

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYISAL SEMİGRUPLAR VE ÖZEL
SINIFLARI

Mohammad ZMMO

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYISAL SEMİGRUPLAR VE ÖZEL
SINIFLARI

Mohammad ZMMO

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 10/06/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Sevdâ SEZER

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYISAL SEMİGRUPLAR VE ÖZEL SINIFLARI

Mohammad ZMMO

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Haziran 2024, 75 sayfa

$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid olmak üzere, $\mathbb{N}_0^d \setminus S$ sonlu ise, S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olarak bilinir. Genelleştirilmiş sayısal semigruplar, klasik sayısal semigruplar teorisinde önemli yer tutan Frobenius problemine daha genel bir çerçeve sunar ve sayısal semigrupların daha karmaşık yapılarını içerir. Bu nedenle, genelleştirilmiş sayısal semigruplar, önemli bir analiz ve keşif sağlar.

Bu tezde, genelleştirilmiş sayısal semigrupların çeşitli sınıflarının tanıtılması, özelliklerinin araştırılması, bu sınıfların birbirleri arasındaki ilişkilerin belirlenmesi ve analiz edilmesine odaklanılmıştır. Bu yeni yapılarla ilgili başta genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruplar olmak üzere genelleştirilmiş aralıklı (sparse), yoğun (dense), tam yoğun sayısal semigruplar ve genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeler kümesi tanımlanıp Frobenius elemanı, Apery kümesi, üreteç kümesi ve cinsi gibi özellikler incelenmiş ve her sınıf için ilginç örnekler verilmiştir.

$\mathbb{N}_0$ 'de üçgen ve pramitsel sayısal semigrupların minimal üreteç kümeleri başta olmak üzere bazı özelliklerinin tanıtılması ve üçgen sayısal semigrupların iki genellemesi olan n -inci β -Pascal ve θ -gonal sayısal semigrupları incelenerek klasik sayısal semigrup ailelerine katkıda bulunmak amaçlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Artimetik Genişlemeler, Genelleştirilmiş Mükemmel Sayısal Semigrup, Genelleştirilmiş Sayısal Semigrup, Pascal Üçgeni, Polygonal Sayı.

JÜRİ: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Sevdâ SEZER

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ABSTRACT

GENERALIZED NUMERICAL SEMIGROUPS AND SPECIAL CLASSES

Mohammad ZMMO

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

June 2024, 75 pages

If $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ is a monoid and $\mathbb{N}_0^d \setminus S$ is finite, S is known as a generalized numerical semigroup. Generalized numerical semigroups provide a more general framework for the Frobenius problem, which is important in classical numerical semigroup theory, and contain more complex structures than numerical semigroups. Therefore, generalized numerical semigroups provide important analysis and discovery.

This thesis focuses on introducing various classes of generalized numerical semigroups, investigating their properties, determining and analyzing the relationships between these classes. Regarding these new structures, generalized perfect numerical semigroups, generalized sparse, dense, fully dense numerical semigroups, and the arithmetic extensions of the generalized numerical semigroup are defined. Properties such as the Frobenius element, Apéry set, generator systems, and genus have been examined, and interesting examples have been provided for each class.

It will contribute to the classical numerical semigroup families by introducing some properties of triangular and pyramidal numerical semigroups in $\mathbb{N}_0$, especially the minimal generator systems, and examining the n -th β -Pascal and θ -gonal numerical semigroups, which are two generalizations of triangular numerical semigroups.

KEYWORDS: Arithmetic Extensions, Generalized Numerical Semigroup, Generalized Perfect Numerical Semigroup, Pascal's Triangle, Polygonal Number.

COMMITTEE: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Assoc. Prof. Dr. Sevda SEZER

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

Asst. Prof. Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın sonuçları, genelleştirilmiş sayısal semigrupların çeşitli sınıflarının önemli matematiksel özelliklerini vurgulamakta ve bu sınıfların sayı teorisi, cebir ve diğer matematiksel alanlar üzerindeki etkilerini ortaya koymaktadır. Ayrıca, çalışma, genelleştirilmiş sayısal semigruplar ve bu semigrupların sınıfları hakkında gelecekteki araştırmalar için bir temel oluşturarak, bu alanda daha derinlemesine çalışmalar sağlamayı amaçlamaktadır.

Bu tez Giriş, Kaynak Taraması, Bulgular ve Sonuç olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır. Giriş ve kaynak taraması bölümlerinde: bu tez konusuyla bağlantılı olarak klasik sayısal semigruplar ve genelleştirilmiş sayısal semigruplar ile ilgili literatür çalışmalarında elde edilmiş genel bilgiler kısaca ifade edilmiştir.

Bulgular kısmı iki alt bölümden oluşmaktadır, bu altbölümlerin amaçları:

- $\mathbb{N}_0^d$ 'de genelleştirilmiş aritmetik sayısal semigruplar, genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruplar, genelleştirilmiş yoğun ve tam yoğun sayısal semigrupların tanıtılıp özelliklerini incelenmesi,
- $\mathbb{N}_0$ 'de üçgen ve pramitsel sayısal semigrupların minimal üreteç kümeleri başta olmak üzere bazı özelliklerinin tanıtılması ve üçgen sayısal semigrupların iki genellemesi olan n -inci β -Pascal sayısal semigruplar ve θ -gonal sayısal semigrupların incelenmesidir.

Savaş nedeniyle ülkemden ayrılmak zorunda kaldığım için kaybettiğim hayatımı tamamlama şansını sağlayan Türk devletine, kardeş Türk halkına ve Akdeniz Üniversitesi'ne derin bir teşekkür borçluyum. Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, zor durumlarda motivasyonumu yükselten ve yardım eden, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, saygıdeğer hocamlarım Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a ve Doç. Dr. Sevda SEZER'e tezimi iyi bir şekilde tamamlamak için verdikleri tavsiyeler ve ilgi için derin bir teşekkür borçluyum. Bana yardım etmekten çekinmeyen ve üniversitede kardeşlerim gibi olan meslektaşlarım Dr. Nihal GÜMÜŞBAŞ ve Dr. Naci ER'e de teşekkürlerimi sunarım. Rahmetli babam, başta dualarıyla olmak üzere her zaman yanımda olan anneme, mezuniyet anımı sabırla bekleyen sevgili eşim Ensaf NAMMOURA'ya ve tüm kardeşlerime teşekkür ediyorum. Bana destekte bulunan Fatma HLIWA, Wessam ZEMMO ve Muhammed NEMMURA'ya teşekkürlerimi iletmek istiyorum. Antalya'daki ikinci ailem Ramazan KALKEN, Ahmet PEHLİVAN ve ailelerine teşekkürlerimi sunmak istiyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1 GİRİŞ	1
2 KAYNAK TARAMASI	3
2.1 Sayısal semigrupların temel kavramları	3
3 MATERYAL VE METOT	8
3.1 Genelleştirilmiş sayısal semigrupların temel kavramları	8
4 BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1 $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ Genelleştirilmiş Sayısal Semigruplar	21
4.1.1 Genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruplar	21
4.1.2 Genelleştirilmiş aralıklı (Sparse) sayısal semigruplar	36
4.1.3 Genelleştirilmiş yoğun (Dense) ve tam yoğun sayısal semigruplar	38
4.1.4 Genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeleri	40
4.2 Üçgen Sayısal Semigrupların Genellemeleri	46
4.2.1 Üçgen sayısal semigrupları	46
4.2.2 Piramitsel sayısal semigrupları	49
4.2.3 Üçgen sayısal semigrupların iki farklı genellemesi	57
5 SONUÇLAR	72
6 KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Sayısal Semigruplar ve Özel Sınıfları” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

10/06/2024

Mohammad ZMMO



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tamsayıların kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi:
$<_m$	: Monomial sıralama
$\prec$	: Relaxed monomial sıralama
$m(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin katlılığı
$m(S)_\prec$	: Relaxed monomial sıralamaya göre genelleştirilmiş sayısal semigrup S 'nin katlılığı
$F(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin Frobenius sayısı
$F(S)_\prec$	: Relaxed monomial sıralamaya göre genelleştirilmiş sayısal semigrup S 'nin Frobenius elemanı
$g(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin boşlukları sayısı
$PF(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin pseudo-Frobenius elemanların kümesi
$SG(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin özel boşlukların kümesi
$e(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin gömülüş boyutu
$Ap(S, n)$	: Sayısal semigrup S 'de n 'nin Apéry kümesi
$\frac{S}{d}$	: Sayısal semigrup S 'nin d 'ye göre bölümü
$iso(S)$	: Sayısal semigrup S 'nin izole boşlukları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Örnek	3.17'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup	12
Şekil 3.2 Örnek	3.19'daki genelleştirilmiş sayısal semigrup	13
Şekil 4.1 Örnek	4.7'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup	22
Şekil 4.2 Örnek	4.8'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup	23
Şekil 4.3 Örnek	4.11'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.	25
Şekil 4.4 Örnek	4.14'teki genelleştirilmiş sayısal semigrup	27
Şekil 4.5 Örnek	4.17'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.	28
Şekil 4.6 Örnek	4.19'daki genelleştirilmiş sayısal semigrup.	29
Şekil 4.7 Örnek	4.20'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.	30
Şekil 4.8 Örnek	4.26'daki genelleştirilmiş sayısal semigrubun elemanları . . .	32
Şekil 4.9 Örnek	4.26'daki genelleştirilmiş sayısal semigrubun boşlukları . . .	33
Şekil 4.10 Örnek	4.44'teki genelleştirilmiş sayısal semigrup	38
Şekil 4.11	Pramitsel sayıları	49
Şekil 4.12	Pascal üçgeni	58
Şekil 4.13	θ -gonal sayılarının temsili	62
Şekil 4.14 Örnek	4.126'daki verilen genelleştirilmiş çokgen sayısal semigrup .	71

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 Cinsi $g \leq 3$ olan genelleştirilmiş sayısal semigruplar	20
--	----



1. GİRİŞ

Sayısal semigruplar, pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir cebirsel yapıdır. Temelde, bir sayısal semigrup, bir veya daha fazla pozitif tam sayının toplamları kümesini ifade eder. Bu semigruplar, sayı teorisindeki çeşitli problemlerin çözümünde önemli rol oynar.

Sylvester ve Frobenius'un çalışmaları, sayı teorisi alanında önemli bir yere sahiptir. Sylvester vd. (1884) bir N pozitif tamsayısının aralarında asal olan iki pozitif tamsayının pozitif katları cinsinden yazılabildiğini iddia etmiştir.

Frobenius ise bu konuyu genelleştirerek, aralarında asal olan pozitif tamsayıların pozitif katları cinsinden yazılamayan en büyük pozitif tamsayıyı bulma problemini ele almıştır. Bu problem, Frobenius problemi olarak bilinir. Frobenius problemi, belirli bir aralıkta, aralarında asal olan tamsayıların pozitif katları cinsinden yazılamayan en büyük tamsayıyı bulma problemidir. Bu problemin çözümü genellikle sayısal semigruplar ve ilgili matematiksel kavramlarla ele alınır. Sayısal semigruplar, bu tür problemlerin çözümünde önemli bir rol oynar ve bu alandaki çalışmalar Frobenius problemi ve benzeri problemlerle ilgilenen matematikçiler tarafından yapılmıştır.

Sayısal semigruplar, matematikte temel kavramlardan biridir ve çeşitli alanlarda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak, geleneksel olarak tanımlanan sayısal semigruplar, bazı durumlarda yetersiz kalabilir. Bu bağlamda, ilk kez Failla vd. (2016) makalesinde de tanımlanan genelleştirilmiş sayısal semigruplar, sayı teorisi, cebir ve matematiğin bir çok alanında geniş uygulamalara sahiptir ve sayısal semigruplardaki bazı kısıtlamaları ortadan kaldırabilir. Aynı makale, genelleştirilmiş sayısal semigrupların sistemli bir şekilde incelenmesinin başlangıcını temsil eder. Sayısal yarıgruplarla ilgili geniş literatürü dikkate alarak, hangi sonuçların yeni genel bağlama uygun olduğunu incelemek oldukça ilginçtir.

Cisto (2020)'nin makalesinde, simetrik, pseudo-simetrik ve sıralı genelleştirilmiş sayısal semigruplar gibi belirli sınıflara ve genelleştirilmiş sayısal semigrubun temel özelliklerine odaklanılmıştır. Bu bağlamda, minimal üreteç sisteminin karakterizasyonu sunulmuş ve öne çıkan en önemli sorun olan Frobenius elemanının tanımına özel bir vurgu yapılmıştır.

Frias ve Rosales (2019)'in makalesinde mükemmel sayısal semigrup kavramı tanımlanmıştır. Bu sayısal semigruplar topolojiden gelen, tam olarak mükemmel bir küme kavramından gelir. Moreno-Frias ve Rosales (2020)'in makalesinde, yazarlar gömülüş boyutu üç olan tüm mükemmel sayısal semigrupları karakterize etmişlerdir. Smith (2022)'in makalesinde, bir sayısal semigrubun izole boşlukları üzerine bazı özellikleri ve izole boşluklar kümesi ile Apéry kümesi arasındaki ilişkileri araştırılmıştır.

Bu tezde, genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrupları başta olmak üzere

genelleştirilmiş sayısal semigrupların incelenmesi ve bu yapıların özel sınıflarının ayrıntılı bir analizi sunulmaktadır. Ayrıca, bu yapıların matematiksel özellikleri ve çeşitli örnekleri üzerinde durulmuştur.

Genelleştirilmiş sayısal semigruplar, Frobenius problemine daha genel bir çerçeve sunar ve semigrupların daha karmaşık yapılarını içerir. Bu çerçeve altında, Frobenius problemi, genelleştirilmiş sayısal semigrupların özelliklerini ve davranışlarını inceleyerek daha kapsamlı bir şekilde ele alınabilir. Böylece, genelleştirilmiş sayısal semigruplar, Frobenius problemi gibi önemli matematiksel sorunların çözümünde analiz ve keşif için önemli bir araç sağlar.

Bir sayısal semigrubun aritmetik genişlemesi, semigrubun elemanlarını belirli bir aritmetik kurala göre genişleterek yeni bir yapı oluşturmayı ifade eder. Genelleştirilmiş sayısal semigrupların aritmetik genişlemesi ise bu kavramın daha genel bir formunu temsil eder ve semigrupların genişlemesiyle ilgili daha karmaşık matematiksel yapıları içerebilir. Ojeda ve Rosales (2020)'da semigrupların yapısı daha geniş bir kapsamda incelenmiş ve çeşitli matematiksel problemler daha etkili bir şekilde elde edilmiştir. Bu tezde, genelleştirilmiş sayısal semigrupların aritmetik genişlemeleri kavramı üzerine odaklanarak, bu genişlemelerin matematiksel özelliklerini incelenmiştir.

Bu tezin hedefleri arasında genelleştirilmiş sayısal semigrupların çalışılması yanısıra klasik sayısal semigruplar teorisinde katkı sunacak yeni aileler üretmek de yer almaktadır. Bu hedef doğrultusunda, çokgen sayısal semigruplar incelenmiştir. Bir doğal sayı, uygun $n \in \mathbb{N}$ için ilk n doğal sayının toplamıysa, bu sayıya üçgen sayı denir ve T_n ile gösterilir. Robles-Pérez ve Rosales (2018)'da bir üçgen sayısal semigrup tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu tezde, Robles-Perez tarafından yapılan çalışmadan ilham alarak, bir üçgen sayısal semigrubun iki genelleştirmesi ele alınmıştır. Bu genelleştirmeler, üçgen semigrubun yapısal özelliklerini genişleterek, daha genel bir çerçeve sunar. Bu genelleştirmelerin minimal üreteç sistemini ve diğer matematiksel özelliklerini detaylı bir şekilde incelemek amaçlanmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş çokgen sayısal semigruplar tanıtılarak, bu yapıların çeşitli ilginç örneklerle zenginleştirilmesi hedeflenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde sayısal semigruplar ve genelleştirilmiş sayısal semigruplar yapılarının bulgular bölümünde kullanılacak temel kavramları kısaca tanıtılacaktır.

2.1. Sayısal semigrupların temel kavramları

Sayısal semigrupların cebirsel geometri ve kodlama teorisi gibi matematiğin bir çok dalında uygulaması vardır. Bu bölümde, semigrup yapısının temel kavramları ve genel özellikleri kısaca verilecektir.

Bu çalışma boyunca $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ ile de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesi gösterilecektir.

Bu bölümdeki önerme ve teoremlerin ayrıntılı ispatları için Rosales ve García-Sánchez (2009) kitabı kaynak olarak verilir.

Tanım 2.1. S bir küme, “ $*$ ”, S üzerinde bir ikili işlem ve S bu işlem ile birleşme özelliğine sahip ise S ye bir semigrup denir. S semigrubunun “ $*$ ” işlemine göre birimli ise, S ye bir monoid denir. S monoidinin boştan farklı bir altkümesi aynı işlem ile birlikte bir monoid ise bu alt kümeye S nin bir altmonoid denir.

$\mathbb{N}_0$ ın “ $+$ ” işlemi ile bir monoid olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.2. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $0 \in S$ ve S nin tümleyeni sonlu ise, S ye sayısal küme denir. $S \neq \mathbb{N}_0$ ise, S ye has sayısal küme denir. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir monoid ve $\mathbb{N}_0 \setminus S$ sonlu küme ise, S ye sayısal semigrup denir. S sayısal semigrubunun boştan farklı bir altkümesi aynı işlem ile birlikte bir sayısal semigrup ise bu alt kümeye S nin bir alt sayısal semigrubu denir.

$\mathbb{N}_0$, bir sayısal semigruptur.

Örnek 2.3. $S = \{0, 2, 4, 6, 8, \rightarrow\}$ kümesini dikkate alalım, burada “ $\rightarrow$ ”, 8’den büyük bütün doğal sayılar S ’ye ait olduğunu ifade eder. S bir sayısal semigruptur. Ancak $T = \{1, 3, \rightarrow\}$ bir sayısal semigrup değildir.

Tanım 2.4. S bir sayısal semigrup olsun.

1. $H(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$ kümesine S nin boşluk kümesi, elemanlarına S nin boşlukları, bu kümenin eleman sayısına S nin cinsi denir. S nin cinsi $g(S)$ ile gösterilir.
2. S ye ait olmayan en büyük tamsayıya S ’nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir.
3. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x + n \in S$ olacak şekilde en küçük x tamsayısına S nin önderi (conductor) denir ve $c(S)$ ile gösterilir.

4. S sayısal semigrubunun $c(S)$ den küçük elemanlarına S nin küçük elemanları denir.
5. $x \notin S$ ve her $s \in S \setminus \{0\}$ için $x + s \in S$ ise, x sayısına pseudo-Frobenius sayısı denir ve pseudo-Frobenius sayıların kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ nin eleman sayısına S 'nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir.

Aksi belirtilmedikçe, bundan sonra " $|\cdot|$ " sembolü, kümenin eleman sayısını gösterecektir.

Tanımdan $F(S) = c(S) - 1$, $F(S) \in PF(S)$ ve $g(S) = |\mathbb{N}_0 \setminus S|$ dir.

Tanım 2.5. S bir sayısal semigrup ve A , S nin boştan farklı bir altkümesi olsun. S içinde A yı kapsayan sayısal semigrupların kesişimine S içinde A tarafından üretilen sayısal altsemigrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.

Bir S sayısal semigrubunda A tarafından üretilen altsemigrubun

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in A\}$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.6. S bir sayısal semigrup, $A \subseteq S$ olmak üzere $\langle A \rangle = S$ ise S ye A tarafından üretilen sayısal semigrup, A kümesine S nin bir üreteç sistemi denir. A , S nin bir üreteç sistemi ve A nın hiçbir özalt kümesi S için bir üreteç sistemi değilse, A ya S nin minimal üreteç sistemi denir.

Teorem 2.7. A bir küme ve S bir sayısal semigrup olmak üzere,

1. $\phi \neq A \subseteq \mathbb{N}$ için $\langle A \rangle$ nın bir sayısal semigrup olması için gerek ve yeter-köşül $\text{obeb}(A) = 1$ olmasıdır.
2. $\phi \neq A \subseteq \mathbb{N}_0$ aşıkarak olmayan alt monoid ise A , $\mathbb{N}_0$ in bir sayısal alt semigrubuna izomorftur.
3. $A \subseteq \mathbb{N}_0$ alt monoid ve $S^* := S \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$S^* + S^* := \{s_i + s_j : s_i, s_j \in S^*\}$$

tanımlayalım. Bu durumda, $S^* \setminus (S^* + S^*)$, S nin bir üreteç sistemidir

Tanım 2.8. S bir sayısal semigrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. Bu durumda,

$$Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$$

kümesine S 'de n 'nin Apéry kümesi denir.

Önerme 2.9. Her $i \in \{0, \dots, n-1\}$ için $w(i) \equiv i \pmod{n}$ olacak şekilde S 'nin en küçük elemanı $w(i)$ olmak üzere $Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$ dir.

Tanım 2.10. S bir sayısal semigrup ve $\{n_1 < n_2 < \dots < n_r\}$, S nin minimal üreteç sistemi olsun. n_1 sayısına, S nin katlılığı (multiplicity), minimal üreteç sisteminin eleman sayısı olan r sayısına S nin gömülüş boyutu (embedding dimension) denir ve sırasıyla $m(S)$ ve $e(S)$ ile gösterilir. Eğer $e(S) = m(S)$ ise, S maksimum gömme boyutuna sahip denir.

Önerme 2.11. $S = \langle a, b \rangle$ bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. $F(S) = ab - a - b$,
2. $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$,
3. $Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}$ dir.

Önerme 2.12. S bir sayısal semigrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. Bu durumda,

1. $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$ dir.
2. $g(S) = \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in Ap(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}$ dir.

Önerme 2.13. S bir sayısal semigrup olsun. Her $s \in S$ için $s = kn + w$ olacak şekilde tek türlü belirli $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ vardır.

Teorem 2.14. Her sayısal semigrup tek türlü belirli minimal üreteç sistemine sahiptir ve bu sistem sonludur.

Tanım 2.15. Kendisini kapsayan herhangi iki semigrubun kesişimi olarak yazılamayan S semigrubuna indirgenemez nümerik semigrup denir. İndirgenemez ve Frobenius sayısı tek tamsayı (çift tamsayı, sırasıyla) olan nümerik semigruba simetrik semigrup (pseudo-simetrik, sırasıyla) denir.

Önerme 2.16. S bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. S simetrik ancak ve ancak $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ dir.
2. S pseudo-simetrik ancak ve ancak $g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$ dir.

Önerme 2.17. S bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. S simetrik ancak ve ancak $PF(S) = \{F(S)\}$ dir.
2. S pseudo-simetrik ancak ve ancak $PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$ dir.

Önerme 2.18. S bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. $m(S) = \min(S \setminus \{0\})$ dir.
2. $e(S) \leq m(S)$ dir.

Örnek 2.19. $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$ olsun. Bu durumda, $Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$ dir. $\{Ap(S, m(S) \setminus \{0\}) \cup \{m(S)\} = \{5, 7, 9, 16, 18\}$, S 'nin minimal olmayan bir üreteç sistemidir. S 'nin minimal üreteç sistemi $\{5, 7, 9\}$ dir.

Tanım 2.20. S sayısal bir semigrup olsun. Eğer her $x, y, z \in S$ için $x \geq y \geq z \Rightarrow x + y - z \in S$ ise, S 'ye bir Arf sayısal semigrubu denir.

Eğer her $x, y \in S \setminus \{0\}$ için $x + y - m(S) \in S$ ise, S maksimum gömme boyutuna sahiptir.

Önerme 2.21. Her Arf sayısal semigrup maksimum gömme boyutuna sahiptir.

Tanım 2.22. S bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S yi içeren iki sayısal semigrubun kesişimi olarak ifade edilemiyorsa S 'ye bir indirgenemez sayısal semigrup denir. Eğer S indirgenemez ve $F(S)$ tek ise, S 'ye simetrik sayısal semigrup denir. Eğer S indirgenemez ve $F(S)$ çift ise, S 'ye bir pseudo-simetrik sayısal semigrup denir.

Frias ve Rosales (2019) mükemmel sayısal semigrup kavramını tanımladılar. Bu, sayısal semigruplar topolojiden gelen, tam olarak mükemmel küme kavramından gelir.

Tanım 2.23. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir sayısal semigrup ve $h \in H(S)$ olsun. Eğer $\{h-1, h+1\} \subset S$ ise, h 'ye S 'nin bir izole boşluğu denir.

Tanım 2.24. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir sayısal semigrup olsun. Eğer S 'nin hiç bir izole boşluğu yoksa, S ye bir mükemmel sayısal semigrup denir.

Moreno-Frias ve Rosales (2020) makalesinde, yazarlar gömülü boyutu üç olan tüm mükemmel sayısal semigrupları karakterize etmişlerdir. Smith (2022) makalesinde, yazarlar bir sayısal semigrubun izole boşlukları üzerine bazı özellikleri araştırmışlar ve izole boşluklar kümesi ile Apéry kümesi arasındaki ilişkileri sergilemişlerdir.

Örnek 2.25. $S = \{0, 5, 7, 10, \rightarrow\}$ olsun. $6 \in H(S)$ bir izole boşluktur, bu yüzden S bir mükemmel sayısal yarıgrup değildir. Diğer yandan, $N = \{0, 4, 5, \rightarrow\}$ izole bir boşluğa sahip değildir ve N bir mükemmel sayısal semigruptur..

Tanım 2.26. S bir sayısal semigrup ve her $s \in S \setminus \{0\}$ için $\{s+1, s-1\} \cap S \neq \emptyset$ ise, S 'ye bir yoğun(dense) sayısal semigrup denir.

Örnek 2.27. $S = \langle 3, 4 \rangle = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$ yoğun bir sayısal semigruptur.

Tanım 2.28. S ve T iki sayısal semigrup olsun. Eğer $S \subseteq T$ ise, T 'ye S 'nin genişlemesi denir. Eğer $S \subseteq T$ ve

$$T = \{x \in \mathbb{N}_0 : d_i x \in S, i = 1, 2, \dots, n\}$$

olacak şekilde $d_1, d_2, \dots, d_n$ pozitif tamsayıları varsa T 'ye, S 'nin aritmetik genişlemesi denir.

Eğer S bir sayısal semigrup ve d pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{S}{d} := \{x \in \mathbb{N}_0 : dx \in S\}$$

$\mathbb{N}_0$ 'ın bir altmonoididir. $\mathbb{N} \setminus \frac{S}{d}$ sonlu ve her $x, y \in \frac{S}{d}$ için $dx, dy \in S$ dir. Bu durumda $dx + dy = d(x + y) \in S$ olduğundan $x + y \in \frac{S}{d}$ dir. Dolayısıyla, $\frac{S}{d}$, $\mathbb{N}_0$ içinde bir sayısal semigruptur.

Tanım 2.29. $\frac{S}{d}$ semigrubuna S 'nin d ile bölümü denir.

Lemma 2.30. *Rosales ve García-Sánchez (2009), $S \neq \mathbb{N}_0$ bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $\frac{S}{d} = \mathbb{N}_0$ ancak ve ancak $d \in S$ dir.*

Tanım 2.28 ve Lemma 2.30 dan, T , S 'nin bir aritmetik genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul $T = \frac{S}{d_1} \cap \frac{S}{d_2} \cap \dots \cap \frac{S}{d_n}$ olacak şekilde $\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subseteq \mathbb{N}_0 \setminus S$ pozitif tamsayılarının olmasıdır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Genelleştirilmiş sayısal semigrupların temel kavramları

Bu bölümün amacı, bir genelleştirilmiş sayısal semigrubun temel özelliklerini incelemektir.

