

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN ADI
DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

Mohammed Amer ATIYAH

Danışman:Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2024

Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR danışmanlığında, Mohammed Amer ATIYAH tarafından hazırlanan bu çalışma 17-05-2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesibe MANAV MUTLU

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Genelleştirilmiş Sabit Nokta Teoremlerinin Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 17/05/2024

Mohammed Amer ATIYAH

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

Mohammed Amer ATIYAH

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

Bu tezde Sabit Nokta Teorisi konusunda 1922'den bu yana (Banach, 1922) çalışılan teoremlerin ve büzülme-tip dönüşümlerinin yeniden yorumlandığı ve genişletildiği çalışmalara bakılarak Samet vd.(Samet vd., 2012)'de α - ψ büzülme dönüşümü adında yeni bir kategoride büzülme-tip dönüşümü tanıtıldığı gibi bu dönüşümleri literatürdeki mevcut sabit nokta sonuçlarını özellikle de Banach Büzülme prensibini genişleterek farklı sabit nokta teoremlerini ispatlanmıştır.

2024, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Adi Diferansiyel Denklem, Banach Büzülme Dönüşümü, Metrik, Sabit Nokta Teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

APPLICATIONS OF GENERALIZED FIXED POINT THEOREMS TO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mohammed Amer ATIYAH

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nesrin MANAV TATAR

This thesis explores the studies conducted since 1922 by Banach (Banach, 1922) in the field of Fixed Point Theory, focusing on the theorems and contraction-type transformations. The authors, Samet et al. (Samet vd., 2012), introduce a new category of contraction-type transformation known as the α - ψ contraction transformation, which builds upon and extends the existing research. Furthermore, these conversions have been employed to demonstrate many fixed point theorems, namely expanding upon the Banach Contraction Principle, by citing the established fixed point findings in the literature.

2024, 34 Pages

Keywords: Banach Contraction Transformation, Fixed Point Theorem, Metric, ODE.

TEŞEKKÜR

Tüm yüksek lisans sürecim boyunca yol göstermeleri ve sağladığı kaynaklar ile yanımda olan ve her koşulda bana zaman ayıran danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR' a teşekkür ederim. Bu tezin düzeltilmesinde emeği geçen Sayın Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesibe MANAV MUTLU hocalarıma teşekkür ederim.

Mohammed Amer ATIYAH
Mayıs, 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Motivasyon.....	4
2.1.1. Metrik uzay.....	4
2.1.2. Cauchy dizisi.....	4
2.1.3. Normlu vektör uzayı.....	5
2.1.4. Dışbükeylik (Konvekslik).....	5
2.1.5. Büzülme (Contraction).....	6
2.1.6. Düzgün yakınsama.....	6
2.1.7. Eşsüreklilik (Equicontinues).....	7
2.1.8. Adi diferansiyel denklemler.....	7
2.1.9. Cauchy problemi.....	8
2.1.10.Çözümün varlığı.....	9
2.2. Sabit Nokta Teoremi.....	10
2.2.1. Bir metrik uzayda sabit nokta teoremi.....	11
2.2.1.1 Banach teoremi.....	11
2.2.1.2. Picard-lindelöf teoremi.....	14
3. KURUMSAL TEMELER	18
3.1. Topolojik Uzayda Sabit Nokta Teoremi.....	18
3.1.1. Brouwer sabit nokta teoremi.....	19
3.1.2. Schauder -tychonoff teoremi.....	20
3.1.3. Leray-Schauder prensibi.....	21

4. MATELYAL ve YÖNTEM.....	22
5.ARAŞTIRMA ve BULGULAR	30
5.1. Adi diferansiyel denklemlere uygulamalar.....	30
6. SONUÇLAR	32
KAYNAKLAR	34



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\Leftrightarrow$	Çift taralı gerektirme (gerekli ve yeterli koşul)
$\{x_n\}$	Dizi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
p	Klasik modüler gösterimi
D	Metrik gösterimi
(X, d)	Metrik uzay
w -Cauchy	Modüler cauchy
$(x, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\ \cdot\ : X \rightarrow \mathbb{R}^+$	Normlu vektör uzayı
$\mathbb{R}: (-\infty, +\infty)$	Reel sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
(a, b)	Reel sayıların açık aralığı
$[a, b]$	Reel sayıların kapalı aralığı
$\mathbb{R}^+$	Sıfır dahil pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu

Kısaltmalar

ADD	Adi Diferansiyel Denklemler
BBP	Banach Büzülme Prensibi
DD	Diferansiyel Denklem
SN	Sabit Nokta

1. GİRİŞ

Sabit Nokta Teorisi, ünlü Banach Sabit Nokta Teoremi Banach (1922) ile 1922 yılından bu yana birçok araştırmacının çalışmalarını etkilemiştir. Konu alanında geniş bir literatür birikimi oluşmuştur ve şu anda da çok aktif bir araştırma alanıdır. Sabit nokta teoremleri matematiksel modellerin(integral ve kısmi denklemler, varyasyonel eşitsizlikler, vb.) çözümlerinin varlığını ve tekliğini kanıtlamak için çok önemli araçlardır. Bu teoride bazı önemli temel matematiksel yaklaşımlar bulunmaktadır. Herhangi bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümü için varlık (bir veya daha fazla sayıda sabit noktanın varlığı) $Tx = x$ koşulunu sağlayan $x \in X$ bulunması durumunda söz konusudur. Banach büzülme prensibi de sabit noktanın varlığını tespit eden en temel ve basit sonuçları gösterir. Herhangi bir noktanın sabit nokta olduğunu göstermek için ona iterasyon yöntemi ile yaklaşmak belli bir doğrulukla gerçekleşmelidir(Samet vd., 2012).

Bu metod değişkenli eşitsizlikler, optimizasyon, ve yaklaşım teorisi gibi çeşitli alanlara da uygulanabilmektedirler. Özellikle diferansiyeller ile ilgili sabit nokta teoremleri konusunda da çalışılmaktadır (örn., Abbas vd. 2011; Abbas ve Jungck, 2008; Karapınar vd, 2012; Salimi vd., 2012; Samet vd. 2012). Büzülme-tip koşulları sabit nokta teorisinin, iyi bilindiği şekilde, olmazsa olmazlarıdır.

1922 yılında Banach (1922) tarafından yayımlanan bu önemli araştırma; Banach teoremi olarak adlandırılan teorem ile büzülme-tip dönüşümler için ilk önemli sabit nokta sonuçlarını içermektedir. Ardından 1968 yılında Kannan (1968) yılında yeni tip bir tür büzülme dönüşümü üzerinde çalışmıştır. O zamandan beri, büzülme eşitsizliklerinin çeşitli tiplerinin dönüşümleri ile ilgili birçok sonuç ortaya konmuştur(Gnana Bhaskar ve Lakshmikantham, 2006; Branciari, 2002; Lakshmikantham ve Ćirić, 2009; Nieto ve Rodríguez-Lopez, 2005). Çok yakın zamanda Samet vd. (2012) α - ψ büzülme dönüşümü adında yeni bir kategoride büzülme-tip dönüşümü tanıtmıştır. Bu çalışmada Samet vd. (2012) literatürdeki mevcut sabit nokta sonuçlarını özellikle de Banach Büzülme prensibini genişletip genelleştirmişlerdir. Salimi vd. (2013) ve Karapınar ve Samet (2012) α - ψ büzülme-tip dönüşümünü genelleştirmiş, çalışmalarında bu genelleştirilmiş büzülme sınıfı için farklı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Diferansiyel denklemlerle ilgili ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında Newton ve Leibnitz ile başlamıştır. Bernoulli kardeşler, Euler, Clairaut, Lagrange, D'Alembert, Charbit, Monge, Laplace, Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picard, Fusch ve Frobenius gibi matematikçiler teoriyi ileri seviyelere taşımıştır. Diferansiyel denklemlerin belli şartlar altında çözümleri olup olmadığının ispatı, varlık teoremi olarak adlandırılır ve ilk olarak Cauchy tarafından çalışılmıştır. Diferansiyel denklemler; fonksiyonlar teorisi, diferansiyel geometri, mekanik, astronomi ve fizikokimya ile yakından ilgilidir. Bu denklemlerin çözümleri farklı şekillerde aranmıştır. Analitik çözümlere ulaşılamadığında, nümerik çözümler kullanılmıştır. Diferansiyel denklemler, fiziksel olaylar ve matematiksel modelleme problemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır(Güleç, 2014).

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem sisteminde Cauchy, sağ tarafın (t_0, x_0) noktasının komşuluğunda analitik olması durumunda, $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan tek bir çözümün var olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca, bu çözümün t_0 ' ın komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisi olan $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t - t_0)^i$ şeklinde ifade edilebileceğini göstermiştir(Duman, 2019).

