

# **GENELLEŞTİRİLMİŞ PASCAL MATRİSLERİ**

**Nilay ABAY ÇAMDELEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2010  
ANKARA**

Nilay ABAY ÇAMDELEN tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ PASCAL MATRİSLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: ...../...../.....

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nilay ABAY ÇAMDELEN

# GENELLEŞTİRİLMİŞ PASCAL MATRİSLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nilay ABAY ÇAMDELEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2010

## ÖZET

Bu çalışmada Fibonomiyel katsayılar kullanılarak tanımlanan birinci, ikinci çeşit, genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonomiyel katsayılı Pascal matrisleri tanımlandı. Fibonomiyel katsayılı Pascal matrislerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Pell matrisleri ile çarpanlamaları elde edildi. Pascal matrislerine benzer şekilde, Fibonomiyel katsayılar yardımıyla tanımlı Vandermonde matrisi ile Fibonomiyel Pascal matrisi arasındaki ilişki elde edildi.

Bilim Kodu : 204.1.025  
Anahtar Kelimeler : Pascal matrisi, Çarpanlama, Fibonacci, Fibonomiyel katsayıları  
Sayfa Adedi : 35  
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Naim TUĞLU

**GENERALIZED PASCAL MATRICES****(M.Sc. Thesis)****Nilay ABAY ÇAMDELEN****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2010****ABSTRACT**

**In this study, we define first, second, generalized and extended generalized types of Pascal matrices involving Fibonomial coefficients. We obtain the factorizations of these matrices by using generalized Fibonacci and Pell matrices. Finally, we obtain the relations between the Fibonomial Pascal matrices and the Vandermonde matrices involving Fibonomial coefficients.**

**Science Code : 204.1.025****Key Words : Pascal matrices, Factorizations, Fibonacci sequence, Fibonomial Coefficients****Page Number: 35****Advisor : Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU**

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması aşamasında düşünce ve önerileriyle katkıda bulunan ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya teşekkürü bir borç bilirim. Yine çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum Doç. Dr. Naim TUĞLU hocama, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve değerli eşim Oktay ÇAMDELEN'e teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                  | <b>Sayfa</b> |
|------------------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET .....                                                       | iv           |
| ABSTRACT .....                                                   | v            |
| TEŞEKKÜR.....                                                    | vi           |
| İÇİNDEKİLER .....                                                | vii          |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                     | viii         |
| 1. GİRİŞ .....                                                   | 1            |
| 2.TANIM VE ÖN BİLGİLER .....                                     | 3            |
| 3. PASCAL MATRİSLERİ .....                                       | 7            |
| 4. FİBONOMİYEL KATSAYILI PASCAL MATRİSLERİ.....                  | 16           |
| 4.1 Fibonomiyel Katsayılı Pascal Matrislerinin Özellikleri.....  | 19           |
| 4.2 Fibonomiyel Katsayılı Pascal Matrislerinin Çarpanlaması..... | 26           |
| KAYNAKLAR .....                                                  | 33           |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                   | 35           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler                     | Açıklama                                                               |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $F_n$                        | $n$ . Fibonacci sayısı                                                 |
| $\mathcal{F}_n$              | $n \times n$ Fibonacci matrisi                                         |
| $\mathcal{F}_n[x]$           | $n \times n$ Genelleştirilmiş Fibonacci matrisi                        |
| $\mathcal{F}_n[x, y]$        | $n \times n$ Genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisi          |
| $\mathcal{F}'_n[x, y]$       | $n \times n$ Genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin tersi |
| $S_n$                        | $n \times n$ Pell matrisi                                              |
| $P_n$                        | $n \times n$ Pascal matrisi                                            |
| $Q_n$                        | $n \times n$ Pascal matrisinin tersi                                   |
| $P_n[x]$                     | $n \times n$ Birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi             |
| $\Theta_n[x]$                | $n \times n$ İkinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi              |
| $\Phi_n[x, y]$               | $n \times n$ Genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisi             |
| $U_n$                        | $n \times n$ Fibonomiyel Pascal matrisi                                |
| $V_n$                        | $n \times n$ Fibonomiyel Pascal matrisinin tersi                       |
| $U_n[x]$                     | $n \times n$ Birinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi |
| $V_n[x]$                     | $n \times n$ Genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisinin tersi      |
| $M_n[x]$                     | $n \times n$ İkinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi  |
| $\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}$ | $n \times n$ Genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi |

## 1. GİRİŞ

Call ve Vellaman, Pascal matrisini ve Pascal matrisinin tersini tanımlamış, ayrıca Pascal matrislerinin genelleştirilebileceğini göstermişlerdir. Pascal matrisinin tamsayı kuvvetiyle ilgili özellikler verilmiş olup, Pascal matrisinin kuvvetinin reel sayı olması durumunu incelemişlerdir [1].

Lee ve Cho, Pascal matrisinin, Fibonacci matrisinin ve Pell matrisinin genelleştirmelerinden bahsetmişlerdir. Birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi ile genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisini tanımlamışlar ve bu matrisler arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Pascal matrislerinin, Fibonacci ve Pell matrisleri yardımıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermişlerdir. Üreteç fonksiyonu ve Riordan methodundan bahsetmiş olup bunların çarpanlarını bulmuşlardır. Kombinatoriyel özdeşlikleri göz önüne almışlardır [2].

Tuğlu ve Koçer, Fibonomiyel katsayısını ve Fibonomiyel katsayılar yardımıyla da Pascal matrisini tanımlamışlardır. Fibonomiyel katsayılı Pascal matrisi ile ilgili özellikler verilmiştir. Binom açılımını Fibonomiyel katsayılar yardımıyla tanımlamıştır. Fibonomiyel Pascal matrisinin, Fibonacci matrisi yardımıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermişlerdir [3].

Zhizheng, Pascal matrisini genelleştirmişlerdir. Bu matrisleri birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal Matrisi olarak tanımlamış ve faktörize etmişlerdir. Genelleştirilmiş Pascal matrisini, eklemeli matrisler yardımıyla çarpanlara ayırmışlardır. Simetrik genelleştirilmiş Pascal matrisinden bahsetmişler ve Cholesky çarpanlamasını vermişlerdir. Birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrislerinin tersini ve determinantlarını vermişlerdir [4].

