



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMPSON TİPLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

SAKİNE OKUMUŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMPSON TIPLI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

Sakine OKUMUŞ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 28/02/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

28 Şubat 2020

Sakine OKUMUŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübeleri ile değerli katkılarını esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Tuba TUNÇ ve Doç. Dr. Hüseyin BUDAK 'a şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

28 Şubat 2020

Sakine OKUMUŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL KAVRAMLAR.....	4
2.1. GENEL KAVRAMLAR.....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TIPLI EŞİTSİZLİKLER	10
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	23
4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMPSON TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	23
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	33
6. KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER

$AC[a, b]$	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$ f $	f Fonksiyonunun Mutlak Değeri
$L_p[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında p . Kuvveti İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_\infty[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrali Sınırlı Olan Fonksiyonların Kümesi
$\max\{a, b\}$	a ve b nin maksimumu
R	Reel Sayılar Kümesi
$\sup\{a, b\}$	a ve b nin supremumu
$ x $	x Sayısının Mutlak Değeri
$\ \cdot\ _p$	Lebesgue Normu

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMPSON TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Sakine OKUMUŞ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Şubat 2020, 36 sayfa

Simpson eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğinden meydana gelen midpoint ile trapeziod ifadelerinden oluşmuş önemli bir eşitsizliktir. Bu tezde amacımız parametreye bağlı Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde etmektir. Bunun için ilk olarak çalışmamızda kullanılacak olan bir önemli özdeşlik elde etmek olacaktır. Daha sonrada bu özdeşlik yardımıyla konveks fonksiyonlar kullanılarak genelleştirilmiş Simpson eşitsizlikleri elde edilecektir.

Anahtar sözcükler: Hölder eşitsizliği, Konveks fonksiyon, Simpson eşitsizliği.

ABSTRACT

GENERALIZED SIMPSON TYPE INTEGRAL INEQUALITIES

Sakine OKUMUŞ

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Prof Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

February 2020, 36 pages

The Simpson inequality is an important inequality, consisting of midpoint and trapezoid expressions, which are derived from the Hermite-Hadamard inequality. Our aim in this thesis is to obtain new Simpson type inequalities depending on the parameter. The first thing to do is to obtain an important identity that will be used in our study. Then, with the help of this identity, generalized Simpson inequalities will be obtained by using convex functions.

Keywords: Hölder inequality, Convex function, Simpson inequality.

1. GİRİŞ

Matematikte bu alanda kendimize sorduğumuz ilk soru “Neden Matematiksel Eşitsizlikler” sorusu olmuştur. Geçmişe dönük yapılan araştırmalar sonucunda 1978 yılında R. Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: “Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırma durumu karşımıza çıkmaktadır. Klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.” Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında var olup birçok alanda uygulamaları vardır.

Konveksilik, Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit olarak bilinen bir kavram olduğunu söyleyebiliriz. Konveks kümeler ve fonksiyonlar konusunun araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında ortaya çıkmasına karşın, 20. yüzyılın ortalarında bu kavramlar matematiğin önemli bir alanı olmaya başladığı görülmektedir. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan oldukça önemli konulardan biri olduğu açıktır. Konvekslik kavramı matematiğin birçok alanında örneğin geometri analiz, lineer cebir, topoloji, sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplinler arası ilişkilerden ve artan uygulamalarıyla da bu konunun matematiksel analizin merkez alanlarından biri olarak yerini aldığı söylenebilir.

Konveks kavramını önemli bir uygulamasını ilk olarak, 1881'de Ch. Hermite'in (1822-1901) Mathesis 3 (1883,s.82) dergisine gönderdiği bir mektupta ile ortaya çıktığını ifade edebiliriz ki bu mektubu orijinalinde aşağıdaki metni verebiliriz:

Sur deux limites d'une integrale definite. Soit $g(x)$ une fonction qu, varie toujours dans le meme sens de $x = a$, $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b g(x)dx < (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b g(x)dx > (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = g(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses.