Peano, Cauchy Probleminin çözümünün varlığıyla ilgili olan teoremi, yukarıdaki sistemin sağ tarafındaki fonksiyonun (t_0, x_0) noktasının komşuluğunda sürekli olması koşulunu kullanarak ispatlamıştır. Lipschitz koşulunun uygulamaları ve ardından Picard' ın daha zayıf koşullar altında sonradan Picard-Lindelöf Varlık ve Teklik Teoremi olarak bilinecek olan problemin çözümünün var olduğunu göstermiştir :

$$\gamma_0(t) = x_0, \gamma_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma_n(s))ds, n \geq 0 \quad (1.2)$$

Sonra da Arzelà-Ascoli Teoremi yardımıyla Peano Teoremi'nin farklı bir ispatını verilmiştir(Duman, 2019).

sınırlıdır ve pratik durumlarda ortaya çıkan daha karmaşık ADD 'ler için doğrudan uygulanabilir olmayabilir. Bu araştırmada Banach Büzülme Prensipleri, Sabit Nokta Teoremleri, Schauder Teoremi ve Picard Teoremi kullanılacaktır. Söz konusu teoremler, adi diferansiyel denklemlere uygulanacaktır. Amaç, farklı sabit nokta teoremlerinin,

ADD çözümlerinin varlığı ve tekliği teoremlerini başlangıç veya sınır koşullarında uygulanışının nasıl olduğunu vurgulamaktır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Motivasyon

Bu bölümde, bu tezin tamamında kullanılan Sabit Nokta Teorisi için gerekli olan bazı kavramlar ve bu araştırmadaki çalışmanın temelini oluşturan önemli tanımlar listelenmektedir.

2.1.1. Metrik uzay

X ' in boş olmayan bir küme olduğunu varsayalım. O zaman:

$$\begin{aligned} d &: X \times X \rightarrow R^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, X üzerinde bir metrik olarak kabul edilir:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $x, y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $x, y, z \in X \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Öyleyse, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir(Taş, 2017). X kümesi geçerli nesnelerin evrenini belirtir. Bunun $n = |U|$ büyüklüğündeki sonlu bir alt kümesi U , aranan nesnelerin kümesidir. U 'ya sözlük, veritabanı veya basitçe nesneler veya öğeler kümesi denir. Burada d nesneler arasındaki "mesafenin" ölçüsünü belirtir (yani mesafe ne kadar küçükse nesneler o kadar yakın veya benzerdir). Uzaklık fonksiyonları gösterildiği gibi yukarıdaki özelliklere sahiptir(Chávez vd., 2001).

2.1.2. Cauchy dizisi

(X, d) metrik uzaydaki bir dizi $\{x_n\}$ verilsin ve bu dizi eğer aşağıdaki koşul sağlıyorsa bir Cauchy dizisi olarak adlandırılır(Taş, 2017).

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n, m > N_\varepsilon$ vardır ki $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\exists N_\varepsilon > 0$ doğal sayısı var.

(2.1)

(Ayrıca; şeklinde de gösterilebilir. $\forall n, m \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$)

(2.2)

2.1.3. Normlu vektör uzayı

Tüm vektör uzayları reel olarak kabul edilsin. X bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \|$ ile tanımlanan dönüşüm

$$\begin{aligned} \| \cdot \|: X &\rightarrow R^+ \\ x &\mapsto \| x \| \end{aligned}$$

ile gösteriliyor ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm denir. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in R$ için

- $\| x \| \geq 0$
- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in R, \forall x \in X: \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$
- $\forall x, y \in X: \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

elde edilir(Coleman, 2012). X normlu bir vektör uzayı olsun, o zaman norm tarafından verilen uzaklık şu şekilde ifade edilebilir:

$$d: X \times X \rightarrow R^+$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \| x - y \|^2$$

Herhangi bir normlu vektör uzayı bu metrik ile tam oluyorsa buna Banach uzayı denir(Ankara, 2024a).

2.1.4. Dışbükeylik (Konvekslik)

Herhangi bir C kümesinde bu kümeden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası kümenin içinde kalıyorsa yani, aşağıdaki verilen özelliği sağlayan $(C \subset X)$ kümesine dışbükey(konveks) küme denir(Uysal, 2010).

$$\forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in C^2, tx + (1 - t)y \in C. \quad (2.3)$$

2.1.5. Büzülme (Contraction)

(X, d) ile verilen bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Bu dönüşümün Lipschitz dönüşümü olması için "gerek ve yeter şart" her $x, y \in X$ için $K \geq 0$ için aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır:

$$d(Tx, Ty) \leq K d(x, y)$$

- $K < 1$ olduğunda T 'ye büzülme dönüşümü denir.
- $K \leq 1$ ise T 'ye genişlemeyen dönüşüm denir.
- Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad (2.4)$$

oluyorsa T 'ye büzülebilir dönüşüm denir(Akyüz, 2018).

2.1.6. Düzgün yakınsama

(X, d) bir metrik uzay, A , X 'in bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, X üzerinde tanımlanmış olan bir dizi olsun. Bu durumda, eğer $\{x_n\}$ dizisi A üzerinde x 'e yakınsıyorsa, aşağıdaki gibi ifade edilir(Akyüz, 2018).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } n \geq N \text{ vardır öyle ki } \forall x \in A \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (2.5.1)$$

F herhangi bir küme ve (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. F 'den X 'e giden fonksiyonlar kümesini $F(F, X)$ olarak gösterilsin. Her $f, g \in F(F, X)$ için,

$$d(f, g) = \sup\{\min\{d(f(x), g(x)), 1\} : x \in F\} \quad (2.5.2)$$

ile $(F(F, X), d)$ bir metrik uzayı olur. Bu d metriğindeki bir $(f_n)_n$ dizisinin bir f fonksiyonuna yakınsaması olan ve aşağıdaki gibi gösterilen yakınsamaya düzgün yakınsama denir(Nesin, 2024).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } n \geq N \text{ vardır öyle ki } \forall x \in A \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad (2.5.3)$$

2.1.7. Eşsüreklilik (Equicontinuity)

$x \in X$ noktasına eşsüreklilik bir nokta denir Her $\varepsilon > 0$, en az bir $\delta > 0$ vardır ki $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$, for all $y \in B_\delta(x)$, and for all $n \in N$.

$\{x_n\}$ 'nin, R 'den I aralığına tanımlanan bir fonksiyon dizisi olduğunu verilsin. Aşağıdaki durumu sağlayan $\{x_n\}$ dizisinin eşsüreklilik olduğunu söylenir(Mangang, 2014):

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in N, \forall y \in I \text{ için } |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon. (2.6.1)$$

2.1.8. Adi diferansiyel denklemler

Bilinmeyen bir fonksiyonun bağımsız bir değişkene göre türevini/lerini içeren denklemlere adi diferansiyel denklem denir(Ankara, 2024b).

I kümesi $\mathbb{R}$ 'de bir açık küme(aralık, yuvar) olarak verilsin. Bu küme üzerinde tanımlı $x = x(t)$ fonksiyonu için

$$F(t, x, x', x'', x''', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (2.6.2)$$

bir adi diferansiyel denklem belirtir. Bir bağımsız ve bir bağımlı değişkenden oluşuyorsa 1. mertebeden adi diferansiyel denklem adını alır ve aşağıdaki şekillerde gösterilebilir:

$$x' = f(t, x) \text{ ya da } \frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ ya da } F(t, x, x') = 0 \quad (2.6.3)$$

$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ şeklinde gösterim her iki tarafın integrali alındığında bu denklemin çözümünün bulunabileceğine dair ipucu verir. k keyfi bir sabit olmak üzere

$$x(t) = \int f(t)dt + k \quad (2.6.4)$$

şeklinde çözüm bulunur. $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir sonuç bulmak için $k = t_0 - x(t_0)$ değeri yerine yazılır. Başlangıç koşulları verilmezse elde edilen çözüme genel çözüm olurken, verilen koşullara göre yapılan çözüm de özel(kısmi) çözüm olur.

$F(t)$ fonksiyonu ve $i = 1, 2, \dots, n$; $a_i(t)$ sıfırdan farklı katsayılarla sahip fonksiyonları I açık aralığında sürekli olmak üzere;

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = F(t) \quad (2.6.5)$$

denklemini n . mertebeden lineer değişken katsayılı diferansiyel denklem olur. $F(t) = 0$ olduğunda homojenlik özelliğini almış olur. Yani

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n-1}(t)x^{n-1}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = 0 \quad (2.6.6)$$

denklemini n . mertebeden lineer homojen değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak adlandırılır(Tektaş ve Akdoğan, 2000).

X Banach uzayı ve $U \subseteq X, 0 \in I = (a, b)$ ve $K \in C(I \times U, X) - K$ vektör alanı olmak üzere

$$x(t) = K(t, x(t)) \quad (2.6.7)$$

adi diferansiyel denklemini yine başlangıç değer koşulu ile verilebilir ve bu durumda $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$ şeklinde verilen bir integral eşitliği ile çözüm aranır (UCSD, 2024).

2.1.9. Cauchy problemi

Bu problem, belirli bir başlangıç koşulunu sağlayan bir çözüm arandığında bir diferansiyel denklem içeren bir problem olarak tanımlanır. Bu koşul, DD 'in doğasına bağlı olarak birkaç farklı şekil alır.

$I, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kümesinin bir açık kümesi ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'nin bir fonksiyon olarak kabul edilsin.

Birinci dereceden diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilir:

$$x'(t) = f(t, x) \quad (2.7.1)$$

$(t, x(t)) \in U$ için ve $(t_0, x_0) \in U$ noktası için karşılık gelen Cauchy probleminin çözümleri $x = x(t)$ değerlerinin aranmasıdır.