Zhizheng ve Maixue, genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisini iki farklı yolla elde etmişlerdir. Birincisi alt üçgensel matris  $\Phi_n[x, y]$ , diğeri de simetrik matris  $\Psi_n[x, y]$ 'dir.  $\Phi_n[x, y]$  genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisinin, özel eklemeli

matrisler yardımıyla çarpanlarına ayrılabilceğini ve  $\Psi_n[x, y]$  simetrik genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisinin ise  $\Theta_n[xy]\Phi_n^T[y, \frac{1}{x}]$  veya  $\Phi_n[x, y]P_n^T[\frac{y}{x}]$ 'e eşit olduğunu göstermişlerdir.  $\Psi_n[x, y]$  matrisinin tersini,  $\Phi_n[x, y]$ ,  $\Phi_n^{-1}[x, y]$ ,  $\Psi_n[x, y]$  ve  $\Psi_n^{-1}[x, y]$  matrislerinin determinantlarını vermişlerdir [5].

Krot, Fibonomiyel katsayıların tanımını ve özelliklerini vermişlerdir [6].

Cheon ve Kim, sırasıyla Stirling sayılarının birinci çeşidi  $s(n, k)$  ve ikinci çeşidi  $S(n, k)$  dan Pascal tipli matrisleri elde etmişlerdir. Bu matrisleri, Pascal matrisleri ile çarpanlarına ayırmışlardır. Vandermonde matrisinin, LDU-çarpanlarını elde etmişlerdir. Bundan başka bazı iyi bilinen kombinatorik özdeşliklerin, Stirling sayılarının matris gösteriminden elde edileceğini belirtmişlerdir. Bu matrislerin bir veya iki değişkenle genelleştirilebileceğinden bahsetmişlerdir [7].

Biz bu makalenin ilk bölümünde; Pascal matrisinin tanımını verdik ve Pascal matrisinin tersini tanımladık. Pascal matrisini, birinci ve ikinci çeşit olarak genelleştirdik. Genelleştirilmiş Pascal matrislerini  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı olarak genişlettik. Bu matrisler arasındaki ilişkiyi verdik. Fibonacci sayıları yardımıyla Fibonacci matrisini, Pell sayıları yardımı ile de Pell matrisini tanımladık. Fibonacci ve Pell matrislerini,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı olarak genelleştirdik. Pascal matrislerinin, Fibonacci ve Pell matrisleri yardımıyla çarpanlara ayrılabilceğini gösterdik.

İkinci bölümde Fibonomiyel katsayılarını ve Fibonomiyel katsayılar yardımıyla Pascal matrisini tanımladık. Fibonomiyel Pascal matrisini  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı olarak genelleştirdik. Fibonomiyel katsayıları kullanarak, Binom açılımını tanımladık. Genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisleri, birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisleri ile Fibonomiyel Pascal matrisleri arasındaki ilişkiyi verdik. Fibonomiyel Pascal matrisinin, Fibonacci matrisi yardımıyla çarpanlarına ayrılabilceğini gösterdik.

## 2. TANIM VE ÖN BİLGİLER

### 2.1. Tanım

$F_1 = 1, F_2 = 1$  olmak üzere  $n > 2$  için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir. Buna göre ilk onbeş Fibonacci sayıları aşağıda verilmiştir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

### 2.2. Tanım

$n$ . Fibonacci sayısı  $F_n$  ve

$$f_{ij} = \begin{cases} F_{i-j+1}, & i - j + 1 \geq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipindeki  $\mathcal{F}_n = (f_{ij})$  matrisine Fibonacci matrisi denir.  $n = 5$  ve  $n = 10$  için Fibonacci matrisleri

$$\mathcal{F}_5 = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 \\ F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 \\ F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 \\ F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 \end{bmatrix}_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10} &= \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 \\ F_8 & F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 \\ F_9 & F_8 & F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 \\ F_{10} & F_9 & F_8 & F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 55 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Fibonacci matrisleri aşağıdaki gibi  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı olarak genelleştirmek mümkündür.

$$f(x; i, j) = \begin{cases} F_{i-j+1} x^{i-j}, & i - j + 1 \geq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.2)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipindeki  $\mathcal{F}_n[x] = \left( f(x; i, j) \right)$  matrisine genelleştirilmiş Fibonacci matrisi denir.

$$f(x, y; i, j) = \begin{cases} F_{i-j+1} x^{i-j} y^{i-j}, & i - j + 1 \geq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.3)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipindeki  $\mathcal{F}_n[x, y] = \left( f(x, y; i, j) \right)$  matrisine genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisi denir.

$n = 5$  için genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xy & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2y^2 & xy & 1 & 0 & 0 \\ 3x^3y^3 & 2x^2y^2 & xy & 1 & 0 \\ 5x^4y^4 & 3x^3y^3 & 2x^2y^2 & xy & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

olup, Eş. 2.3 de  $y = 1$  seçilirse,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ 3x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 \\ 5x^4 & 3x^3 & 2x^2 & x & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

genelleştirilmiş Fibonacci matrisi ve Eş. 2.3 de  $x = y = 1$  seçilirse Eş. 2.1 deki Fibonacci matrisi elde edilir.

## 2.1. Teorem

$\mathcal{F}_n[x, y]$ , Eş. 2.3 deki genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisi olmak üzere,

$$f'(x, y, i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -1, & 1 \leq i - j \leq 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\mathcal{F}'_n[x, y] = \left( f'(x, y, i, j) \right)$  matrisi, genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonacci matrisi  $\mathcal{F}_n[x, y]$  'nin tersidir [3].

### 2.3. Tanım

$a_1 = 1, a_2 = 2$  olmak üzere  $n > 2$  için

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Pell sayıları denir. Buna göre ilk onbeş Pell sayıları aşağıda verilmiştir.

1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 17223, 40187, 97597, 235381.