Bu bölümde, $\mathbb{R}^d$ 'deki standart taban vektörleri $e_1, e_2, \dots, e_d$ ile gösterilecektir (yani, $i = 1, \dots, d$ için, e_i , i -inci bileşeni 1 ve diğer bileşenleri sıfır olan vektördür). Eğer $A \subseteq \mathbb{N}_0^d$ ise, $\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}\}$, A kümesi tarafından üretilen $\mathbb{N}_0^d$ 'nin alt monoididir. Ayrıca, $z \in \mathbb{N}_0^d$ nin, i 'nci bileşeni genellikle $z^{(i)}$ ile gösterilir. $\mathbb{N}_0^d$ üzerindeki doğal kısmi sıralama $\leq$ ile gösterilir, yani $x, y \in \mathbb{N}_0^d$, $x \leq y$ ancak ve ancak her $i = 1, \dots, d$ için $x^{(i)} \leq y^{(i)}$ dir.

Tanım 3.1. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid olmak üzere, S 'nin boşluk kümesi $H(S) = \mathbb{N}_0^d \setminus S$ sonlu ise, S 'ye bir genelleştirilmiş sayısal semigrup denir. Ayrıca $\mathbb{N}_0^d \setminus S$ 'nin eleman sayısına S 'nin cinsi denir ve $g(S) = |H(S)|$ ile gösterilir.

Tanım 3.1 sayısal semigrup kavramının doğal bir genellemesidir.

Açıklama 3.2. Sayısal semigruplar ve genelleştirilmiş sayısal semigruplar arasındaki en önemli fark nedir diye düşündüğümüzde, Frobenius sayısı, Apéry kümesi ve katlılık gibi kavramlar hemen ortaya çıkar. Bu kavramlar kullanılan sıralamaya göre değişir. Örneğin, $\mathbb{N}_0$ 'nin doğal bir tam sıralaması vardır, $\mathbb{N}_0^d$ ise yalnızca kısmi bir doğal sıralamaya sahiptir.

Şimdi bu bölümde kullanılmış tüm sıralamalar aşağıdaki gibi sunuyoruz.

Tanım 3.3. $<_m$, $\mathbb{N}_0^d$ 'nin elemanları üzerindeki tam sıralama aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa tek terimli sıralama (monomial order) denir:

1. Eğer $v, w \in \mathbb{N}_0^d$, $v <_m w$ ise, her $u \in \mathbb{N}_0^d$ için $v + u <_m w + u$.
2. Eğer $v \in \mathbb{N}_0^d$ ve $v \neq 0$ ise, $0 <_m v$.

Tanım 3.4. $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ 'nin elemanları üzerindeki tam sıralama aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa gevşetilmiş tek terimli sıralama (relaxed monomial order) denir:

1. Eğer $v, w \in \mathbb{N}_0^d$, $v \prec w$ ise, her $u \in \mathbb{N}_0^d$ için $v \prec w + u$.
2. Eğer $v \in \mathbb{N}_0^d$ ve $v \neq 0$ ise, $0 \prec v$.

Örnek 3.5. $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ olsun. $\beta - \alpha$ 'nin sıfırdan farklı ilk koordinatı (sol taraftan) pozitifse, $\alpha \leq \beta$ tanımlayalım. Bu sıralamaya sözlük sıralaması (lexicographic sıralama) denir. Bu sıralama bir gevşetilmiş tek terimli sıralamasıdır.

Örnek 3.6. $<_m$, $\mathbb{N}_0^d$ üzerinde tek terimli bir sıralama, $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ için $\min(u) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ olsun. Bu durumda,

1. Eğer $\min(u) < \min(v)$ veya
2. Eğer $\min(u) = \min(v)$ ve $u <_m v$

koşulları sağlanırsa $u < v$ diyelim. Bu durumda, $<$ sıralaması bir gevşetilmiş tek terimli sıralamasıdır. Genel olarak $<$ 'nin tek terimli bir sıralama olmadığını kanıtlayabiliriz. Örneğin, $<_m$, $\mathbb{N}_0^3$ 'te bir lexicographic sıralama olmak üzere $(3, 1, 1) < (2, 7, 8)$ olur, ama $(3, 1, 1) + (0, 2, 2) \not< (2, 7, 8) + (0, 2, 2)$, yani tek terimli bir sıralama olamaz.

Lemma 3.7. *Cisto (2020) S , $\mathbb{N}_0^d$ 'nin bir altmonoid olsun. O halde $S^* \setminus (S^* + S^*)$, S 'nin bir üreteç sistemidir. Üstelik, S 'nin her üreteç sistemi $S^* \setminus (S^* + S^*)$ 'i içerir.*

Lemma 3.8. *$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, boşluk kümesi $H(S) = \{h_1, h_2, \dots, h_{g-1}, h\}$ ve cinsi g olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve h , $\mathbb{N}_0^d$ 'deki doğal kısmı sıralamaya göre $H(S)$ 'nin maksimal elemanı olsun. Bu durumda, $S' = S \cup \{h\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur. S' , $H(S') = \{h_1, h_2, \dots, h_{g-1}\}$ ve $g - 1$ cinsine sahiptir.*

İspat. $S' = \langle S \cup \{h\} \rangle$ olsun. Bu durumda, $S \subseteq S' = \langle S \cup \{h\} \rangle$ olduğundan S' bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur ve $H(S) \supsetneq H(S')$ dür. S' , $g - 1$ cinsine sahip olduğunu gösterelim. $h_j \in S' = \langle S \cup \{h\} \rangle$, $j \in \{1, 2, \dots, g - 1\}$ ve $h_j \in H(S)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $g_k \in S$ için $h_j = \sum_k \mu_k g_k + \lambda h$ dir. Eğer $\lambda = 0$ ise, $h_j \in S$ olurdu (çelişki). Eğer $\lambda \neq 0$ ise, $h_j \geq h$ olurdu, $H(S)$ 'de, h 'nin maksimumluğuyla çelişir. Dolayısıyla, $j \in \{1, 2, \dots, g - 1\}$ için $h_j \notin S'$ dur. O halde, $H(S') = \{h_1, h_2, \dots, h_{g-1}\}$ dir. $\square$

Önerme 3.9. *Her genelleştirilmiş sayısal semigrup, sonlu bir üreteç sistemine sahiptir.*

İspat. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. İddiayı S 'nin cinsi g üzerinde tümevarımla kanıtlayabiliriz. Eğer $g = 0$ ise, $S = \mathbb{N}_0^d$, standart taban vektörler $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ tarafından üretilir. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, cinsi $g+1$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve h , $\mathbb{N}_0^d$ 'deki doğal kısmı sıralamaya göre $H(S)$ 'de bir maksimal eleman olsun. Lemma 3.7'ye göre $S' = S \cup \{h\}$, $\mathbb{N}^d$ 'de cinsi g ve sonlu olarak üretilmiş olan bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur. $G(S')$, S' için sonlu bir üreteç sistemi olsun. O halde, $h \in G(S')$ dir. Dolayısıyla, $G(S') \subset S \cup \{h\}$ öyle $g_i \in S$, $i = 1, 2, \dots, s$ varki $G(S') = \{g_1, g_2, \dots, g_s, h\}$ olarak ifade edebiliriz. Şimdi, $B = \{g_1, \dots, g_s, h+g_1, h+g_2, \dots, h+g_s, 2h, 3h\}$ olsun. Bu durumda, $H(S)$ 'de h 'nin maksimumluğundan $B \subset S$ olur. Ayrıca B , S 'nin için bir üreteç sistemi olur. Dolayısıyla, S sonlu üretilir. $\square$

Sonuç 3.10. *Her genelleştirilmiş sayısal semigrup, sonlu bir minimal üreteç sistemine sahiptir.*

İspat. Lemma 3.9'a göre, her genelleştirilmiş sayısal semigrup, sonlu bir üreteç sistemine sahiptir. O da her üreteç sisteminde bulunan $S^* \setminus (S^* + S^*)$ için de sağlanır. O halde, böyle bir üreteç sistemi sonludur. $\square$

Cinsi g olan tüm $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ genelleştirilmiş sayısal semigrupları kümesini $S_{g,d}$ ve bu kümenin eleman sayısını $N_{g,d} = |S_{g,d}|$ ile gösterelim.

Tanım 3.11. $t \in \mathbb{N}_0^d$ ve $\leq$, $\mathbb{N}_0^d$ de tanımlanan doğal kısmi sıralama olsun. Bu durumda,

$$\pi(t) := \{n \in \mathbb{N}_0^d : n \leq t\}$$

tanımlanır.

Açıklama 3.12. Her $t \in \mathbb{N}_0^d$ için $\pi(t)$ kümesinin sonlu olduğunu, köşeleri t olan dikdörtgenin tamsayı noktaları kümesini temsil ettiğini ve koordinat eksenlerindeki noktaları $(t^{(1)}, 0, \dots, 0)$, $(0, t^{(2)}, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, t^{(d)})$ olduğuna dikkat edelim.

Eğer $s \notin \pi(t)$ ise s , t 'den daha büyük en az bir bileşene sahiptir.

Lemma 3.13. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid olsun. Bu durumda, S bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur, ancak ve ancak $t \in \mathbb{N}^d$ vardır öyle ki tüm $s \notin \pi(t)$ için $s \in S$ olur.

İspat. ($\Rightarrow$) $S \subseteq \mathbb{N}^d$ boşluk kümesi $H(S) = \{h_1, h_2, \dots, h_g\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. $t^{(i)} \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, d\}$ için $H(S)$ 'deki elemanların i -inci koordinatında görünen en büyük sayı olsun. Yani, $t^{(i)} = \max\{h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \dots, h_g^{(i)}\}$ olacak şekilde $t = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ alınırsa istenen olur.

($\Leftarrow$.) Her $s \notin \pi(t)$ için $s \in S$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{N}_0^d$ olsun. Bu durumda, $h \in \mathbb{N}_0^d \setminus S$ ise, $h \in \pi(t)$, yani $(\mathbb{N}_0^d \setminus S) \subseteq \pi(t)$ ve $\pi(t)$ sonlu bir küme olduğundan, S genelleştirilmiş bir sayısal yarı gruptur. $\square$

Önceki lemma, $\mathbb{N}_0^d$ 'deki bir genelleştirilmiş sayısal semigrup için bir üreteçler sisteminin karakterizasyonunu kanıtlamak için yararlı bir araç sağlar. Aşağıda, basit olan $d = 2$ özel durumu için bir teorem veriyoruz.

Teorem 3.14. Cisto (2020) $d \geq 2$ için $S = \langle A \rangle \subseteq \mathbb{N}_0^d$, bir A kümesi tarafından üretilen bir monoid olsun. O halde S , bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur ancak ve ancak A kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:

1. Her $j = 1, 2, \dots, d$ için $\text{obeb}(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_{r_j}^{(j)}) = 1$ olacak şekilde $a_1^{(j)} e_1, a_2^{(j)} e_2, \dots, a_{r_j}^{(j)} e_j \in A$ ve $r_j \in \mathbb{N}$ vardır (yani $1 \leq i \leq r_j$ için $a_i^{(j)}$ elemanları bir sayısal semigrup üretir).
2. Her i, k , $1 \leq i < k \leq d$ için $x_{ik} = e_i + n_i^{(k)} e_k$ ve $x_{ki} = e_k + n_k^{(i)} e_i$ olacak şekilde $x_{ik}, x_{ki} \in A$ vardır (burada $n_i^{(k)}, n_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$ dir).

Sonuç 3.15. *Cisto (2020) $S = \langle A \rangle \subseteq \mathbb{N}_0^2$, A kümesi tarafından üretilen bir monoid olsun. O halde S , bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur ancak ve ancak A kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:*

1. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $obeb(a_1, \dots, a_n) = 1$ olacak şekilde $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_n) \in A$ vardır (yani $a_1, \dots, a_n$ bir sayısal semigrup üretir).
2. $m \in \mathbb{N}$ için $obeb(b_1, \dots, b_m) = 1$ olacak şekilde $(b_1, 0), (b_2, 0), \dots, (b_m, 0) \in A$ vardır (yani $b_1, \dots, b_m$ bir sayısal semigrup üretir).
3. $(r_1, 1), (1, r_2) \in A$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

İlk olarak $d = 2$ durumunu inceliyoruz. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, A tarafından üretilmiş bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $obeb(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_r^{(1)}) = 1$ ve $obeb(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_r^{(2)}) = 1$ olacak şekilde

$$a_1^{(1)}e_1, a_2^{(1)}e_1, \dots, a_r^{(1)}e_1, a_1^{(2)}e_2, a_2^{(2)}e_2, \dots, a_r^{(2)}e_2 \in A$$

vardır.

$S_1 = \langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_r^{(1)} \rangle$ ve $S_2 = \langle a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_r^{(2)} \rangle$ olsun. Dolayısıyla, şunu elde ederiz,

$$\mathbb{N}_0^2 = \{S_1 \times S_2\} \cup \{H(S_1) \times S_2\} \cup \{S_1 \times H(S_2)\} \cup \{H(S_1) \times H(S_2)\}.$$

Eğer $x \in S_1$ ve $y \in S_2$ ise, $(x, 0), (0, y) \in S$ ve $(x, y) \in S_1 \times S_2 \subset S$.

Burada, Weierstrass semigrubunun genelleştirilmesinde $H(S_1) \times H(S_2)$ 'nin önemli bir role sahip olduğunu (üreticileri içerir) not ediyoruz, detaylı bilgi için (Beelen ve Tutaş 2006; Kim 1994; Matthews 2003, 2004).

Sonuç 3.16. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve A , S 'nin sonlu bir üreteç sistemi olsun. Teoremin 3.14 gösterimi ile, S_j , $\{a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_{r_j}^{(j)}\}$ tarafından üretilen sayısal semigrup ve $j = 1, \dots, d$ için $F^{(j)}$, S_j 'nin Frobenius sayısı olsun. $v^{(j)} = \sum_{i \neq j}^d F^{(i)}n_i^{(j)} + F^{(j)}$ olmak üzere $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ tanımlayalım. Bu durumda, $H(S) \subseteq \pi(v)$ dir.

İspat. Cisto (2020)'daki Teorem 2.1.10'un ispatından elde edilir. □

Örnek 3.17. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H_1(S) = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S 'nin minimal üreteç sistemi $\{(0, 1), (1, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\}$ dir. $F^{(1)} = 2$, $F^{(2)} = 0$, $n_2^{(1)} = 0$, $n_1^{(2)} = 1$ dir. Dolayısıyla, $v = (F^{(2)}n_2^{(1)} + F^{(1)}, F^{(1)}n_1^{(2)} + F^{(2)}) = (2, 2)$ dir.

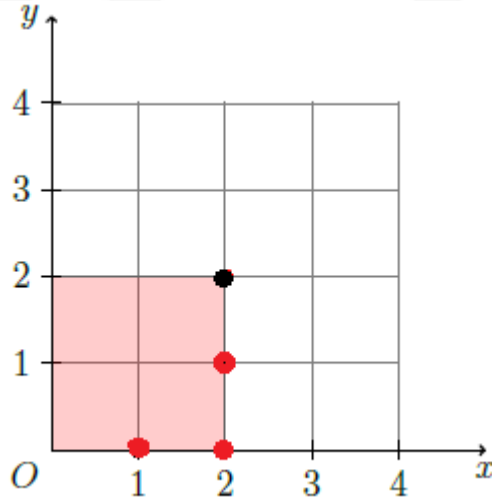
Örnek 3.18. $S \subseteq \mathbb{N}_0^4$, $A = \{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 3), (0, 0, 0, 5)\}$ tarafından üretilmiş bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S genelleştirilmiş bir sayısal semigrup ve boşluk kümesi $H(S) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 1)\}$ dir.

Teorem 3.14 koşullarının karşılandığını doğrulayalım. Önceki Teoremin 1. koşulunda açıklanan üreteçler $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 5)\}$ dir. Teoremin 2. koşulu ile ilgili A 'nın

$$(n_2^{(1)}, 1, 0, 0), (1, n_1^{(2)}, 0, 0), (1, 0, n_1^{(3)}, 0), (n_3^{(1)}, 0, 1, 0), (1, 0, 0, n_1^{(4)}), (n_4^{(1)}, 0, 0, 1), \\ (0, 1, n_2^{(3)}, 0), (0, n_3^{(2)}, 1, 0), (0, 1, 0, n_2^{(4)}), (0, n_4^{(2)}, 0, 1), (0, 0, 1, n_3^{(4)}), (0, 0, n_4^{(3)}, 1)$$

elemanların her birinden en az bir elemanı içerdiğini doğrulamamız gerekir. Teoremin 2. koşulunda açıklanan üreteçler $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 1)\}$ dir. $A' = A \setminus \{(0, 0, 1, 3)\}$ kümesi tarafından üretilen S' , S 'den farklı bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

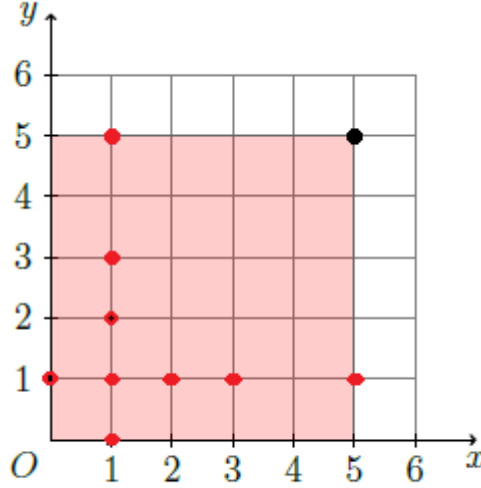
Şekil 3.1'de v noktası siyahla işaretlenmiştir, kırmızı alandaki negatif olmayan tamsayıları $\pi(v)$ 'deki elemanları temsil eder. S 'nin boşlukları kırmızıyla işaretlenmiştir ve hepsinin kırmızı alanda yani $\pi(v)$ içinde olduğunu göstebiliriz. Ayrıca kırmızı alanın dışındaki tüm noktalar S 'dedir. Lemma 3.13 e bakınız, $v' = (2, 1)$ için $|\pi(v')| < |\pi(v)|$ dir. Bir sonraki örnekte göstereceğimiz gibi, bu her zaman doğru değildir.



Şekil 3.1. Örnek 3.17'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup

Örnek 3.19. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, $G(S) = \{(2, 0), (0, 2), (3, 0), (0, 3), (1, 4), (4, 1)\}$ tarafından üretilen bir altmonoid olsun. Bu durumda, S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve S 'nin boşluk kümesi $H(S) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1),$

$(3, 1), (5, 1)\}$ dir. $F^{(1)} = 1, F^{(2)} = 1, n_2^{(1)} = 4, n_1^{(2)} = 4$ dir. Dolayısıyla, $v = (F^{(2)}n_2^{(1)} + F^{(1)}, F^{(1)}n_1^{(2)} + F^{(2)}) = (5, 5)$ dir. Bu durumda, Şekil 3.2 gösterdiği gibi, $\pi(w)$, S 'nin her boşluğu içerecek ve $|\pi(w)| < |\pi(v)|$ olacak şekilde bir $w \in \mathbb{N}_0^2$ elemanının mevcut olmadığını iddia edebiliriz.



Şekil 3.2. Örnek 3.19'daki genelleştirilmiş sayısal semigrup

$S = \langle A \rangle$, $A \subseteq \mathbb{N}_0^d$ tarafından üretilen bir monoid olsun. Her $j = 1, 2, \dots, n$ için, $A_j \subseteq \mathbb{N}_0^{d-1}$, A 'nın elemanlarının j -inci bileşenin çıkarılması ile elde edilen küme olsun. O halde (Teorem 3.14'ün 2. koşulu) aşağıdaki ifadeye denktir:

Her $j = 1, 2, \dots, d$ için, $\langle A_j \rangle \subseteq \mathbb{N}_0^{d-1}$ dir.

Bu bölümde, tüm genelleştirilmiş sayısal semigrupların $\mathbb{N}_0^d$ 'nin sonlu olarak üretilmiş altmonoidleri olduğunu gördük. $\mathbb{N}_0$ 'nin altmonoidlerinden ve $\mathbb{N}_0^d$ 'nin altmonoidinin $d > 1$ için çok büyük bir farkını vurgulayabiliriz. Teorem 2.7'de $\mathbb{N}_0$ 'nin her alt monoidinin bir sayısal semigruba izomorf olduğundan bahsetmiştik. Özellikle $\mathbb{N}_0$ 'nin tüm alt monoidleri sonlu olarak üretilmiştir. Bu $\mathbb{N}_0^d$ 'de doğru olamaz, çünkü $d > 1$ için $\mathbb{N}_0^d$ 'nin tüm alt monoidleri sonlu olarak üretilmemiştir ve $\mathbb{N}_0^d$ 'nin sonlu olarak üretilmiş tüm alt monoidleri (afin semigruplar olarak adlandırılır) genelleştirilmiş sayısal semigruplar değildir.

Örnek 3.20. $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0^2 : x \geq 2, y \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0^2$ 'nin bir altmonoididir ancak sonlu olarak üretilmemiştir, çünkü $\{(2, y) \in \mathbb{N}_0^2 : y \in \mathbb{N}_0\} \subseteq S^* \setminus (S^* + S^*)$ dir. $T \subseteq \mathbb{N}_0^2$, $\{(2, 0), (0, 3), (1, 4)\}$ tarafından üretilmiş bir altmonoid olsun. Bu durumda, $T \subseteq \mathbb{N}_0^2$ 'nin sonlu olarak üretilmiş bir alt monoididir, ancak genelleştirilmiş bir

sayısal semigrup değildir, çünkü,

$$\{(2n+1, 0) \in \mathbb{N}_0^2 : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0^2 \setminus T$$

dir.

Tanım 3.21. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olmak üzere

$$PF(S) = \{x \in H(S) : \text{her } s \in S \setminus \{0\} \text{ için } x + s \in S\}$$

kümesine S 'nin pseudo-Frobenius elemanları kümesi denir ve $|PF(S)|$ sayısına S 'nin tipi denir. S 'nin tipi $t(S)$ ile gösterilir.

$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid ise, $a \leq_s b \iff b - a \in S$, $\mathbb{Z}^d$ 'de, S 'nin bir kısmı sıralamadır.

Önerme 3.22. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $PF(S)$, $\leq_s$ 'ye göre $H(S)$ 'deki maksimum elemanların kümesidir.

Tanım 3.23. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olmak üzere

$$SG(S) = \{x \in H(S) : \text{her } s \in S \setminus \{0\} \text{ için } 2x, x + s \in S\}$$

kümesine S 'nin özel boşlukları kümesi denir.

Açıklama 3.24. $SG(S) \subseteq PF(S)$ dir. Fakat eşitlik genel olarak doğru değildir. Örneğin, $S = \mathbb{N}_0^d \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$ olsun. Bu durumda, $PF(S) = H(S)$ dir. Ama $SG(S) = \{(0, 1), (2, 0)\}$ dir.

Önerme 3.25. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $x \in H(S)$ olsun. Bu durumda, $S \cup \{x\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ancak ve ancak $x \in SG(S)$.

İspat. $SG(S)$ tanımından kolayca elde edilir. □

Tanım 3.26. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Onu içeren iki sayısal semigrubun kesişimi olarak ifade edilemiyorsa S 'ye bir indirgenemez genelleştirilmiş sayısal semigrup denir.

Önerme 3.27. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S indirgenemez ancak ve ancak $|SG(S)| = 1$ dir.

Önerme 3.28. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S indirgenemez ancak ve ancak her $h \in H(S)$ için $2h \neq f$, $f - h \in S$ olacak şekilde $f \in H(S)$ vardır.

Önerme 3.29. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir indirgenemez genelleştirilmiş sayısal se-

migrup ve $SG(S) = \{f\}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki durumlardan yalnızca biri sağlanır:

1. f 'nin tek olan bir bileşeni varsa, $PF(S) = \{f\}$,
2. f 'nin tüm bileşenleri çift ise, $PF(S) = \{f, \frac{f}{2}\}$ dir.

Teorem 3.30. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $|PF(S)| = 1$.
2. $PF(S) = \{f\}$, f 'nin en az bir bileşeni tektir.
3. Her $h \in H(S)$ için $f - h \in S$ olacak şekilde $f \in H(S)$ vardır.

Teorem 3.31. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $PF(S) = \{f, \frac{f}{2}\}$.
2. f 'nin tüm bileşenleri çift ve her $h \in H(S)$ için $h \neq \frac{f}{2}$, $f - h \in S$ olacak şekilde $f \in H(S)$ vardır.

Tanım 3.32. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Teorem 3.30 'un eşdeğer ifadelerinden birini sağlıyorsa S 'ye simetrik genelleştirilmiş sayısal semigrup denir. Teorem 3.31'in eşdeğer ifadelerinden birini sağlıyorsa S 'ye pseudo-simetrik genelleştirilmiş sayısal semigrup denir.

Her iki durumda da S indirgenemezdir.

Önerme 3.33. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $S_i = \{s \in \mathbb{N}_0 : se_i \in S\}$, $\mathbb{N}_0$ üzerinde bir sayısal semigruptur.

İspat. S_i bir monoiddir, üstelik $\mathbb{N}_0$ 'de sonlu tümleyene sahiptir, aksi takdirde S 'de olmayan sonsuz sayıda eleman vardır. $\square$

Tanım 3.34. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Önerme 3.33'de verilen sayısal semigrup S_i , S 'nin i -ekseni semigrubu olarak adlandırılır. S_i 'nin önderi (conductor) c_i ile gösterilir. Ayrıca, $w(S) = \sum_{i=1}^d c_i e_i$ elemanı S 'nin önderi (conductor) olarak adlandırılır.

Önerme 3.35. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. O halde, $\mathbb{N}_0^d$ 'deki doğal kısmi sıralamaya göre $w(S) \leq s$ olan her $s \in \mathbb{N}_0^d$ için, $s \in S$ ve s , S 'nin minimal üretici değildir.

İspat. $w(S) \leq s$ ile $s = \sum_{i=1}^d s^{(i)} e_i$ olsun. Bu durumda, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $s^{(i)} \geq c_i$ dir. Özellikle, her i için $s^{(i)} \in S_i$ dir. O halde, $s^{(i)} e_i \in S$ dir. Sonuçta s , S 'nin minimal üreteci değildir çünkü S 'deki elemanların toplamıdır. $\square$

Önerme 3.36. $f \in \mathbb{N}_0^d$ olsun. Bu durumda, $(\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

İspat. $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda, S nin bir monoid olduğunu kanıtlamak istiyoruz. İlk olarak $0 \in S$ dir. $x, y \in S$ sıfırdan farklı iki eleman olsun. Bu durumda, $x, y \notin S$ ise, $x + y \in \pi(f)$ dir. Özellikle $\mathbb{N}_0^d$ 'deki kısmi sıralamaya göre $x \leq x + y \leq f$ ve $y \leq x + y \leq f$ dir, yani $x, y \in \pi(f)$ dir. Fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $x + y \in S$, yani S bir monoiddir. $\mathbb{N}_0^d \setminus S = \pi(f)$ sonlu bir kümedir. $\square$

Tanım 3.37. $f \in \mathbb{N}_0^d$ olmak üzere $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrup olarak adlandırılır. $c(S) = |\pi(f)|$ sayısına, S 'nin önderi denir.