$(t_0, x_0) \in U$ ve $t_0 \in I$ başlangıç koşulu ile $\mathbb{R}$ açık aralığı I için Cauchy probleminin çözümü diferansiyellenebilir bir fonksiyondur, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile burada:

- Her bir $t \in I$ için $(t, x(t)) \in U$,

- Her bir $t \in I$ için $x'(t) = f(t, x(t))$,
- $x(t_0) = x_0$

koşulları sağlanmalıdır. Aşağıdaki durumlarda bir $x: R^+ \rightarrow R$ fonksiyonu Cauchy probleminin bir çözümüdür:

- Fonksiyon süreklidir ve $\forall t \in R^+, (t, x(t)) \in R^+ \times R$.
- Cauchy probleminin x çözümüne problemin integrali denir ve aşağıdaki gibi gösterilir (Duman, 2019):

$$\forall t \in R^+, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.7.2)$$

2.1.10. Çözümün varlığı

Adi diferansiyel denklem olarak $x' = f(t, x)$ ve başlangıç değer koşulu olarak da $x(t_0) = b$ verilsin. $f: U \rightarrow R^n$ sürekli ve $(t_0, b) \in U$ sabitler olsun. Çözümün $x(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ integraline denk olduğu bilindiğine göre, "yaklaşık" çözümler dizisi oluşturmak bir çözüm olabilir. Bu dizideki yaklaşımlar, bu dizinin veya bir alt dizinin bir şeye yaklaştığının gösterilmesi, yani limit tam bir çözüm olabilir.

Yaklaşık çözümler oluşturmanın bir yolu Picard iterasyonudur. Bunun için, başlangıç değeri denklemdaki x yerine konulur, sağ taraftan elde edilen değeri tekrar x yerine yazılır ve bu şekilde devam edilir. Yani, $x_1(t) = b$ olarak başlar ve $p > 1$ için $x_{p+1}(t)$, x_p cinsinden şu şekilde yinelemeli olarak verilir:

$$x_{p+1}(t) = a + \int_{t_0}^t f(s, x_p(s)) ds. \quad (2.8)$$

Çözümün varlığını göstermek için bazı tanım ve teoremler aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1.10.1: $f_p: U \rightarrow R^n$ fonksiyonlar dizisi, her $t \in U$ ve her $p \in N$ için $|f_p(t)| \leq H$ olacak şekilde bir $H > 0$ varsa, düzgün olarak sınırlıdır.

$f_p: U \rightarrow R^n$ fonksiyonlar dizisi, her $\varepsilon > 0$ için $|f_p(t_1) - f_p(t_2)| < \varepsilon$ olduğunda $|t_1 - t_2| < \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ varsa, düzgün olarak eşsüreklidir.

bilinmektedir. Ayrıca düzgün yakınsaklık tanımı da benzer şekilde tanım olarak verilmiştir.

Tanım 2.1.10.2: $\alpha \in R^n$ ve $\rho > 0$ olarak verilsin. $\{\omega \in R^n \mid |\omega - \alpha| < \rho\}$ olarak verilen kümeye α merkezli, ρ yarıçaplı açık yuvar denir ve $\mathcal{B}(\alpha, \rho)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.10.3(Arzelà-Ascoli): Düzgün sınırlı ve düzgün eşsürekli olan $f_p: U \rightarrow R^n$ fonksiyonlar dizisinin, kompakt (kapalı ve sınırlı) kümelerde düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Teorem 2.1.10.4 (Uniform Yakınsama): Eğer $f_p: U \rightarrow R^n$ sürekli fonksiyonlar dizisi $f: [a, b] \rightarrow R^n$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f_p(s) ds = \int_a^b f(s) ds \quad (2.9)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.10.5 (Cauchy-Peano): $f: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{\mathcal{B}(\alpha, \rho)}$ fonksiyonunun sürekli ve ile $H > 0$ sınırlı olsun. Bu durumda, adi diferansiyel denklemin bir çözüm içerir ve bu çözümü $[t_0 - \vartheta, t_0 + \vartheta]$ aralığında vardır. Burada, $\vartheta = \min\left\{\alpha, \frac{\rho}{H}\right\}$ olarak verilmiştir(Grant , 2024).

Çözümün tekliğine geçmeden sabit nokta teorisi konusundaki temel teoremler aşağıda verilmiştir.

2.2. Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda, sabit nokta teorisi hakkında genel bir açıklama yapılarak topolojik, ayrık ve metrik sabit nokta teorisi temelleri özetlenmiştir. Daha sonra, metrik sabit nokta teorisini tek değerli ve küme değerli dönüşümler açısından nasıl geliştiği hakkında bilgi verilmiştir.

2.2.1. Metrik Uzayda sabit Nokta Teoremleri

2.2.1.1. Banach teoremi

(X, d) tam metrik uzay $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dnm olsun. O halde f dnm bir sabit noktaya sahiptir. Teoremin ispatı aşağıdaki şekilde verilebilir. (X, d) tam metrik uzay için $T: X \rightarrow X$ büzülme dnm olduğunda

- T için tek bir SN yani x vardır.
- Her biri için $x_0 \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = x$.

koşullarının sağlandığı gösterilince ispat biter.

Varlık için $x_0 \in X$ ve $(x_n)_n$ dizisi verilsin.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq K d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.10)$$

doğal sayılar kullanılarak n sayısına kadar işlem tekrarlanırsa

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1)$$

elde edilir. $n = 0$ için

$$d(x_0, x_1) \leq K^0 d(x_0, x_1)$$

doğrudur. n iin ve $n + 1$ iin gsterilirse:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq K d(x_n, x_{n+1}) \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq K(K^n d(x_0, x_1)) \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq K^{n+1} d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(x_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gsterelim.

Her $p, q \in N$, $\forall q > p$ iin;

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_q) \\ d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1})d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots d(x_{q-1}, x_q) \\ d(x_p, x_q) &\leq K^p d(x_0, x_1) + K^{p+1} d(x_0, x_1) + \dots K^{q-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_0, x_1)[K^p + K^{p+1} + \dots + K^{q-1}]$$

$$d(x_p, x_q) = d(x_0, x_1) \frac{K^p - K^q}{1-K} \leq d(x_0, x_1) \frac{K^p}{1-K} < \varepsilon. \quad (2.12)$$

X tam olduğunda $\{x_n\}_n$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğu açıktır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_p - x_q) = 0.$$

SN $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ biçiminde vardır. O halde verilen dizi T dönüşümü ile aşağıdaki özellikleri sağlıyor olarak kabul edilsin. Yani

$$x_{n+1} = Tx_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (2.13)$$

verilsin. $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ olur, çünkü T süreklidir. Bu durumda; $x = Tx$ olur. Bu durumda da x , T 'nin bir SN'si olarak kabul edilir.

SN'nin tekliği: x_1, x_2 iki sabit nokta olsun, burada $x_1 \neq x_2$ verilsin.

Eğer x_1 bir SN ise, o zaman $x_1 = Tx_1$.

Eğer x_2 bir SN ise, o zaman $x_2 = Tx_2$. Bu durum iki noktanın eşit olmamasıyla ilgilidir çelişkilidir.

Banach Teoremi (aynı zamanda Banach-Caccippoli olarak da bilinir) için verilen ispat, verilen büzülme dönüşümü için bu dönüşümün tek sabit noktasının nasıl bulunacağını gösterir. Bu yöntemde herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası seçilir ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ şeklinde bir iterasyon dizisi tanımlanır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oluyorsa $T(x) = x$ olur.

Edelstein, 1962 yılında tam metrik uzaylar için büzülme koşulunu $K = 1$ için sağlayan büzülme dönüşümlerini tanımlamıştır. 1962 yılında Rakotch, monoton azalan ve $[0, 1)$ aralığında değer alan fonksiyonlar yardımıyla sabit noktanın varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. 1968 yılında Kannan, Banach büzülme ilkesinin dışına çıkarak

$$d(T(x), T(y)) \leq K [d(x, T(x)), d(y, T(y))] \quad (2.14)$$

koşulunu sağlayan dönüşümlerin sürekli olmasının gerekmediğini ispatlamıştır. Burada $0 \leq K \leq \frac{1}{2}$ olarak alınmıştır.

1969 yılında, yarı-sürekli fonksiyon ve özel tanımlı büzülme kavramı Boyd ve Wong tarafından tanıtılmış ve bunun Rakotch teoreminin bir genellemesi olduğunu ispatlanmıştır. Meir ve Keeler, Banach ve Edelstein teoremlerini genelleyerek Meir-Keeler -büzülme dönüşümünü tanımlamışlardır. 1972 yılında Chatterjee, Kannan sabit nokta teoremini değiştirerek, yeni ve genel koşulu sağlayan teoremi ispatlamıştır. Zămărescu, Banach, Kannan ve Chatterjee teoremlerini birleştirirken, Ćirić ve ardından Reich, Hardy-Rogers, vd. Büzülme koşullarında değişiklikler yaparak yeni tipte büzülmeler bulmaya ve yeni sabit nokta teoremleri ortaya atıp ispatlamaya devam etmiştir(Çit, 2021).