### 2.4. Tanım

$n$ . Pell sayısı  $a_n$  ve

$$s_{ij} = \begin{cases} a_{i-j+1}, & i - j + 1 \geq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı  $n \times n$  tipindeki  $S_n = (s_{ij})$  matrisine Pell matrisi denir.  $n = 10$  için Pell matrisi

$$S_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 12 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 408 & 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 985 & 408 & 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2378 & 985 & 408 & 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

### 3. PASCAL MATRİSLERİ

#### 3.1. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $P_n = (p_{ij})$  matrisine Pascal matrisi denir.

*Örnek*

$n = 5$  ve  $n = 10$  için Pascal matrisi

$$\begin{aligned} P_5 &= \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \end{aligned}$$

biçimindedir.

$$\begin{aligned}
P_{10} &= \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} & 0 & 0 \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} & \binom{8}{5} & \binom{8}{6} & \binom{8}{7} & \binom{8}{8} & 0 \\ \binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} & \binom{9}{5} & \binom{9}{6} & \binom{9}{7} & \binom{9}{8} & \binom{9}{9} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

### 3.1. Teorem

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$q_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $Q_n = (q_{ij})_{n \times n}$  matrisi Pascal matrisinin tersidir, yani

$$Q_n = P_n^{-1} \text{ dir.}$$

*İspat*

$$(P_n Q_n)_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik} q_{kj} = \delta_{ij}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$i = j$  ise

$$(P_n Q_n)_{ii} = \sum_{k=1}^n p_{ik} q_{ki} = p_{ii} q_{ii} = 1$$

$i < j$  ise

$$(P_n Q_n)_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik} q_{kj} = \sum_{k=1}^i p_{ik} q_{kj} + \sum_{k=i+1}^n p_{ik} q_{kj} = 0$$

$j < i$  ise

$i = j + l$  olsun.

$$\begin{aligned} (P_n Q_n)_{ij} &= \sum_{k=0}^l p_{j+l,j+k} q_{j+k,j} \\ &= \sum_{k=0}^l \binom{j+l-1}{j+k-1} \binom{j+k-1}{j-1} (-1)^k \\ &= \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!l!} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!k!} (-1)^k \\ &= \binom{j+l-1}{j-1} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

$1 \leq i, j \leq n$  için,  $n \times n$  tipinde  $L_n$  ve  $M_n$  matrisleri

$$L_n = (l_{ij}), \quad l_{ij} = \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1} \quad (3.1)$$

$$M_n = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \binom{i-1}{j-1} - 2\binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlansın [2].

### 3.2. Teorem

$n \times n$  tipinden  $P_n$ ,  $\mathcal{F}_n$  ve  $L_n$  matrisleri sırasıyla Pascal matrisi, Fibonacci matrisi ve Eş. 3.1 ile tanımlı matrisler olmak üzere,

$$P_n = \mathcal{F}_n L_n$$

dır [2].

### 3.3. Teorem

$n \times n$  tipinden  $P_n$ ,  $S_n$  ve  $M_n$  matrisleri sırasıyla Pascal matrisi, Pell matrisi ve Eş. 3.2 ile tanımlı matrisler olmak üzere,

$$P_n = S_n M_n$$

dır [2].

*Örnek*

$$\mathcal{F}_4 L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P_4$$

$$S_4 M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P_4$$

Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Örnek 3.2, bize Pascal matrislerinin Fibonacci, Pell matrisleri yardımıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermektedir.

### 3.2. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$P_n(x; i, j) = \begin{cases} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (3.3)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $P_n[x] = (P_n(x; i, j))$  matrisine birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi denir [4].

$$\Theta_n(x; i, j) = \begin{cases} x^{i+j} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (3.4)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $\Theta_n[x] = (\Theta_n(x; i, j))$  matrisine ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi denir [4].

$$\Phi_n(x, y; i, j) = \begin{cases} x^{i-j} y^{i+j-2} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (3.5)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $\Phi_n[x, y] = (\Phi_n(x, y; i, j))$  matrisine genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisi denir [5].

*Örnek*

$n = 5$  için birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi, ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi ve genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisi sırasıyla,

$$P_5[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 & 0 \\ x^4 & 4x^3 & 6x^2 & 4x & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$\Theta_5[x] = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & x^4 & 0 & 0 & 0 \\ x^4 & 2x^5 & x^6 & 0 & 0 \\ x^5 & 3x^6 & 3x^7 & x^8 & 0 \\ x^6 & 4x^7 & 6x^8 & 4x^9 & x^{10} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$\Phi_5[x, y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6 & 0 \\ x^4y^4 & 4x^3y^5 & 6x^2y^6 & 4xy^7 & y^8 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

dir.

Bu matrisler arasındaki ilişki,

$$\Phi_n[x, 1] = P_n[x]$$

$$\Phi_n[1, 1] = P_n[1] = P_n = \Theta_n[1] = \Theta_n$$

$$\Phi_n[-1, 1] = P_n^{-1} = Q_n = \Theta_n[-1]$$

biçimindedir.

### 3.4. Teorem

Her  $x, y \in \mathbb{R}$  için,

$$P_n[x]P_n[y] = P_n[x + y]$$

dır [1].

*İspat*

$x, y \in \mathbb{R}$  için  $P_n[x]P_n[y] = \left(C_n(x, y; i, j)\right)$  olsun. Matris çarpımından

$$C_n(x, y; i, j) = \sum_{k=1}^n x^{i-k} \binom{i-1}{k-1} y^{k-j} \binom{k-1}{j-1}$$

olur. Her  $i, j, k$  pozitif tamsayıları için

$$\binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}$$

eşitliği gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned} C_n(x, y; i, j) &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=1}^n x^{i-k} y^{k-j} \binom{i-j}{k-j} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{t=1-j}^{n-j} \binom{i-j}{t} x^{i-j-t} y^t \\ &= \binom{i-1}{j-1} (x + y)^{i-j} \\ &= P_n(x + y; i, j) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$P_n[x]P_n[y] = P_n[x + y]$$

elde edilir.

### 3.5. Teorem

$P_n[x]$ ,  $n \times n$  tipinde birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi ve  $P_n$ , Pascal matrisi olmak üzere her  $j, k \in \mathbb{Z}$  ve  $k \neq 0$  için

$$\text{a) } P_n^j = P_n[j]$$

$$\text{b) } P_n^j = \left( P_n \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \right)^k$$

dir [1].

