407-8>
- Do Carmo, M. P.** (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dover Publications.
- Farin, G. E.** (2002). *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. Morgan Kaufmann Publishers.
- Farouki, R. T.** (1986). The Approximation of Non-Degenerate Offset Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 3(1), 15–43.
- Farouki, R. T., & Neff, C. A.** (1990). Algebraic Properties of Plane Offset Curves. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1-4), 83–99.
- Hartmann, E.** (2003). *Geometry And Algorithms for Computer Aided Design*. Darmstadt University of Technology, 95.
- Krasauskas, R., & Peterzell, M.** (2013). *Rational Offset Surfaces and Their Modeling Applications*.
- Kreyszig, E.** (1959). *Differential Geometry*. University of Toronto Press.
- Kreyszig, Erwin.** (1968). *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. University of Toronto Press.
- Kriezis, G. A., Patrikalakis, N. M., & Wolter, F. E.** (1992). Topological and Differential-Equation Methods for Surface Intersections. *Computer-Aided Design*, 24(1), 44–55.

- Lee, E., & Jung, S. K.** (2012). Intersection Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. *Computer-Aided Design*, 44(3), 233–246.
- Liu, S., Li, L., Tang, J., Wu, S., & Gaudiot, J. L.** (2018). *Creating Autonomous Vehicle Systems*. Morgan & Claypool.
- Maekawa, T., & Patrikalakis, N. M.** (1993). Computation of Singularities and Intersections of Offsets of Planar Curves. In *Computer Aided Geometric Design* (Vol. 10).
- Markot, R., & Magedson, R.** (1991). Procedural Method for Evaluating The Intersection Curves of Two Parametric Surfaces. *Computer-Aided Design*, 23(6), 395–404.
- Markot, R. P., & Magedson, R. L.** (1989). Solutions of Tangential Surface and Curve Intersections. *Computer-Aided Design*, 21(7), 421–429.
- O'Neill, B.** (2006). *Elementary Differential Geometry* (Revised Second Edition). Academic Press.
- Oprea, J.** (2007). *Differential Geometry and Its Applications*. The Mathematical Association of America
- Patrikalakis, N. M., & Maekawa, T.** (2010). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Piegl, L., & Tiller, W.** (2012). *The NURBS book*. Springer Science & Business Media.
- Pottmann, H., Wallner, J., Yang, Y.-L., & Wang, W.** (2006). Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 25, 681–689. <https://doi.org/10.1145/1141911.1141941>
- Rogers, D. F.** (2001). *Procedural Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill.
- Shen, H., Fu, J., Chen, Z., & Fan, Y.** (2010). Generation of Offset Surface for Tool Path in NC Machining Through Level Set Methods. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 46(9–12), 1043–1047. <https://doi.org/10.1007/s00170-009-2164-y>
- Shen, J., & Zhang, Y.** (2016). Applications of Differential Geometry in Engineering Field. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention*, 4(1), 23–28.
- Struik, D. J.** (Dirk J. (1988). *Lectures on Classical Differential Geometry*. New York: Dover Publications.
- Willmore, T. J.** (2013). *An Introduction to Differential Geometry*. Courier Corporation.
- Ye, X., & Maekawa, T.** (1999). Differential Geometry of Intersection Curves of Two Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16(8), 767–788.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler		
Adı Soyadı		
Doğum Yeri		
Doğum Tarihi		
Uyruğu.		
Telefon		
E-Posta Adresi		
Web Adresi		

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	
Fakülte	
Bölümü	
Mezuniyet Yılı	

Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	