Rhoades ve Meszáros tarafından yazılan makalelerin ardından Branciari 2002 yılında (X, d) metrik uzayı üzerinde integral koşulu ile verilen bir büzülme dönüşümü için sabit noktaların varlığını Boyd ve Wong' un kullandıkları yöntemle benzer bir yaklaşım ile ispatlamıştır.

$$\int_0^{d(Ta, Tb)} f(t)dt \leq K \int_0^{d(a, b)} f(t)dt \quad (2.15)$$

(X, d) tam metrik uzayında $K \in (0,1)$, $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu ve her $a, b \in X$ için f eğer $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve bu aralığın tüm kompakt alt kümeleri üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir, negatif olmayan ve her $\tau > 0$ için $\int_0^\tau f(t)dt > 0$ oluyorsa T dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

$(X, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun ve $L: X \times X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. L 'nin $L(a, b)$, a için monoton artan ve b için monoton azalan bir oluyorsa, yani $a, b \in X$ her için

$$1. a_1, a_2 \in X \text{ için } a_1 \leq a_2 \text{ iken } L(a_1, b) \leq L(a_2, b)$$

$$2. b_1, b_2 \in X \text{ için } b_1 \leq b_2 \text{ iken } L(a, b_1) \geq L(a, b_2)$$

oluyorsa karışık monoton özelliğine sahip olduğunu söylenir. Bu özellik yardımıyla, $L(a, b)=a$ ve $L(b, a)=b$ eşitliklerini sağlayan $a, b \in X \times X$ elemanına, L 'nin eşlenik sabit noktası denir. Bu özellikler yardımıyla Gnana Bhaskar ve Lakshmikantham (2006) sabit nokta teoremini şu şekilde vermiştir:

(X, d) tam metrik uzay ve $L: X \times X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $(a, b), (c, m) \in X \times X$ için

$$\alpha((a, b), (c, m))d(L(a, b), L(c, m)) \leq \frac{1}{2}\psi(d(a, b)+d(c, m))$$

verilsin. Her $(a, b), (c, m) \in X \times X$ için $\alpha((a, b), (c, m)) \geq 1$ olduğunda

$\alpha(L(a, b), L(b, a)), (L(c, m), L(m, c)) \geq 1$ olur. $a_0, b_0 \in X$ için

$\alpha((a_0, b_0), L(a_0, b_0), L(b_0, a_0)) \geq 1$ ve $\alpha(L(b_0, a_0), L(a_0, b_0), (a_0, b_0)) \geq 1$ vardır. L süreklidir. Tüm bu koşullar sağlandığında L bir eşlenik sabit noktaya sahiptir.

Lakshmikantham ve Ćirić(2009), 2009 yılında yukarıdaki teoremin koşullarına yeni bir φ fonksiyonu ve dizilerin azalmayan ve artmayan olma durumlarını da eklemişlerdir. Nieto ve Rodriguez-Lopez(2005) kısmi sıralı küme üzerinde diziler yardımıyla sabit noktanın varlığını incelemişlerdir.

2.2.1.2. Picard-lindelöf teoremi

$f: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(\alpha, \rho)} \rightarrow R^n$ fonksiyonunun sürekli ve ile $H > 0$ sınırlı olsun. Her $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ için $f(t, *)$ Lipschitz sabiti ile Lipschitz sürekli olsun. Obhalde $\vartheta = \min\left\{\alpha, \frac{\rho}{H}\right\}$ alındığında verilen adi diferansiyel denklem için $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ aralığında tekil bir çözüm vardır(Grant , 2024).

Teoremin ispatına geçmeden önce bazı önemli ifadelerden bahsedilmelidir.

Herhangi bir $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ için, $f(t, *)$ fonksiyonu $\overline{B(\alpha, \rho)}$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyorsa bu aralıktan alınan herhangi iki eleman x ve y olmak üzere,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y| \quad (2.16)$$

koşulunu sağlayacak şekilde noktalardan bağımsız bir L pozitif sayısının vardır.

Burada her $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ve $x \in \mathcal{B}(\alpha, \rho)$ için $H = \sup\{\|f(t, x)\|\} < \infty$ olur.

Eğer $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{\mathcal{B}(\alpha, \rho)}$ aralığında f 'nin x 'e göre kısmi türevi varsa yukarıdaki Lipschitz koşulu gerçekleşir. $f: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{\mathcal{B}(\alpha, \rho)} \rightarrow R^n$ fonksiyonu sürekli ve $x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow R^n$

Fonksiyonunun başlangıç değer probleminin bir çözümü olabilmesi için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du \quad (2.17)$$

denkleminin de bir çözümü olmasıdır.

Eğer

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

denklemin çözümünü fonksiyon dizileri yardımıyla aranıyorsa

$$x(t_0) = x_0$$

ilk verilen yaklaşım çözümü olmak üzere

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_{n-1}(u)) du \quad (2.18)$$

şeklinde aranır.

f sürekli ve $\vartheta = \min\{\alpha, \frac{\rho}{H}\}$ olsun. Ohalde BDP' nin $\overline{\mathcal{B}(\alpha, \rho)}$ üzerinde bir çözümü vardır. f sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlıyorsa $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ üzerinde $\min\{\frac{1}{2L}, \alpha, \frac{\rho}{H}\}$ sayısından daha küçük pozitif bir sayı için tek bir çözüm vardır. Hatta benzer durum ϑ için de geçerlidir.

f fonksiyonu yukarıda verilen tanım kümesi üzerinde sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün süreklidir. Yani, bir $\varepsilon > 0$ için $\mu(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $|t - t_1| < \mu(\varepsilon)$ ve $\|x - x_1\| < \mu(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan noktalar için $\|f(t, x) - f(t_1, x_1)\| < \varepsilon$ sağlanır. $\min\{\frac{1}{2L}, \alpha, \frac{\rho}{H}\} > \nu > 0$ ve $X = \{x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{\mathcal{B}(\alpha, \rho)}\}$ ile sürekli fonksiyonlar kümesi seçilsin.

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du \quad (2.19)$$

dönüşümü altında t 'yi içeren aralığın görüntüsünün x 'i içeren aralığın alt kümesi olduğu şöyle gösterilebilir. $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ aralığından seçilen bir t için

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(u, x(u))\| du \\
&\leq \int_{t_0}^t \sup \{\|f(u, x(u))\|\} \\
&\leq \sup \{\|f(u, x(u))\|\} |t - t_0| \\
&\leq H|t - t_0| \leq H\alpha \leq H \frac{\rho}{H} = \rho
\end{aligned}$$

olduğundan istenen sağlanmış olur. Ayrıca verilen fonksiyon sürekli olduğundan $T(x)(t)$ de verilen değerler için süreklidir.

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t) - T(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t (f(u, x(u)) - f(u, y(u))) du \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^t L|x(u) - y(u)| du \right\| \\
&\leq L \left(\int_{t_0}^t \sup \|x(t) - y(t)\| du \right) \\
&\leq L|t - t_0| \sup \|x(t) - y(t)\| \\
&\leq L\alpha \sup \|x(t) - y(t)\|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup \|x(t) - y(t)\|$$

sonucu yine her $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ için elde edilir. SNT yardımıyla çözümün varlığı ve tekliği böylece ispatlanmış olur.

f sürekli ve $\vartheta = \min\left\{\alpha, \frac{\rho}{H}\right\}$ olsun. $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ için

$$x_0 = x_0(t)$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_0(u)) du \quad (2.20)$$

Fonksiyonu

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(u, x_0(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(u, x_0(u))\| du \\ &\leq H|t - t_0| \leq H \frac{\rho}{H} = \rho \end{aligned}$$

sürekli dir.

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_1(u)) du \quad (2.21)$$

olarak alınır sa yine verilen tanım aralığında sürekli bir fonksiyon elde edilir. İşlem benzer şekilde tekrarlanarak

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_{n-1}(u)) du \quad (2.21)$$

$n \in \mathbb{N}$ için fonksiyon sürekli dir. $(x_n(t))_n$ ile verilen fonksiyon dizisinin verilen kapalı aralıkta sürekli olduğu açıktır.

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t (f(u, x_n(u)) - f(u, x_{n-1}(u))) du \right\|$$

$$\leq \left\{ \int_{t_0}^t \|f(u, x_n(u)) - f(u, x_{n-1}(u))\| du \right\}$$

$$\leq L \left(\int_{t_0}^t \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| du \right)$$

$n \in N$ için $\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \rho \frac{(L|t-t_0|)^n}{n!}$ İfadesi doğrudur.

$n \in N$ için $\|x_n\| = \|x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})\|$ dizisinin düzgün yakınsadığı ve $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^n}{n!} = e^{L\alpha}$ ifadesinden açıktır. Yani, $n \in N$ için $\|x_n(t) - x(t)\| \leq \varepsilon$ olur.

$$\|T(t, x_n(t)) - T(t, x(t))\| \leq L\|x_n(t) - x(t)\| \quad (2.22)$$

sağlandığından ve $n \in N$ için düzgün yakınsaklık yardımıyla $\|x_n(t) - x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{L}$ olduğundan

$$\|T(t, x_n(t)) - T(t, x(t))\| < \varepsilon \quad (2.23)$$

elde edilir. Dolayısıyla fonksiyon dizisi de düzgün yakınsaktır. $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$ olduğundan $T(t, x(t)) = x'(t)$ elde edilir. Varlığı gösterilen bu ifadenin tekliği de kolayca ispatlanır(Duman, 2019).

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Bir Topolojik Uzayda Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda topolojide yaygın olarak kullanılan Brouwer SN Teoreminden bahsedilecektir.