*Örnek*

$4 \times 4$  tipinden  $P_4$  Pascal matrisinin 5. kuvvetini hesaplayalım.

$$P_4^5 = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right)^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 1 & 0 \\ 125 & 75 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Oysa birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisinde  $x = 5$  alınırsa

$$P_4[5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 1 & 0 \\ 125 & 75 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

olup,  $P_4[5] = P_4^5$  olduğu görülür.

*Örnek*

$P_4[\frac{4}{5}]$  matrisinin 5. kuvvetini bulalım.

$$\begin{aligned} \left(P_4\left[\frac{4}{5}\right]\right)^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{25} & \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ \frac{64}{125} & \frac{48}{25} & \frac{12}{5} & 1 \end{bmatrix}^5 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 1 & 0 \\ 64 & 48 & 12 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir.

*Örnek*

$P_6[\frac{4}{10}]$  matrisinin 10. kuvvetini bulalım.

$$\begin{aligned} \left(P_5\left[\frac{4}{10}\right]\right)^{10} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{10} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16}{100} & \frac{8}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{1000} & \frac{48}{100} & \frac{12}{10} & 1 & 0 \\ \frac{256}{1000} & \frac{256}{1000} & \frac{96}{100} & \frac{16}{10} & 1 \end{bmatrix}^{10} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 48 & 12 & 1 & 0 \\ 256 & 256 & 96 & 16 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4. FİBONOMİYEL KATSAYILI PASCAL MATRİSLERİ

Bu bölümde, Fibonomiyel katsayıları kullanılarak tanımlanan ve Pascal matrislerinin bir genelleştirilmesi olan matrislerin yapısı incelenecektir.

##### 4.1. Tanım

$n \geq k$  doğal sayıları için  $F_n$ ,  $n$ . Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_1}{(F_{n-k} F_{n-k-1} \dots F_1)(F_k F_{k-1} \dots F_1)} = \prod_{i=1}^k \frac{F_{n-i+1}}{F_i} \quad (4.1)$$

ve

$$\binom{n}{0}_{\mathcal{F}} = \binom{n}{n}_{\mathcal{F}} = 1, \quad n < k \text{ için } \binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = 0$$

biçiminde tanımlı sayılara Fibonomiyel katsayılar denir [3].

$$[n]_{\mathcal{F}}! = F_n F_{n-1} \dots F_1 \text{ ve } [0]_{\mathcal{F}}! = 1$$

olmak üzere Eş. 4.1

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = \frac{[n]_{\mathcal{F}}!}{[n-k]_{\mathcal{F}}! [k]_{\mathcal{F}}!}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

*Özellik*

Fibonomiyel katsayıların indirgeme bağıntısı

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = F_{k+1} \binom{n-1}{k}_{\mathcal{F}} + F_{n-k-1} \binom{n-1}{k-1}_{\mathcal{F}}$$

şeklindedir [3].

### Özellik

Her  $i, j, k$  doğal sayıları için

$$\binom{i}{k}_{\mathcal{F}} \binom{k}{j}_{\mathcal{F}} = \binom{i}{j}_{\mathcal{F}} \binom{i-j}{k-j}_{\mathcal{F}}$$

dir.

### Özellik

a)  $\binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = \binom{n}{n-k}_{\mathcal{F}}$  (Simetri Özelliği)

b)  $F_{n-k} \binom{n}{k}_{\mathcal{F}} = F_n \binom{n-1}{k}_{\mathcal{F}}$

dir [6].

Eş. 4.1 deki Fibonomiyel katsayıların tanımını, polinomlar için de genelleştirmek mümkündür.

### 4.2. Tanım

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}(x)} = \frac{F_n(x)F_{n-1}(x)\dots F_1(x)}{F_{n-k}(x)F_{n-k-1}(x)\dots F_1(x)F_k(x)F_{k-1}(x)\dots F_1(x)} = \prod_{i=1}^k \frac{F_{n-i+1}(x)}{F_i(x)}$$

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}(x)} = \frac{[n]_{\mathcal{F}(x)}!}{[n-k]_{\mathcal{F}(x)}! [k]_{\mathcal{F}(x)}!}$$

biçiminde de tanımlanır [12].

*Özellik*

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{F}(x)} = F_{k-1}(x) \binom{n-1}{k}_{\mathcal{F}(x)} + F_{n-k+1}(x) \binom{n-1}{k-1}_{\mathcal{F}(x)}$$

şeklindedir [12].

Şimdi, Fibonomiyel katsayılar yardımıyla Pascal matrisini tanımlayalım.

#### 4.3. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  ve  $\binom{i}{j}_{\mathcal{F}}$  Fibonomiyel katsayısını göstermek üzere

$$u_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$   $U_n = (u_{ij})$  matrisine Fibonomiyel Pascal matrisi denir [3].

*Örnek*

$n = 5$  için Fibonomiyel Pascal matrisi

$$U_5 = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0}_{\mathcal{F}} & \binom{1}{1}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0}_{\mathcal{F}} & \binom{2}{1}_{\mathcal{F}} & \binom{2}{2}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 \\ \binom{3}{0}_{\mathcal{F}} & \binom{3}{1}_{\mathcal{F}} & \binom{3}{2}_{\mathcal{F}} & \binom{3}{3}_{\mathcal{F}} & 0 \\ \binom{4}{0}_{\mathcal{F}} & \binom{4}{1}_{\mathcal{F}} & \binom{4}{2}_{\mathcal{F}} & \binom{4}{3}_{\mathcal{F}} & \binom{4}{4}_{\mathcal{F}} \end{bmatrix}_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

biçimindedir.

#### 4.1 Fibonomiyel katsayılı Pascal matrislerinin özellikleri

##### 4.1. Teorem

$b_1 = 1$  ve  $n \geq 2$  için

$$b_n = - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \binom{n-1}{i-1}_f$$

olmak üzere,

$$v_{ij} = \begin{cases} b_{i-j+1} \binom{i-1}{j-1}_f, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $V_n = (v_{ij})_{n \times n}$  matrisi,  $U_n = (u_{ij})_{n \times n}$  Fibonomiyel Pascal matrisinin tersidir, yani  $V_n = U_n^{-1}$  dir [3].