En faisant dans ces formules $g(x) = 1/(1+x)$, $a = 0$, $b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}?$$

Bu mektupta görüldüğü gibi konveks bir fonksiyonun davranışının sergilemiş olduğu önemli bir yapının temellerini attığı gözlenmektedir. Dolayısıyla bu yeni oluşumun eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, ancak Hermite'in temel çalışmaları sık sık onun orijinal yazar kimliği verilmeden ortaya konulmuş önemli bir eşitsizliktir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan bu eşitsizlik yani literatürde Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak tanımlanan bu eşitsizliğin geometrik yorumu ve çoğu uygulamaları tamamen konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Daha sonraları birçok matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar vb.) ve özel ortalamalar (p-logaritmik ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar vb.) için bu eşitsizlikleri farklı açılardan ele almaya başlamışlar ve birçok yeni sonuçlar ortaya koymuşlardır. Bu çalışmalar ile ilgili olarak temel olarak bilinen çalışmaları kaynakçalar kısmında sunulmuştur.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan “Inequalities” başlıklı kitap eşitsizlikler teorisi konusunda yazılmış önemli bir temel kaynak kitapları arasında literatüre girmiştir. Bu çalışmada konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini veya sonuçlar şeklinde önemli kavramları bu alanda çalışan matematikçilere sunulmuş temel bir kaynaktır. Buna ilave olarak

Beckenbach ve Bellman'n 1965'de yazdığı “Inequalities” başlıklı eseri ve daha sonra da Mitrinovic'in 1970'de yazdığı ve birçok temel eşitsizliklerin olduğu ve daha da kapsamlı olan “Analytic Inequalities” başlıklı kitabının da eşitsizlikler konusunda önemli bir çalışma kaynağı konumunda olduğunu söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken önemli kaynaklardır.

Daha sonralarda daha da özel olarak tamamen konveks fonksiyonlarını kapsayan ve daha kapsamlı bir şekilde ortaya sunulmuş A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından “Convex Functions” başlıklı kitabı literatüre kazandırmışlardır. Diğer yandan oldukça önemli olan ve sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında bilgi veren önemli olan bir kitabın Pearic tarafından 1987 yılında “Convex Functions: Inequalities” başlıklı olarak bir kaynağı literatüre kazandırmıştır. Son olarak da bu tezde sunulmuş olan eşitsizliklerin özel halleri olan eşitsizlikler ve uygulamalarını okuyucu birçok türden konveks fonksiyonlar sınıfları için, özellikle de Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bunlar ile ilgili olarak daha detaylı anlatımın S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından “Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications” başlıklı kitapta bulabileceğini söyleyebiliriz.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel olan konveks fonksiyon sınıfları ortaya atılmıştır ve bu tanımlardan biri olan ve birçok çalışmaya da öncülük eden konveks kavramı 1978 yılında Breckner tarafından “Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen” başlıklı çalışmasında verilen s -konveks fonksiyonlardır. Daha sonra da s -konvekslik ile ilgili önemli birçok özellikler Hudzik ve Maligranda tarafından yazılan “Some remarks on s -convex functions” adlı çalışmada ortaya atılmış ve bu yeni kavram literatürde yerini almıştır.

Simpson eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğinden meydana gelen midpoint ile trapezoid ifadelerinden oluşmuş önemli bir eşitsizliktir. Bu tezde amacımız parametreye bağlı Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde etmektir. Bunun için ilk olarak çalışmamızda kullanılacak olan bir önemli özdeşlik elde etmek olacaktır. Daha sonrada bu özdeşlik yardımıyla konveks fonksiyonlar kullanılarak genelleştirilmiş Simpson eşitsizlikleri elde edilecektir.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Tanım: Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım: Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım: (Konveks Fonksiyon) $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyona konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " $\geq$ " olması halinde de f fonksiyona konkav fonksiyon denir. Yukardaki eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.2)$$

olur. Bu tip eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlara da J-konveks fonksiyon denir.

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri

i. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, \dots, k) \quad (2.3)$$

fonksiyonunda konvektir.

ii. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkav ve $S = \{x : g(x) > 0\}$ olsun. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f , S de konvektir.

iii. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks olsun.

Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonunda konvektir.

iv. $g : R \rightarrow R$ konveks ve $h, h(x) = Ax + B$ formunda $h : R^n \rightarrow R$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

vi. f ve g fonksiyonlar J -konveks ise $f(x) + g(x)$ de J -konvekstir.

vii. $f, \bar{I}'$ 'de J -konveks ve $g, \bar{I}''$ de J -konveks ise bu takdirde $f(x)g(x)$

de $\bar{I} = \bar{I}' \cap \bar{I}''$ de J -konvekstir.