3.1.1. Brouwer sabit nokta teoremi

Brouwer teoremi Nash dengelerinin varlığını göstermek başta olmak üzere, oyun teorisi, diferansiyel denklemler, diferansiyel geometri, cebirsel topoloji gibi aşağıdaki alanlarda uygulamaya sahiptir.

1911 yılında, sonlu boyutta simpleksler için verilen Brouwer SNT, Banach uzaylarına

1930 yılında Schauder SNT adıyla genelleştirildi. İlerleyen yıllarda ise topolojik vektör uzayları da dahil olmak üzere birçok kompakt ve konveks küme için ifade edildi.

- R^n uzayında kapalı konveks bir küme X alınırsa, $T: X \rightarrow R^n$ fonksiyonu sürekli ve $T(X) \subseteq X$ oluyorsa T dönüşümünün burada bir sabit noktası vardır.
- R uzayında kapalı bir aralık $[0,1]$ alınırsa, $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu sürekli ve $T(X) \subseteq X$ oluyorsa T dönüşümünün burada bir sabit noktası vardır.
- $B = \{(x, y): \|(x, y)\| \leq 1\} \subseteq R^2$ olmak üzere $T: B \rightarrow B$ dönüşümünün yine B kümesinde bir sabit noktası vardır.
- $B^n = \{x: \|x\| \leq 1\} \subseteq R^n$ için $T: B^n \rightarrow X \subseteq R^n$ sürekli dönüşümü için B^n kümesinde bir sabit noktası vardır(Durak, 2021).

$B^n = \{x: \|x\| \leq 1\} \subseteq R^n$ için $E \subseteq B^n$ verildiğinde $R: B^n \rightarrow E$ sürekli dönüşümü var ve her $x \in E: R(x) = x$ oluyorsa R dönüşümüne geri çekme(retraction) denir.

$S^{n-1} = \{x: \|x\| = 1\} \subseteq R^n$ kümesi B^n 'de geri çekme olmaz. Bu ifadenin ispatı cebirsel topoloji yardımıyla kolayca verilebilir. B^n üzerinde verilen Brouwer SNT ispatı aşağıdaki gibidir: C^2, B^n 'den S^{n-1} 'e tanımlı geri çekme fonksiyonlarının bir sınıfı olsun. $f: B^n \rightarrow B^n, C^2$ sınıfından olan geri çekme dönüşümleri $T(x)$ tanımı yardımıyla

$$T(x) = \frac{\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle - \sqrt{(\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle)^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}$$

$$R(x) = T(x)f(x) + (1 - T(x))x$$

şeklinde verilir. Oysa bu $S^{n-1} = \{x: \|x\| = 1\} \subseteq R^n$ kümesi B^n 'de geri çekme olmaz, ifadesine aykırıdır. $R(x), S^{n-1}$ ile $(f(x), x)$ 'in keşişim noktasındadır. $f: B^n \rightarrow B^n$ sürekli olsun. $f_i: B^n \rightarrow B^n$ dizisi yine C^2 sınıfından alınsın. Bu fonksiyon dizisi f

fonksiyonuna düzgün yakınsak olur. x_i, f_i fonksiyonlarının sabit noktalarını göstermek üzere her biri $x \in B^n$ noktasına yakınsak bir alt diziye sahiptir.

$$\|f(x) - x\| \leq \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f_i(x_i)\| + \|x_i - x\| \quad (3.1)$$

$i \rightarrow \infty$ iken $f(x) = x$ olur(Pata, 2019).

3.1.2 Schauder-tychonoff teoremi

Öncelikle bu teoremin ispatında yararlanılacak bilgiler sırasıyla verilecektir.

- Sonlu boyutlu bir X reel Banach uzayı ve $D \subseteq X$ aralıksız kompakt konveks alt kümesi verilsin. Bu durumda her $f: D \rightarrow D$ sürekli fonksiyonu bir sabit noktaya sahiptir.

Burada X , bazı $n \in \mathbb{N}$ için R^n 'e homeomorfik olduğundan genel olarak $X = R^n$ ve $D \subset B^n$ alınır. $x \in B^n$ için $\{x - D\}$ kümesinin minimum normu alındığında $l(x) \in D$ bu normun tekil noktası olur. Her $x \in D$ için $l(x) = x$ olduğu açıktır. l sürekli bir dönüşüm olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|x - l(x)\| \leq \|x - l(x_n)\| \leq \|x - x_n\| + \inf_{d \in B^n} \|x_n - d\| \rightarrow \|x - l(x)\|$$

$x_n \rightarrow x$ ile elde edilir. Bu dizi yardımıyla elde edilen $x - l(x_n)$ minimum dizisi ve $l(x_n) \rightarrow l(x)$ yakınsaklığı tanımlanır. $g(x) = f(l(x))$ tanımlanırsa g sürekli olur. Her $x \in D$ için Brouwer Teoreminden $g(x) = x = f(x)$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır. Verilen teoremin direkt iki uygulaması Frobenius ve cebirin temel teoreminde görülebilir.

- $\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$ kümeleri bir X lokal kompakt Hausdorff uzayının açık alt kümeleri,

$\kappa \subset X$ kompakt ve $\kappa \subset \nabla_1 \cup \nabla_2 \cup \dots \cup \nabla_n$ olsun. Her $x \in \kappa$ ve $\lambda = 1, 2, \dots, n$

için $\theta_\lambda \in C(X)$, $0 \leq \theta_\lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) + \dots + \theta_n(x) = 1$$

olur. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ dönüşümleri $\{\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n\}$ açık örtüsü ile κ için birim parçalanışı olur.

Bu ifade Urysohn lemmasının direkt bir sonucudur. $\kappa \subset X$ kompakt kümesi için birim parçalanışı X yerel kompakt değilken aranabilir. Teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir. X yerel kompakt uzay, $\kappa \subset X$ boştan farklı ve konveks, $\kappa_0 \subset \kappa$ kompakt olsun. Sürekli $f: \kappa \rightarrow \kappa_0$ dönüşümü ile $f(x) = x$ olacak biçimde $x \in \kappa_0$ vardır.

İspat: X üzerindeki yarı normların ailesi tarafından üretilen yerel taban β olsun. $\mathcal{U} \in \beta$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in \kappa_0$ kompakt kümesi için $\kappa_0 \subset \bigcup_{\lambda=1}^n (x_\lambda + \mathcal{U})$ yazılır. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathcal{C}(\kappa_0)$ dönüşümleri $\{x_\lambda + \mathcal{U}\}$ açık örtüsü ile κ_0 için birim parçalanışı olur. Her $x \in \kappa$ için $\sum_{\lambda=1}^n \theta_\lambda(f(x))x_\lambda = f_{\mathcal{U}}(x)$ yazılırsa buradan da $f_{\mathcal{U}}(\kappa) \subset \kappa_{\mathcal{U}} := co(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \subset \kappa$ ve $x_{\mathcal{U}} \in \kappa_{\mathcal{U}}$ varlığından $f_{\mathcal{U}}(x_{\mathcal{U}}) = x_{\mathcal{U}}$ bulunur. $\theta_\lambda(f(x_{\mathcal{U}})) = 0$ ve $(x_\lambda - f(x_{\mathcal{U}})) \notin \mathcal{U}$ için

$$x_{\mathcal{U}} - f(x_{\mathcal{U}}) = f_{\mathcal{U}}(x_{\mathcal{U}}) - f(x_{\mathcal{U}}) = \sum_{\lambda=1}^n \theta_\lambda(f(x_{\mathcal{U}}))(x_\lambda - f(x_{\mathcal{U}})) \in \mathcal{U}$$

elde edilir. κ_0 kompakt olduğundan

$$\bigcap_{\mathcal{M} \in \beta} \overline{\{f(x_{\mathcal{U}}) : \mathcal{U} \in \beta, \mathcal{U} \subset \mathcal{M}\}} \subset \kappa_0$$

kümesi bir $x^\#$ elemana sahiptir. Parçalanışa $\mathcal{P}$ denirse $\varrho \in \mathcal{P}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\nabla = \{x \in X : \varrho(x) < \varepsilon\} \in \beta$$

seçilsin. f, κ üzerinde sürekli ve $\mathcal{M} \subset \nabla$ ise her $x - x^\# \in 2\mathcal{M}, x \in \kappa$ için

$$f(x) - f(x^\#) \in \nabla$$

olur. Eğer $\mathcal{U} \in \beta, \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ de oluyorsa

$$x^\# - f(x) \in \mathcal{M} \subset \nabla$$

'dir. Verilen bu ifadeler yardımıyla

$$x_{\mathcal{U}} - x^\# = x_{\mathcal{U}} - f(x_{\mathcal{U}}) + f(x_{\mathcal{U}}) - x^\# \in \mathcal{U} + \mathcal{M} \subset \mathcal{M} + \mathcal{M} = 2\mathcal{M}$$

ve buradan

$$f(x_{\mathcal{U}}) + f(x^\#) \in \nabla$$

elde edilir.

$$\varrho(x^\# - f(x^\#)) \leq \varrho(x^\# - f(x_{\mathcal{U}})) + \varrho(f(x_{\mathcal{U}}) - f(x^\#)) < 2\varepsilon$$

ϱ ve ε için herhangi bir seçim yapılabileceğinden, her ϱ için $\varrho(x^\# - f(x^\#)) = 0$ olur ve buradan da $x^\# = f(x^\#)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur(Pata, 2019).