*İspat*

$$(U_n V_n)_{ij} = \sum_{s=1}^n u_{is} v_{sj} \text{ olsun.}$$

$i = j$  ise

$$(U_n V_n)_{ii} = \sum_{s=1}^n u_{is} v_{si} = u_{ii} v_{ii} = 1$$

$i < j$  ise

$$(U_n V_n)_{ij} = \sum_{s=1}^n u_{is} v_{sj} = \sum_{s=1}^i u_{is} v_{sj} + \sum_{s=i+1}^n u_{is} v_{sj} = 0$$

$j < i$  ise, ozaman

$$\begin{aligned}
(U_n V_n)_{ij} &= \sum_{s=1}^n u_{is} v_{sj} \\
&= \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} b_1 \binom{j-1}{j-1}_{\mathcal{F}} + \binom{i-1}{j}_{\mathcal{F}} b_2 \binom{j}{j-1}_{\mathcal{F}} + \dots \\
&\quad + \binom{i-1}{i-1}_{\mathcal{F}} b_{i-j+1} \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} \\
&= \frac{[i-1]_{\mathcal{F}}!}{[j-1]_{\mathcal{F}}!} \left( \frac{b_1}{[i-j]_{\mathcal{F}}!} + \frac{b_2}{[i-j-1]_{\mathcal{F}}! [1]_{\mathcal{F}}!} + \dots + \frac{b_{i-j+1}}{[i-j]_{\mathcal{F}}!} \right) \\
&= \frac{[i-1]_{\mathcal{F}}!}{[j-1]_{\mathcal{F}}! [i-j]_{\mathcal{F}}!} \left( \frac{b_1 [i-j]_{\mathcal{F}}!}{[i-j]_{\mathcal{F}}!} + \dots + \frac{b_{i-j+1} [i-j]_{\mathcal{F}}!}{[i-j]_{\mathcal{F}}!} \right) \\
&= \frac{[i-1]_{\mathcal{F}}!}{[j-1]_{\mathcal{F}}! [i-j]_{\mathcal{F}}!} \left( b_1 \binom{i-j}{0}_{\mathcal{F}} + \dots + b_{i-j+1} \binom{i-j}{i-j}_{\mathcal{F}} \right) \\
&= \frac{[i-1]_{\mathcal{F}}!}{[j-1]_{\mathcal{F}}! [i-j]_{\mathcal{F}}!} \left( \sum_{k=1}^{i-j} b_k \binom{i-j}{k-1}_{\mathcal{F}} + b_{i-j+1} \binom{i-j}{i-j}_{\mathcal{F}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

*Örnek*

$n = 4$  için  $U_4$  Fibonomiyel Pascal matrisinin tersi

$$V_4 = \begin{bmatrix} b_1 \binom{0}{0}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 \\ b_2 \binom{1}{0}_{\mathcal{F}} & b_1 \binom{1}{1}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 \\ b_3 \binom{2}{0}_{\mathcal{F}} & b_2 \binom{2}{1}_{\mathcal{F}} & b_1 \binom{2}{2}_{\mathcal{F}} & 0 \\ b_4 \binom{3}{0}_{\mathcal{F}} & b_3 \binom{3}{1}_{\mathcal{F}} & b_2 \binom{3}{2}_{\mathcal{F}} & b_1 \binom{3}{3}_{\mathcal{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

şeklindedir.

#### 4.4. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$U_n(x; i, j) = \begin{cases} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $U_n[x] = \left( U_n(x; i, j) \right)$  matrisine birinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi denir.

*Örnek*

$n = 6$  için birinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi

$$U_6[x] = \begin{bmatrix} x^0 \binom{0}{0}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^1 \binom{1}{0}_{\mathcal{F}} & x^0 \binom{1}{1}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 \binom{2}{0}_{\mathcal{F}} & x^1 \binom{2}{1}_{\mathcal{F}} & x^0 \binom{2}{2}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 & 0 \\ x^3 \binom{3}{0}_{\mathcal{F}} & x^2 \binom{3}{1}_{\mathcal{F}} & x^1 \binom{3}{2}_{\mathcal{F}} & x^0 \binom{3}{3}_{\mathcal{F}} & 0 & 0 \\ x^4 \binom{4}{0}_{\mathcal{F}} & x^3 \binom{4}{1}_{\mathcal{F}} & x^2 \binom{4}{2}_{\mathcal{F}} & x^1 \binom{4}{3}_{\mathcal{F}} & x^0 \binom{4}{4}_{\mathcal{F}} & 0 \\ x^5 \binom{5}{0}_{\mathcal{F}} & x^4 \binom{5}{1}_{\mathcal{F}} & x^3 \binom{5}{2}_{\mathcal{F}} & x^2 \binom{5}{3}_{\mathcal{F}} & x^1 \binom{5}{4}_{\mathcal{F}} & x^0 \binom{5}{5}_{\mathcal{F}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ x^4 & 3x^3 & 6x^2 & 3x & 1 & 0 \\ x^5 & 5x^4 & 15x^3 & 15x^2 & 5x & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

biçimindedir.

#### 4.5. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$V_n(x; i, j) = \begin{cases} b_{i-j+1} \binom{i-1}{j-1}_x x^{i-j}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $V_n[x] = \left( V_n(x; i, j) \right)$  matrisine genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisinin tersi denir.