Gösterim 3.38. $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S 'nin Frobenius elemanı f ise, S bir Frobenius genelleştirilmiş sayısal semigrup ve her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $S_i = \{0, f^{(i)} + 1, \rightarrow\}$, önderi $f^{(i)} + 1$ olan bir i -ekseni semigruptur. Özellikle, $\{f^{(i)} + 1, f^{(i)} + 2, \dots, 2f^{(i)} + 1\}$ kümesi S_i 'nin minimal üreteç sistemidir.

Teorem 3.39. Cisto (2020) $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrup olmak üzere her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için,

$$A_i = \left\{ k_i e_i + \sum_{i \neq j} n_j e_j : k_i \in \{f^{(i)} + 1, f^{(i)} + 2, \dots, 2f^{(i)} + 1\}, n_j \in \{0, 1, \dots, f^{(j)}\} \right\}$$

olsun. Bu durumda, $G = \bigcup_{i=1}^d A_i$, S 'nin bir minimal üreteç sistemidir.

Gösterim 3.40. Teorem 3.39'deki A_i kümelerini düşünelim. Bu durumda, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için,

$$A_i = (f^{(i)} + 1)(f^{(i)} + 2) \dots (f^{(d)} + 1) = |\pi(f)|$$

dir. Görsel olarak, S 'nin minimal üreteçleri $\pi(f)$ 'nin d tane kopyalarına bölünür, özellikle $A_i = (f^{(i)} + 1)e_i + \pi(f)$ dir.

Tanım 3.41. $a \in \mathbb{N}$ ve $S = \{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d : \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(d)} > a\} \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda, S 'ye a -semplektik genelleştirilmiş sayısal semigrup denir.

Önerme 3.42. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir a -semplektik genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu

durumda,

$$H(S) = \{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d : \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(d)} \leq a\} \setminus \{0\}$$

dir.

İspat. Tanım 3.41'den açıktır. □

Gösterim 3.43. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir a -simplektik genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G_i = \{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d : \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(d)} = i\}$ ise,

$$H(S) = \bigcup_{k=1}^a G_i \text{ öyleki } |G_i| = \binom{i+d-1}{d-1}$$

dir. Dolayısıyla,

$$g(S) = |H(S)| = \sum_{k=1}^a \binom{k+d-1}{d-1} = \binom{a+d}{d} - 1$$

dir (son eşitlik tümevarımla ispatlanır).

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ olmak üzere $|x| = \sum_{i=1}^d x^{(i)}$ tanımlayalım. Bu durumda, eğer $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir a -simplektik genelleştirilmiş sayısal semigrup ise, $x \in S$ ancak ve ancak $|x| > a$ dır.

Teorem 3.44. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir a -simplektik genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $G_k = \{x \in \mathbb{N}_0^d : |x| = k\}$ olsun. O halde $A = \bigcup_{k=a+1}^{2a+1} G_k$ kümesi S 'nin minimal üreteçleri kümesidir.

Tanım 3.45. $T \subset \mathbb{N}_0$ bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $S = \{x \in \mathbb{N}_0^d : |x| \in T\}$, S 'nin $\mathbb{N}_0^d$ 'de bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olduğunu kanıtlamak kolaydır. S 'ye T -şeridi genelleştirilmiş sayısal semigrup denir.

Gösterim 3.46. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir T -şeridi genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

$$H(S) = \{x \in \mathbb{N}_0^d : |x| \notin T\}$$

Üstelik eğer $x \in \mathbb{N}_0^d$ ise, $x \in S$ ancak ve ancak $|x| \in T$ dir.

Tanım 3.47. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid ve $\mathbf{n} \in S$ olsun. $s - \mathbf{n}$, $\mathbb{Z}_0^d$ 'deki fark olmak üzere

$\mathbf{n}$ 'ye göre S 'nin Apéry kümesi

$$Ap(S, \mathbf{n}) = \{s \in S : s - \mathbf{n} \notin S\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.48. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ 'de gevşetilmiş bir tek terimli sıralama olsun. Bu durumda,

1. $F(S)_\prec$, $\prec$ 'ye göre $H(S)$ 'deki en büyük elemanı S 'nin Frobenius elemanı olarak adlandırılır.
2. $m(S)_\prec$, $\prec$ 'ye göre $S \setminus \{\mathbf{0}\}$ 'nin en küçük elemanı S 'nin katlılığı denir.
3. $U(S)_\prec$, $\prec$ 'ye göre $F(S)_\prec$ 'den büyük minimal üreteçler kümesidir.

Önerme 3.49. Failla vd. (2016) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $\mathbb{N}_0^d$ 'de bir gevşetilmiş tek terimli sıralama ve h bir minimum üreteci olsun.

1. $T = S \cup \{F(S)_\prec\}$ kümesi bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $F(S)_\prec \in U(T)_\prec$ dir.
2. $T = S \setminus \{h\}$ kümesi bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur. Ayrıca, $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ de bir gevşetilmiş tek terimli sıralama ve $h \in U(S)_\prec$ 'de ise, $F(T)_\prec = h$ dir.

Lemma 3.50. Failla vd. (2016) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, A tarafından üretilen bir altmonoid ve $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ üzerinde gevşetilmiş tek terimli sıralama olsun. Bu durumda, $m(S)_\prec \in A$ dir.

Sonuç 3.51. Failla vd. (2016) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ 'de bir gevşetilmiş tek terimli sıralama olsun. O halde $S \setminus \{m(S)_\prec\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Önerme 3.52. Failla vd. (2016) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, A tarafından üretilen bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $v \in A$ olsun. Bu durumda, $S \setminus \{v\}$, $(A \setminus \{v\}) \cup \{g + v | g \in A \setminus \{v\}\} \cup \{2v, 3v\}$ tarafından üretilir.

Önerme 3.53. Cisto (2020) $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ genelleştirilmiş bir sayısal semigrup ve $f \in H(S)$ olsun. Bu durumda, $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ 'de gevşetilmiş bir tek terimli sıralamaya göre $F(S)_\prec = f$ ancak ve ancak f , $\mathbb{N}_0^d$ 'deki doğal kısmi sıralamaya göre $H(S)$ 'nin maksimumudur.

Tanım 3.54. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $f \in H(S)$, Önerme 3.53 gibi olsun. Bu durumda, S 'ye Frobenius genelleştirilmiş sayısal semigrubu denir ve (S, f) ile gösterilir.

Gösterim 3.55. Her sayısal semigrup, bir (S, f) Frobenius genelleştirilmiş sayısal semigrubudur (buradaki f , S 'nin Frobenius elemanıdır).

Örnek 3.56. $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ olsun. Bu durumda, $A = \{(2, 0), (3, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ dir. $\prec$, bir lexicographic sıralama olmak üzere $F(S)_{\prec} = (1, 0)$ ve $(1, 1) \in U(S)_{\prec}$ dir. $S' = S \setminus \{(1, 1)\} = \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1, 0), (1, 1)\}$ olsun. Bu durumda, $\{(2, 0), (3, 0), (0, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$, S'' 'nin bir üreteç sistemidir. $(3, 0) + (0, 1) = (3, 1)$ olduğundan $(3, 1)$, S'' 'nin bir minimal üreteçi değildir.

Çizelge 3.1'de cinsi $g \leq 3$ için, Cisto (2020)'den faydalananarak, $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$ genelleştirilmiş sayısal semigruplar kümesini $S_{g,2}$ ile gösterip elemanlarını liste halinde veriyoruz ve $N_{g,2} = |S_{g,2}|$ yi hesaplıyoruz. İkinci sütundaki elemanlar $H(S)$ 'deki elemanlar ve üçüncü sütundaki elemanlar $G(S)$ 'nin elemanlarıdır. İkinci sütundaki kalın karakterli elemanlar, lexicographic sıralamaya göre S 'nin Frobenius elemanlardır. Bu durumda, $N_{0,2} = 1$, $N_{1,2} = 2$, $N_{2,2} = 7$ ve $N_{3,2} = 23$ tür.

Çizelge 3.1. Cinsi $g \leq 3$ olan genelleştirilmiş sayısal semigruplar

cins	boşluk elemanlar	minimal üreteçler
0	$\emptyset$	$a_{0,1} = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$
1	(1, 0)	$a_{1,1} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 0), (3, 0) \rangle$
1	(0, 1)	$a_{1,2} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1) \rangle$
2	$(1, 0),$ (1, 1)	$a_{2,1} = \langle (0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 0) \rangle$
2	$(1, 0),$ (2, 0)	$a_{2,2} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0) \rangle$
2	$(1, 0),$ (3, 0)	$a_{2,3} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 0), (5, 0) \rangle$
2	$(0, 1),$ (0, 2)	$a_{2,4} = \langle (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (1, 1), (1, 2) \rangle$
2	$(0, 1),$ (0, 3)	$a_{2,5} = \langle (0, 2), (0, 5), (1, 0), (1, 1) \rangle$
2	$(0, 1),$ (1, 0)	$a_{2,6} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \rangle$
2	$(0, 1),$ (1, 1)	$a_{2,7} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 1) \rangle$
3	$(1, 0), (1, 1),$ (1, 2)	$a_{3,1} = \langle (0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (1, 1),$ (2, 0)	$a_{3,2} = \langle (0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (1, 1),$ (3, 0)	$a_{3,3} = \langle (0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (5, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (2, 0),$ (2, 1)	$a_{3,4} = \langle (0, 1), (1, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (2, 0),$ (3, 0)	$a_{3,5} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (7, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (2, 0),$ (4, 0)	$a_{3,6} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 0), (5, 0), (7, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (2, 0),$ (5, 0)	$a_{3,7} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 0), (4, 0) \rangle$
3	$(1, 0), (3, 0),$ (5, 0)	$a_{3,8} = \langle (0, 1), (1, 1), (2, 0), (7, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (0, 3)	$a_{3,9} = \langle (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (0, 4)	$a_{3,10} = \langle (0, 3), (0, 5), (0, 7), (1, 0), (1, 1), (1, 2) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (0, 5)	$a_{3,11} = \langle (0, 3), (0, 4), (1, 0), (1, 1), (1, 2) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (1, 0)	$a_{3,12} = \langle (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (1, 1)	$a_{3,13} = \langle (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (1, 2), (2, 1) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 2),$ (1, 2)	$a_{3,14} = \langle (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (1, 1) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 3),$ (0, 5)	$a_{3,15} = \langle (0, 2), (0, 7), (1, 0), (1, 1) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 3),$ (1, 0)	$a_{3,16} = \langle (0, 2), (0, 5), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (0, 3),$ (1, 1)	$a_{3,17} = \langle (0, 2), (0, 5), (1, 0), (1, 3), (2, 1) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 0),$ (1, 1)	$a_{3,18} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 0),$ (1, 2)	$a_{3,19} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 0),$ (2, 0)	$a_{3,20} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 0),$ (2, 1)	$a_{3,21} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 0),$ (3, 0)	$a_{3,22} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (5, 0) \rangle$
3	$(0, 1), (1, 1),$ (2, 1)	$a_{3,23} = \langle (0, 2), (0, 3), (1, 0), (3, 1) \rangle$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm esas olarak iki ana altbölümde incelenebilir. İlk olarak, $d \geq 2$ için $\mathbb{N}_0^d$ üzerinde genelleştirilmiş sayısal semigrupların yeni özel sınıfları ve özellikleri incelenecektir. İkinci olarak, $\mathbb{N}_0$ üzerinde üçgen sayısal semigrupları ve piramitsel sayısal semigrupların belirli özellikleri araştırılacak ve bu iki sınıftan yararlanarak üçgen sayısal semigrupların iki genellemesi tanımlanıp önemli özellikleri incelenecektir.

4.1. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ Genelleştirilmiş Sayısal Semigruplar

$d \geq 2$ için $\mathbb{N}_0^d$ üzerinde genelleştirilmiş sayısal semigrupların başta genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrupları olmak üzere genelleştirilmiş aralıklı (sparse), yoğun (Dense), tam yoğun sayısal semigruplar ve genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeler kümesi tanımlanıp bazı özelliklerini incelenecektir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar bazı ilginç örneklerle zenginleştirilecektir.

4.1.1. Genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruplar

$\mathbb{N}_0^d$ üzerinde bir genelleştirilmiş sayısal semigrubun izole boşlukları tanımlanıp, genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrupların bazı özel sınıfları ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $d \geq 1$ ve $h \in H(S)$ olsun. Eğer her $j \in \{1, \dots, d\}$ için

$$\{h - e_j, h + e_j\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$$

ise, h 'ye S 'nin bir izole boşluğu denir ve S 'nin izole boşlukları kümesi $iso(S)$ ile gösterilir. Eğer $iso(S)$ boş küme ise, S 'ye $\mathbb{N}_0^d$ 'de bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup denir.

İlk olarak $d = 2$ durumunu inceliyoruz. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \mathbb{N}_0^2 \setminus S$ olan bir altmonoid ve $h = (i, j) \in H(S)$ olsun. Bu durumda, $\{(i, j-1), (i, j+1), (i-1, j), (i+1, j)\} \cap \mathbb{N}_0^2 \subset S$ ise, h , S 'nin bir izole boşluğudur.

Örnek 4.2. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, $H(S) = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ boşluk kümesine sahip bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$, S 'nin minimal üreteç sistemidir. Her $h \in H(S)$ için h bir izole boşluk olmadığını kolayca görülebilir. Dolayısıyla, S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

Açıklama 4.3. Örnek 4.2'de verilen S semigrubu izole boşluklara sahip değildir ancak S 'nin bileşenleri S_1 ve S_2 olan sayısal semigrupları izole boşluklara sahiptir. Dolayısıyla, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup S , bileşen semigrupları (S_1 ve S_2) mükemmel olmasa da mükemmel olabilir.

Tanım 4.4. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir monoid ve $\mathbf{n} \in S$ olsun. $s - \mathbf{n}$, $\mathbb{Z}_0^d$ 'deki fark olmak üzere $\mathbf{n}$ 'ye göre S 'nin A-Apéry kümesi

$$\text{A-Ap}(S, \mathbf{n}) = \{s \in S : s - \mathbf{n} \in H(S)\}$$

ile tanımlayalım.

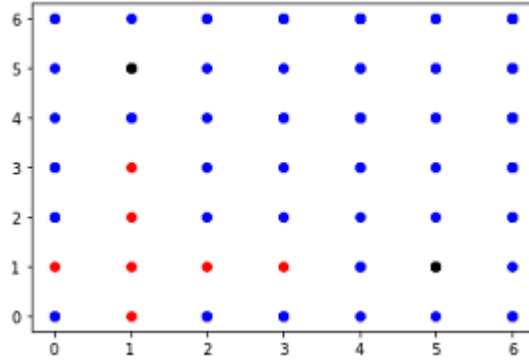
Açıklama 4.5. Tanım 3.47'den Apéry kümesi $\text{Ap}(S, \mathbf{n})$ sonsuz bir küme ve Tanım 4.4'den $\text{A-Ap}(S, \mathbf{n})$ sonlu bir küme olduğu görülebilir.

Örnek 4.6. $S = \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1, 0), (1, 1)\} = \langle (0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 0) \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$\text{Ap}(S, (1, 3)) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 0), (2, 1), \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (0, m), (m, 0), (m, 1), (m, 2) | m \geq 3 \end{array} \right\}.$$

$$\text{A-Ap}(S, (1, 3)) = \{ (2, 3), (2, 4) \}.$$

Örnek 4.7. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluklar kümesi $H(S) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G(S) = \{(2, 0), (0, 2), (3, 0), (0, 3), (1, 4), (4, 1)\}$, S 'nin minimal üreteç sistemidir. $(1, 5), (5, 1) \in H(S)$, S 'nin izole boşluklarıdır. Bu nedenle, S , bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir. Şekil 4.1'de mavi renkli noktalar S 'nin elemanları, kırmızı renkli noktalar S 'nin boşlukları, siyah renkli noktalar S 'nin izole boşluklarıdır.



Şekil 4.1. Örnek 4.7'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup

Örnek 4.8. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 5), (3, 0), (4, 0), (1, 4), (4, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

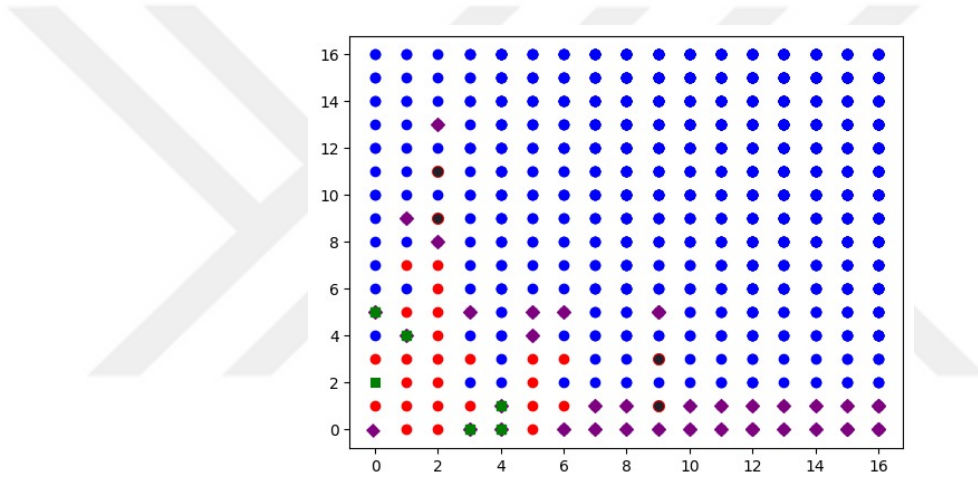
$$H(S) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 0), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 9), (2, 11), \\ (3, 1), (3, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 3), (9, 1), (9, 3) \end{array} \right\}$$

S 'nin boşluklar kümesidir. O halde, $iso(S) = \{(2, 9), (2, 11), (9, 1), (9, 3)\}$, $\prec$ lexicographic sıralamaya göre S 'nin katlılığı $m(S)_{\prec} = (0, 2)$ ve

$$Ap(S, m(S)_{\prec}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (3, 0), (4, 0), (0, 5), (1, 4), (1, 9), (2, 8), (2, 11), \\ (3, 5), (4, 1), (5, 4), (5, 5), (6, 5), (9, 5), (7, 1), (8, 1) \end{array} \right\} \\ \cup \{(n, 0), (m, 1) : n \geq 6, m \geq 10\},$$

$$A-Ap(S, m(S)_{\prec}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 5), (1, 4), (1, 9), (2, 8), (2, 11), \\ (3, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 5), (9, 5) \end{array} \right\}$$

dir. S 'nin Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (9, 3)$ 'tür. $\{(9, 2), (8, 3)\} \cap \mathbb{N}_0^2 \subset S$ olduğundan, $F(S)_{\prec}$ 'nin S 'nin bir izole boşluk olduğunu elde ederiz. Şekil 4.2'de yeşil renkli noktalar S 'nin minimal üreteçleri, mavi renkli noktalar S 'nin elemanları, kırmızı renkli noktalar S 'nin boşluklarıdır, siyah renkli noktalar S 'nin izole boşlukları ve mor renkli noktalar $Ap(S, (0, 2))$ 'nin elemanlarıdır.



Şekil 4.2. Örnek 4.8'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup

Teorem 4.9. $S = \langle (a, 0), (1, b), (0, 1), (2, 0) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun; burada $a, b \in \mathbb{N}$, a tek ve $b \geq 2$ dir. O halde lexicographic sıralamaya göre $F(S)_{\prec} = (a - 2, b - 1)$ ve S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

İspat. Öncelikle $(a - 2, b - 1)$ 'in $H(S)$ 'nin en büyük elemanı olduğunu göstereceğiz. $(a - 2, b - 1) \in S$ ise, $(a - 2, b - 1) = \alpha(a, 0) + \beta(1, b) + \gamma(0, 1) + \lambda(2, 0)$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{N}_0$ vardır. Bu durumda, $\alpha > 0$ veya $\beta > 0$ ise, $a = -\frac{\beta + 2\lambda + 2}{\alpha - 1} < 0$, $b = -\frac{\gamma + 1}{\beta - 1} < 0$, ancak bunlar $a, b > 0$ ile çelişiyor. $\alpha = \beta = 0$ ise, $2\lambda + 2 = a$, a tek olduğundan bu bir çelişkidir.

Farz edelimki, $h = (h^{(1)}, h^{(2)}) \in H(S)$ ve lexicographic sıralamaya göre $(a - 2, b - 1) \prec h$. O halde, $(h^{(1)}, h^{(2)}) - (a - 2, b - 1) = (h^{(1)} - a + 2, h^{(2)} - b + 1)$. Buradan,

i) $h^{(1)} - a + 2 = 0$ ise, $h^{(1)} = a - 2$ ve $h^{(2)} > b - 1$ dir. Dolayısıyla, $h = (a - 2, 0) + (0, h^{(2)}) \in S$ dir.

ii) $h^{(1)} > a - 2$ ise, $(h^{(1)}, 0) \in S$ ve $h = (h^{(1)}, 0) + (0, h^{(2)}) \in S$ dir.

Her iki durumda da çelişki elde edilir. Şimdi $H(S)$ 'nin hiçbir elemanın izole nokta olmadığını göstereceğiz. Aşağıdaki kümeyi tanımlayalım,

$$\mathcal{K} = \{(x, t) : 1 \leq x \leq a - 2, 0 \leq t \leq b - 1 \text{ ve } x \text{ tek}\}.$$

$h = (h^{(1)}, h^{(2)}) \in H(S)$ ve $h \notin \mathcal{K}$ olsun. $h^{(1)}$ 'in çift olamayacağını dikkat edelim. Dolayısıyla, $h^{(1)} > a - 2$ ve $h^{(2)} > b - 1$ olacak biçimde $h = (h^{(1)}, 0) + (0, h^{(2)})$ yazılabilir ve $F(S)_{\prec} \prec h$ dir. Fakat bu bir çelişkidir. O halde, $H(S) \subseteq \mathcal{K}$ dir. $\mathcal{K} \subseteq H(S)$ olduğunu açıktır. Dolayısıyla, $H(S) = \mathcal{K}$ dir.

$h \in H(S)$, S 'nin bir izole boşluk olduğunu varsayalım. $h^{(1)} \pm 1$ çift sayı olduğundan, $(h^{(1)} \pm 1, h^{(2)}) \in S$ ve $(h^{(1)}, h^{(2)} \pm 1)$ 'den en az biri $H(S)$ 'nin bir elemanı olduğunu görülebilir. Fakat bu bir çelişkidir. $\square$

Sonuç 4.10. $a, b \in \mathbb{N}$, a tek ve $b \geq 2$ için $S = \langle (a, 0), (1, b), (0, 1), (2, 0) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\prec$ lexicographic sıralama olsun. Bu durumda, Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $m(S)_{\prec} = (0, 1)$, $g(S) = b(\frac{a-1}{2})$.
2. $Ap(S, m(S)_{\prec}) = \{(0, 0), (2k, 0), (2k - 1, b), (a + n, 0) : 1 \leq k \leq \frac{a-1}{2}, n \in \mathbb{N}_0\}$.
3. $A-Ap(S, m(S)_{\prec}) = \{(2k - 1, b) : 1 \leq k \leq \frac{a-1}{2}\}$.
4. $PF(S) = SG(S) = \{F(S)_{\prec}\}$.
5. S bir simetrik genelleştirilmiş sayısal semigruptur.
6. $(S, F(S)_{\prec})$ bir Frobenius genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

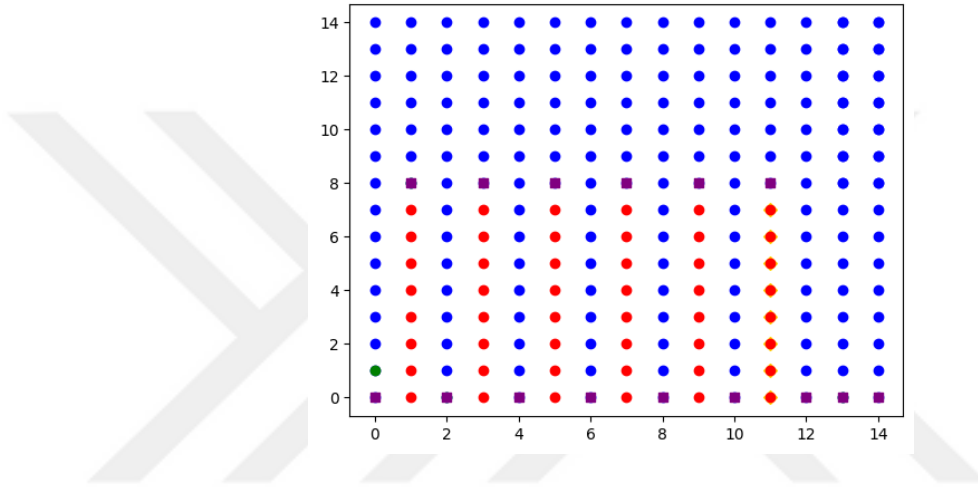
İspat. Teorem 3.30, Önerme 3.53 ve Teorem 4.9'dan elde edilir. $\square$

Örnek 4.11. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(2, 0), (13, 0), (0, 1), (1, 8)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. $m(S)_{\prec} = (0, 1)$, $g(S) = 48$.
2. $H(S) = \{(x, t) : 1 \leq x \leq 11, 0 \leq t \leq 7 \text{ ve } x \text{ tek}\}$.
3. $Ap(S, m(S)_{\prec}) = \{(0, 0), (2k, 0), (2k - 1, 8), (13 + n, 0) : 1 \leq k \leq 6, n \in \mathbb{N}_0\}$.
4. $A-Ap(S, m(S)_{\prec}) = \{(2k - 1, 8) : 1 \leq k \leq 6\}$.

5. $PF(S) = SG(S) = \{(11, 7)\}$.
6. S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.
7. S bir simetrik genelleştirilmiş sayısal semigruptur.
8. $(S, F(S)_\prec)$ bir Frobenius genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Şekil 4.11’de yeşil renkli noktalar S ’nin minimal üreteçleri, mavi renkli noktalar S ’nin elemanları, kırmızı renkli noktalar S ’nin boşlukları ve mor renkli noktalar $Ap(S, (0, 2))$ ’nin elemanlarıdır.



Şekil 4.3. Örnek 4.11’deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.

Teorem 4.12. $S = \langle (a, 0), (a + 1, 0), (0, 1), (1, b) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun; burada $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ ’dir. O halde lexicographic sıralamaya göre $F(S)_\prec = (a^2 - a - 1, b - 1)$ ve S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

İspat. $(a^2 - a - 1, b - 1)$ ’in $H(S)$ ’nin en büyük elemanı olduğunu göstereceğiz. Öncelikle, $(a^2 - a - 1, b - 1)$, $H(S)$ ’nin bir elemanı olduğunu gösterelim. $S_1 = \langle a, a + 1 \rangle$ ve $S_2 = \mathbb{N}_0$ ise, $S = S_1 \times S_2$ biçimde yazılabilir. Eğer $(a^2 - a - 1, b - 1) = (a^2 - a - 1, 0) + (0, b - 1) \in S$ ise, $(a^2 - a - 1, 0) \in S$ ve $a^2 - a - 1 \in S_1$ dir. Önerme 2.11’den $F(S_1) = (a)(a + 1) - (a) - (a + 1) = a^2 - a - 1 \notin S_1$ dir. Fakat bu bir çelişkidir. Teorem 4.9’un ispatındaki gibi $(a^2 - a - 1, b - 1)$, $H(S)$ ’nin en büyük elemanı ve S ’nin boşluklar kümesi aşağıdaki gibi olduğunu gösterilebilir.

$$H(S) = \bigcup_{i=1}^{a-1} H_i(S) \text{ öyleki,}$$

$$H_i(S) = \{(x, y) : x = a^2 - ia - i + j - 1, 0 \leq y \leq jb - 1, 1 \leq j \leq i\}.$$

$h \in H(S)$, S 'nin bir izole boşluk olduğunu varsayalım. $h^{(1)} \in H(S_1)$ ve $(h^{(1)}, h^{(2)} \pm 1)$ 'den en az birinin $H(S)$ 'nin bir elemanı olduğunu görülebilir. Fakat bu bir çelişkidir. $\square$

Sonuç 4.13. $a, b \in \mathbb{N}$, a tek ve $b \geq 2$ için $S = \langle (a, 0), (a+1, 0), (0, 1), (1, b) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\prec$ lexicographic sıralama olsun. Bu durumda,

1. $g(S) = \frac{b}{6}(a^3 - a)$ dir.