Tanım: $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d]$ $-\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$,

$\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy \quad (2.4)$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

Tanım: (Mutlak Süreklilik) $I \subset R$, $f : I \rightarrow R$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

ise f ye mutlak sürekli denir ve $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı

$AC^n[a, b]$ ile gösterilir.

Tanım: $x, y \in R$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

şeklindeki eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir.

Tanım: (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (a < b) \quad (2.5)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım: (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [19].

Tanım: (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Teorem: (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ olsun. $f, g \in L^p$ ise, $f + g \in L^p$ yazılır ve

$$\begin{aligned} & \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\ & \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx \right]^{1/p} \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Önce, $f + g \in L^p$ olduğunu gösterelim. Eğer $|f| \leq |g|$ veya $|f| > |g|$ için

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

olduğundan, $f + g \in L^p$ olduğu hemen yazılır. $p=1$ ise, eşitsizliğin doğru olduğu apaçıktır. $p > 1$ olduğunu kabul edelim. Hölder Eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f + g|^p dx \\ &= \int_a^b |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \int_a^b |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_a^b |g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \left[\int_a^b |f|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p} \\ &\quad + \left[\int_a^b |g|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

yazılır. Her iki taraf, sıfırdan farklı kabul edeceğimiz

$$\left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p}$$

ifadesine bölünürse,

$$\begin{aligned} & \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\ &\leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx \right]^{1/p} \end{aligned}$$

şeklindeki Minkowski Eşitsizliği bulunur.

Tanım: E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $E\{x : f(x) > k\}$ kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

Teorem: (Lebesgue integralinin varlık teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise f fonksiyonunun *Lebesgue* integrali vardır.

Tanım: $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna *sınırlı fonksiyon* denir.

Tanım: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f : \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normuna göre bir *Banach* uzaydır.

Teorem: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında sürekli ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır [19].

Teorem: f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [20].

Tanım: $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$f(x) \leq M$, ise M ye f nin bir üst sınırı denir. (Yani,

$f^{-1}(\mu, \infty) = \{x \in X : f(x) > M\}$ kümesi boştur). Burada

$$U_f = \{M \in \mathbb{R} : f^{-1}(\mu, \infty) = \emptyset\}$$

kümesi f nin üst sınırlarının kümesi olsun. f nin supremumu, eğer U_f kümesi boştan farklı ise bu durumda,

$$\sup f = \inf U_f$$

olarak tanımlanır. Diğer durumda ise

$$\sup f = +\infty$$

dır. Ayrıca her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa bu durumda $\sup f \leq M$ dir.

(X, Σ, μ) ölçülebilir bir uzay ve f de ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ yada $f^{-1}(\mu, \infty)$ ölçülebilir kümesi sıfır ölçümlü ise M 'ye f nin esas üst sınırı denir.

$$U_f^{ess} = \{M \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(\mu, \infty)) = 0\}$$

esas üst sınırlarının kümesi olsun. Bu durumda, $U_f^{ess} \neq \emptyset$ ise yukardaki tanıma benzer olarak

$$ess \sup f = \inf U_f^{ess}$$

olarak tanımlanır. Aksi halde, yani $U_f^{ess} \neq \emptyset$ ise $ess \sup f = +\infty$ dır. Ayrıca, bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa $ess \sup f \leq M$ dır.

Ayrıca esas infimum tanımı da esas alt sınırlarının supremumu olarak tanımlanır yani esas alt sınırlarının kümesi boştan farklı ise

$$ess \inf f = \sup \{k \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) < k\}) = 0\}$$

olarak tanımlanır. Eğer esas alt sınırların kümesi boş ise bu durumda $ess \inf f = -\infty$ dır.

Eğer $\mu(X) > 0$ ise

$$\inf f \leq ess \inf f \leq ess \sup f \leq \sup f$$

bağıntısı vardır. Eğer $\mu(X) = 0$ ise bu durumda da $ess \sup f = +\infty$ ve $ess \inf f = -\infty$ dır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Lemma: $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° üzerinde mutlak sürekli $a, b \in I$ ile $a \leq b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \\ &= (b-a) \int_0^1 p(t) g'(tb + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Burada $q(t)$ çekirdeği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$q(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{6}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ t - \frac{5}{6}, & t \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