*Örnek*

$n = 4$  için genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi'nin tersi

$$\begin{aligned} V_4[x] &= \begin{bmatrix} b_1 \binom{0}{0}_x x^0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 \binom{1}{0}_x x^1 & b_1 \binom{1}{1}_x x^0 & 0 & 0 \\ b_3 \binom{2}{0}_x x^2 & b_2 \binom{2}{1}_x x^1 & b_1 \binom{2}{2}_x x^0 & 0 \\ b_4 \binom{3}{0}_x x^3 & b_3 \binom{3}{1}_x x^2 & b_2 \binom{3}{2}_x x^1 & b_1 \binom{3}{3}_x x^0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ x^3 & 0 & -2x & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Fibonomiyel katsayılar kullanarak, Binom açılımının benzeri

$$(x + {}_x y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_x x^{n-k} y^k$$

şeklinde tanımlanmıştır [6]. Buna göre

$$(x + {}_x y) = \binom{1}{0}_x x + \binom{1}{1}_x y = x + y$$

$$(x + {}_x y)^2 = \binom{2}{0}_x x^2 + \binom{2}{1}_x xy + \binom{2}{2}_x y^2 = x^2 + xy + y^2$$

$$(x + {}_{\mathcal{F}} y)^3 = \binom{3}{0}_{\mathcal{F}} x^3 + \binom{3}{1}_{\mathcal{F}} x^2 y + \binom{3}{2}_{\mathcal{F}} x y^2 + \binom{3}{3}_{\mathcal{F}} y^3 = x^3 + 2x^2 y + 2x y^2 + y^3$$

biçimindedir.

#### 4.2. Teorem

Her  $x, y \in \mathbb{R}$  için

$$U_n[x]U_n[y] = U_n[x + {}_{\mathcal{F}} y]$$

eşitliği geçerlidir.

*İspat*

$$U_n[x]U_n[y] = \left( C_n(x, y; i, j) \right) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} C_n(x, y; i, j) &= \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1}_{\mathcal{F}} x^{i-k} \binom{k-1}{j-1}_{\mathcal{F}} y^{k-j} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} \binom{i-j}{k-j}_{\mathcal{F}} x^{i-k} y^{k-j} \\ &= \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} \sum_{t=1-j}^{n-j} \binom{i-j}{t}_{\mathcal{F}} x^{i-j-t} y^t \\ &= \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} (x + {}_{\mathcal{F}} y)^{i-j} \\ &= \left( U_n[x + {}_{\mathcal{F}} y] \right)_{ij} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U_n[x]U_n[y] = U_n[x +_f y]$$

elde edilir.

*Örnek*

$n = 4$  için,

$$\begin{aligned} U_4[x]U_4[y] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \\ x^3 & 2x^2 & 2x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 0 \\ y^2 & y & 1 & 0 \\ y^3 & 2y^2 & 2y & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 & 0 \\ x^2+xy+y^2 & x+y & 1 & 0 \\ x^3+2x^2y+2xy^2+y^3 & 2(x^2+xy+y^2) & 2(x+y) & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x+_f y) & 1 & 0 & 0 \\ (x+_f y)^2 & (x+_f y) & 1 & 0 \\ (x+_f y)^3 & 2(x+_f y)^2 & 2(x+_f y) & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\ &= U_4[x+_f y] \end{aligned}$$

şeklindedir.

#### 4.6. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$M_n(x; i, j) = \begin{cases} x^{i+j-2} \binom{i-1}{j-1}_f, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $M_n[x] = \left( M_n(x; i, j) \right)$  matrisine ikinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi denir.

*Örnek*

$n = 4$  için ikinci çeşit genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi

$$\begin{aligned}
 M_n[x] &= \begin{bmatrix} \binom{0}{0}_{\mathcal{F}} x^0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0}_{\mathcal{F}} x^1 & \binom{1}{1}_{\mathcal{F}} x^2 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0}_{\mathcal{F}} x^2 & \binom{2}{1}_{\mathcal{F}} x^3 & \binom{2}{2}_{\mathcal{F}} x^4 & 0 \\ \binom{3}{0}_{\mathcal{F}} x^3 & \binom{3}{1}_{\mathcal{F}} x^4 & \binom{3}{2}_{\mathcal{F}} x^5 & \binom{3}{3}_{\mathcal{F}} x^6 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x^2 & 0 & 0 \\ x^2 & x^3 & x^4 & 0 \\ x^3 & 2x^4 & 2x^5 & x^6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

#### 4.7. Tanım

$1 \leq i, j \leq n$  için,

$$\Phi_n(x, y; i, j)_{\mathcal{F}} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} x^{i-j} y^{i+j-2}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (4.2)$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}} = \left( \Phi_n(x, y; i, j)_{\mathcal{F}} \right)$  matrisine genişletilmiş genelleştirilmiş Fibonomiyel Pascal matrisi denir.

Bu matrisler arasındaki ilişki

$$\Phi_n[x, 1]_{\mathcal{F}} = U_n[x]$$

$$\Phi_n[1, y]_{\mathcal{F}} = M_n[y]$$

$$\Phi_n[1, 1]_{\mathcal{F}} = U_n = U_n[1] = M_n[1] = M_n$$

$$\Phi_n[x, -1]_{\mathcal{F}} = U_n[-x]$$

biçimindedir.

#### 4.2 Fibonomiyel Katsayılı Pascal Matrislerinin Çarpanlaması

Şimdi Fibonomiyel katsayılar yardımıyla Eş. 2.1 deki  $L_n$  matrisine benzer şekilde  $L_n[\mathcal{F}]$  matrisini

$$\left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{ij} = \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-2}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-3}{j-1}_{\mathcal{F}}$$

şeklinde tanımlayalım.  $L_n[\mathcal{F}]$  matrisinin tanımından

$$\left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{11} = 1, \left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{21} = 0, \left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{22} = 1,$$

$j \geq 2$  için

$$\left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{1j} = 0,$$

$j \geq 3$  için

$$\left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{2j} = 0,$$

$i \geq 3$  için

$$\left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{i1} = -1 \text{ ve } \left(L_n[\mathcal{F}]\right)_{i2} = 0$$

dir.  $L_n[\mathcal{F}]$  matrisini aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz.

$$\left(L_n[\mathcal{F}; x]\right)_{ij} = \left(\binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-2}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-3}{j-1}_{\mathcal{F}}\right) x^{i-j}$$

$$\left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{ij} = \left(\binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-2}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-3}{j-1}_{\mathcal{F}}\right) x^{i-j} y^{i+j-2}$$

#### 4.3. Teorem

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$  için

$$\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_n[x, y] L_n[\mathcal{F}; x, y]$$

dır.

*İspat*

$\mathcal{F}_n[x, y]$  matrisinin tersi  $\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]$  dir.