2. S 'nin $m(S)$ 'ye göre Apéry kümesi:

$$\begin{aligned} \text{Ap}(S, m(S)_{\prec}) &= \bigcup_{i=1}^{a-1} \{(a^2 - ia - i + j - 1, jb) : 1 \leq j \leq i\} \\ &\cup \{(0, 0), (s, 0) : s \in \langle a, a+1 \rangle\}. \end{aligned}$$

dir.

3. S 'nin $m(S)$ 'ye göre A -Apéry kümesi:

$$A - \text{Ap}(S, m(S)_{\prec}) = \bigcup_{i=1}^{a-1} \{(a^2 - ia - i + j - 1, jb) : 1 \leq j \leq i\}$$

dir.

İspat. 1) Teorem 4.12'den

$$g(S) = \sum_{i=1}^{a-1} \sum_{j=1}^i jb = \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{a-1} i^2 + i = \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{a-1} i^2 + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{b}{6}(a^3 - a)$$

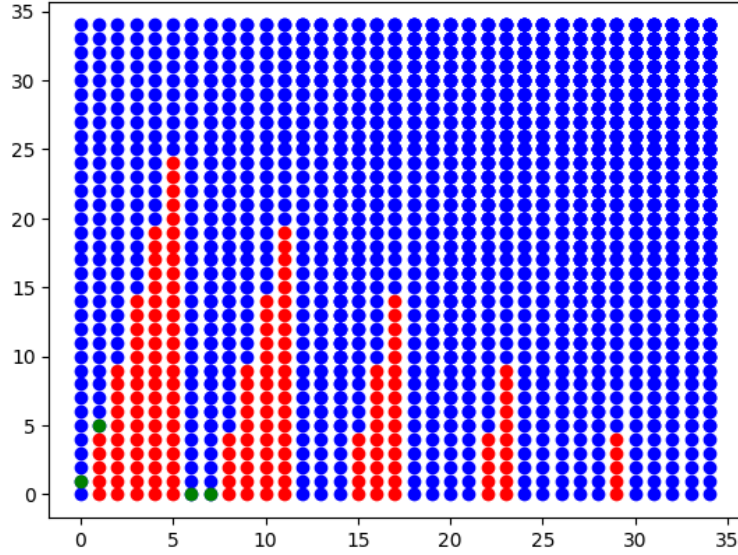
dir. 2 ve 3 durumları Teorem 4.12'den kolayca elde edilir. $\square$

Örnek 4.14. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(6, 0), (7, 0), (0, 1), (1, 5)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $H(S) = \bigcup_{i=1}^5 H_i(S)$ dir. Burada,

$$\begin{aligned} H_1(S) &= \{(x, y) : x = 29, 0 \leq y \leq 4\} \\ H_2(S) &= \{(x, y) : x = 22, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 23, 0 \leq y \leq 9\} \\ H_3(S) &= \{(x, y) : x = 15, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 16, 0 \leq y \leq 9\} \\ &\cup \{(x, y) : x = 17, 0 \leq y \leq 14\} \\ H_4(S) &= \{(x, y) : x = 8, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 9, 0 \leq y \leq 9\} \\ &\cup \{(x, y) : x = 10, 0 \leq y \leq 14\} \cup \{(x, y) : x = 11, 0 \leq y \leq 19\} \\ H_5(S) &= \{(x, y) : x = 1, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 2, 0 \leq y \leq 9\} \\ &\cup \{(x, y) : x = 3, 0 \leq y \leq 14\} \cup \{(x, y) : x = 4, 0 \leq y \leq 19\} \end{aligned}$$

$$\cup \{(x, y) : x = 5, 0 \leq y \leq 24\}$$

dir. Sonuç 4.13'ten $g(S) = 175$ dir. S genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrubu Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Şekil 4.4'teki yeşil renkli noktalar S 'nin minimal üreteçleri, mavi renkli noktalar S 'nin elemanları ve kırmızı renkli noktalar S 'nin boşluklarıdır.



Şekil 4.4. Örnek 4.14'teki genelleştirilmiş sayısal semigrub

Teorem 4.15. *Her $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrub bir mükemmel sayısal semigruptur.*

İspat. $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ bir sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrub olsun. Bu durumda, Teorem 3.39 ve Önerme 3.36'dan $H(S) = \pi(f) \setminus \{0\}$ dir. Her $h = (h^{(1)}, h^{(1)}) \in H(S)$ için $\{(h^{(1)} + 1, h^{(1)}), (h^{(1)}, h^{(1)} + 1), (h^{(1)} - 1, h^{(1)}), (h^{(1)}, h^{(1)} - 1)\}$ elemanlardan en az biri S 'nin bir boşluğu oluşu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, S 'nin hiç bir izole boşluğu yoktur. $\square$

Sonuç 4.16. $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrub olsun. Bu durumda, lexicographic sıralamaya göre $F(S)_\prec = f$ dir.

İspat. Teorem 3.39 ve Teorem 4.15'den elde edilir. $\square$

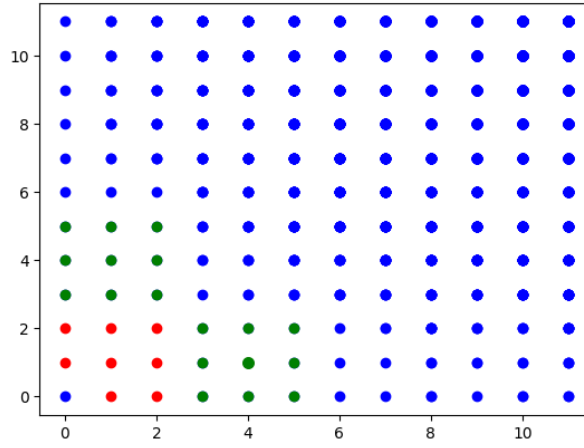
Örnek 4.17. $f = (2, 2)$ olsun. Bu durumda,

$$\pi(2, 2) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

dir. $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(2, 2)) \cup \{0\}$ 'ın minimum üreteçleri kümesi $A_1 \cup A_2$ Öyke ki:

- $A_1 = \{(3, 0), (4, 0), (5, 0), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}.$
- $A_2 = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$

Şekil 4.5'de yeşil renkli noktalar S 'nin minimal üreteçleridir, kırmızı renkli noktalar S 'nin boşluklarıdır ve mavi renkli noktalar S 'nin elemanlarıdır.



Şekil 4.5. Örnek 4.17'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.

Önerme 4.18. Her a -sempolitik genelleştirilmiş sayısal semigrup bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

İspat. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir a -sempolitik genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $h = (h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(d)}) \in H(S)$ olsun. Bu durumda, her $j \in \{1, \dots, d\}$ için $h - e_j = (h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(d)}) - e_j \leq a$ dir. O halde, her $j \in \{1, \dots, d\}$ için

$$\{h - e_j\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset H(S)$$

dir. İzole boşluk tanımından $h = (h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(d)})$ izole değildir. $\square$

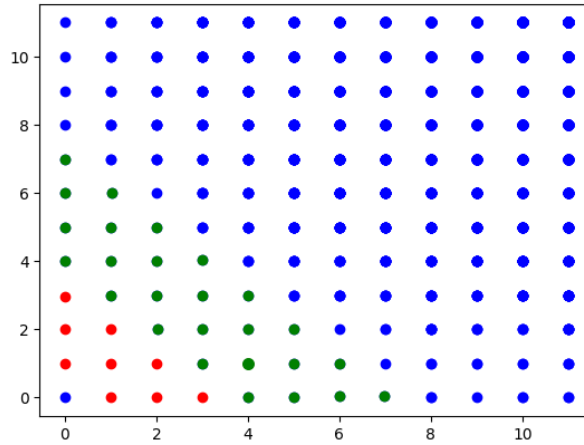
Örnek 4.19. $a = 3$ ve $d = 2$ olsun. $\mathbb{N}_0^d$ 'deki 3-sempolitik genelleştirilmiş sayısal semigrup:

$$\mathbb{N}_0^d \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$$

dir ve

$$G(S) = \{(0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (7, 0), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\}$$

dir. Şekil 4.6'da kırmızı noktalar genelleştirilmiş sayısal semigrubun boşlukları, yeşil noktalar minimal üreteçleri ve mavi noktalar S 'nin minimal olmayan elemanlarıdır.



Şekil 4.6. Örnek 4.19'daki genelleştirilmiş sayısal semigrup.

Örnek 4.20. $T = \langle 4, 5, 7 \rangle$ bir sayısal semigrup ve $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir T -şeridi genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

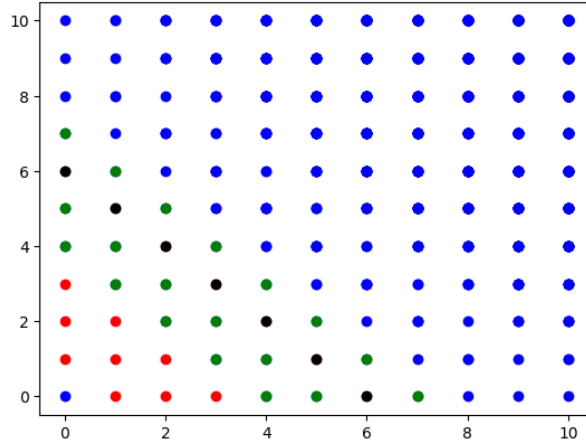
$$H(S) = \mathbb{N}_0^d \setminus \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (2, 0), (3, 0), (6, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (5, 1), \\ (0, 2), (1, 2), (4, 2), (0, 3), (3, 3), (0, 6), (1, 5), (2, 4) \end{array} \right\}$$

ve

$$G(S) = \left\{ \begin{array}{l} (4, 0), (3, 1), (2, 2), (0, 4), (1, 3), (5, 0), (4, 1), (3, 2), (0, 5), (1, 4), \\ (2, 3), (7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4) \end{array} \right\}$$

dir. $T \subset \mathbb{N}_0$ bir mükemmel sayısal semigrup değildir ve Şekil 4.7 de görüldüğü gibi $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ de bir mükemmel genelleştirilmiş sayısal semigrup değildir.

Örnek 4.21. $3 \leq a \in \mathbb{N}$, a tek ve $S = \langle (a, 0), (0, a), (2, 0), (0, 2), (1, 1) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $h = (2, 1)$ nin, S için bir izole boşluk olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla, S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir.



Şekil 4.7. Örnek 4.20'deki genelleştirilmiş sayısal semigrup.

Örnek 4.22. $S \subseteq \mathbb{N}_0^4$, minimal üreteç sistemi $A = \{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 3), (0, 0, 0, 5)\}$ olsun. O halde $H(S) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 1)\}$ dir. Dolayısıyla, $iso(S) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 3)\}$ ve S mükemmel değildir.

Önerme 4.23. $S \subset \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$ olsun. Bu durumda, $F(S)_{\prec}$ 'nin, S 'nin bir izole boşluğu olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\{F(S)_{\prec} - e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S \quad (4.1)$$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $F(S)_{\prec}$ 'nin, S 'nin bir izole boşluğu olduğunu varsayalım. İzole boşluk tanımından $\{F(S)_{\prec} \pm e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$ dir. Dolayısıyla, iddia doğrudur.

$(\Leftarrow)$ $F(S)_{\prec}$, S 'nin Frobenius elemanı ve (4.1) in doğru olduğunu varsayalım. Eğer $\{F(S)_{\prec} + e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$ doğru değilse, bazı $j \leq d$ için $F(S)_{\prec} + e_j$ boşluk olmalıdır. Fakat bu Frobenius tanımıyla bir çelişkidir. Bu nedenle, $F(S)_{\prec}$, S 'nin bir izole boşluğudur. $\square$

Aşağıdaki Sonuç, Önerme 4.23 den elde edilir.

Sonuç 4.24. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (a, b)$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $F(S)_{\prec}$, S 'nin bir izole noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $\{(a, b-1), (a-1, b)\} \cap \mathbb{N}_0^2 \subset S$ olmasıdır.

Örnek 4.25. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$ boşluk kümesi $H(S) = \{(1, 0), (2, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1), (9, 1), (1, 2), (2, 2), (5, 2), (0, 3), (1, 3), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (2, 6), (1, 7)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G(S) = \{(3, 0), (4, 0), (0, 5), (0, 2), (1, 4), (4, 1)\}$, S 'nin minimal üreteç sistemidir. Gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (a, b) = (3, 3)$ dir. $\{(a, b - 1), (a - 1, b)\} = \{(2, 3), (3, 2)\} \cap \mathbb{N}_0^2 \subset S$ olduğundan $F(S)_{\prec} = (3, 3)$, S 'nin bir izole noktasıdır.

Örnek 4.26. $S \subseteq \mathbb{N}_0^3$ minimal üreteç sistemi

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 3), \\ (1, 0, 3), (3, 0, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 3), (0, 3, 1) \end{array} \right\}$$

olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

$$H(S) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (3, 1, 0), (1, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 2), \\ (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 7), (1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 3, 2), \\ (1, 4, 1), (1, 6, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (4, 1, 1), \\ (4, 0, 1), (1, 0, 4), (0, 4, 1), (0, 1, 4), (6, 1, 1) \end{array} \right\}$$

S 'nin boşluklar kümesi, $iso(S) = \{(1, 1, 7), (1, 6, 1), (6, 1, 1)\}$ ve lexicographic sıralamaya göre $F(S)_{\prec} = (6, 1, 1)$ dir. $\{(5, 1, 1), (6, 0, 1), (6, 1, 0)\} \cap \mathbb{N}_0^3 \subset S$ olduğundan, $(6, 1, 1)$, S 'nin bir izole boşluğudur. Şekil 4.8'de yeşil olan noktalar S 'nin üreteçleri ve mavi noktalar S 'nin elemanlarını temsil eder. Şekil 4.9'de kırmızı olan noktalar S 'nin boşlukları ve siyah noktalar S 'nin izole boşluklarını temsil eder. S bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir.

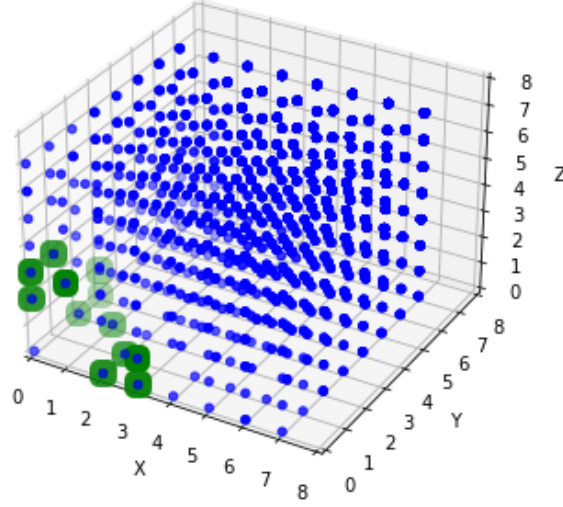
Önerme 4.27. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $h = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$, S 'nin bir boşluğu olsun, burada $x^{(j_1)} \cdot x^{(j_2)} \dots x^{(j_r)} \neq 0$, $1 \leq r \leq d$. Eğer h , S 'nin bir izole boşluğu ise, $\{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}\} \subseteq H(S)$ dir.

İspat. $1 \leq k \leq r$ için, varsayıma göre $x^{(j_k)} \neq 0$ 'a sahibiz. Eğer $h \in iso(S)$ ise, $\{(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(j_k-1)}, x^{(j_k)} \pm 1, x^{(j_k+1)}, \dots, x^{(d)})\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$ dir. Dolayısıyla,

$$\underbrace{(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})}_{\in H(S)} - \underbrace{(x^{(1)}, \dots, x^{(j_k-1)}, x^{(j_k)} - 1, x^{(j_k+1)}, \dots, x^{(d)})}_{\in S} = e_{j_k} \in H(S)$$

dir, aksi halde $h \notin H(S)$ olurdu. □

Tanım 4.28. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$, A tarafından üretilen bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun ve $S_k := \langle a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_r^{(k)} \rangle$ dir, burada $a_1^{(k)} e_k, \dots, a_r^{(k)} e_k \in A$ ve



Şekil 4.8. Örnek 4.26'daki genelleştirilmiş sayısal semigrubun elemanları

$\gcd(a_1^{(k)}, \dots, a_r^{(k)}) = 1, k = 1, \dots, d$ dir. Her k için

$$I_k = \left\{ x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) \in \mathbb{N}_0^{d-1} : \begin{array}{l} \text{her } z \in S_k \text{ için} \\ \tilde{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, z, x^{(k)}, \dots, x^{(d-1)}) \in S \end{array} \right\}$$

kümesi tanımlanır.

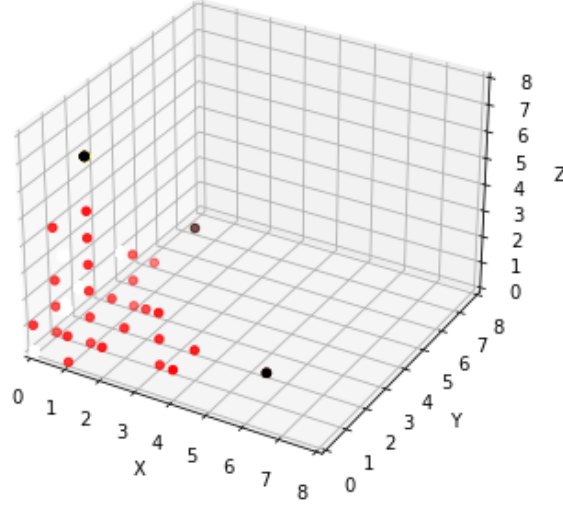
Önerme 4.29. $I_k, \mathbb{N}_0^{d-1}$ üzerinde bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

İspat. $I_k \subset \mathbb{N}_0^{d-1}$ dir ve "+" işlemi S üzerinde birleşmeli olduğundan, I_k üzerinde de birleşmelidir. $x, y \in I_k$ olsun. Bu durumda, her $s \in S_k$, için

$$\gamma := (x^{(1)} + y^{(1)}, \dots, x^{(k-1)} + y^{(k-1)}, s, x^{(k)} + y^{(k)}, \dots, x^{(d-1)} + y^{(d-1)}) \in S$$

olduğunu göstereceğiz. $s = z + t$ olacak şekilde $z, t \in S_k$ vardır. Dolayısıyla, $\tilde{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, z, x^{(k)}, \dots, x^{(d-1)}) \in S$ ve $\tilde{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}, t, y^{(k)}, \dots, y^{(d-1)}) \in S$ dir. S genelleştirilmiş bir sayısal semigrup olduğundan, $\tilde{x} + \tilde{y} = \gamma \in S$ olduğunu elde ederiz. O halde, $x + y \in I_k$ dir. Eğer $\alpha = (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(d-1)}) \in \mathbb{N}_0^{d-1} \setminus I_k$ ise, $\tilde{\alpha} = (z^{(1)}, \dots, z^{(k-1)}, u, z^{(k)}, \dots, z^{(d-1)}) \notin S$ olacak şekilde $u \in S_k$ vardır burada $\tilde{\alpha}^{(k)} = u$ dur.

Dolayısıyla, $\tilde{\alpha} \in H(S)$ ve $H(S)$ sonlu olduğundan $H(I_k)$ 'nın sonlu bir küme olduğunu elde ederiz. O halde $I_k, \mathbb{N}_0^{d-1}$ üzerinde bir genelleştirilmiş sayısal semigrup-



Şekil 4.9. Örnek 4.26'daki genelleştirilmiş sayısal semigrubun boşlukları

tur. □

Önerme 4.30. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $h = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$, S 'nin bir boşluğu olsun. O halde, h , S 'nin bir izole boşluğu olması için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $1 \leq k \leq d$ vardır:

1. $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \in I_k$ dir.
2. Her $j = 1, 2, \dots, d$ için $e_j + x^{(k)}e_k \in S$ dir.
3. $x^{(k)} \in iso(S_k)$ dir.

İspat. 1) den ve $h \in H(S)$ olduğundan,

$$h = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) = \underbrace{(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})}_{\in S} + (0, \dots, x^{(k)}, \dots, 0).$$

Bu durumda, $x^{(k)}e_k \notin S$ dir. Aksi takdirde $h \in S$ dir. O halde, $x^{(k)} \notin S_k$ dir. $x^{(k)} \in iso(S_k)$ olduğundan, $\{x^{(k)} \pm 1\} \cap \mathbb{N}_0 \subset S_k$ dir. Dolayısıyla,

$$(x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \pm 1, \dots, x^{(d)}) = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k)}, \dots, x^{(d)}) + (0, \dots, x^{(k)} \pm 1, \dots, 0)$$

S 'nin elemanıdır.

Benzer şekilde,

$$\{(x^{(1)} \pm 1, \dots, x^{(k)}, \dots, x^{(d)}), \dots, (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots, x^{(d)} \pm 1)\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$$

dir. Aslında ikinci koşuldan şunu elde ederiz: $t = (x^{(1)} \pm 1, \dots, x^{(k)}, \dots, x^{(d)})$ ise,

$$t = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k)}, \dots, x^{(d)}) + (\pm 1, \dots, x^{(k)}, \dots, 0) \in S$$

dir. Diğer elemanlar için de iddia geçerlidir, kanıt aynı argümanı kullanarak ortaya çıkar. Dolayısıyla, h , S 'nin bir izole boşluğudur. $\square$

Önerme 4.31. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $h = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$, S 'nin bir boşluğu olsun. O halde, h , S 'nin bir izole boşluğu olması için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $1 \leq k \leq d$ vardır:

1. $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \notin I_k$.
2. $\{x^{(k)}e_k, (x^{(k)} - 2)e_k\} \subset S$.
3. $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \in \text{iso}(S)$.

İspat. 1) den, $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \in H(I_k)$ ve

$$(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, t, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \notin S$$

olacak şekilde $t \in S_k$ vardır. Dolayısıyla,

$$\underbrace{(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, t, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})}_{\in H(S)} - \underbrace{te_k}_{\in S} = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})$$

$H(S)$ nin elemanıdır. Buradan,

$$\{(x^{(1)} \pm 1, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}), (x^{(1)}, x^{(2)} \pm 1, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}), \\ \dots, (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)} \pm 1), (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 1, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})\} \cap \mathbb{N}_0^d$$

üçüncü koşuldan S 'de olduğunu görebiliriz ve aşağıdaki ifadeleri sağlanır:

$$\begin{aligned} (x^{(1)} \pm 1, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) + x^{(k)}e_k &= (x^{(1)} \pm 1, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in S, \\ (x^{(1)}, x^{(2)} \pm 1, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) + x^{(k)}e_k &= (x^{(1)}, x^{(2)} \pm 1, \dots, x^{(d)}) \in S \\ \dots \\ (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)} \pm 1) + x^{(k)}e_k &= (x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}, x^{(d)} \pm 1), \\ (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 1, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) + x^{(k)}e_k &= (x^{(1)}, \dots, x^{(k)} + 1, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \in S \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $(x^{(k)} - 2)e_k \in S$ olduğundan,

$$(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 1, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) + (x^{(k)} - 2)e_k = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)} - 1, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})$$

S nin elemanıdır. Dolayısıyla h , S 'nin bir izole boşluğudur. $\square$

Önerme 4.32. $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}_0^d$ genelleştirilmiş sayısal semigruplar olsun. Bu durumda,

$$iso(S_1 \cap S_2) \subseteq iso(S_1) \cup iso(S_2)$$

dir.

İspat. $h \in iso(S_1 \cap S_2)$ olsun. O halde, iddia şu şekilde kanıtlanabilir:

$$h \in iso(S_1 \cap S_2) \Rightarrow h \in H(S_1 \cap S_2) \text{ ve } \{h \pm e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S_1 \cap S_2$$

$$\Rightarrow h \in H(S_1) \cup H(S_2) \text{ ve } \{h \pm e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S_i, \ i = 1, 2 \text{ için}$$

$$\Rightarrow h \in iso(S_1) \cup iso(S_2).$$

Açıklama 4.33. İki genelleştirilmiş sayısal semigrup S_1 ve S_2 için, $S_1 \cup S_2$ 'nin bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olmayabileceği bilinmektedir. S_1, S_2 'yi genelleştirilmiş sayısal kümeler ($\mathbb{N}_0^d$ 'nin 0 içeren ve $\mathbb{N}_0^d$ 'de tümleyenini sonlu olan alt kümesi) olarak düşünürsek, $H(S_1 \cup S_2) = H(S_1) \cap H(S_2)$ ve

$$\begin{aligned} h \in iso(S_1) \cap iso(S_2) &\Rightarrow h \in H(S_1 \cup S_2) \cap iso(S_1) \cap iso(S_2) \\ &\Rightarrow \{h \pm e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S_i, \ i = 1, 2 \\ &\Rightarrow h \in iso(S_1 \cup S_2). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $iso(S_1) \cap iso(S_2) \subseteq iso(S_1 \cup S_2)$ dir.

Teorem 4.34. $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}_0^d$ İki genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $S_1 \cap S_2$ bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

İspat. İki genelleştirilmiş sayısal semigrubun kesişiminin yine bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olduğu bilinmektedir. İspatın kalanı Önerme 4.32'den elde edilir. $\square$

$\mathbb{N}_0^d$ 'de Teorem 4.34 in tersi doğru değildir, Örnek 4.35 i inceleyiniz.

Örnek 4.35. $S_1 \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluklar kümesi $H(S_1) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $(1, 5), (5, 1)$ boşlukları izole olduğundan S_1 bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir.

$S_2 \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluklar kümesi $H(S_2) = \{(1, 0), (2, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (4, 1), (0, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $(5, 0), (0, 5), (1, 4), (4, 1) \in H(S_2)$ boşlukları izole olduğundan S_2 bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir. Artık $S_1 \cap S_2$ boşluklarından

hiçbirinin izole olmadığını göstermek kolaydır. Dolayısıyla $S_1 \cap S_2$ bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur.

4.1.2. Genelleştirilmiş aralıklı (Sparse) sayısal semigruplar

Bu bölümde $S \subset \mathbb{N}_0$ Aralıklı (Sparse) sayısal Semigrupların tanımını sunacağız. Sonra $S \subset \mathbb{N}_0^d$ Genelleştirilmiş Aralıklı (Sparse) sayısal semigruplarını tanımlayacağız. $\mathbb{N}_0^d$ 'de genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrupların yapısının belirlenmesi için gerekli altyapı oluşturulup, genelleştirilmiş Mükemmel sayısal semigruplar ile ilişkisi kurulacaktır.

$\mathbb{N}_0$ da bir aralıklı sayısal semigrup şu şekilde tanımlıdır: $S \subset \mathbb{N}_0$, bir sayısal semigrup, boşluk kümesi $H(S) = \{h_1, h_2, \dots, h_g\}$ ve önderi $c(S)$ olsun. Her $i \in \{2, 3, \dots, g\}$ için $h_i - h_{i-1} \leq 2$ ise, S 'ye bir aralıklı sayısal semigrup denir. Referans olarak (Munuerav Torres 2009) verilir.