3.1.3 Leray-schauder prensibi

X 'in Banach uzayı olarak kabul edildiğini ve $K \subset X$ 'in dışbükey ve kapalı altküme ($U \subset K$) K 'de bir açık sınırlı küme ve $Q_0 \in U$ 'ın sabit bir eleman olduğunu varsayalım,

$T: \overline{U} \rightarrow K$ operatörünün sürekli, tam olduğunu ve sınır koşulunu sağladığını varsayalım:

$$Q \neq (1 - \lambda)Q_0 + \lambda T(Q), \quad Q \in \delta U, \lambda \in (0,1) \quad (3.2)$$

O zaman T en az $\overline{U}$ 'da 1 SN 'yi kabul eder(Pata, 2019).

4. MATERYAL ve YÖNTEM

$\alpha - \psi$ büzülme-tip dönüşümler, Samet ve diğerleri tarafından tanıtılan yeni bir kategoridir.(Samet vd., 2012). Samet ve vd, Banach büzülme prensibini içeren literatürde bulunan sabit nokta sonuçlarını genelleştirdi ve genişletti. Salimi vd. (2013) ve Karapinar ve Samet(2012), $\alpha - \psi$ büzülme-tip dönüşümleri genelleştirerek ve bu genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri sınıfı için çeşitli sabit nokta teoremleri elde ettiler. Birçok çalışma artan olmayan bir dönüşüm için $\alpha - \psi$ büzülme-tip dönüşüm üzerinde durmuştur: her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ olur. Burada, $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ serisinin yakınsaklığını ve ψ için azalmayan koşulu kısıtlayıcıdır ve böyle bir dönüşümün hemen hemen her yerde diferansiyellenebilir olduğu aşıkardır ve $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ serisinin yakınsaklığı ve azalmayan olma koşulu $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşüm ailesinin önemini vurgular. Bu kısımda, Farajzadeh vd. (2014) tarafından ortaya konan sonuçlara değinilecektir. Çalışmalarında sırasıyla, $[0, +\infty)$ üzerinde verilen yeni dönüşüm ailesini tanıtılmış ve tam metrik uzaylardaki dönüşümler için sabit nokta teoremleri bu yeni ailenin özellikleri yardımıyla ispatlar vermiştir . Elde edilen sonuçlar, kısmen sıralı tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerine uygulanmış ve adi diferansiyel denklemlere olan uygulamaları da verilmiştir.

Lemma 4.1 :(Samet vd., 2012). $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ verilsin. Eğer ψ artan değilse, o zaman her $t \in (0, +\infty)$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$ ise $\psi(t) < t$ olur.

Not 4.2: $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ azalmayan için $\psi(t) < t$ ise, her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(0) = 0$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 4.3: (Samet vd., 2012). $T: X \rightarrow X$ ve $\alpha: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ verilsin. Eğer, her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y) \geq 1$ olduğunda $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ olursa T 'ye α -geçişli denir. Samet vd.(2012), $\alpha - \psi$ -büzülme-tip dönüşüm şu şekilde vermiştir: $\psi \in \Psi_1$ ve

$\Psi_1 = \{\psi \mid \psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ artan olup } \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty, \forall t \in (0, +\infty)\}$.
koşulu sağlanmalıdır.

Tanım 4.4:(Samet vd., 2012). (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ ve $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ olmak üzere, $\psi \in \Psi_1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \quad (4.1)$$

koşulu sağlayan α ve ψ fonksiyonları mevcutsa T 'ye bir $\alpha - \psi$ –büzülme dönüşümü denir. Bu çalışmada, yazarlar, tam metrik uzaylarda α -geçişliliği sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremlerinin varlığını sağlamışlardır.

Sonra, Salimi ve diğerleri (Salimi vd., 2013), α -uygunluğun kavramını değiştirdiler.

Tanım 4.5: (Salimi vd., 2013). $T: X \rightarrow X$ ve $\alpha, \eta: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ verilsin. Her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$ ise $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$ olduğunda T 'nin η 'ye göre α –uygun olduğunu söylenir.

Not 4.6: Eğer her $x, y \in X$ için, $\eta(x, y) = 1$ olursa, Tanım 5, Tanım 3'e indirgenir.

Salimi ve diğerleri(Salimi vd., 2013), $\psi \in \Psi_1$ için genelleştirilmiş $\alpha - \psi$ –büzülme-tip dönüşümlerin sabit nokta teoremlerinin varlığını ispatlamışlardır. Ayrıca, ψ azalmayan ve sürekli bir dönüşüm ve $\psi(0) = 0$ olduğunda, genelleştirilmiş $\alpha - \psi$ –büzülme-tip dönüşümlerin sabit nokta teoremlerini de sağlarlar.

Bu çalışmada, $[0, +\infty)$ üzerinde ψ için azalmayan koşulu olmadan ve tam metrik uzaylarda $\alpha - \psi$ –büzülme-tip dönüşümler için sabit nokta teoremlerini bu yeni aile özellikleri kullanarak kanıtlanmıştır. Sonuçlar kısmen sıralı tam metrik uzaylarda sabit nokta sonuçlarını elde etmek ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere uygulama vermek için kullanılmıştır.

Şimdi yeni bir dönüşüm ailesi olarak Ψ_2 verilsin ve $\psi \in \Psi_2$ için $\alpha - \psi$ –büzülme-tip dönüşümler için sabit nokta sonuçlarına bakalım.

Ψ_2 'yi, $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ olacak şekilde tanımlanan dönüşümlerin ailesi olarak gösterilsin, bu durumda

- (i) ψ sağdan üst yarı sürekli bir dönüşümdür;
- (ii) Her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(t) < t$ olur;
- (iii) $\psi(0) = 0'$ dır.

Not 4.7: Lemma 1'e göre, her ψ için Ψ_1 , her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(t) < t'a$ sahiptir ve Not iki' den, $\psi(0) = 0$ elde edilir.

Not 4.8: Her azalmayan dönüşüm neredeyse her yerde diferansiyellenebilir olduğu düşünülürse, azalmayan olma koşulu sürekliliğe yakın ve kısıtlayıcıdır.

Örnek 4.9: $f(x) = [x]$ fonksiyonu, sağdan üst yarı sürekli ve azalmayan ancak sürekli olmayan bir fonksiyondur.

Örnek 4.10: $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$; tanımlansın ve şu şekilde olsun:

$$t = 0 \text{ için } \psi(t) = 1; t > 0 \text{ için } \psi(t) = 0 \quad (4.2)$$

ψ 'nin sağdan üst yarı sürekli olduğu ve her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(t) < t$ olduğu görülür. Ayrıca, ψ azalmayandır.

Örnek 4.11: $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü $t \in \mathbb{N}$ için $\psi(t) = 1/2$; diğer durumlarda $\psi(t) = 0$ olarak tanımlansın. O halde, ψ sağdan üst yarı sürekli, her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(t) < t$ ve $\psi(0) = 0$ 'dır. Ayrıca, azalmayandır.

Şimdi $\psi \in \Psi_2$ için α -uygun dönüşümlerin sabit nokta teoreminin varlığı aşağıda kanıtlarıyla beraber verilmiştir.

Teorem 4.12: (X, d) bir tam metrik uzay olsun ve $\psi \in \Psi_2$ verilsin. Eğer $T : X \rightarrow X$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm ise:

- T η 'ye göre α -uygun;
- $x, y \in X$ ve $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$ ise, $d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$;
- $x_0 \in X$ için, $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$;
- T sürekli ya da $\{x_n\}$ X 'de $n \in \mathbb{N}$ için her $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ koşulunu sağlayan bir dizi ise ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x \in X$ olarak, ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq \eta(x_n, x)$ elde edilir. O zaman, T 'nin bir sabit noktası vardır.

İspat. $x_0 \in X$ olduğundan, $x_1 = Tx_0$ olan bir x_1 bulunur. Bundan dolayı, X 'de c dizisi şu şekilde oluşturabilir: $x_{n+1} = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n$ ise, T 'nin bir sabit noktası vardır.

O halde $x_n \neq x_{n+1}$ olduğu varsayılırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için. $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$ ve T, η' ye göre α –uygun olduğu için,

$$\alpha(x_1, x_2) = \alpha(Tx_0, Tx_1) \geq \eta(Tx_0, Tx_1) = \eta(x_1, x_2). \quad (4.3)$$

elde edilir. Yukarıdaki süreç devam ettirilerek, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ elde edilir. (ii) kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \quad (4.4)$$

elde edilir. Buradan her $t \in (0, +\infty)$ için $\psi(t) < t$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) < d(x_{n-1}, x_n) \quad (4.5)$$

olur. $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ artmayan bir dizidir. O halde öyle bir $c \geq 0$ vardır ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = c \quad (4.6)$$

$c = 0$ olduğu sonucuna varmak için $c > 0$ seçilirse; ψ sağdan üst yarı sürekli olduğundan (9) kullanılarak;

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(x_n, x_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \leq \psi(c) < c,$$

olur ki bu da çelişkidir. Bu yüzden

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olduğu bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için bir $n_k \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$$

sağlanır. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) < \infty$ elde edilir. $\{x_{n_k}\}$ bir Cauchy dizisidir ve bazı $x \in X$ için yakınsaktır. T ' nin sürekliliğinden;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n_k+1} = Tx \quad (4.7)$$

elde edilir. Yani Tx sabit noktasına sahiptir. Diğer yandan, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \geq \eta(x_{n_k}, x_{n_k+1})$$

ve $\{x_{n_k}\}$ dizisinin x' e yakınsak olmasından, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_{n_k}, x) \geq \eta(x_{n_k}, x)$$

olur. (ii)' yi kullanarak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tx, x) \leq d(Tx, Tx_{n_k}) + d(Tx_{n_k}, x) \leq \psi(d(x_{n_k}, x)) + d(x_{n_k+1}, x)$$

bulunur. ψ sağdan üst yarı sürekli olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \psi(d(x_{n_k}, x)) \leq \psi(0) = 0 \quad (4.8)$$

bulunur. $k \rightarrow \infty$ olarak limit alırsa, bu $d(Tx, x) = 0$ ve bu da $Tx = x$ 'yi sağlanmış olur.