$\mathcal{F}_n^{-1}[x, y] \Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}} = L_n[\mathcal{F}; x, y]$  olduğunu gösterelim.

$j \geq 2$  için

$$\left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{1j} = 0$$

$$\left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{11} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{11} = 1$$

ve

$$\left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{11} = 1 = \sum_{k=1}^n \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{1k} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{k1},$$

$j \geq 2$  için

$$\left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{1j} = 0 \quad \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{1j} = 0$$

olup,

$$\sum_{k=1}^n \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{1k} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{kj} = 0 = \left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{1j},$$

$j \geq 3$  için

$$\left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{2j} = 0, \quad \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{21} = -1, \quad \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{22} = 1$$

olup,

$$\sum_{k=1}^n \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{2k} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{k1} = 0 = \left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{21}$$

$i = 3, 4, \dots, n$  için

$$\sum_{k=1}^n \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{ik} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{k1} = \left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{i1}$$

$i \geq 3$  ve  $j \geq 2$  için

$$\sum_{k=1}^n \left(\mathcal{F}_n^{-1}[x, y]\right)_{ik} \left(\Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}}\right)_{kj} = \left(L_n[\mathcal{F}; x, y]\right)_{ij}$$

Böylece

$$\mathcal{F}_n^{-1}[x, y] \Phi_n[x, y]_{\mathcal{F}} = L_n[\mathcal{F}; x, y]$$

elde edilir.

*Örnek*

$n = 4$  için,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_4[x, y] L_4[\mathcal{F}; x, y] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & 1 & 0 & 0 \\ 2x^2y^2 & xy & 1 & 0 \\ 3x^3y^3 & 2x^2y^2 & xy & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 0 \\ -x^2y^2 & 0 & y^4 & 0 \\ -x^3y^3 & 0 & xy^5 & y^6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 2x^2y^4 & 2xy^5 & y^6 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\
 &= \Phi_4[x, y]_{\mathcal{F}}
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

#### 4.1. Sonuç

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$  için

$$U_n[x] = \mathcal{F}_n[x] L_n[\mathcal{F}; x]$$

eşitliği geçerlidir.

#### 4.2. Sonuç

$$U_n = \mathcal{F}_n L_n[\mathcal{F}]$$

eşitliği geçerlidir.

#### 4.4. Teorem

$$r_{ij} = \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-1}{j}_{\mathcal{F}} - \binom{i-1}{j+1}_{\mathcal{F}}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinde matris  $R_n[\mathcal{F}] = (r_{ij})$  olsun. Bu durumda

$$U_n = R_n[\mathcal{F}] \mathcal{F}_n$$

dir.

*İspat*

$U_n \mathcal{F}_n^{-1} = R_n[\mathcal{F}]$  olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.  $i \geq 1$  için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n U_{ik} F_{k1}^{-1} &= \binom{i-1}{0}_{\mathcal{F}} \times 1 + \binom{i-1}{1}_{\mathcal{F}} \times (-1) + \binom{i-1}{2}_{\mathcal{F}} \times (-1) \\ &= 1 - F_{i-1} - F_{i-1} F_{i-2} \\ &= R_n[\mathcal{F}; i, 1] \end{aligned}$$

$i \geq 1$  ve  $j \geq 2$  için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n U_{ik} F_{kj}^{-1} &= \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} \times 1 + \binom{i-1}{j}_{\mathcal{F}} \times (-1) + \binom{i-1}{j+1}_{\mathcal{F}} \times (-1) \\ &= \binom{i-1}{j-1}_{\mathcal{F}} - \binom{i-1}{j}_{\mathcal{F}} - \binom{i-1}{j+1}_{\mathcal{F}} \\ &= R_n[\mathcal{F}; i, j] \end{aligned}$$

Böylece istenilen gösterilmiş olur.

*Örnek*

$$R_4[\mathcal{F}] \mathcal{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = U_4$$

şeklindedir.

4.5. Teorem

$$V_n(\mathcal{F}, x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & (x + {}_{\mathcal{F}}1) & \dots & (x + {}_{\mathcal{F}}n - 1) \\ x^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}1)^2 & \dots & (x + {}_{\mathcal{F}}n - 1)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^{n-1} & (x + {}_{\mathcal{F}}1)^{n-1} & \dots & (x + {}_{\mathcal{F}}n - 1)^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

şeklinde tanımlı matris bir  $n \times n$  tipinde Vandermonde matrisi olmak üzere

$$U_n V_n(\mathcal{F}, x) = V_n(\mathcal{F}, (x + {}_{\mathcal{F}}1))$$

dir.

*İspat*

$V_n(\mathcal{F}, x)$  matrisinin tanımından  $(V_n(\mathcal{F}, x))_{ij} = (x + {}_{\mathcal{F}}(j - 1))^{i-1}$  olup,

$$\begin{aligned} (U_n \cdot V_n(\mathcal{F}, x))_{ij} &= \sum_{k=1}^i \binom{i-1}{k-1}_{\mathcal{F}} (x + {}_{\mathcal{F}}(j-1))^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k}_{\mathcal{F}} (x + {}_{\mathcal{F}}(j-1))^k \\ &= (V_n(\mathcal{F}, (x + {}_{\mathcal{F}}1)))_{ij} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U_n \cdot V_n(\mathcal{F}, x) = V_n(\mathcal{F}, (x + {}_{\mathcal{F}}1))$$

elde edilir.