Örnek 4.36. $S = \{0, 2, \rightarrow\}$ bir aralıklı sayısal semigruptur. $H(S) = \{1\}$, S 'nin boşluk kümesi ve $h = 1$ boşluğu S 'nin bir izole noktası olduğundan S , bir mükemmel sayısal semigrup olamaz.

Tanım 4.37. $S \subset \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $\prec$, $\mathbb{N}_0^d$ üzerinde bir gevşetilmiş tek terimli sıralama (relaxed monomial order), $H(S) = \{h_1 \preceq h_2 \preceq \dots \preceq h_g\}$, S 'nin boşluk kümesi olsun. $h_j = (h_j^{(1)}, h_j^{(2)}, \dots, h_j^{(d)})$ ise,

$$|h_j| := \left(|h_j^{(1)}|, |h_j^{(2)}|, \dots, |h_j^{(d)}| \right)$$

ile tanımlansın. Bu durumda, her $i \in \{2, 3, \dots, g\}$ için $|h_i - h_{i-1}| \preceq \mathbf{2} = (2, 2, \dots, 2)$ ise, S 'ye bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrup denir.

Örnek 4.38. $S \subset \mathbb{N}_0^2$ boşluk kümesi $H(S) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 0)\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, gevşetilmiş tek terimli sıramaya göre $H(S) = \{h_1 = (0, 1) \preceq h_2 = (1, 0) \preceq h_3 = (3, 0) \preceq h_4 = (1, 1) \preceq h_5 = (1, 2) \preceq h_6 = (1, 3) \preceq h_7 = (2, 1)\}$ dir. Bu durumda,

$$|h_2 - h_1| = |(1, 0) - (0, 1)| = |(1, -1)| = (1, 1) \preceq (2, 2)$$

$$|h_3 - h_2| = |(3, 0) - (1, 0)| = |(2, 0)| = (2, 0) \preceq (2, 2)$$

dir. Aynı şekilde $|h_4 - h_3| \preceq (2, 2)$, $|h_5 - h_4| \preceq (2, 2)$, $|h_6 - h_5| \preceq (2, 2)$, $|h_7 - h_6| \preceq (2, 2)$ dir. Dolayısıyla, S bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigruptur.

Önerme 4.39. Her genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigruptur.

İspat. $S \subset \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

S 'nin hiç izole noktası yoktur. Yani, her $h = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(j)}, \dots, i^{(d)}) \in H(S)$ için h , S 'nin bir izole noktası olamaz. İzole noktasının tanımından en az bir $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $\{(i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(j)} - 1, \dots, i^{(d)}), (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(j)} + 1, \dots, i^{(d)})\} \cap \mathbb{N}^d \not\subseteq S$ dir. $h' = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(j)} - 1, \dots, i^{(d)})$ ve $h'' = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(j)} + 1, \dots, i^{(d)})$ olsun. O halde, aşağıdaki gibi 3 durum vardır.

1) $h' \in H(S)$ dir. Bu durumda, $h' \preceq h$ ve

$$|h - h'| = \left| \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0 \right) \right| = \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0 \right) \preceq \mathbf{2}$$

dir.

2) $h'' \in H(S)$ dir. Bu durumda, $h \preceq h''$ ve

$$|h'' - h| = \left| \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0 \right) \right| = \left(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0 \right) \preceq \mathbf{2}$$

dir,

3) $h', h'' \in H(S)$ dir. Bu durumda, $h' \preceq h \preceq h''$ ve $|h - h'| \preceq \mathbf{2}$, $|h'' - h| \preceq \mathbf{2}$ dir.

Yukarıdaki durumlarda genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrup koşulu sağlanır. Dolayısıyla $S \subset \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigruptur. $\square$

Sonuç 4.40. $S = \langle (a, 0), (1, b), (0, 1), (2, 0) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun; burada $a, b \in \mathbb{N}$, a tek ve $b \geq 2$ 'dir. O halde, S bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigruptur.

İspat. Teorem 4.9 ve Önerme 4.39'dan elde edilir. $\square$

Sonuç 4.41. $S = \langle (a, 0), (a + 1, 0), (0, 1), (1, b) \rangle$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun; burada $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ 'dir. O halde, S bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigruptur.

İspat. Teorem 4.12 ve Önerme 4.39'dan elde edilir. $\square$

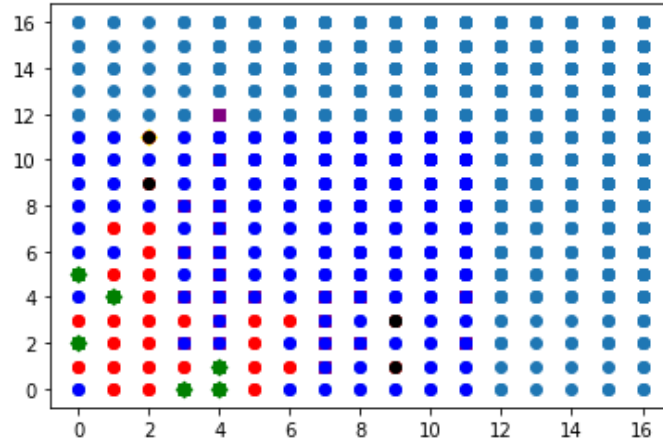
Örnek 4.42. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$ boşluk kümesi $H(S) = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$ S 'nin minimal üreteç sistemidir. Her $h \in H(S)$ için h , S 'nin bir izole noktası değildir. Dolayısıyla, S bir genelleştirilmiş mükemmel ve aralıklı sayısal semigruptur.

Örnek 4.43. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (2, 0), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, programı kullanarak $H(S) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 3), (1, 1), (3, 1)\}$ dir. Gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre $H(S) = \{h_1 = (0, 1) \preceq h_2 = (1, 0) \preceq h_3 = (1, 1) \preceq h_4 = (1, 3) \preceq h_5 = (3, 1)\}$ dir. Genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrup koşulu kontrol edilerek S nin bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrup olduğu görülür.

Örnek 4.44. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 5), (3, 0), (4, 0), (1, 4), (4, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $H(S) = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 9), (2, 11), (3, 1), (3, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 3), (9, 1), (9, 3)\}$ dir. Gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre

$$\begin{aligned} H(S) &= \{(0, 1) \preceq (0, 3) \preceq (1, 0) \preceq (2, 0) \preceq (5, 0) \preceq (1, 1) \preceq (1, 2) \\ &\preceq (1, 3) \preceq (1, 5) \preceq (1, 7) \preceq (2, 1) \preceq (3, 1) \preceq (5, 1) \preceq (6, 1) \\ &\preceq (9, 1) \preceq (2, 2) \preceq (2, 3) \preceq (2, 4) \preceq (2, 5) \preceq (2, 6) \preceq (2, 7) \\ &\preceq (2, 9) \preceq (2, 11) \preceq (5, 2) \preceq (3, 3) \preceq (5, 3) \preceq (6, 3) \preceq (9, 3)\} \end{aligned}$$

dir. $(2, 11) \preceq (5, 2)$ için $|(5, 2) - (2, 11)| = (3, 9) \succ (2, 2)$ olduğundan S bir genelleştirilmiş aralıklı sayısal semigrup değildir. Bakınız Şekil 4.10.



Şekil 4.10. Örnek 4.44'teki genelleştirilmiş sayısal semigrup

4.1.3. Genelleştirilmiş yoğun (Dense) ve tam yoğun sayısal semigruplar

Bu bölümde $\mathbb{N}_0$ 'deki tanımlanan yoğun sayısal semigrupları hatırlatarak genelleştirilmiş yoğun (dense) ve tam yoğun sayısal semigrupları incelenecektir. $\mathbb{N}_0$ 'deki yoğun sayısal semigruplar hakkında detaylı bilgi için bkz (J Carlos vd. 2021).

Tanım 4.45. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir sayısal semigrup olmak üzere her $s \in S \setminus \{0\}$ için

$$\{s + 1, s - 1\} \cap S \neq \emptyset$$

ise, S 'ye yoğun sayısal semigrup denir.

Önerme 4.46. $\delta = \{0, m(S), m(S) + 1, \rightarrow\}$ bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, δ hem aralıklı hemde yoğun bir sayısal semigruptur.

İspat. Tanımlardan açıktır. □

Örnek 4.47. $\delta = \{0, 3, \rightarrow\} = \langle 3, 4, 5 \rangle$ semigrubu hem aralıklı hemde yoğun bir sayısal semigruptur.

Önerme 4.48. δ 'dan farklı her aralıklı sayısal semigrup yoğun değildir.

İspat. $S \neq \delta$ bir aralıklı sayısal semigrup olsun. S 'nin yoğun bir sayısal semigrup olduğunu farz edelim. $S \neq \delta$ olduğundan, öyle bir $h \in H(S)$ var ki $h \succ m(S)$ dir. S yoğun olduğundan, $h \neq m(S) + 1$ dir. $h \neq m(S) + 1$ olacak biçimde en küçük boşluk olsun. Bu boşluktan önceki boşluk $m(S) - 1$ dir. Bu boşluklar ardışık boşluklar ve onların farkı 2 den büyük olduğundan, S 'nin aralıklılığı ile çelişir. Dolayısıyla, S yoğun bir sayısal semigrup değildir. □

Önerme 4.49. δ 'den farklı her yoğun sayısal semigrup aralıklı değildir.

İspat. $S \neq \delta$ bir yoğun sayısal semigrup olsun. S 'nin aralıklı bir sayısal semigrup olduğunu farz edelim. Bu durumda, her $i \in \{2, 3, \dots, g\}$ için $h_i - h_{i-1} \leq 2$ dir. Demek ki ardışık her iki boşluğun farkı ya 1 ya 2 dir. 1 ise, $S \neq \delta$ ile çelişir ve 2 ise, S 'nin yoğunluğu ile çelişir. Dolayısıyla, S aralıklı bir sayısal semigrup değildir. □

Tanım 4.50. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olmak üzere her

$s = (s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(d)}) \in S \setminus \{0\}$ için

$$\{(s^{(1)}, \dots, s^{(j)} + 1, \dots, s^{(d)}), (s^{(1)}, \dots, s^{(j)} - 1, \dots, s^{(d)})\} \cap S \neq \emptyset \quad (4.2)$$

koşulu en az bir $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ için sağlanırsa, S 'ye genelleştirilmiş yoğun sayısal semigrup denir. Her $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ için (4.2) sağlanırsa, S 'ye genelleştirilmiş tam yoğun sayısal semigrup denir.

Örnek 4.51. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (2, 0), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ olsun. Bu durumda, S bir genelleştirilmiş yoğun sayısal semigruptur.

Örnek 4.52. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$ minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 5), (2, 0), (3, 0),$

$(1, 3), (2, 1)\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $s = (0, 2)$ için

$$\begin{aligned} \{(s^{(1)} + 1, s^{(2)}), (s^{(1)} - 1, s^{(2)})\} \cap S &= \{(1, 2), (-1, 2)\} \cap S = \emptyset \\ \{(s^{(1)}, s^{(2)} + 1), (s^{(1)}, s^{(2)} - 1)\} \cap S &= \{(0, 1), (0, 3)\} \cap S = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan, S bir genelleştirilmiş yoğun sayısal semigrup değildir.

Örnek 4.53. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (2, 0), (3, 0), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ olsun. Bu durumda, S bir genelleştirilmiş tam yoğun sayısal semigruptur.

Örnek 4.54. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve minimal üreteç sistemi $G(S) = \{(0, 2), (0, 3), (2, 0), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ olsun. Bu durumda, S bir genelleştirilmiş tam yoğun sayısal semigrup değildir.

Önerme 4.55. *Her genelleştirilmiş tam yoğun sayısal semigrup bir genelleştirilmiş yoğun sayısal semigruptur.*

İspat. Tanımlardan açıktır. □

4.1.4. Genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeleri

Bu bölümde, $\mathbb{N}_0$ 'de bir sayısal semigrubun aritmetik genişlemeler kümesinin kavramlarından faydalanarak, $\mathbb{N}_0^d$ 'de genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeleri tanımlanıp bazı önemli özellikleri incelenecektir.

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}), y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d \text{ için}$$

$$x \cdot y = (x^{(1)}y^{(1)}, x^{(2)}y^{(2)}, \dots, x^{(d)}y^{(d)})$$

dir.

Önerme 4.56. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ ise,

$$\frac{S}{\delta} := \{x \in \mathbb{N}_0^d : \delta x \in S\}$$

bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

İspat. $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{d \text{ tane}}) \in \frac{S}{\delta}$ ve $\frac{S}{\delta}$, $+$ işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olduğundan $\mathbb{N}_0^d \setminus \frac{S}{\delta}$ sonludur ve her $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$,

$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ için

$$\delta x = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) \cdot (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) = (\delta^{(1)}x^{(1)}, \delta^{(2)}x^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}x^{(d)}) \in S$$

$$\delta y = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) \cdot (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(d)}) = (\delta^{(1)}y^{(1)}, \delta^{(2)}y^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}y^{(d)}) \in S$$

dir.

$$\begin{aligned} \delta x + \delta y &= (\delta^{(1)}x^{(1)}, \delta^{(2)}x^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}x^{(d)}) + (\delta^{(1)}y^{(1)}, \delta^{(2)}y^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}y^{(d)}) \\ &= (\delta^{(1)}x^{(1)} + \delta^{(1)}y^{(1)}, \delta^{(2)}x^{(2)} + \delta^{(2)}y^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}x^{(d)} + \delta^{(d)}y^{(d)}) \\ &= (\delta^{(1)}(x^{(1)} + y^{(1)}), \delta^{(2)}(x^{(2)} + y^{(2)}), \dots, \delta^{(d)}(x^{(d)} + y^{(d)})) \\ &= \delta(x + y) \in S \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $x + y \in \frac{S}{\delta}$ dir. O halde, $\frac{S}{\delta}, \mathbb{N}_0^d$ 'nin bir altmonoididir. $\square$

Tanım 4.57. $\frac{S}{\delta}$ 'ya δ 'ya göre S 'nin bölümü denir.

Önerme 4.58. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ olmak üzere

$$1. \frac{S}{\delta} = S \text{ ancak ve ancak } \delta = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{d \text{ tane}} \text{ dir.}$$

$$2. \frac{S}{\delta} = \mathbb{N}_0^d \text{ ancak ve ancak her } i \in \{1, 2, \dots, d\} \text{ için } \delta^{(i)}e_i \in S \text{ dir.}$$

İspat. 1) Kabul edelim ki $\delta = (1, 1, \dots, 1)$ olsun,

$$\begin{aligned} \frac{S}{\delta} &= \{(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d : (1, 1, \dots, 1) \cdot (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in S\} \\ &= \mathbb{N}_0^d \cap S = S \end{aligned}$$

elde edilir. Karşıt olarak, $\frac{S}{\delta} = S$ olsun. Bu durumda, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \frac{S}{\delta} = S$ ise, $\delta x \in S$ dir. $s \in S$ ise, öyle $y \in S$ var ki $s = \delta y$ dir. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $\delta^{(i)} \neq 0$ olduğundan, Teorem 3.14'den her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $\delta^{(i)} = 1$ olmalıdır.

2) $\frac{S}{\delta} = \mathbb{N}_0^d$ olsun. Bu durumda, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $e_i \in \mathbb{N}_0^d = \frac{S}{\delta}$ dir ve $e_i \delta = e_i(\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) = e_i \delta^{(i)} \in S$ dir. Karşıt olarak, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $e_i \delta^{(i)} \in S$ ve $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ olsun. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olduğundan, her $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ için $x^{(i)}e_i \delta^{(i)} \in S$ dir. O halde, $\delta x = x^{(1)}e_1 \delta^{(1)} + x^{(2)}e_2 \delta^{(2)} + \dots + x^{(d)}e_d \delta^{(d)} \in S$ ve $x \in \frac{S}{\delta}$ dir. Dolayısıyla, $\mathbb{N}_0^d \subseteq \frac{S}{\delta}$ dir. Böylece, $\frac{S}{\delta} \subseteq \mathbb{N}_0^d$ olduğundan $\frac{S}{\delta} = \mathbb{N}_0^d$ dir. $\square$

Sonuç 4.59. $\frac{S}{\delta} = \mathbb{N}_0^d$ ise $\delta \in S$ dir.

Tanım 4.60. $S, T \subseteq \mathbb{N}_0^d$ iki genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

1. $S \subseteq T$ ise, T 'ye S 'nin bir genişlemesi denir.
2. T , S 'nin bir genişlemesi ve sonlu sayıda $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d \in \mathbb{N}_0$ varsa ki

$$T = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d : \delta_i x \in S, i = 1, 2, \dots, n\}$$

oluyorsa, T 'ye S 'nin bir aritmetik genişlemesi denir.

Önerme 4.61. $T, S \subset \mathbb{N}_0^d$ ve S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $S \subseteq T$ olmak üzere T , S 'nin bir aritmetik genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul $T = \frac{S}{\delta_1} \cap \frac{S}{\delta_2} \cap \dots \cap \frac{S}{\delta_d}$ olacak şekilde $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d\} \subseteq \mathbb{N}^d \setminus S$ olmasıdır.

İspat. Sonuç 4.59 ve Tanım 4.60'den elde edilir. □

S bir sayısal semigrup olmak üzere ve $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \mathbb{N}^d$ olsun. O halde

$$S(\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}) = \{x \in \mathbb{N}_0^d : \delta_i x \in S, i = 1, 2, \dots, n\}$$

tanımlayalım. Bu durumda $S(\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}) = \bigcap_{i=1}^n \frac{S}{\delta_i}$ dir.

Şimdi,

$$\Phi(S) := \{S(X) : X \subseteq \mathbb{N}_0^d \setminus S\} \quad (4.3)$$

tanımlayalım.

Teorem 4.62. $S \subset \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda

$$\Phi(S) = \{S(\mathbf{X}) : X \subseteq \mathbb{N}_0^d \setminus S \text{ ve } \mathbf{X} = \text{msg}(\langle X \rangle)\}$$

dir, burada $\mathbf{X} = \text{msg}(\langle X \rangle)$, X 'in üreteçlerinin minimal sistemidir.

İspat. $A = \{S(X) : X \subseteq \mathbb{N}_0^d \setminus S\}$ olsun. Bu durumda (4.3)'den $A \subseteq \Phi(S)$ dir. Şimdi $S \in \Phi(S)$ ise, $\Phi(S)$ tanımından $S = S(X) = \frac{S}{x_1} \cap \frac{S}{x_2} \cap \dots \cap \frac{S}{x_n}$ olacak şekilde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{N}_0^d \setminus S$ vardır. $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} = \text{msg}(\langle X \rangle)$ olsun. O halde $Y \subseteq X$ olur. Dolayısıyla $S(X) \subseteq S(Y)$ dir. Çünkü, $x \in S(X)$ ise, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $x \in \frac{S}{x_i}$ dir. Böylece her $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $x \in \frac{S}{y_j}$ ve $x \in S(Y)$ dir.

Diğer yandan, eğer $y \in S(Y)$ ise, her $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $yy_j \in S$ ve $x_i \in \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$ olduğundan $yx_i \in S$ olur. Dolayısıyla $y \in S(X)$ dir. Yani, $S(X) = S(Y) \in A$ dir. □

$\Phi(S) \subseteq \mathbb{N}_0^d$ ve küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

Tanım 4.63. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d \setminus S$$

olsun. Bu durumda, $\{2x = (2x^{(1)}, 2x^{(2)}, \dots, 2x^{(d)}), 3x = (3x^{(1)}, 3x^{(2)}, \dots, 3x^{(d)})\} \subset S$ ise, x 'e S 'nin temel boşluğu denir ve S 'nin temel boşlukları kümesi $FG(S)$ ile gösterilir.

$\prec$, gevşetilmiş tek terimli sıralama olmak üzere $S \neq \mathbb{N}_0^d$ olması koşuluyla $F(S)_{\prec} \in FG(S)$ dir.

Lemma 4.64. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve x, S 'nin bir boşluğu olsun. Bu durumda, $x \in FG(S)$ ancak ve ancak $\{kx : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \subseteq S$ dir.

İspat. $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in FG(S)$ olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ için $k = 2a + 3b$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{N}_0$ vardır. O halde, $kx = 2ax + 3bx$ dir. $2x, 3x \in S$ olduğundan, $kx \in S$ dir. Karşıt olarak, her $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ise, $\{2x, 3x\} \subset S$ olur. Yani, $x \in FG(S)$ dir. $\square$

$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeler kümesi üzerine örnekler:

Örnek 4.65. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ ve minimal üreteç sistemi kümesi $G(S) = \{(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 0)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $\delta \in \mathbb{N}^2 \setminus S$ için sadece $\delta = (1, 2)$ vardır.

$$\begin{aligned} \frac{S}{\delta} = \frac{S}{(1,2)} &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{N}_0^2 : (1, 2) \cdot (x_1, x_2) \in S\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}_0^2 : (x_1, 2x_2) \in S\} \\ &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1, 0), (1, 1)\} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $\frac{S}{(1,2)}$ cinsi 2 olan bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Gösterim 4.66. Çizelge 3.1'deki cinsi 3 olan bütün genelleştirilmiş sayısal semigruplar için önceki örnek gibi $\frac{S}{\delta}$ yi hesapladığımızda aynı tablodaki cinsi 2 olan genelleştirilmiş sayısal semigrupları elde edilir.

Örnek 4.67. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1)\}$ ve minimal üreteç sistemi kümesi $G(S) = \{(2, 0), (0, 2), (3, 0), (0, 3), (1, 4), (4, 1)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, her $\delta \in \mathbb{N}^2 \setminus S$ için $\frac{S}{\delta}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{S}{(1,2)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (1,1)\} \\
\frac{S}{(2,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1)\} \\
\frac{S}{(1,3)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (1,1)\} \\
\frac{S}{(3,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1)\} \\
\frac{S}{(1,5)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (1,1)\} \\
\frac{S}{(5,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1)\}
\end{aligned}$$

kümeleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\delta \in \mathbb{N}^2 \setminus S} &= (\mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (1,1)\}) \cap (\mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1)\}) \\
&= \mathbb{N}_0^2 \setminus (\{(1,0), (1,1)\} \cup \{(0,1), (1,1)\}) \\
&= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (0,1), (1,1)\}
\end{aligned}$$

dir. Cinsi 3 olan bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Örnek 4.68. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \{(1,0), (2,0), (5,0), (0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (5,1), (6,1), (9,1), (1,2), (2,2), (3,2), (0,3), (1,3), (3,3), (3,3), (2,4), (1,5), (2,6), (1,7)\}$ ve minimal üreteç sistemi kümesi $G(S) = \{(3,0), (4,0), (0,5), (0,2), (1,4), (4,1), (2,3)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, her $\delta \in \mathbb{N}^2 \setminus S$ için:

$$\begin{aligned}
\frac{S}{(2,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1), (3,1), (1,0)\} \\
\frac{S}{(3,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1)\} = \frac{S}{(6,1)} = \frac{S}{(3,3)} = \frac{S}{(2,4)} = \frac{S}{(2,6)} \\
\frac{S}{(1,2)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (2,0), (5,0), (0,1), (1,1), (2,1), (5,1), (2,3), (2,2)\} \\
\frac{S}{(2,2)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\} \\
\frac{S}{(9,1)} &= \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0,1), (1,1), (3,1)\}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\bigcap_{\delta \in \mathbb{N}^2 \setminus S} = \mathbb{N}_0^2 \setminus \left\{ \begin{array}{l} (1,0), (2,0), (5,0), (0,1), (1,1), (2,1), (5,1), \\ (2,3), (2,2), (3,1), (1,2), (1,3) \end{array} \right\}$$

dir. Cinsi 12 olan bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Önerme 4.69. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}, \mathbb{R}^d$ 'nin doğal tabanı olsun. Bu durumda, en az bir $i \leq d$ var ki $e_i \notin S$, $e_i f^{(i)} \notin S$ ve $e_i \notin \frac{S}{F(S)_{\prec}}$ dir. Özel olarak, $k \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots, i_k \leq d$ var ki $\frac{S}{F(S)_{\prec}} \subseteq \mathbb{N}_0^d \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, (1, 1, \dots, 1)\}$ dir.

İspat. $F(S) \in H(S)$, olduğundan $e_i f^{(i)} \notin S$. İspatın kalan kısmı Tanım 4.60 ve Önerme 4.61' den elde edilir. $\square$

Örnek 4.70. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (1,3),$

$(5, 1), (1, 2)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre $F(S)_{\prec} = (f_1, f_2) = (5, 1)$ dir. $(5, 0) \notin H(S)$ ve $(0, 1) \in H(S)$ olduğundan $\frac{S}{F(S)_{\prec}} = \frac{S}{(5,1)} = \mathbb{N}^2 \setminus \{e_2, (1, 1)\}$ dir.

Örnek 4.71. $S \subseteq \mathbb{N}_0^2$, boşluk kümesi $H(S) = \{(0, 1), (2, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1), (9, 1), (1, 2), (2, 2), (5, 2), (0, 3), (1, 3), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (2, 6), (1, 7)\}$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Bu durumda, gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre $F(S)_{\prec} = (f_1, f_2) = (3, 3)$ dir. $(3, 0) \notin H(S)$ ve $(0, 3) \in H(S)$ olduğundan $\frac{S}{F(S)_{\prec}} = \frac{S}{(3,3)} = \mathbb{N}^2 \setminus \{e_1, (1, 1)\}$ dir.

Örnek 4.72. $S \subseteq \mathbb{N}_0^3$ üreteç kümesi;

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 3), \\ (1, 0, 3), (3, 0, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 3), (0, 3, 1) \end{array} \right\}$$

olan genelleştirilmiş bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S 'nin boşluk kümesi,

$$H(S) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (3, 1, 0), (1, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 2), \\ (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 7), (1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 3, 2), \\ (1, 4, 1), (1, 6, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (4, 1, 1), \\ (6, 1, 1) \end{array} \right\}$$

dir. Her $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \mathbb{N}^3 \setminus S$ için $\frac{S}{\delta} := \{x \in \mathbb{N}_0^3 : \delta x \in S\}$ hesaplanabilir. Örneğin; $\delta = (3, 1, 2)$ için

$$\begin{aligned} \frac{S}{\delta} &= \{x \in \mathbb{N}_0^3 : \delta x \in S\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}_0^3 : (3, 1, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) \in S\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}_0^3 : (3x_1, x_2, 2x_3) \in S\} \\ &= \mathbb{N}_0^3 \setminus \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

dir. Gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre $F(S)_{\prec} = (f_1, f_2, f_3) = (6, 1, 1)$ dir. $(6, 0, 0) \notin H(S)$, $(0, 1, 0), (0, 0, 1) \in H(S)$ olduğundan $\frac{S}{F(S)_{\prec}} = \frac{S}{(6,1,1)} = \mathbb{N}^3 \setminus \{e_2, e_3, (1, 1, 1)\}$ dir.

Açıklama 4.73. $S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ Frobenius elemanı $F(S)_{\prec} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d)}) \in \mathbb{N}_0^d$ olan bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, $\mathbb{R}^d$ 'nin doğal tabanı ve $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, d\}$ olmak üzere

- $j \notin I$ için $e_j \in \frac{S}{F(S)_{\prec}}$ ve $1 \leq i_j \leq i_t \leq d$ için $f^{(i_j)}e_{i_j} + f^{(i_t)}e_{i_t} \in S$,
- Her $a_{i_j} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $a_{i_j}f \in S$ ise,

$\mathbb{N}_0^d \setminus \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, (1, 1, \dots, 1)\} \subseteq \frac{S}{F(S)_{\prec}}$ dir.