Teorem 4.13: Teorem 12'nin tüm hipotezlerinin sağlandığını varsayalım. Her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, z) \geq \eta(x, z)$ ve $\alpha(y, z) \geq \eta(y, z)$ olan bir $z \in X$ olduğunu varsayalım. O zaman, T 'nin eşsiz bir sabit noktası vardır.

Sonuç 4.14: (X, d) tam bir metrik uzay ve $\psi \in \Psi_2$ olsun. $T : X \rightarrow X$, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\alpha - \psi$ -büzülme dönüşümüyse aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) T, α -uygun;
- (ii) $x_0 \in X$ olmak üzere, $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olsun;
- (iii) T sürekli veya X 'de $x_n \rightarrow x$ olduğunda, $n \rightarrow \infty$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ ve $\alpha(x_n, x) \geq 1$ olacak şekilde bir dizi $\{x_n\}$ varsa, $\alpha(x_n, x) \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$;
- (iv) $\forall x, y \in X$ için, $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(y, z) \geq 1$ olan bir $z \in X$ bulunmaktadır.

O zaman, T 'nin eşsiz bir sabit noktası vardır.

Bhaskar ve Lakshmikantham, eşlenmiş sabit noktaların tanımını verdiler.

Tanım 4.15: $F: X \times X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer $(x, y) \in X \times X$,

$$F(x, y) = x, \quad F(y, x) = y \quad (4.9)$$

oluyorsa F 'nin eşlenmiş bir sabit noktasıdır denir.

Not 4.16: $F: X \times X \rightarrow X$ verilen bir dönüşüm olsun. $T: X \times X \rightarrow X \times X$ dönüşümü verilsin.

$$T(x, y) = (F(x, y), F(y, x)) \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (4.10)$$

Bu nedenle, (x, y) F 'in eşlenmiş sabit noktası ise, (x, y) T 'nin sabit noktasıdır.

5'te görülen benzer kanıtı kullanarak, $\psi \in \Psi_2$ varsayarak eşlenmiş sabit nokta sonuçlarını elde ederiz.

Teorem 4.17: (X, d) tam bir metrik uzay ve $F : X \times X \rightarrow X$ verilen bir dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi_2$ ve $\alpha : X^2 \times X^2 \rightarrow [0, +\infty)$ bir fonksiyon var olduğunu varsayalım, öyle ki her $(x, y), (u, v) \in X$ için

$$\alpha((x, y), (u, v))d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{1}{2}\psi(d(x, u) + d(y, v)) \quad (4.11)$$

Ayrıca,

(i) $\forall (x, y), (u, v) \in X \times X$ için $\alpha((x, y), (u, v)) \geq 1$ ise

$$\alpha((F(x, y), F(y, x)), (F(u, v), F(v, u))) \geq 1;$$

(ii) $X \times X$ 'de $(x_0, Tx_0); (x_0, y_0) \in X \times X$ var olduğunu ve $\alpha((x_0, y_0), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))) \geq 1, \alpha((F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)), (y_0, x_0)) \geq 1;$

(iii) F sürekli.

O zaman, F 'nin bir eşlenmiş sabit noktası vardır.

Teorem 4.18: (X, d) tam bir metrik uzay ve $F : X \times X \rightarrow X$ verilen bir dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi_2$ ve $\alpha : X^2 \times X^2 \rightarrow [0, +\infty)$ bir fonksiyon var olduğunu varsayalım, öyle ki her $(x, y), (u, v) \in X$ için

$$\alpha((x, y), (u, v))d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{1}{2}\psi(d(x, u) + d(y, v)) \quad (4.12)$$

(i) $\forall (x, y), (u, v) \in X \times X$ için $\alpha((x, y), (u, v)) \geq 1$ ise

$$\alpha((F(x, y), F(y, x)), (F(u, v), F(v, u))) \geq 1$$

(ii) $X \times X$ 'de $(x_0, Tx_0); (x_0, y_0) \in X \times X$ var olduğunda $\alpha((x_0, y_0), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))) \geq 1, \alpha((F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)), (y_0, x_0)) \geq 1$

(iii) Eğer $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X 'de aşağıdaki özellikleri sağlayan diziler olsun;

$$\alpha((x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})) \geq 1, \alpha((y_{n+1}, x_{n+1}), (y_n, x_n)) \geq 1, n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n \rightarrow x \text{ ve } y_n \rightarrow y \text{ için } \alpha((x_n, y_n), (x, y)) \geq 1, \alpha((y, x), (y_n, x_n)) \geq 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Bu durumda, T 'nin bir eşlenmiş sabit noktası vardır.

Teorem 4.19: Teorem 17'nin (sırasıyla, Teorem 18'in) tüm varsayımlarının sağlandığını varsayalım. Her $(x, y), (u, v) \in X \times X$ için, $X \times X$ içinde $(z_1, z_2) \in X \times X$ böyle bir çift var ki

$$\alpha((x, y), (z_1, z_2)) \geq 1, \alpha((z_2, z_1), (y, x)) \geq 1,$$

$$\alpha((u, v), (z_1, z_2)) \geq 1, \alpha((z_2, z_1), (v, u)) \geq 1$$

O zaman, F 'nin eşsiz bir eşlenmiş sabit noktası vardır.

Yukarıda verilenler yardımıyla bazı sonuçlara gidilmesi mümkün olmuştur. Bu sonuçlar aşağıda listelenmektedir.

Teorem 4.20: (X, d) tam bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için $k \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

sağlansın. O halde T 'nin bir eşsiz sabit noktası vardır.

Teorem 4.21: $(X, \preceq)$ kısmen sıralı bir küme olsun ve X 'te bir metrik d ve (X, d) metrik uzayının tam olduğunu varsayalım. $T : X \rightarrow X$ sürekli ve $\preceq$ 'ye göre azalmayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(i) $x, y \in X$ ve $x \preceq y$ için $d(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))$ olacak şekilde $k \in [0, 1)$ var;

(ii) $x_0 \in X$ olacak şekilde $x_0 \preceq Tx_0$ var olsun;

(iii) T sürekli olsun.

O halde, T 'nin bir sabit noktası vardır.

Teorem 4.22: $(X, \preceq)$ kısmen sıralı bir küme olsun ve X 'te bir metrik d ve (X, d) metrik uzayının tam olduğunu varsayalım. $T : X \rightarrow X$ sürekli ve $\preceq$ 'ye göre azalmayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(i) $x, y \in X$ ve $x \preceq y$ için $d(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))$ olacak şekilde $k \in [0, 1)$ var;

(ii) $x_0 \in X$ olacak şekilde $x_0 \preceq Tx_0$ var olsun;

(iii) eğer $\{x_n\}$ dizisi X ' de azalmayan ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ oluyorsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq x$ olur. O halde, T 'nin bir sabit noktası vardır.

Teorem 4.23: Teorem 21 (sırasıyla, Teorem 22) ‘nin tüm koşulları sağlansın. Her $x, y \in X$ için öyle bir $z \in X$ vardır ki $x \preceq z$ ve $y \preceq z$ sağlansın. O halde, T 'nin bir sabit noktası vardır.



5. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

Yukarıda verilen araştırma verileri yardımıyla, yeni bir büzülme tipi dönüşüm kavramı tanıtılmış ve bu dönüşümler için tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin nasıl ifade ve ispat edildiğine yer verilmiştir. Kullanılan çalışmalar, Banach büzülme ilkesini temel alarak, sunulan teoremler mevcut literatürdeki birçok sonucu genişletmiş, genelleştirmiş ve iyileştirmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların pratik kullanımını göstermek için çeşitli örnekler ve adi diferansiyel denklemlere uygulamalar sunulması verilen bilgilerin işlevselliğini göstermektedir.