İspat: Dikkat edersek,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 q(t) g'(tb + (1-t)a) dt \\ &= \int_0^{1/2} \left(t - \frac{1}{6}\right) g'(tb + (1-t)a) dt + \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) g'(tb + (1-t)a) dt \end{aligned}$$

dır. Buradan da kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned} I &= \left(t - \frac{1}{6} \right) \frac{g(tb + (1-t)a)}{b-a} \Big|_{\int_0^{1/2}} - \int_0^{1/2} \frac{g(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \Big| \\ &\quad + \left(t - \frac{5}{6} \right) \frac{g(tb + (1-t)a)}{b-a} \Big|_{\int_{1/2}^1} - \int_{1/2}^1 \frac{g(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \Big| \\ &= \frac{1}{6(b-a)} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \int_0^1 \frac{g(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \end{aligned}$$

ve ayrıca, $x = tb + (1-t)a$, ve $dx = (b-a)dt$, seçersek;

$$(b-a).I = \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b g(x)dx$$

istenilen sonucu verir.

Bir sonraki teorem s-konveks fonksiyon için Simpson eşitsizliğinin yeni bir genelleşmesidir.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $a, b \in I$ $g' \in L[a, b]$, $a < b$ olsun. $|g'|$, $[a, b]$ üzerinde s-konveks fonksiyon ise $s \in (0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \frac{6^{-s} - 9(2)^{-s} + (5)^{s+2} 6^{-s} + 3s - 12}{18(s^2 + 3s + 2)} \left[|f'(a)| + |f'(b)| \right] \end{aligned}$$

İspat: Lemma yardımıyla ve g fonksiyonun s-konveksliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left| \int_0^1 s(t) g'(tb + (1-t)a) dt \right| \\ & \leq (b-a) \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| |g'(tb + (1-t)a)| dt \\ & \quad + (b-a) \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| |g'(tb + (1-t)a)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a) \int_0^{1/2} \left(t - \frac{1}{6} \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&\quad + (b-a) \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&= (b-a) \int_0^{1/6} \left(\frac{1}{6} - t \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&\quad + (b-a) \int_{1/6}^{1/2} \left(t - \frac{1}{6} \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&\quad + (b-a) \int_{1/2}^{5/6} \left(\frac{5}{6} - t \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&\quad + (b-a) \int_{5/6}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) \left(t^s |g'(b)| + (1-t)^s |g'(a)| \right) dt \\
&= (b-a) \frac{6^{-s} - 9(2)^{-s} + (5)^{s+2} 6^{-s} + 3s - 12}{18(s^2 + 3s + 2)} \left[|g'(a)| + |g'(b)| \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Böylece, konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$
 $a, b \in I$ $a < b$ olsun. $|g'|$, $[a, b]$ üzerinde s -konveks ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
&\leq \frac{5(b-a)}{72} \left[|g'(a)| + |g'(b)| \right]
\end{aligned}$$

Birinci türev açısından orta nokta eşitsizliği için en iyi üst sınır aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç: Teorem de , eğer $g(a) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b)$, ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq (b-a) \frac{6^{-s} - 9(2)^{-s} + (5)^{s+2} 6^{-s} + 3s - 12}{18(s^2 + 3s + 2)} \left[|g'(a)| + |g'(b)| \right]$$

Sonuç: $s=1$ seçersek,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{5(b-a)}{72} [|g'(a)| + |g'(b)|]$$

eşitsizliği elde edilir.

Simpson'un birinci türev açısından üst koşullar için ilgili versiyonu aşağıdaki sonuçlara dahil edilmiştir.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ $a < b$ olsun. $|g'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde s -konveks ise $s \in (0, 1]$ ve $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq (b-a) \left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{1/p} \left[\left(|g'(a)|^q + \left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{1/q} + \left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |g'(b)|^{1/q} \right]$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dır.