4.2. Üçgen Sayısal Semigrupların Genellemeleri

$\mathbb{N}_0$ üzerinde üçgen sayısal semigrupları ve piramitsel sayısal semigrupların bazı özellikleri araştırılıp bu özelliklerden faydalanarak üçgen sayısal semigrupların iki genellemesi tanıtılacak ve önemli özellikleri incelenecektir.

4.2.1. Üçgen sayısal semigrupları

Bir doğal sayı, uygun bir $n \in \mathbb{N}$ için ilk n doğal sayıların toplamıysa, bu doğal sayıya bir üçgen sayı denir ve T_n ile gösterilir. Bu bölümde üçgen sayısal semigrupların tanımını hatırlayacağız ve ilgili bazı özellikleri sunacağız.

Kolayca görülebilir ki $T_n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ dir.

Tanım 4.74. T_n , n -inci üçgen sayı olmak üzere

$$S(n) := \langle T_{n+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$$

tanımlanır.

Önerme 4.75. $S(n)$ bir sayısal semigruptur.

İspat. Öncelikle $S(n)$ kümesini ele alalım. $d \in \mathbb{N}_0$, her $k \in \mathbb{N}_0$ için $d \mid p(2, n+k)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d \mid p(2, n) &= C(n+1, 2) = \frac{n^2 + n}{2} \\ d \mid p(2, n+1) &= C(n+2, 2) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ d \mid p(2, n+2) &= C(n+3, 2) = \frac{n^2 + 5n + 6}{2} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d \mid [p(2, n+1) - p(2, n)] &= n+1 \\ d \mid [p(2, n+2) - p(2, n+1)] &= n+2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $d \mid [(n+2) - (n+1)] \Rightarrow d \mid 1$ dir. $\mathbb{N}_0 \setminus S(2, n)$ sonlu ve $(S(2, n), +)$, $\mathbb{N}_0 \setminus S(2, n)$ 'nin bir altmonoid olduğundan, $(S(2, n), +)$ bir sayısal semigruptur. $\square$

Tanım 4.76. T_n , n -inci üçgen sayı olsun. Bu durumda, $S(n)$ 'ye n 'inci üçgen sayısal semigrup denir.

Üçgen bir sayısal semigrubun Frobenius elemanı her $n \in \mathbb{N}$ için Robles-Pérez

ve Rosales (2018)'de olduğu gibi aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$F(S(n)) = \begin{cases} \frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, & n \text{ tek} \\ \frac{3n^3+9n^2+6n-4}{4}, & n \text{ çift} \end{cases} \quad (4.4)$$

dir.

Önerme 4.77. $n \in \mathbb{N}$ ve $S(n)$, n 'inci üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. Her $r \in \mathbb{N}$ için $F(S(2r+1)) = 6r^3 + 15r^2 + 9r - 1$ dir.
2. Her $r \in \mathbb{N}$ için $F(S(2r)) = 6r^3 + 9r^2 + 3r - 1$ dir.
3. Her $r \in \mathbb{N}$ için $F(S(n))$ tek sayıdır.

İspat. (4.4)'den:

1. $F(S(2r+1)) = \frac{3(2r+1)^3+6(2r+1)^2-3(2r+1)-10}{4} = 6r^3 + 15r^2 + 9r - 1$ dir.
2. $F(S(2r)) = \frac{3(2r)^3+9(2r)^2+6(2r)-4}{4} = 6r^3 + 9r^2 + 3r - 1$ dir.
3. n tek ise, $n = 2r+1$ olacak şekilde $r \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $F(S(2r+1)) = 6r^3 + 15r^2 + 9r - 1 = 3r(r+1)(2r+3) - 1$ tektir. n çift ise, $n = 2r$ olacak şekilde $r \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $F(S(2r)) = 3r(r+1)(2r+1) - 1$ tektir.

□

Önerme 4.78. Her $n \in \mathbb{N}$ için $S(n)$ üçgen sayısal semigrupları indirgenemezdir.

İspat. Kanıt, indirgenemez sayısal semigrubun tanımından açıktır.

□

Sonuç 4.79. Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $S(n)$ üçgen sayısal semigrupları simetriktir.

İspat. Önerme 4.77 ve Önerme 4.78'den elde edilir.

□

Sonuç 4.80. Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $S(n)$ bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

$$g(S(n)) = \begin{cases} \frac{3n^3+6n^2-3n-6}{8} & , n \text{ tek} \\ \frac{3n^3+9n^2+6n}{8} & , n \text{ çift} \end{cases}$$

dir.

$$\text{İspat. } g(S(n)) = \frac{F(S(3,n))+1}{2} = \begin{cases} \frac{3n^3+6n^2-3n-6}{8} & , n \text{ tek} \\ \frac{3n^3+9n^2+6n}{8} & , n \text{ çift} \end{cases}$$

dir. □

Sonuç 4.81. Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $S(n)$ bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $PF(S(n)) = \{F(S(n))\}$ ve $t(S(n)) = 1$ dir.

İspat. Önerme 4.79 ve Sonuç 4.80'den elde edilir. □

Örnek 4.82. $n = 5$ için $S(5) = \langle 15, 21, 28 \rangle$ bir üçgen sayısal semigruptur. $S(5)$ 'in boşluklar kümesi $H(S(5)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 46, 47, 48, 50, 52, 53, 54, 55, 59, 61, 62, 65, 67, 68, 69, 74, 76, 80, 82, 83, 89, 95, 97, 104, 110, 125\}$ dir. n tek olduğundan $F(S(5)) = \frac{3 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 - 10}{4} = 125$ ve $g(S(5)) = \frac{3 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 - 6}{8} = 63$ tür. Ayrıca $PF(S(n)) = \{F(S(n))\} = \{125\}$ tir.

Önerme 4.83. Üçgen sayısal semigrupları $S(n)$, bir Arf sayısal semigrubu değildir.

İspat. Farz edelimki $S(n) = \langle T_{n+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir Arf sayısal semigruptur. $\alpha = T_{n+1}$, $\beta = T_n \in S(n)$ olsun. Bu durumda,

$$0 \leq \frac{2(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2} = T_n + 2(n+1)T_1 \text{ dir.}$$

$n \in \{2, 4\}$ için $T_n + 2(n+1)T_1 \in S(n)$ dir. Aksi takdirde $T_n + 2(n+1)T_1 \notin S(n)$ dir. □

Önerme 4.84. $S_1 = \langle T_n, T_{n+1}, T_{n+2} \rangle$ bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{N}$ ve $\prec$ lexicographic sıralama ise, $S = \langle (T_n, 0), (T_{n+1}, 0), (T_{n+2}, 0), (0, 1), (1, a) \rangle$ genelleştirilmiş sayısal semigrubun Frobenius elemanı

$$F(S(n))_{\prec} = \begin{cases} (\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1), & n \text{ tek} \\ (\frac{3n^3+9n^2+6n-4}{4}, a-1), & n \text{ çift} \end{cases}$$

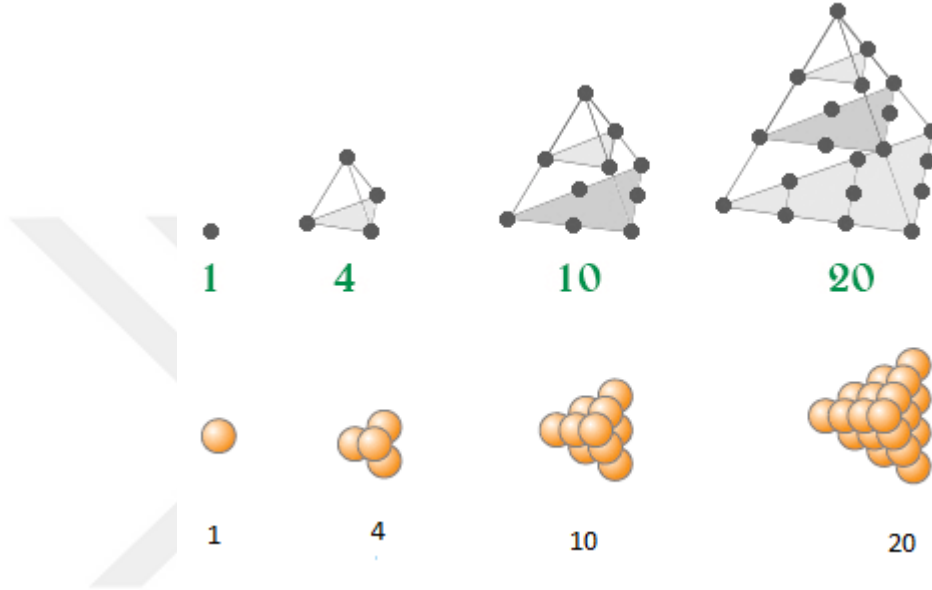
dir.

İspat. n tek ise, $(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1)$, $H(S(n))$ 'nin elemanı ve n çift ise, $(\frac{3n^3+9n^2+6n-4}{4}, a-1)$, $H(S(n))$ 'nin elemanı olduğunu gösterelim.

$S_1 = \langle T_n, T_{n+1}, T_{n+2} \rangle$ ve $S_2 = \mathbb{N}_0$ ise, $S = S_1 \times S_2$ olarak yazılabilir. Eğer n tek ve $(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1) = (\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, 0) + (0, a-1) \in S$ ise, $(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, 0) \in S$

ve $\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4} \in S_1$ dir. Fakat (4.4)'den $\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}$, S_1 'in Frobenius elemanı olduğundan bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1) \notin S$ dir. n tek ise, $(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1)$, lexicographic sıralamaya göre S' 'de olmayan en büyük eleman olduğundan $F(S(n))_{\prec} = (\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1)$ dir. n çift ise, benzer şekilde $F(S(n))_{\prec} = (\frac{3n^3+9n^2+6n-4}{4}, a-1)$ olduğunu gösterilebilir. $\square$

4.2.2. Piramitsel sayısal semigrupları



Şekil 4.11. Piramitsel sayıları

Şekil 4.12'de üçüncü köşegen üzerindeki 1, 4, 10, 20, 35, ... sayıları piramitsel sayılardır. Geometrik olarak Şekil 4.11 ile temsil edilir. n -inci piramitsel sayı t_{en} ile gösterilir ve

$$t_{en} = C(n+2, 3)$$

ile hesaplanır, burada $C(n+2, 3)$, $n+2$ elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısıdır. Robles-Pérez ve Rosales (2018)'da bir üçgen sayısal semigrup tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Önerme 4.85. t_{en} , n -inci piramitsel sayı olmak üzere

$$S_n := \langle t_{en+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle = \langle t_{en}, t_{en+1}, t_{en+2}, \dots \rangle$$

ile tanımlanan S_n bir sayısal semigruptur.

İspat. Öncelikle S_n kümesini ele alalım. $d \in \mathbb{N}_0$, her $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $d \mid t_{e_n+k}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d \mid \left\{ t_{e_n} = C(n+2, 3) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \right\}, \\ d \mid \left\{ t_{e_{n+1}} = C(n+3, 3) = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6} \right\}, \\ d \mid \left\{ t_{e_{n+2}} = C(n+4, 3) = \frac{n^3 + 9n^2 + 26n + 24}{6} \right\}, \\ d \mid \left\{ t_{e_{n+3}} = C(n+5, 3) = \frac{n^3 + 12n^2 + 47n + 60}{6} \right\} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d \mid [t_{e_{n+1}} - t_{e_n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1], \\ d \mid [t_{e_{n+2}} - t_{e_{n+1}} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3], \\ d \mid [t_{e_{n+3}} - t_{e_{n+2}} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 6] \end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d \mid [(\frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 6) - (\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3) = n + 3], \\ d \mid [(\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3) - (\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1) = n + 2] \end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$d \mid [(n+3) - (n+2) = 1]$$

dir. $\text{obeb} \{t_{e_n}, t_{e_{n+1}}, t_{e_{n+2}}, t_{e_{n+3}}\} = 1$ ve $\text{obeb} \{t_{e_n}, t_{e_{n+1}}, t_{e_{n+2}}, \dots\} = 1$ dir. $\mathbb{N}_0 \setminus S_n$ sonlu ve $(S_n, +)$, $\mathbb{N}_0 \setminus S_n$ 'nin bir altmonoidi olduğundan, $(S_n, +)$ bir sayısal semigruptur. $\square$

Tanım 4.86. t_{e_n} , n -inci piramitsel sayı olmak üzere $S_n := \langle t_{e_{n+k}} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$

ye n -inci piramitsel semigroup denir.

Şekil 4.11'de gösterildiği gibi t_{e_n} , her kenarı n tane top içeren piramitteki top sayısıdır. Teorem 4.85'dan S_n bir sayısal semigrup ve Önerme 2.18'den her sayısal semigrubun $e(S_n) \leq m(S_n)$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $e(S_n) \leq m(S_n) = C(n+2, 3) = t_{e_n}$ dir.

Şimdi amacımız S_n 'nin üreteç kümesini bulmak ve $e(S_n)$ sayısını küçültmektir.

Önerme 4.87. $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. $t_{e_{2(n+r)}} = 4t_{e_{n+r}} + 4t_{e_{n+r-1}},$
2. $t_{e_{2(n+r)+1}} = 6t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r+1}} + t_{e_{n+r-1}} \text{ dir.}$

İspat. $t_{e_n} = C(n+2, 3)$ olduğundan

$$\begin{aligned} t_{e_{n+r}} &= C(n+r+2, 3) = \frac{(n+r)^3 + 3(n+r)^2 + 2(n+r)}{6} \\ t_{e_{n+r+1}} &= C(n+r+3, 3) = \frac{(n+r)^3 + 6(n+r)^2 + 11(n+r) + 6}{6} \\ &= t_{e_{n+r}} + \frac{3(n+r)^2 + 9(n+r) + 6}{6} \\ t_{e_{n+r-1}} &= C(n+r+1, 3) = \frac{(n+r)^3 - (n+r)}{6} \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} t_{e_{2(n+r)}} &= C(2(n+r)+2, 3) = \frac{8(n+r)^3 + 12(n+r)^2 + 4(n+r)}{6} \\ &= \frac{4[(n+r)^3 + 3(n+r)^2 + 2(n+r)]}{6} + 4 \frac{[(n+r)^3 - (n+r)]}{6} = 4t_{e_{n+r}} + 4t_{e_{n+r-1}} \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} t_{e_{2(n+r)+1}} &= C(2(n+r)+3, 3) = \frac{(2(n+r)+3) + (2(n+r)+2) + (2(n+r)+1)}{6} \\ &= \frac{4(n+r)^3 + 12(n+r)^2 + 8(n+r)}{6} + \frac{4(n+r)^3 + 12(n+r)^2 + 14(n+r) + 6}{6} \\ &= 4t_{e_{n+r}} + \frac{(n+r)^3 + 6(n+r)^2 + 11(n+r) + 6}{6} + \frac{3(n+r)^2 + 6(n+r) + 3(n+r)}{6} \\ &= 4t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r+1}} + \frac{2(n+r)^3 + 6(n+r)^2 + 4(n+r)}{6} + \frac{[(n+r)^3 - (n+r)]}{6} \\ &= 4t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r+1}} + 2t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r-1}} \\ &= 6t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r+1}} + t_{e_{n+r-1}} \end{aligned}$$

dir. □

Sonuç 4.88. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N} \cap (0, n)$ için $k = 2r$ veya $k = 2r + 1$ ise,

$$t_{e_{2n+k}} \in \langle t_{e_n}, t_{e_{n+1}}, \dots, t_{e_{2n}} \rangle$$

dir.

Önerme 4.89. n bir pozitif tamsayı ve S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda,

$$\{t_{e_k} : k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}\}$$

S_n 'nin bir üreteç sistemidir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için, $r \in \mathbb{N} \cap ((i-1)n, in)$ olsun. Her $k = 2r$ veya $k = 2r+1$ için i üzerinde tümevarım yöntemi kullanarak $t_{e_{2n+k}}$ 'nin, $\{t_{e_{n-1}}, t_{e_n}, \dots, t_{e_{2n}}\}$ nin bir lineer bileşimi olduğunu gösterelim. Sonuç 4.88'de $i = 1$ için iddiamızın doğru olduğunu gösterildi. Şimdi $i > 1$ ve $w \leq i$ için iddiamın doğru olduğunu kabul edelim ve $r \in \mathbb{N} \cap ((in, (i+1)n)$ seçelim. $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için $r = in + j$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} t_{e_{2n+k}} &= \begin{cases} 4t_{e_{n+r}} + 4t_{e_{n+r-1}} & ; k = 2r, r = in + j \\ 6t_{e_{n+r}} + t_{e_{n+r+1}} + t_{e_{n+r-1}} & ; k = 2r + 1, r = in + j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4t_{e_{n+in+j}} + 4t_{e_{n+in+j-1}} & ; k = 2r, r = in + j \\ 6t_{e_{n+in+j}} + t_{e_{n+in+j+1}} + t_{e_{n+in+j-1}} & ; k = 2r + 1, r = in + j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4t_{e_{(i+1)n+j}} + t_{e_{(i+1)n+j-1}} & ; k = 2r, r = in + j \\ 6t_{e_{(i+1)n+j}} + t_{e_{(i+1)n+j+1}} + t_{e_{(i+1)n+j-1}} & ; k = 2r + 1, r = in + j \end{cases} \end{aligned}$$

yazılabilir. $(i+1)n = 2n + (i-1)n$ yazıldığından ve $a \in \{j-1, j, j+1\}$ olmak üzere

$$t_{e_{(i+1)n+a}} = t_{e_{2n+(i-1)n+a}}$$

yazılabilir. Yani, $a \in \{j-1, j, j+1\}$ için $t_{e_{2n+k}}, t_{e_{2n+(i-1)n+a}}$ 'nin bir lineer bileşimi olarak yazılır

$$t_{e_{2n+k}} \in \langle t_{e_{2n+(i-1)n+j-1}}, t_{e_{2n+(i-1)n+j}}, t_{e_{2n+(i-1)n+j+1}} \rangle$$

Değer yandan, $j \leq n-1$ olduğundan, $j-1, j, j+1 \leq n$ ve

$$\begin{aligned} (i-1)n + j - 1 &\leq (i-1)n + n = in \\ (i-1)n + j &\leq (i-1)n + n = in \\ (i-1)n + j + 1 &\leq (i-1)n + n = in \end{aligned}$$

dir. in çift ise, $r = \frac{in}{2}$ alınır ve in tek ise, $r = \frac{in-1}{2}$ alınır, uygun $w < i$ için $r \in \mathbb{N} \cap ((w-1)n, wn)$ elde edilir. Tümevarım hipotezine göre $t_{e_{(i+1)n+a}} = t_{e_{2n+(i-1)n+a}}$ olan tüm piramitsel sayılar, $t_{e_n}, t_{e_n}, \dots, t_{e_{2n}}$ 'nin lineer bileşimi olarak yazılmış olur. $\square$

Sonuç 4.90. $n \in \mathbb{N}$ ve S_n , n 'ye göre bir sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $e(S_n) \leq n+1$ dir.

Önerme 4.91. $n > 2$ bir çift pozitif tamsayı olsun.

1. $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, t_{e_n} çift ve $t_{e_{n+1}}$ tektir.

2. $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $t_{e_n}, t_{e_{n+1}}, t_{e_{n+2}}$ çift sayılar ve $t_{e_{n+3}}$ bir tek sayıdır.

İspat. 1) $n \equiv 0 \pmod{4}$ olduğundan $n = 4\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $t_{e_n} = t_{e_{4\lambda}} = \frac{64\lambda^3 + 48\lambda^2 + 8\lambda}{6}$ dir. $\lambda = 1$ için, $t_{e_4} = \frac{64+48+8}{6} = 20$ çifttir. $\lambda = i$ için, $t_{e_{4i}}$ bir çift sayı olduğunu kabul edelim ve $\lambda = i + 1$ için $t_{e_{4(i+1)}}$ bir çift sayı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} t_{e_{4(i+1)}} &= \frac{64(i+1)^3 + 48(i+1)^2 + 8(i+1)}{6} = \frac{64i^3 + 48i^2 + 8i + 192i^2 + 288i + 120}{6} \\ &= t_{e_{4i}} + \frac{192i^2 + 288i + 120}{6} = \underbrace{t_{e_{4i}}}_{\text{çift}} + \underbrace{\frac{32i^2 + 48i + 20}{1}}_{\text{çift}} \end{aligned}$$

dir. $t_{e_{n+1}} = t_{e_{4\lambda+1}} = \frac{(4\lambda)^3 + 6(4\lambda)^2 + 11(4\lambda) + 6}{6} = \frac{64\lambda^3 + 96\lambda^2 + 44\lambda + 6}{6}$ dir. $\lambda = 1$ için, $t_{e_5} = \frac{64+96+44+6}{6} = 35$ tektir.

$\lambda = i$ için $t_{e_{4i+1}}$ bir tek sayı olduğunu kabul edelim ve $t_{e_{4(i+1)+1}}$ tek bir sayı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} t_{e_{4(i+1)+1}} &= \frac{64(i+1)^3 + 96(i+1)^2 + 44(i+1) + 6}{6} \\ &= \frac{64i^3 + 192i^2 + 192i + 64 + 96i^2 + 192i + 96 + 44i + 50}{6} \\ &= \frac{64i^3 + 96i^2 + 44i + 6}{6} + \frac{192i^2 + 384i + 204}{6} \\ &= \underbrace{t_{e_{4i+1}}}_{\text{tek}} + \underbrace{\frac{32i^2 + 64i + 34}{1}}_{\text{çift}} \end{aligned}$$

dir.

2) $n \equiv 2 \pmod{4}$ olduğundan, $n = 4\lambda + 2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{N}$ vardır.

$$t_{e_n} = t_{e_{4\lambda+2}} = \frac{(4\lambda+2)^3 + 3(4\lambda+2)^2 + 2(4\lambda+2)}{6} = \frac{64\lambda^3 + 144\lambda^2 + 104\lambda + 24}{6} \text{ dir.}$$

$\lambda = 1$ için $t_{e_6} = \frac{64+144+104+24}{6} = 56$ çifttir. $\lambda = i$ için $t_{e_{4i+2}}$ bir çift sayı olduğunu kabul edelim ve $t_{e_{4(i+1)+2}}$ bir çift sayı olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} t_{e_{4(i+1)+2}} &= \frac{64(i+1)^3 + 144(i+1)^2 + 104i + 24}{6} \\ &= \frac{64i^3 + 192i^2 + 192i + 64 + 144i^2 + 288i + 144 + 104i + 104 + 24}{6} \\ &= \frac{64i^3 + 144i^2 + 104i + 24}{6} + \frac{192i^2 + 480i + 312}{6} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{t_{e_{4i+2}}}_{\text{çift}} + \underbrace{32i^2 + 80i + 52}_{\text{çift}}$$

dir. $t_{e_{n+1}} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$ olduğundan,

$t_{e_{(4\lambda+2)+1}} = \frac{(4\lambda+2)^3+6(4\lambda+2)^2+11(4\lambda+2)+6}{6} = \frac{64\lambda^3+192\lambda^2+188\lambda+60}{6}$ dir. $\lambda = 1$ için $t_{e_7} = \frac{64+192+188+60}{6} = 84$ çifttir $\lambda = i$ için $t_{e_{(4i+2)+1}}$ bir çift sayı olduğunu kabul edelim ve $t_{e_{[4(i+1)+2]+1}}$ bir çift sayı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} t_{e_{[4(i+1)+2]+1}} &= \frac{64(i+1)^3+192(i+1)^2+188(i+1)+60}{6} \\ &= \frac{64i^3+192i^2+192i+64+192i^2+384i+192}{6} + \frac{188i+188+60}{6} \\ &= \frac{64i^3+192i^2+188i+60}{6} + \frac{192i^2+576i+444}{6} \\ &= \underbrace{t_{e_{(4i+2)+1}}}_{\text{çift}} + \underbrace{32i^2 + 96i + 74}_{\text{çift}} \end{aligned}$$

dir. $t_{e_{n+2}} = \frac{n^3+9n^2+26n+24}{6}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} t_{e_{(4\lambda+2)+2}} &= \frac{(4\lambda+2)^3 + 9(4\lambda+2)^2 + 26(4\lambda+2) + 24}{6} \\ &= \frac{64\lambda^3 + 240\lambda^2 + 192\lambda + 224}{6} \end{aligned}$$

dir. $\lambda = 1$ için $t_{e_8} = \frac{64+240+192+224}{6} = 120$ çifttir $\lambda = i$ için $t_{e_{(4i+2)+2}}$ çift olduğunu kabul edelim ve $t_{e_{[4(i+1)+2]+2}}$ çift olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned} t_{e_{[4(i+1)+2]+2}} &= \frac{64(i+1)^3+240(i+1)^2+192(i+1)+224}{6} \\ &= \frac{64i^3+192i^2+192i+64+240i^2+480i+240+192i+416}{6} \\ &= \underbrace{t_{e_{(4i+2)+2}}}_{\text{çift}} + \underbrace{32i^2 + 112i + 80}_{\text{çift}} \end{aligned}$$

dir. $t_{e_{n+3}} = \frac{n^3+12n^2+47n+60}{6}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} t_{e_{(4\lambda+2)+3}} &= \frac{(4\lambda+2)^3 + 12(4\lambda+2)^2 + 47(4\lambda+2) + 60}{6} \\ &= \frac{64\lambda^3 + 288\lambda^2 + 428\lambda + 162}{6} \end{aligned}$$

dir. $\lambda = 1$ için $t_9 = \frac{64+288+428+162}{6} = 157$ tektir. $\lambda = i$ için $t_{e_{[4i+2]+3}}$ tek olduğunu kabul edelim ve $t_{e_{[4(i+1)+2]+3}}$ tek olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} t_{e_{[4(i+1)+2]+3}} &= \frac{64(i+1)^3+289(i+1)^2+428(i+1)+162}{6} \\ &= \frac{64i^3+288i^2+428i+162}{6} + \frac{192i^2+768i+780}{6} \\ &= \underbrace{t_{e_{(4i+2)+3}}}_{\text{tek}} + \underbrace{32i^2+128i+130}_{\text{çift}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{tek}} \end{aligned}$$

dir. □

Önerme 4.92. $n > 3$ tek bir pozitif tamsayı olsun.

1. $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, t_{e_n} tek ve $t_{e_{n+1}}$ çifttir.
2. $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $t_{e_n}, t_{e_{n+1}}$ çift sayılar ve $t_{e_{n+2}}$ tek sayıdır.

İspat. Önerme 4.91'in ispatı gibi elde edilir. □

Örnek 4.93. 1. $S_1 = \langle t_{e_1}, t_{e_2}, \dots \rangle = \langle t_{e_1} \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{N}_0$ dir, $e(S_1) \leq 3$ tür.

2. $S_2 = \langle t_{e_2}, t_{e_3}, \dots \rangle = \langle t_{e_2}, t_{e_3}, t_{e_4}, t_{e_5} \rangle = \langle 4, 10, 20, 35 \rangle$ dir ve $e(S_2) \leq 2 + 2 = 4$ tür.

3. $S_3 = \langle t_{e_3}, t_{e_4}, \dots \rangle = \langle t_{e_3}, t_{e_4}, t_{e_5}, t_{e_6}, t_{e_7} \rangle = \langle 10, 20, 35, 56, 84 \rangle$ dür ve $e(S_3) \leq 3 + 2 = 5$ tir.

(2) ve (3)'te 20, 10.2 olduğundan $S_2 = \langle 4, 10, 35 \rangle$, $S_3 = \langle 10, 35, 56, 84 \rangle$ ve $e(S_2) = 3$, $e(S_3) = 4$ tür.