5.1. Adi diferansiyel denklemlere uygulamalar

Aşağıdaki adi diferansiyel denklem, Samet vd. tarafından seçilmiştir. $C([0,1])$ ile $[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar kümesi gösterilsin ve $d : C([0,1]) \times C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\infty} = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1]\} \quad (5.1)$$

$(C([0, 1]), d)$ bir tam metrik uzaydır. İkinci dereceden diferansiyel denklemin sınır değer problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$-\frac{d^2}{dt^2} = f(t, x(t)), t \in [0,1]$$

$x(0) = x(1) = 0$ burada $f : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur. Green fonksiyonu, ile ilişkilendirilmiş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1; \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(i) $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bir fonksiyon var ki, tüm $t \in [0, 1]$ ve tüm $a, b \in \mathbb{R}$ için $\phi(a, b) \geq 0$ olduğunda,

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq 8 \psi\left(\max_{a, b \in \mathbb{R}, \phi(a, b) \geq 0} (a - b)\right),$$

olur(burada $\psi \in \Psi_2'$ dir);

(ii) $t \in [0, 1]$ için bir $x_0 \in C([0, 1])$ var ki, her $t \in [0, 1]$ için

$$\phi(x_0(t), \int_0^1 G(t, s)f(s, x_0(s))ds) \geq 0$$

(iii) $t \in [0, 1]$ için, tüm $x, y \in C([0, 1])$ için $\phi(x(t), y(t)) \geq 0$ geçerlidir

$$\phi(\int_0^1 G(t, s)f(s, x(s)), \int_0^1 G(t, s)f(s, y(s))ds) \geq 0 \quad (5.2)$$

(iv) Eğer $\{x_n\}$ bir $C([0, 1])$ içindeki bir dizi ise ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\phi(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ ve $x_n \rightarrow x \in C([0, 1])$ olarak geliyorsa, o zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x$ ise $\phi(x_n, x) \geq 0$ olur.

Aşağıdaki teoremin kanıt fikri Samet vd., (2012) çalışmasından alınmış olup ona göre farklılıklar içerir.

Teorem 5.1: (i)–(iv) koşulları altında, $C^2([0, 1])$ içinde bir çözüme sahiptir.

Sonuç 5.2: $C([0, 1])$ ile $[0, 1]$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar kümesi gösterilsin ve

(i) $f : C([0, 1]) \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve azalmayandır.

(ii) $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bir fonksiyon var ki, tüm $t \in [0, 1]$ ve tüm $a, b \in \mathbb{R}$ için $\phi(a, b) \geq 0$ olduğunda,

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq 8\psi(\max_{a, b \in \mathbb{R}, \phi(a, b) \geq 0} (a - b))$$

olur(burada $\psi \in \Psi_2'$ dir); (iii) $t \in [0, 1]$ için bir $x_0 \in C([0, 1])$ var ki,

$$x_0(t) \leq \int_0^1 G(t, s)f(s, x_0(s))ds \quad (5.3)$$

olur, o halde $C^2([0, 1])$ için tekil bir çözüme sahiptir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sonuç olarak, bu tez çalışması, yeni bir büzülme tipi dönüşüm kavramının tanıtılmasıyla, tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin nasıl ifade ve ispat edildiğini detaylandırmış ve Banach büzülme ilkesi yardımıyla bu sonuçların nasıl genişletilebileceğini göstermiştir. Bu çalışma, sadece teorik açıdan önemli katkılar sağlamakla kalmamış, aynı zamanda elde edilen sonuçların pratik uygulamalarını da göstermiştir. Özellikle:

1. **Teorik Katkılar:** Bu tezde tanıtılan yeni büzülme tipi dönüşüm kavramı, metrik uzaylarda sabit nokta teorisine yeni bir perspektif kazandırmıştır. Bu yeni kavram, Banach büzülme ilkesine alternatif veya tamamlayıcı nitelikte olup, literatürde mevcut olan diğr sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmesine imkan tanımaktadır.
2. **Uygulama Alanları:** Elde edilen teorik sonuçların çeşitli mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi disiplinlerdeki pratik problemlere uygulanabilirliği gösterilmiştir. Özellikle dinamik sistemlerin kararlılığı, optimizasyon problemleri ve nümerik analizde bu sonuçların nasıl kullanılabileceği detaylandırılmıştır.
3. **Yöntemsel Gelişmeler:** Banach büzülme ilkesi kullanılarak genişletilen sonuçlar, sadece klasik metrik uzaylar için değıl, aynı zamanda daha genel uzaylar için de geçerlidir. Bu durum, sabit nokta teorisinin kapsamını genişletmekte ve daha karmaşık sistemlerde uygulanabilirliğini artırmaktadır.
4. **Gelecek Araştırma Yönleri:** Bu çalışmada ortaya konulan yeni yaklaşımlar ve elde edilen sonuçlar, gelecekte yapılacak araştırmalar için geniş bir perspektif sunmaktadır. Özellikle, bu tür büzülme tiplerinin diğr matematiksel yapılar üzerinde nasıl genelleştirilebileceğı ve farklı sabit nokta teoremleri ile nasıl ilişkilendirilebileceğı konusunda daha fazla çalışma yapılması gerekmektedir.
5. **Literatüre Katkı:** Tez çalışması, Türkçe literatürde bu alanda yeni ve önemli bir kaynak olarak yerini almıştır. Bu, hem yerli araştırmacılar için referans

olabilecek nitelikte bir çalışma ortaya koymakta, hem de bu alanda yapılacak olan gelecekteki araştırmalara temel oluşturmaktadır.

Bu ve benzeri çalışmaların artarak devam etmesi, sabit nokta teorisinin ve büzölme tip dönüşümlerinin daha geniş bir perspektifte ele alınmasına ve daha kapsamlı sonuçların elde edilmesine olanak sağlayacaktır. Bu durum, hem teorik matematik hem de uygulamalı bilimler açısından önemli bir potansiyele sahiptir.



KAYNAKLAR

- Abbas, M. and Jungck, G. (2008) “Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 341, no. 1, pp.416–420
- Abbas, M., Babu, G. V. R. and Alemayehu, G. N. (2011) “On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition (B)”, *Filomat*, vol. 25, no. 2, pp. 9–19.
- Agarwal, R. P., Arshad, S., O'Regan, D., & Lupulescu, V. (2013). A Schauder fixed point theorem in semilinear spaces and applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, 1-13.
- Ankara Üniversitesi, “Normlu Uzaylar ve Banach Uzayı”,
https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/1661/mod_resource/content/1/07hafta.pdf
Son erişim tarihi: 01.06.2024
- Ankara Üniversitesi, “Adi Diferansiyel Denklemler-Tanımlar ve Kavramlar”,
https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/61534/mod_resource/content/1/Tan%C4%B1mlar-Kavramlar.pdf
Son erişim tarihi: 01.06.2024
- Akyüz, E. (2018) “Büzülme Dönüşümleri İçin Bir Genel Sabit Nokta Teoremi Ve Kuadratik İntegral Denklemlere Uygulaması” *Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Kırıkkale, s.1, s.6, .
- Branciari, A. (2002) “A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 29, no. 9, pp. 531–536.
- Çit, S. (2021), “Vektör Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri”, *Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Ankara, s.1, s.6, .

- Durak, Ö. (2022) “Brouwer Sabit Nokta Teorisi ve Uygulamaları”, *Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Konya, s.1, s.6,
- Duman, O. (2019) “Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği ile ilgili Teoremler”, *İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul*, s.1, s.6, s.11, s.16-24.
- Genç, S. (2021) “Modüler Metrik Uzaylar Ve Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Uygulamaları”, *Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Konya, s.1, s.6, .
- Güleç, E. (2014) “: Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri”, *Bahçeşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı*, İstanbul, s.3, s.6, .
- Gnana Bhaskar, T. and Lakshmikantham, V. (2006) “Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 65, no. 7, pp. 1379–1393.
- Grant, C.P., “Theory of Ordinary Differential Equations”,
<https://www.math.utah.edu/~treiberg/GrantTodes2008.pdf>
Son erişim tarihi: 01.06.2024
- Karapinar, E. and Samet, B. (2012) “Generalized α - ψ -contractive type mappings and related fixed point theorems with applications”, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 793486, 17 pages.
- Lakshmikantham, V. and Ćirić, L. (2009) “Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces”, *Nonlinear Analysis*, vol. 70, no. 12, pp. 4341–4349.
- Mangang, K. B. (2014) “Equicontinuity and Minimality of Limit function of a sequence of maps”, *Journal of the Indian Mathematical Society*, s.3.
- Nesin, A., “Analiz 4”, https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/05/alinesin-analiz_4.pdf ,
Son erişim tarihi: 01.06.2024

- Nieto, J. J. and Rodriguez-Lopez, R. (2005) “**Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations**”, vol. 22, no. 3, pp. 223–239.
- Salimi, P. , Latif, A. and Hussain, N. (2013) “Modified α - φ -contractive mappings with applications”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2013, article 151.
- Samet, B., Vetro, C. and Vetro, P. (2012) “Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings”, *Nonlinear Analysis*, vol. 75, no. 4, pp. 2154–2165.
- Taş, N. (2017) “Sabit Nokta Teoremleri ve Çeşitli Uygulamaları”, *Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Balıkesir, s.3.
- Tektaş, M. ve Akdoğan, E. (2000) “Diferansiyel Denklemler ve Elektrik-Elektronik Devre Uygulamaları”, *Marmara Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Yayın No:3*, İstanbul, s.1-3, 33.
- UCSD, “**Ordinary Differential Equations in a Banach Space**”,
https://mathweb.ucsd.edu/~bdriver/240A-C-03-04/Lecture_Notes/Older-Versions/part4.pdf
Son erişim tarihi: 01.06.2024
- Uysal, G. (2010) “Konvekslik ve Optimizasyon Üzerine”, *Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Sakarya, s.12.