*Örnek*

$n = 4$  olarak alırsak, o zaman

$$\begin{aligned}
 U_4 V_4(\mathcal{F}, x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x + {}_{\mathcal{F}}1 & x + {}_{\mathcal{F}}2 & x + {}_{\mathcal{F}}3 \\ x^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}1)^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}2)^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}3)^2 \\ x^3 & (x + {}_{\mathcal{F}}1)^3 & (x + {}_{\mathcal{F}}2)^3 & (x + {}_{\mathcal{F}}3)^3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (x + {}_{\mathcal{F}}1) & (x + {}_{\mathcal{F}}2) & (x + {}_{\mathcal{F}}3) & (x + {}_{\mathcal{F}}4) \\ (x + {}_{\mathcal{F}}1)^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}2)^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}3)^2 & (x + {}_{\mathcal{F}}4)^2 \\ (x + {}_{\mathcal{F}}1)^3_{\mathcal{F}} & (x + {}_{\mathcal{F}}2)^3 & (x + {}_{\mathcal{F}}3)^3 & (x + {}_{\mathcal{F}}4)^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\
 &= V_4\left(\mathcal{F}, (x + {}_{\mathcal{F}}1)\right)
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

## KAYNAKLAR

1. Call G. S., Vellaman, D.J., "Pascal's Matrices", *The American Mathematical Monthly*, 100: 372-376 (1993).
2. Lee, G-Y., Cho, S-H., "The Generalized Pascal Matrix via The Generalized Fibonacci Matrix and The Generalized Pell Matrix", *Journal of the Korean Mathematical Society*, 45(2): 479-491 (2008).
3. Tuglu, N., Koçer, E.G., "The Pascal Matrix Associated with Fontené-Ward Generalized Binomial Coefficients", *Utilitas Mathematica*, 45(2): 479-491 (2008).
4. Zhizheng, Z., "The Linear Algebra of The Generalized Pascal Matrix", *Linear Algebra and its Applications*, 250: 51-60 (1997).
5. Zhizheng, Z., Maixue, L., "An Extension of the Generalized Pascal Matrix and it's Algebraic Properties", *Linear Algebra and its Applications*, 271: 169-177 (1998).
6. Krot, E., "An Introduction to Finite Fibonomial Calculus", *Central European Journal of Mathematics*, 2(5): 754-766 (2004).
7. Cheon, G-S., Kim, J-S., "Stirling Matrix via Pascal Matrix", *Linear Algebra and its Applications*, 329: 49-59 (2001).
8. Zhang, Z., Wang, T., "Generalized Pascal Matrix and Recurrence Sequences", *Linear Algebra and its Applications*, 283: 289-299 (1998).
9. Bayat, M., Teimoori, H., "The Linear Algebra of the Generalized Pascal Functional Matrix", *Linear Algebra and its Applications*, 295: 81-89 (1999).
10. Spivey, M. Z., Zimmer, A. M., "Symmetric Polynomials, Pascal Matrices and Stirling Matrices", *Linear Algebra and its Applications*, 428: 1127-1134 (2008).
11. Edelman, A., Strang, G., "Pascal Matrices", *The American Mathematical Monthly* 111: 189-197 (2004).
12. Richardson, T., "The Filbert matrix", *The Fibonacci Quarterly*, 39(3): 268-275 (2001).
13. Zheng, D-Y., "q-analogue of the Pascal matrix", *Ars Combinatoria*, 87: 321-336 (2008).
14. Zhang, Z., Wang, X., "A factorization of the symmetric Pascal matrix involving the Fibonacci matrix", *Discrete Applied Mathematics*, 155(17): 2371-2376 (2007).

15. Yang, S-L., You, H. "On a relationship between Pascal matrix and Vandermonde matrix", *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 26(1): 33-39(2006).
16. Kwasniewski, A. K., "psi-Pascal and q-pi-Pascal matrices an accessible factory of one source identities and resulting applications", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, 10(2): 111-120 (2005).
17. Bacher, R., Chapman, R., "Symmetric Pascal matrices modulo p." *European Journal of Combinatoric*, 25(4): 459-473 (2004).
18. Edelman, A., Strang, G., "Pascal matrices", *The American Mathematical Monthly*, 111(3): 189-197 (2004).
19. Yang, S., "The Jordan factorization of Pascal matrices", *Journal of Gansu University of Technology (Engl. Ed.)*, 5(1): 90-96 (2001).
20. Cheon, G.-S., "Factorizations of the generalized Pascal matrix", *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 3(3): 361-369 (2001).
21. Maltais, P., Gulliver, T.A., "Pascal matrices and Stirling numbers", *Applied Mathematics Letters*, 11(2): 7-11 (1998).
22. Brawer, R., Pirovino, M., "The linear algebra of the Pascal matrix", *Linear Algebra and its Applications*, 174: 13-23 (1992).
23. Cohen, A. M., "The inverse of a Pascal matrix", *The Mathematical Gazette*, 59(408): 111-112 (1975).
24. Lawden, G. H., "Pascal matrices", *The Mathematical Gazette*, 56(398): 325-327 (1972).
25. Trojovský, P. "On some identities for the Fibonomial coefficients via generating function", *Discrete Applied Mathematics*, 155(15): 2017-2024 (2007).
26. Seibert, J., Trojovský, P. "On certain identities for the Fibonomial coefficients", *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 32: 119-127 (2005).
27. Seibert, J., Trojovský, P. "On some identities for the Fibonomial coefficients", *Mathematica Slovaca*, 55(1): 9-19 (2005).
28. Gould, H. W., "The bracket function and Fontené-Ward generalized binomial coefficients with application to Fibonomial coefficients", *The Fibonacci Quarterly*, 7: 23-40, 55 (1969).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÇAMDELEN Nilay ABAY  
 Uyruğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 26.01.1983 ANKARA  
 Medeni hali : Evli  
 Telefon : 0 (505) 268 88 05  
 e-mail : nilay.abay@teias.gov.tr.

### Eğitim

| Derece               | Eğitim Birimi                                  | Mezuniyet tarihi |
|----------------------|------------------------------------------------|------------------|
| Tezsiz Yüksek Lisans | Başkent Üniversitesi<br>Matematik Öğretmenliği | 2005             |
| Lisans               | Gazi Üniversitesi<br>Matematik Bölümü          | 2004             |
| Lise                 | Ayrancı Lisesi                                 | 2000             |

### İş Deneyimi

| Yıl       | Yer                   | Görev                |
|-----------|-----------------------|----------------------|
| 2008-     | TEİAŞ Genel Müdürlüğü | Programcı            |
| 2006-2008 | MSB ANT Başkanlığı    | Bilgisayar İşletmeni |
| 2004-2006 | Metod Dershanesi      | Matematik Öğretmeni  |

### Yabancı Dil

İngilizce(Orta)

### Hobiler

Kitap Okumak, Tiyatroya Gitmek, Spor yapmak.