Önerme 4.94. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S_n indirgenemezdir.

İspat. Kanıt, indirgenemez sayısal semigrubun tanımından açıktır. □

Önerme 4.95. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $F(S_n)$ tek sayıdır.

İspat. Robles-Pérez ve Rosales (2018)'de Önerme 12'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(S_n) = \begin{cases} \left(\frac{n-3}{3} \right) t_{e_{n+1}} + nt_{e_{n+2}} + \left(\frac{n}{2} \right) t_{e_{n+3}} - t_{e_n} & ; n = 6k \\ (n-1)t_{e_{n+1}} + \left(\frac{n-1}{2} \right) t_{e_{n+2}} + \left(\frac{n-1}{3} \right) t_{e_{n+3}} - t_{e_n} & ; n = 6k + 1 \\ (n-1)t_{e_{n+1}} + \left(\frac{n-2}{3} \right) t_{e_{n+2}} + \frac{n}{2} t_{e_{n+3}} - t_{e_n} & ; n = 6k + 2 \\ \left(\frac{n-3}{3} \right) t_{e_{n+1}} + \left(\frac{n-1}{2} \right) t_{e_{n+2}} + (n+1)t_{e_{n+3}} - t_{e_n} & ; n = 6k + 3 \\ \left(\frac{n+2}{3} \right) t_{e_{n+2}} + \left(\frac{n+2}{2} \right) t_{e_{n+1}} + (n+2)t_{e_n} - t_{e_{n+3}} & ; n = 6k + 4 \\ (n+4)t_{e_{n+2}} + \left(\frac{n+1}{3} \right) t_{e_{n+1}} + \left(\frac{n+1}{2} \right) t_{e_n} - t_{e_{n+3}} & ; n = 6k + 5 \end{cases}$$

dir. Her $i = 0, 1, 2, 3$ için $t_{e_{n+i}} = \binom{n+i+2}{3}$ uygulanarak

$$F(S_n) = \begin{cases} \frac{11}{36}n^4 + \frac{5}{2}n^3 + \frac{265}{36}n^2 + \frac{43}{6}n - 1 & ; n = 6k \\ \frac{11}{36}n^4 + \frac{13}{9}n^3 + \frac{97}{36}n^2 - \frac{1}{9}n - \frac{16}{3} & ; n = 6k + 1 \\ \frac{11}{36}n^4 + \frac{37}{18}n^3 + \frac{169}{36}n^2 + \frac{41}{18}n - \frac{11}{3} & ; n = 6k + 2 \\ \frac{11}{36}n^4 + \frac{8}{3}n^3 + \frac{373}{36}n^2 + 17n + 8 & ; n = 6k + 3 \\ \frac{11}{36}n^4 + \frac{35}{18}n^3 + \frac{133}{36}n^2 - \frac{11}{18}n - \frac{19}{3} & ; n = 6k + 4 \\ \frac{11}{36}n^4 + \frac{23}{9}n^3 + \frac{325}{36}n^2 + \frac{124}{9}n + 6 & ; n = 6k + 5 \end{cases}$$

elde edilir. Şimdi $n = 6k$ için $F(S_n) = 396k^4 + 540k^3 + 265k^2 + 43k - 1$ olur, k çift ise $k = 2r$ olacak biçimde $r \in \mathbb{N}$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} F(S_n) &= 396(2r)^4 + 540(2r)^3 + 265(2r)^2 + 43(2r) - 1 \\ &= \underbrace{6336r^4 + 4320r^3 + 1060r^2 + 86r - 1}_{\text{tektir}} \end{aligned}$$

k çift ise $k = 2r$ olacak biçimde $r \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\begin{aligned} F(S_n) &= 396(2r+1)^4 + 540(2r+1)^3 + 265(2r+1)^2 + 43(2r+1) - 1 \\ &= \underbrace{6336r^4 + 16992r^3 + 17044r^2 + 7554r + 1243}_{\text{tektir}} \end{aligned}$$

Diğer durumlar için benzer şekilde ispat elde edilir. □

Sonuç 4.96. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S_n bir simetrik sayısal semigrubudur.

İspat. Önerme 4.94 ve Önerme 4.95'den elde edilir. $\square$

Sonuç 4.97. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, S_n 'nin cinsi

$$g(S_n) = \begin{cases} \frac{11}{72}n^4 + \frac{5}{4}n^3 + \frac{265}{72}n^2 + \frac{43}{12}n & ; n = 6k \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{13}{18}n^3 + \frac{97}{72}n^2 - \frac{1}{18}n - \frac{13}{6} & ; n = 6k + 1 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{37}{36}n^3 + \frac{169}{72}n^2 + \frac{41}{36}n - \frac{4}{3} & ; n = 6k + 2 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{4}{3}n^3 + \frac{373}{72}n^2 + \frac{17}{2}n + \frac{9}{2} & ; n = 6k + 3 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{35}{36}n^3 + \frac{133}{72}n^2 - \frac{11}{36}n - \frac{8}{3} & ; n = 6k + 4 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{23}{18}n^3 + \frac{325}{72}n^2 + \frac{62}{9}n + \frac{7}{2} & ; n = 6k + 5 \end{cases}$$

dir.

İspat. Önerme 4.95 ve Önerme 2.16'ten elde edilir. $\square$

Sonuç 4.98. Her $n \in \mathbb{N}$ için S_n bir piramitsel sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $PF(S_n) = \{F(S_n)\}$ ve $t(S_n) = 1$ dir.

İspat. Sonuç 4.96 ve Önerme 2.17'dan elde edilir. $\square$

Örnek 4.99. $S_8 = \langle t_{e8}, t_{e9}, t_{e10}, t_{e11} \rangle = \langle 120, 165, 220, 286 \rangle$ bir piramitsel sayısal semigruptur. $F(S_8) = 2619$ ve $g(S_8) = 1310$ dir. Ayrıca $PF(S_8) = \{F(S_8)\} = \{2619\}$ dur.

4.2.3. Üçgen sayısal semigrupların iki farklı genellemesi

Bu bölümde üçgen sayısal semigrupların iki farklı genellemesi tanımlanıp minimal üreteç sistemleri başta olmak üzere bazı özellikleri araştırılmıştır.

β -Pascal sayısal semigrupları:

Bu bölümde $\mathbb{N}_0$ üzerinde β -Pascal sayısal semigrupları tanımlanacak ve bunların minimal üreteç sistemleri gibi ilgili bazı özellikleri sunulacaktır.

Şekil 4.12'deki Pascal üçgenini ele alalım. Üçgenin sol kenarı yalnızca "1" sayısından oluşur.

- Birinci paralelin köşegendeki sayılar doğal sayılardır.

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & 1 & & & \\
& & & 1 & & 1 & & \\
& & 1 & & 2 & & 1 & \\
& 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
& 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
& 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Şekil 4.12. Pascal üçgeni

- Birinci köşegene paralel ikinci köşegendeki sayılar 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... olup bunlara üçgen sayılar (2–Pascal sayılar) denir.
- Üçüncü köşegendeki sayılar 1, 4, 10, 20, 35, ... olup bunlara piramitsel sayılar (3–Pascal sayıları) denir.

Tanım 4.100. Genel olarak, bir üçgenin sol kenarından β 'ninci köşegeninde görünen sayılara β -Pascal sayıları denir.

Pascal üçgenindeki köşegen sayı β ve bunun n 'inci terimi $p(\beta, n)$ olsun. Bu durumda her $\beta \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(\beta, n) = C(n + \beta - 1, \beta)$$

olduğu görülebilir.

Açıklama 4.101. $p(2, n) = C(n + 1, 2) = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$ ve $p(3, n) = C(n + 2, 3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = T_{e_n}$ dir. Binom katsayılarının tamsayı olduğuna dikkat edelim.

Tanım 4.102. $S(\beta, n) := \langle p(\beta, n + k) : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ tanımlayalım.

β üzerinde tümevarım kullanarak, herhangi bir $\beta \geq 2$ için $S(\beta, n)$ 'nin bir sayısal semigrup olduğunu kanıtlayacağız. Öncelikle $S(2, n)$ ve $S(3, n)$ 'nin sayısal semigruplar olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.103. $2 \leq \beta \in \mathbb{N}_0$ için $S(\beta, n)$ bir sayısal semigruptur.

İspat. $\beta = 2$ için Önerme 4.75 ve $\beta = 3$ için Önerme 4.85 den ispat elde edilir. İddia $\beta = r$ için doğru olduğunu varsayalım ve $\beta = r + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\beta = r$ için doğru olduğundan, her $k \in \mathbb{N}_0$ için $d \mid p(r, n + k)$ ise, $d = 1$ dir. Her $k \in \mathbb{N}_0$ için $d_1 \in \mathbb{N}$, $d_1 \mid p(r + 1, n + k)$ olsun . Bu durumda $d_1 = 1$ olduğunu gösterelim.

Her $f, t \in \mathbb{N}$ için kombinasyonların özelliklerinden biri :

$$C(f+1, t+1) - C(f, t+1) = C(f, t) \quad (4.5)$$

dir.

$$\begin{aligned} d_1 & \mid p(r+1, n) = C(n+r, r+1), \\ d_1 & \mid p(r+1, n+1) = C(n+r+1, r+1) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$d_1 \mid [C(n+r+1, r+1) - C(n+r, r+1)]$$

dir. Bu durumda, (4.5)'den,

$$d_1 \mid C(n+r, r) \quad (4.6)$$

elde edilir. $d_1 \mid p(r+1, n+1) = C(n+r+1, r+1)$ ve $d_1 \mid p(r+1, n+2) = C(n+r+2, r+1)$ olduğundan,

$$d_1 \mid [C(n+r+2, r+1) - C(n+r+1, r+1)]$$

dir. Bu durumda, (4.5)'den,

$$d_1 \mid C(n+r+1, r) \quad (4.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam ederek (4.6) ve (4.7) gibi $\beta = r$ durumundaki ilişkilere geri dönüyoruz. Bu nedenle $d_1 = 1$ dir. $\mathbb{N}_0 \setminus S(\beta, n)$ sonlu olduğundan ve $(S(\beta, n), +)$, $\mathbb{N}_0$ 'nin bir altmonoidi olduğundan, $S(\beta, n)$ bir sayısal semigruptur. $\square$

Tanım 4.104. $S(\beta, n)$ 'ye β -Pascal sayısal semigrup denir.

Tanım 4.105. $2 \leq \beta \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A(\beta, n) & : = \{p(\beta, n+k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \beta\}\}, \\ L(\beta, n) & : = \langle A(\beta, n) \rangle \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.103, Önerme 4.75 ve Önerme 4.85'dan elde edilir.

Sonuç 4.106. $L(\beta, n)$ bir sayısal semigruptur.

Tanım 4.107. $n \geq 2$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ öyle ki $obeb(a_1, \dots, a_n) = 1$

olsun. Her $i = 1, \dots, n$ için $d_i = \text{obeb}\{a_1, \dots, a_i\}$ olsun. Her $i = 2, \dots, n$ için $\frac{a_i}{d_i}$ negatif olmayan bir tamsayısı $\left\{\frac{a_1}{d_{i-1}}, \dots, \frac{a_{i-1}}{d_{i-1}}\right\}$ kümesinin bir lineer bileşimi ise, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ye teleskopik dizi denir ve $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 'ye teleskopik sayısal semigrup denir

Robles-Pérez ve Rosales (2018)'de Önerme 5'te (T_n, T_{n+1}, T_{n+2}) , (T_{n+2}, T_{n+1}, T_n) dizilerinin teleskopik olduğunu ve Önerme 10'da $(T_{e_n}, T_{e_{n+1}}, T_{e_{n+2}}, T_{e_{n+3}})$ dizisinin teleskopik ancak ve ancak $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $n \equiv r \pmod{6}$ olduğu gösterilmiştir.

Şimdi $\beta = 4$ durumunda teleskopik dizileri inceleyelim:

$k \in \mathbb{N}$ için $n = 24k$ olsun. Bu durumda,

$$p(4, n) = p(4, 24k) = C(24k + 3, 4) = 6k(1 + 24k)(1 + 12k)(1 + 8k)$$

$$p(4, n+1) = p(4, 24k+1) = C(24k+4, 4) = (1+24k)(1+12k)(1+8k)((1+6k)$$

$$p(4, n+2) = p(4, 24k+2) = C(24k+5, 4) = (1+12k)(1+8k)(1+6k)(5+24k)$$

$$p(4, n+3) = p(4, 24k+3) = C(24k+6, 4) = 3(1+8k)(1+6k)(5+24k)(1+4k)$$

$$p(4, n+4) = p(4, 24k+4) = C(24k+7, 4) = (1+6k)(5+24k)(1+4k)(7+24k)$$

$$p(4, n+5) = p(4, 24k+5) = C(24k+8, 4) = 2(5+24k)(1+4k)(7+24k)(1+3k)$$

dir.

$$n = 24k \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = (1+24k)(1+12k)(1+8k)$$

$$n = 24k+1 \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = (1+12k)(1+6k)(1+8k)$$

$$n = 24k+2 \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = (5+12k)(1+8k)(1+6k)$$

$$n = 24k+3 \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = (5+24k)(1+6k)(1+4k)$$

$$n = 24k+4 \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = (5+24k)(1+4k)(7+24k)$$

$$n = 24k+5 \text{ için: } \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1)\} = 2(1+4k)(1+3k)(7+24k)$$

dir.

$$n = 24k \text{ için: } d_1 = \text{obeb}\{p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2), p(4, n+3)\} = 1+8k$$

dir.

$$p(4, n+4) = (1+4k) \cdot \frac{p(4, n+2)}{d_1} + (2+4k) \cdot \frac{p(4, n+3)}{d_1}$$

olduğundan, $p(4, n+4), \left\{ \frac{p(4,n)}{d_1}, \frac{p(4,n+1)}{d_1}, \frac{p(4,n+2)}{d_1}, \frac{p(4,n+3)}{d_1} \right\}$ 'nin bir lineer bileşimidir. Benzer şekilde,

$$d_2 = \text{obeb} \{p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2)\} = (1+12k)(1+8k)$$

ve $\frac{p(4,n+3)}{1+8k} = 3(1+4k) \cdot \frac{p(4,n+2)}{1+8k}$ olduğundan, $\frac{p(4,n+3)}{1+8k}, \left\{ \frac{p(4,n)}{d_2}, \frac{p(4,n+1)}{d_2}, \frac{p(4,n+2)}{d_2} \right\}$ 'nin bir lineer bileşimidir.

$$d_3 = \text{obeb} \{p(4, n), p(4, n+1)\} = (1+24k)(1+12k)(1+8k)$$

ve $\frac{p(4,n+2)}{(1+12k)(1+8k)} = (5+24k) \cdot \frac{p(4,n+1)}{d_3}$ olduğundan, $\frac{p(4,n+2)}{(1+12k)(1+8k)}, \left\{ \frac{p(4,n)}{d_3}, \frac{p(4,n+1)}{d_3} \right\}$ 'nin bir lineer bileşimidir.

Yukarıdan, $(p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2), p(4, n+3), p(4, n+4))$ bir teleskopik dizisidir.

Benzer şekilde, $n = 24k+1, n = 24k+2, n = 24k+3, n = 24k+4$ için $(p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2), p(4, n+3), p(4, n+4))$ bir teleskopik dizisidir.

Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.108. $\langle p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2), p(4, n+3), p(4, n+4) \rangle$ bir teleskopik sayısal semigruptur.

Bilgisayarda yapılan hesaplamalar sonucunda aşağıdaki iddia ortaya çıkmıştır.

İddia 1. $(p(\beta, n+k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \beta\})$ dizisi teleskopik ancak ve ancak

$$r \in \{0, 1, 2, \dots, \beta\} \text{ için } n \equiv r \pmod{\beta!} \text{ dir.}$$

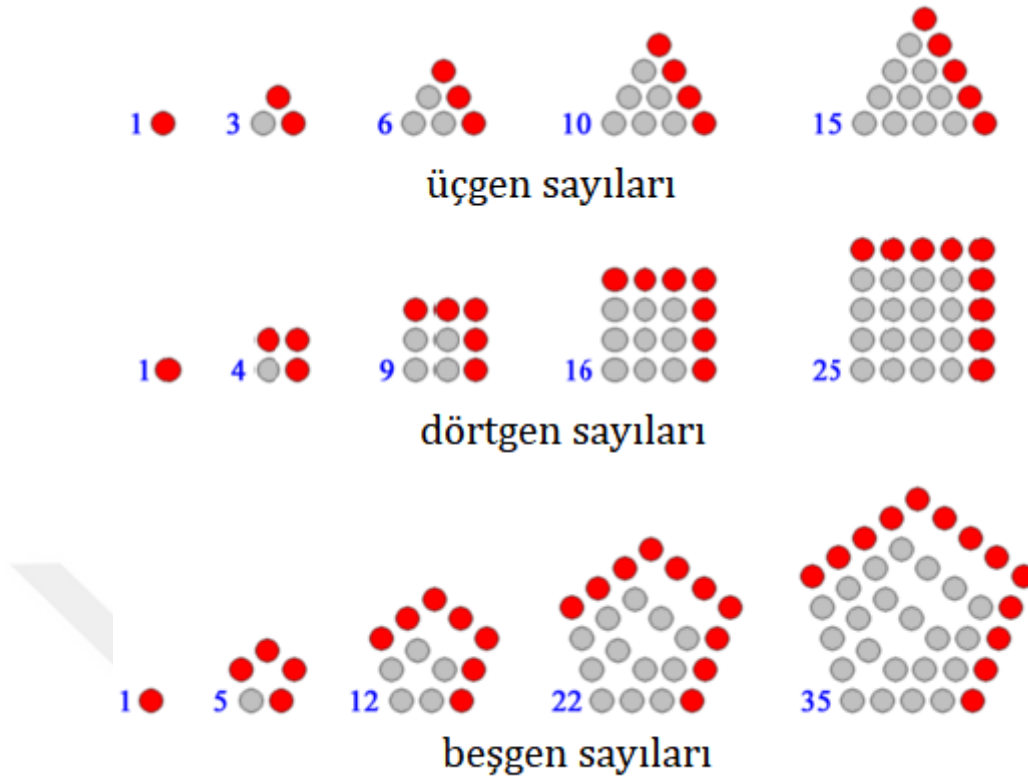
Çokgen (θ -gonal) sayısal semigruplar :

Bu bölümde $\mathbb{N}_0$ üzerinde çokgen sayısal semigrupları (θ -gonal) tanımlayacağız ve ilgili bazı özellikleri sunacağız.

Tanım 4.109. Çokgen sayı, düzenli bir çokgende düzenlenmiş noktalar olarak temsil edilen bir sayıdır.

Çokgen sayılar, Şekil 4.13'de gösterildiği gibi düzgün bir θ -gonal'deki noktaların sayısı sayılar olarak geometrik olarak tanımlanabilir. $\theta \geq 3$ için, bir θ -gonal sayı, grafikteki normal θ -gonallerden birinin içindeki toplam nokta sayısıdır. $q(\theta, n)$, n 'inci θ -gonal sayıyı gösterebilir. $q(\theta, 0) = 0$, $q(\theta, 1) = 1$ ve $q(\theta, 2) = \theta$ varsayalım. $\theta = 3$ için çokgen sayılara üçgen sayılar, $\theta = 4$ için kare sayılar, $\theta = 5$ için beşgen sayılar denir.

θ -gonal'ler ve buna bağlı olarak $q(\theta, n)$ 'nin değerleri aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Taban noktası adı verilen bir tepe noktası belirleyerek başlıyoruz. İlk n

Şekil 4.13. θ -gonal sayılarının temsili

düzenli θ -gonal zaten inşa edildiğini, böylece en dıştaki θ -gonal her bir kenarının artık uzunluk n noktalarına sahip olduğunu varsayalım. $(n + 1)$ inci θ -gonal oluşturmak için, önce taban noktasına bağlı iki kenarı bir nokta uzatırız ve sonra önceki kenarlara paralel kenarlar ekleriz, böylece her (dış) kenar artık $n + 1$ nokta olur. Tabloya eklediğimiz toplam nokta sayısı $1 + (k - 2)n$ dir. Böylece

$$q(\theta, n + 1) = q(\theta, n) + (k - 2)n + 1 \quad (4.8)$$

dir.

$n = 0$ için $q(\theta, 1) = 1 = q(\theta, 0) + (\theta - 2).0 + 1$ olduğundan, (4.8) geçerli olduğuna dikkat edelim. Bazı A , B ve C sabitleri için ikinci dereceden bir $q(\theta, n) = An^2 + Bn + C$ polinomuyla karşılanır. $q(\theta, 0) = 0$ olduğundan, $C = 0$ olmalıdır. $q(\theta, 1) = 1$ olduğundan, $1 = A + B$ dir. $(\theta, 2) = \theta$ olduğundan, $\theta = 4A + 2B$ dir.

$A + B = 1$, $4A + 2B = \theta$ lineer sistemi çözümü $A = \frac{2\theta-4}{4}$ ve $B = \frac{4-\theta}{2}$ dir. O halde, $\theta \in \mathbb{N}$ için n 'inci θ -gonal sayının formülü:

$$q(\theta, n) = \frac{(\theta - 2)n^2 - (\theta - 4)n}{2} = (\theta - 2)\frac{n(n - 1)}{2} + n \quad (4.9)$$

dir.

Önerme 4.110. $q(\theta, n)$ herhangi bir $\theta \in \mathbb{N}_0$ için pozitif bir tam sayıdır.

İspat. $n = 2r + 1$, $r \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} q(\theta, n) &= (\theta - 2) \frac{n(n-1)}{2} + n = (\theta - 2) \frac{(2r+1)(2r)}{2} + 2r + 1 \\ &= (\theta - 2).r.(2r + 1) + 2r + 1 \end{aligned}$$

dir. $\theta \geq 3$ ve $r = 0$ durumunda $q(\theta, n) = 1$ olduğundan $q(\theta, n) \in \mathbb{N}$ dir. $\square$

(4.9)'dan, n 'inci $\theta - gen$ sayı da aşağıdaki gibi üçgen sayılar T_n ile ilgilidir.

$$q(\theta, n) = (\theta - 2) \frac{n(n-1)}{2} + n = (\theta - 2)T_{n-1} + n = (\theta - 3)T_{n-1} + T_n \quad (4.10)$$

dir.

Önerme 4.111. $k \in \mathbb{N}_0$ için, $q(\theta, n + k + 1) - q(\theta, n + k) = (\theta - 2)(n + k) + 1$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned} q(\theta, n + k + 1) - q(\theta, n + k) &= (\theta - 3)T_{n+k} + T_{n+k+1} - (\theta - 3)T_{n+k-1} - T_{n+k} \\ &= (\theta - 4)T_{n+k} + T_{n+k+1} - (\theta - 3)T_{n+k-1} \\ &= (\theta - 4) \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2} \\ &\quad - (\theta - 3) \frac{(n+k-1)(n+k)}{2} \\ &= (\theta - 2)n + (\theta - 2)k + 1 \\ &= (\theta - 2)(n + k) + 1 \end{aligned}$$

dir. $\square$

Önerme 4.112. $n \in \mathbb{N}$ ve $3 \leq \theta \in \mathbb{N}$ için

$$obeb \{q(\theta, n), q(\theta, n + 1), \dots, q(\theta, n + \theta - 1)\} = 1$$

dir.

İspat. θ üzerinde tümevarım yöntemini kullanarak ispatı elde edelim.

$\theta = 3$ için $d = obeb \{q(3, n), q(3, n + 1), q(3, n + 2)\}$ olsun. Bu durumda, $d \mid q(3, n)$, $d \mid q(3, n + 1)$ ve $d \mid q(3, n + 2)$ dir. O halde, $d \mid [q(3, n + 1) - q(3, n)]$ ve $d \mid$

$[q(3, n+2) - q(3, n+1)]$ dir. Önerme 4.111'den,

$$\begin{aligned} q(3, n+1) - q(3, n) &= n+1 \\ q(3, n+2) - q(3, n+1) &= n+2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $d \mid [(n+2) - (n+1)]$ ve $d = 1$ dir. Şimdi iddianın $\theta = r$ için doğru olduğunu varsayalım. O halde,

$$\text{obeb} \{q(r, n), q(r, n+1), \dots, q(r, n+r-1)\} = 1$$

dir. $\theta = r+1$ için (4.10) ve Önerme 4.111'den,

$$\text{obeb} \{q(r+1, n), q(r+1, n+1), \dots, q(r+1, n+r)\} = 1$$

dir. □

Teorem 4.113. Her $\theta \in \mathbb{N}$ için, $S'(\theta, n) = \langle q(\theta, n+k) : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir sayısal semigruptur.

İspat. Toplama işlemine göre, $S'(\theta, n)$, $\mathbb{N}_0$ 'nin bir altmonoididir ve $\mathbb{N}_0 \setminus S'(\theta, n)$ sonludur. Önerme 4.112'den, $S'(\theta, n)$ üreteç kümesinin elemanlarının en büyük ortak böleni 1'dir. Dolayısıyla, $S'(\theta, n)$ bir sayısal semigruptur. □

Tanım 4.114. $S'(\theta, n) \subset \mathbb{N}_0$ kümesi θ -gonal sayısal semigrup olarak tanımlanır.

Örnek 4.115. $n \in \mathbb{N}_0$ için $T_n := \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ n -inci üçgen sayı olmak üzere $S'(3, n) := \langle T_{n+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir üçgen sayısal semigruptur. Örneğin $S'(3, 3) := \langle T_{3+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle = \langle T_3, T_4, T_5, \dots \rangle$ dir.

Sayısal semigrupların özelliklerinden $e(S'(3, n)) \leq m(S'(3, n)) = T_n = \frac{n^2+n}{2}$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi, amacımız $e(S'(3, n))$ 'nin sınırını küçültmektir.

Önerme 4.116. $\theta \geq 3$ ve pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda,

1. $q(\theta, 2(n+r)) = 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r-1) + (\theta-3)[2(n+r)+1]$,
 2. $q(\theta, 2(n+r)+1) = 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r+1) + (2\theta-6)(n+r)$
- dir.

İspat. $q(\theta, n) = \frac{n((\theta-2)n-(\theta-4))}{2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
q(\theta, 2(n+r)) &= \frac{2(n+r)[(\theta-2)(2(n+r))-(\theta-4)]}{2} \\
&= \frac{4(n+r)^2(\theta-2)-2(\theta-4)(n+r)}{2} \\
&= \frac{3(\theta-2)(n+r)^2+(\theta-2)(n+r)^2-3(\theta-4)(n+r)+(\theta-4)(n+r)}{2} \\
&= 3q(\theta, (n+r)) + \frac{(\theta-2)(n+r)^2+(\theta-4)(n+r)}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(\theta, n+r-1) &= \frac{(n+r-1)[(\theta-2)(n+r-1)-(\theta-4)]}{2} \\
&= \frac{(n+r)[(\theta-2)(n+r)+\theta-4]}{2} + \frac{(n+r)(-4\theta+12)+2\theta+6}{2} \\
&\quad + \frac{(n+r)[(\theta-2)(n+r)+\theta-4]}{2} + \frac{(2\theta-6)(-2(n+r)+1)}{2} \\
&= \frac{(n+r)[(\theta-2)(n+r)+\theta-4]}{2} - (\theta-3)(2(n+r)-1)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\frac{(\theta-2)(n+r)^2+(\theta-4)(n+r)}{2} = q(\theta, n+r-1) + (\theta-3)(2(n+r)-1)$ dir.

Dolayısıyla, $q(\theta, 2(n+r)) = 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r-1) + (\theta-3)[2(n+r)+1]$ dir.

$$\begin{aligned}
q(\theta, 2(n+r)+1) &= \frac{2((n+r)+1)[(\theta-2)(2(n+r)+1)-(\theta-4)]}{2} \\
&= \frac{2(n+r)[(\theta-2)(2(n+r))-(\theta-4)]}{2} + \frac{4(\theta-2)(n+r)+2}{2} \\
&= q(\theta, 2(n+r)) + 2(\theta-2)(n+r) + 1 \\
&= 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r-1) \\
&\quad + (\theta-3)(2(n+r)-1) + 2(\theta-2)(n+r) + 1 \\
&= 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r-1) \\
&\quad + 2(n+r)(2\theta-5) - \theta + 4 \\
&= 3q(\theta, (n+r)) + \frac{(\theta-2)(n+r)^2+(5\theta-12)(n+r)+2}{2}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
q(\theta, n+r+1) &= \frac{(n+r+1)[(\theta-2)(n+r+1)-(\theta-4)]}{2} \\
&= \frac{(n+r)[(\theta-2)(n+r)+2]}{2} + \frac{(\theta-2)(n+r)+2}{2} \\
&\quad + \frac{(\theta-2)(n+r)^2}{2} + \frac{\theta(n+r)+2}{2}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$q(\theta, 2(n+r) + 1) = 3q(\theta, (n+r)) + q(\theta, n+r+1) + (2\theta - 6)(n+r) \text{ dir.} \quad \square$$

Önerme 4.117. n bir pozitif tamsayı ve $S(n)$, n 'ye göre üreteç kümesi $G(n)$ olan bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $G(n) \subseteq \{T_k : k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}\}$ dir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $r \in \mathbb{N} \cap [i, in[$ olsun. Tümevarım yöntemi kullanarak $k = 2r$ veya $k = 2r + 1$ için T_{2n+k} , $[T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n}]$ 'nin lineer bileşim olduğunu gösterelim. Önce $i = 1$ durumunu inceleyelim. Önerme 4.116'dan $\theta = 3$ olduğu için $T_{2(n+r)} = 3T_{n+r} + T_{(n+r)-1}$ ve $T_{2(n+r)+1} = 3T_{n+r} + T_{(n+r)+1}$ dir. Bu durumda $r \in \mathbb{N} \cap [1, n[$, $k = 2r$ veya $k = 2r + 1$ için T_{2n+k} , $[T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n}]$ 'nin lineer bileşimidir.

Şimdi $i \geq 2$ ve her pozitif tamsayı w öyleki $w \leq i$ için varsayımız doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $r \in \mathbb{N} \cap [i, in[$, $r = in + j$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için

$$T_{2n+k} = \begin{cases} 3T_{(i+1)n+j} + T_{(i+1)n+j-1}; & k = 2r \\ 3T_{(i+1)n+j} + T_{(i+1)n+j+1}; & k = 2r + 1 \end{cases}$$

olacak şekilde yazılabilir. $(i+1)n = 2n + (i-1)n$ yazılışından ve $a \in \{j-1, j, j+1\}$ için $T_{(i+1)n+a} = T_{2n+(i-1)n+a}$ yazılabilir. Bu durumda, T_{2n+k} , $T_{2n+(i-1)n}$ 'nin lineer bileşimi olarak yazılır. $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ olduğu için $j-1, j, j+1 \leq n$ ve $(i-1)n+a \leq (i-1)n+n = in$ dir. in çift ise $in = 2r$ ve in tek ise $in = 2r+1$ olacak biçimde yazılabilir. İki durumda $w < i$ için $r \in \mathbb{N} \cap [w, wn[$ dir. O halde $T_{(i+1)n+a} = T_{2n+(i-1)n+a}$ bütün üçgen sayıları $T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n}$ 'nin lineer bileşimidir. $\square$

Sonuç 4.118. $n \in \mathbb{N}$ ve $S(n)$, n 'ye göre bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $e(S(n)) \leq n+1$ dir.

Örnek 4.119. $S(3) := \langle T_{3+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle = \langle T_3, T_4, T_5, T_6 \rangle$ ve $e(S(3)) \leq 4$ tür.

Sonuç 4.120. Her $4 \leq \theta \in \mathbb{N}$ için $S'(\theta, n)$, θ -gonal sayısal semigrubu üreteç kümesi $\{T_k : k \in \{n-1, n+1, \dots, 2n+1\}\}$ olan sayısal semigrubu ile aynıdır ve $e(S'(\theta, n)) \leq n+3$ tür.

İspat. Her $4 \leq \theta \in \mathbb{N}$ için $q(\theta, n) = (\theta-3)T_{n-1} + T_n$ olduğundan ispat açıktır. $\square$

Örnek 4.121. $\theta = 4$ ve $n = 3$ için

$$q(4, 3) = T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$$

$$q(4, 4) = T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$$

$$q(4, 5) = T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25 = 5^2$$

$$q(4, 6) = T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = 6^2$$

$$q(4, 7) = T_6 + T_7 = 21 + 28 = 49 = 7^2$$

dır. Dolayısıyla, $S'(4, 3)$ ün $\{T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ üçgen sayıları cinsinden yazılabilir ve $e(S'(4, 3)) \leq 6$ dır.

Örnek 4.122. $\theta = 5$ ve $n = 4$ için $q(5, n) = (\theta - 3)T_{n-1} + T_n = 2T_{n-1} + T_n$ olduğundan,

$$q(5, 4) = 2T_3 + T_4 = 22,$$

$$q(5, 7) = 2T_6 + T_7 = 70,$$

$$q(5, 5) = 2T_4 + T_5 = 35,$$

$$q(5, 8) = 2T_7 + T_8 = 92,$$

$$q(5, 6) = 2T_5 + T_6 = 51,$$

$$q(5, 9) = 2T_8 + T_9 = 116.$$

dir. Dolayısıyla, $S'(5, 4)$ ün $\{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9\}$ üçgen sayıları cinsinden yazılabilir ve $e(S'(5, 4)) \leq 7$ dir.

Aşağıdaki Sonuç 4.112'den elde edilir.

Sonuç 4.123. $n \in \mathbb{N}$ ve $3 \leq \theta \in \mathbb{N}$ için,

$$B(\theta, n) = \langle q(\theta, n + k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \theta - 1\} \rangle$$

bir sayısal semigruptur.

Teorem 4.124. $\theta \geq 3$ için $n \geq 3\theta - 3$ ise, $\{q(\theta, n + k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \theta - 1\}\}$, $B(\theta, n)$ 'nin minimal üreteç sistemidir.

İspat. θ ve k üzerinde tümevarım kullanarak, her $\theta \geq 3$ ve $n \geq 3\theta - 3$ için $B(\theta, n)$ 'nin son elemanının ilk elemanının iki katından küçük olduğunu göstereceğiz. Başka bir deyişle, her $\theta \geq 3$ ve $n \geq 3\theta - 3$ için şunu göstereceğiz;

$$2q(\theta, 3\theta + k - 3) - q(\theta, 3\theta + k - 4) \geq 0, k \in \{0, 1, 2, \dots, \theta - 1\}.$$

İlk olarak, k üzerinde tümevarım kullanılarak, eğer $k = 0$ ise,

$$2q(\theta, 3\theta - 3) - q(\theta, 4\theta - 4) = (\theta - 1)(\theta^2 - 4\theta + 6) \geq 0$$

dir.

Şimdi iddianın herhangi bir $k \neq 0$ için doğru olduğunu varsayalım ve bunun

$k + 1$ için de doğru olduğunu kanıtlayalım. Yani,

$$2q(\theta, 3\theta - 2 + k) - q(\theta, 4\theta - 3 + k) \geq 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Varsayımdan, $2q(\theta, 3\theta - 3 + k) - q(\theta, 4\theta - 4 + k) \geq 0$ dir.

$$T_1 = (3\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10)$$

$$T_2 = (4\theta - 4 + k)(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12)$$

olmak üzere $T_1 \geq T_2$ dir.

$$\begin{aligned} T_1 &= (3\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \\ &= (3\theta - 2 + k)(\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \\ &\quad - (\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \\ &= (3\theta - 2 + k)(\theta k - 2k - 9\theta + 3\theta^2 + 8) \\ &\quad + (3\theta - 2 + k)(-\theta + 2) - (\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}(4\theta - 4 + k)(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12) \\ &= \frac{1}{2}(4\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12) \\ &= \frac{1}{2}(4\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 12\theta + 4\theta^2 + 10) \\ &\quad + \frac{1}{2}(4\theta - 3 + k)(-\theta + 2) - \frac{1}{2}(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12) \end{aligned}$$

$T_1 \geq T_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &(3\theta - 2 + k)(\theta k - 2k - 9\theta + 3\theta^2 + 8) + (3\theta - 2 + k)(-\theta + 2) - \\ &(\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \\ &\geq \frac{1}{2}(4\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 12\theta + 4\theta^2 + 10) + \\ &\frac{1}{2}(4\theta - 3 + k)(-\theta + 2) - \frac{1}{2}(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$(3\theta - 3 + k)(\theta k - 2k - 10\theta + 3\theta^2 + 10) \geq \frac{1}{2}(4\theta - 4 + k)(\theta k - 2k - 13\theta + 4\theta^2 + 12)$$

dir. O halde, $2q(\theta, 3\theta - 2 + k) - q(\theta, 4\theta - 3 + k) \geq 0$ dir.

İkinci olarak, θ üzerinde tümevarımı kullanalım. hipotezin $n = 6$ için doğru olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi iddianın $\theta = t$ için doğru olduğunu varsayalım

ve $\theta = t + 1$ için de doğru olduğunu kanıtlayalım. Başka bir deyişle, eğer $k \in \{0, 1, 2, \dots, t - 1\}$ için

$$2q(t, 3t + k - 3) - q(t, 3t + k - 4) \geq 0$$

doğru ise, $k \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$ için

$$2q(t + 1, 3(t + 1) + k - 3) - q(t + 1, 3(t + 1) + k - 4) \geq 0$$

yani, $k \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$ için

$$2q(t + 1, 3t + k) - q(t + 1, 3t + k - 1) \geq 0$$

olduğunu göstermemiz lazım. $2q(t, 3t + k - 3) - q(t, 3t + k - 4) \geq 0$ olduğundan,

$$T_1 = 2q(t, 3t + k - 3) = (3t + k - 3)(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t)$$

$$T_1 = q(t, 3t + k - 4) = \frac{1}{2}(3t + k - 4)(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t)$$

olmak üzere $T_1 \geq T_2$ dir.

$$\begin{aligned} T_1 &= (3t + k - 3)(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t) \\ &= (3t + k)(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t) - 3(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t) \\ &= (3t + k)(tk - k - k + 3t^2 + 2 + 7 - 4t - 6t) \\ &\quad - 3(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t) \\ &= (3t + k)(tk - k - 4t + 3t^2 + 2) \\ &\quad + (3t + k)(-k + 7 - 6t) - 3(tk - 2k + 3t^2 + 9 - 10t) \\ &= (3t + k)(tk - k - 4t + 3t^2 + 2) \\ &\quad - 12tk + 51t - 27t^2 - k^2 + 13k - 27 \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}(3t + k - 4)(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t) \\ &= \frac{1}{2}(3t + k - 1 - 3)(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t) \\ &= \frac{1}{2}(3t + k - 1)(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t) \\ &\quad - \frac{3}{2}(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t) \\ &= \frac{1}{2}(3t + k - 1)(tk - k - k + 3t^2 + 4 + 8 - 5t - 6t) \\ &\quad - \frac{3}{2}(tk - 2k + 3t^2 + 12 - 11t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (3t + k - 1) (tk - k + 3t^2 + 4 - 5t) \\
&\quad - 6tk + \frac{63}{2}t - \frac{27}{2}t^2 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{15}{2}k - 22
\end{aligned}$$

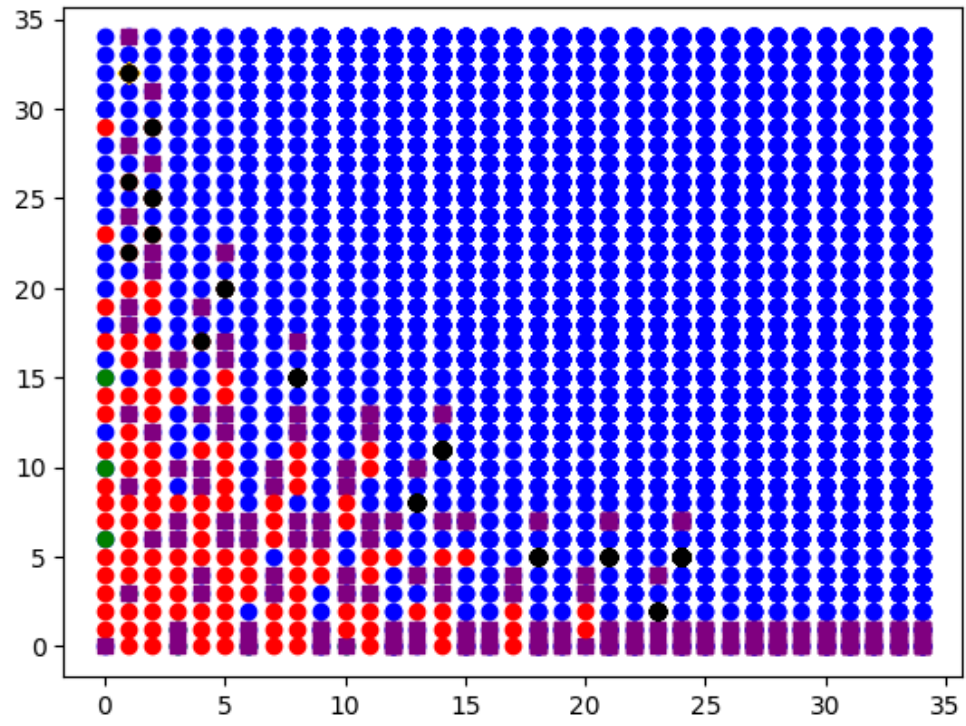
$T_1 \geq T_2$ olduğundan,

$$(3t + k) (tk - k - 4t + 3t^2 + 2) - \frac{1}{2} (3t + k - 1) (tk - k + 3t^2 + 4 - 5t) \geq 0$$

dir. □

Tanım 4.125. $S = \langle A \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{N}_0^d$, A kümesi tarafından üretilen bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. Eğer her $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $i \in \mathbb{N}$ için $a_i^{(j)} \neq 1$ ve $a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$ tarafından üretilen sayısal semigrup bir $\theta - gen$ sayısal semigrup ise, S 'ye bir genelleştirilmiş $\theta - gen$ sayısal semigrup denir.

Örnek 4.126. $S \subset \mathbb{N}_0^2$, $A = \{(3, 0), (6, 0), (10, 0), (0, 6), (0, 10), (0, 15), (1, 3), (3, 1)\}$ tarafından üretilen bir genelleştirilmiş sayısal semigrup olsun. 1 ve 0 dan farklı birinci bileşenleri $a_1^{(1)} = 3, a_2^{(1)} = 6, a_3^{(1)} = 10$ tarafından $\mathbb{N}_0$ de üretilen sayısal semigrup üçgen sayısal semigrup ve ikinci bileşenleri $a_1^{(2)} = 6, a_2^{(2)} = 10, a_3^{(2)} = 15$ tarafından $\mathbb{N}_0$ de üretilen sayısal semigrup üçgen sayısal semigruptur. Dolayısıyla $S \subset \mathbb{N}_0^2$ bir genelleştirilmiş çokgen sayısal semigruptur. Şekil 4.14'den $S \subset \mathbb{N}_0^2$ bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrup değildir.



Şekil 4.14. Örnek 4.126'daki verilen genelleştirilmiş çokgen sayısal semigrup

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş sayısal semigrupların yeni sınıfları tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Özellikle, genelleştirilmiş mükemmel, aralıklı (sparse), yoğun ve tam yoğun sayısal semigruplar üzerinde durulmuştur. Genelleştirilmiş sayısal semigrupların aritmetik genişlemeler kümesinin tanımı ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, üçgen sayısal semigrupların iki farklı genellemesi tanımlanmış ve bu genellemelerin minimal üreteç sistemi ve Frobenius elemanı gibi önemli kavramlar üzerinde durulmuştur. Bu kavramlar, sayısal semigrup teorisindeki önemli yapıları ve özellikleri anlamak için kullanılan temel araçlardır. Elde edilen sonuçlar, sayısal semigrup teorisi ve genelleştirilmiş sayısal semigrup teorisi arasındaki derin bağlantıları ortaya çıkarmaktadır. Ayrıca, bu sonuçların pratik uygulamalar için önemli bir temel oluşturduğunu düşüncesindeyiz.

$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup, $d \geq 1$ ve $h \in H(S)$ olsun. Eğer her $j \in \{1, \dots, d\}$ için $\{h - e_j, h + e_j\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$ ise h , S 'nin bir izole boşluğudur. S nin hiç izole boşluğu yoksa S , bir genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigruptur. Gevşetilmiş tek terimli sıralamaya göre $F(S) \prec$ Frobenius elemanının S 'nin bir izole boşluğu olması için gerekli ve yeterli koşul $\{F(S) \prec -e_j : 1 \leq j \leq d\} \cap \mathbb{N}_0^d \subset S$ dir.

$S \subseteq \mathbb{N}_0^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $h = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$, S 'nin bir boşluğu olsun. Her $k \leq d$ için

$$I_k = \left\{ x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) \in \mathbb{N}_0^{d-1} : \begin{array}{l} \text{her } z \in S_k \text{ için} \\ \tilde{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, z, x^{(k)}, \dots, x^{(d-1)}) \in S \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanan küme bir izole noktanın belirlenmesinde önemli rol oynar, burada S_k , S nin minimal üreteç sisteminin elemanlarının k -ıncı bileşenleri ile üretilen sayısal semigruptur. Önemli sonuçlardan bir kaçı:

1. $I_k, \mathbb{N}_0^{d-1}$ üzerinde bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.
2. h , S 'nin bir izole boşluğu olması için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $1 \leq k \leq d$ vardır:
 - (a) $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \notin I_k$.
 - (b) $\{x^{(k)}e_k, (x^{(k)} - 2)e_k\} \subset S$.
 - (c) $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})$, S nin izole boşluğudur.
3. h , S 'nin bir izole boşluğu olması için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $1 \leq k \leq d$ vardır:
 - (a) $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)}) \notin I_k$.
 - (b) $\{x^{(k)}e_k, (x^{(k)} - 2)e_k\} \subset S$.
 - (c) $(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, x^{(k+1)}, \dots, x^{(d)})$, S nin izole boşluğudur.

Çalışmamızda, genelleştirilmiş semigrup ailelerinin bazı sınıfları ayrıntılı incelenmiştir. Bu sınıflardan bir kaçış aşağıda belirtilmiştir:

1. $a, b \in \mathbb{N}$, a tek ve $b \geq 2$ için $S = \langle (a, 0), (1, b), (0, 1), (2, 0) \rangle$ genelleştirilmiş sayısal semigrupları.
2. $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ için $S = \langle (a, 0), (a + 1, 0), (0, 1), (1, b) \rangle$ genelleştirilmiş sayısal semigrupları.
3. $f \in \mathbb{N}_0^d$ için $S = (\mathbb{N}_0^d \setminus \pi(f)) \cup \{0\}$ sıralı genelleştirilmiş sayısal semigrupları.
4. $a \in \mathbb{N}$ için a -semplektik genelleştirilmiş sayısal semigrupları.

Söz konusu olan bu genelleştirilmiş semigrupların her birinin mükemmel olduğu görülmüştür. Temel ve önemli kavramlar olan boşluklar kümesi, Frobenius elemanı, cinsi, Apéry kümesi ve pseudo-Frobenius elemanların kümesi gibi hesaplama for-mülleri oluşturulmuştur.

Her genelleştirilmiş mükemmel sayısal semigrubun bir genelleştirilmiş ara-lıklı sayısal semigrup olduğu görülmüştür. Bir genelleştirilmiş sayısal semigrup S nin bileşen semigrupları mükemmel olmasa da mükemmel olabileceği gösterilmiştir. $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}_0^d$ iki genelleştirilmiş sayısal semigrup ise, $S_1 \cap S_2$ bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

Genelleştirilmiş sayısal semigrubun aritmetik genişlemeler kümesi incelen-miştir. S bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ ise, $\frac{S}{\delta} := \{x \in \mathbb{N}_0^d : \delta x \in S\}$ bir genelleştirilmiş sayısal semigruptur.

$T, S \subset \mathbb{N}^d$ bir genelleştirilmiş sayısal semigrup ve $S \subseteq T$ olmak üzere T, S 'nin bir aritmetik genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul $T = \frac{S}{\delta_1} \cap \frac{S}{\delta_2} \cap \dots \cap \frac{S}{\delta_d}$ olacak şekilde $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_d\} \subseteq \mathbb{N}^d \setminus S$ olmasıdır.

Ayrıca, tez çalışmasında klasik sayısal semigrup ailelerine katılacak yeni aile-ler tanıtılmış ve bazı özellikleri ortaya konulmuştur.

1. $S(n) := \langle T_{n+k} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir sayısal semigruptur ve üçgen sayısal semigrup olarak adlandırılır, burada n bir pozitif tamsayıdır. $S(n)$ nin cinsi ve üreteç kümesi incelenmiştir.
2. $S_n := \langle t_{e_{n+k}} : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir sayısal semigruptur ve n -inci pramitsel sayısal se-migrup olarak adlandırılmıştır, burada n bir pozitif tamsayıdır. S_n nin bir üreteç sitemi $\{t_{e_k} : k \in \{n, n + 1, \dots, 2n\}\}$ S_n 'nin bir üreteç sistemidir. S_n 'nin cinsi

$$g(S_n) = \begin{cases} \frac{11}{72}n^4 + \frac{5}{4}n^3 + \frac{265}{72}n^2 + \frac{43}{12}n & ; n = 6k \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{13}{18}n^3 + \frac{97}{72}n^2 - \frac{1}{18}n - \frac{13}{6} & ; n = 6k + 1 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{37}{36}n^3 + \frac{169}{72}n^2 + \frac{41}{36}n - \frac{4}{3} & ; n = 6k + 2 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{4}{3}n^3 + \frac{373}{72}n^2 + \frac{17}{2}n + \frac{9}{2} & ; n = 6k + 3 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{35}{36}n^3 + \frac{133}{72}n^2 - \frac{11}{36}n - \frac{8}{3} & ; n = 6k + 4 \\ \frac{11}{72}n^4 + \frac{23}{18}n^3 + \frac{325}{72}n^2 + \frac{62}{9}n + \frac{7}{2} & ; n = 6k + 5 \end{cases}$$

dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $S(n)$ üçgen sayısal semigrupları ve S_n pramitsel sayısal semigrupları indirgenemez ve simetriktir, $e(S(n)) \leq n + 1$ dir.

3. $S_1 = \langle T_n, T_{n+1}, T_{n+2} \rangle$ bir üçgen sayısal semigrup olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{N}$ ve $\prec$ lexicographic sıralama ise, $S = \langle (T_n, 0), (T_{n+1}, 0), (T_{n+2}, 0), (0, 1), (1, a) \rangle$ genelleştirilmiş sayısal semigrubun Frobenius elemanı

$$F(S)_{\prec} = \begin{cases} \left(\frac{3n^3+6n^2-3n-10}{4}, a-1 \right), & n \text{ tek} \\ \left(\frac{3n^3+9n^2+6n-4}{4}, a-1 \right), & n \text{ çift} \end{cases}$$

dir.

Üçgen sayısal semigrupların iki genellemesi olan n-inci β -Pascal sayısal semigrupları $S(\beta, n)$ ve θ -gonal sayısal semigrupları $S'(\theta, n)$ tanıtılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. $2 \leq \beta \in \mathbb{N}_0$ için $S(\beta, n) := \langle p(\beta, n+k) : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir sayısal semigruptur, burada $p(\beta, n) = C(n + \beta - 1, \beta)$ binom katsayısıdır.
2. $3 \leq \theta \in \mathbb{N}_0$ için $S'(\theta, n) := \langle q(\theta, n+k) : k \in \mathbb{N}_0 \rangle$ bir sayısal semigruptur, burada $q(\theta, n) = \frac{(\theta-2)n^2 - (\theta-4)n}{2}$ dir.
3. $\langle p(4, n), p(4, n+1), p(4, n+2), p(4, n+3), p(4, n+4) \rangle$ bir teleskopik sayısal semigruptur.
4. $n \in \mathbb{N}$ ve $3 \leq \theta \in \mathbb{N}_0$ için, $B(\theta, n) = \langle q(\theta, n+k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \theta-1\} \rangle$ bir sayısal semigruptur ve $\{q(\theta, n+k) : k \in \{0, 1, 2, \dots, \theta-1\}\}$, $B(\theta, n)$ 'nin bir minimal üreteç sistemidir.

6. KAYNAKLAR

- Beelen, P. and Tutaş, N. 2006. A generalization of the Weierstrass semigroup. *Journal of pure and applied algebra*, 207(2):243–260.
- Cisto, C. 2020. *Generalized numerical semigroups*. PhD thesis, Phd thesis, University of Catania, partner institution University of Messina.
- Failla, G., Peterson, C. and Utano, R. 2016. Algorithms and basic asymptotics for generalized numerical semigroups in $\mathbb{N}^d$. In *Semigroup Forum*, 92, 460–473 pp. Springer.
- Frias, M. Á. M. and Rosales, J. C. 2019. Perfect numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3):1742–1754.
- J Carlos, R., MB, B. and MC, F. 2021. Dense numerical semigroups. *Semigroup Forum-Springer*.
- Kim, S. J. 1994. On the index of the Weierstrass semigroup of a pair of points on a curve. *Archiv der Mathematik*, 62(1):73–82.
- Matthews, G. L. 2003. The Weierstrass semigroup of an m-tuple of collinear points on a Hermitian curve. In *International Conference on Finite Fields and Applications*, 12–24 pp. Springer.
- Matthews, G. L. 2004. Codes from the Suzuki function field. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(12):3298–3302.
- Moreno-Frias, M. A. and Rosales, J. C. 2020. Perfect numerical semigroups with embedding dimension three. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 97(1–2):77–84.
- Ojeda, I. and Rosales, J. C. 2020. The arithmetic extensions of a numerical semigroup. *Communications in Algebra*, 48(9):3707–3715.
- Robles-Pérez, A. M. and Rosales, J. C. 2018. The Frobenius number for sequences of triangular and tetrahedral numbers. *Journal of Number Theory*, 186:473–492.
- Rosales, J. and García-Sánchez, P. A. 2009. *Numerical Semigroups*, Springer New York.
- Smith, H. J. 2022. On isolated gaps in numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(1):123–129.
- Sylvester, J. J. et al. 1884. Mathematical questions with their solutions. *Educational times*, 41(21):171–178.

ÖZGEÇMİŞ

Mohammad ZMMO

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora: 2018-2024	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans: 2014-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans: 2006-2010	Tishreen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Suriye

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi: Tishreen Üniversitesi
2010-2011 Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lazkiye - Suriye

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Zmmo, M., & Tutaş, N. (2024). Generalized perfect numerical semigroups. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 30(1), 150-162, DOI: 10.7546/nntdm.2024.30.1.150-162.

Uluslararası Konferans toplantılarda sunulan çalışmalar

1- Marowa Kamal Aldeen, Mohammad Zmmo, G. Kalpana G, Mohamed Nedal Khatib. Accuracy Improvement in Heart Disease Prediction Using Logistic Regression Technique. 9th international Conference on Future Learning and Informatics. Atılım University-Ankara.