İspat: Lemma yardımıyla ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq (b-a) \left| \int_0^1 p(t) g'(tb + (1-t)a) dt \right| \\
& \leq (b-a) \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right| dt \\
& \quad + (b-a) \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right| dt \\
& \leq (b-a) \left(\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{1/2} \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{1/q} \\
& \quad + (b-a) \left(\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{1/2}^1 \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{1/q} \\
& = (b-a) \left(\int_0^{1/6} \left(\frac{1}{6} - t \right)^p dt + \int_{1/6}^{1/2} \left(t - \frac{1}{6} \right)^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{1/2} \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{1/q} \\
& \quad + (b-a) \left(\int_{1/2}^{5/6} \left(\frac{5}{6} - t \right)^p dt + \int_{5/6}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right)^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{1/2}^1 \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

g fonksiyonu s -konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2} \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \leq \frac{\left| g'(a) \right|^q + \left| g'(\frac{a+b}{2}) \right|^q}{s+1}$$

ve

$$\int_{1/2}^1 \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \leq \frac{\left| g'(\frac{a+b}{2}) \right|^q + \left| g'(b) \right|^q}{s+1}$$

eşitsizlikleri dikkate alırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq (b-a) \left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{1/p} \frac{1}{(s+1)^{1/q}} \\
& \cdot \left[\left(\left| g'(a) \right|^q + \left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{1/q} + \left(\left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + \left| g'(b) \right|^q \right)^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını verir.

Sonuç: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|g'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde s-konveks ise $s \in (0, 1]$ ve $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq 2^{-\frac{1}{q}} (b-a) \left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{1/p} \left[\left(\left| g'(a) \right|^q + \left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{1/q} + \left(\left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + \left| g'(b) \right|^q \right)^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Sonuç: Teoreme, ek olarak $|g'(a)| = |g'(b)| = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(b-a)}{(s+1)^{1/q}} \left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{1/p} \left(\left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right)
\end{aligned}$$

olur ki burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Birinci türev açısından orta nokta eşitsizliği için en iyi üst sınır aşağıdaki sonuçlarda gözlenmektedir.

Sonuç: Teorem de $g(a) = g(\frac{a+b}{2}) = g(b)$, ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq (b-a) \left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{1/p} \frac{1}{(s+1)^{1/q}}$$

$$\left[\left(|g'(a)|^q + \left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{1/q} + \left(\left| g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |g'(b)|^q \right)^{1/q} \right]$$

Birinci türev açısından üst sınır için Simpson eşitsizliğinin bir başka versiyonu şöyle elde edilmiştir.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|g'|^q$, $[a, b]$ üzerinde s -konveks ise $s \in (0, 1]$ ve $q \geq 1$, için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) \frac{1}{36(s^2 + 3s + 2)} \left[|g'(a)|^q + |g'(b)|^q \right]$$

İspat: $q \geq 1$ olsun. Lemma daki özdeşilik yardımıyla iyi bilinen ortalama eşitsizliği kullanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq (b-a) \left| \int_0^1 s(t) g'(tb + (1-t)a) dt \right| \\
& \leq (b-a) \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right| dt \\
& \quad + (b-a) \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right| dt \\
& \leq (b-a) \left(\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (b-a) \left(\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da $|g'|^q$ fonksiyonu s -konveks olduğu için

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \\
& \leq \int_0^{1/6} \left(\frac{1}{6} - t \right) \left(t^s |g'(b)|^q + (1-t)^s |g'(a)|^q \right) dt \\
& \quad + \int_{1/6}^{1/2} \left(t - \frac{1}{6} \right) \left(t^s |g'(b)|^q + (1-t)^s |g'(a)|^q \right) dt \\
& = \frac{[(3^{-s})(2^{1-s}) + 3s(2^{1-s}) + 3(2^{-s})]}{36(s^2 + 3s + 2)} |g'(a)|^q
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \left| g'(tb + (1-t)a) \right|^q dt \\
& \leq \int_{1/2}^{5/6} \left(\frac{5}{6} - t \right) \left(t^s \left| g'(b) \right|^q + (1-t)^s \left| g'(a) \right|^q \right) dt \\
& \quad + \int_{5/6}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) \left(t^s \left| g'(b) \right|^q + (1-t)^s \left| g'(a) \right|^q \right) dt \\
& = \frac{(3^{-s})(2^{1-s}) + 3s(2^{1-s}) + 3(2^{-s})}{36(s^2 + 3s + 2)} \left| g'(a) \right|^q \\
& \quad + \frac{5^{s+2}3^{-s}2^{1-s} - 6s(2^{-s}) - 21(2^{-s}) + 6s - 24}{36(s^2 + 3s + 2)} \left| g'(b) \right|^q
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca dikkat edersek

$$\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| dt = \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| dt = \frac{5}{72}$$

olarak hesaplanılır. Böylece tüm yukarıdaki eşitsizliklerin birleştirilmesi ile ispat tamamlanılır.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|g'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konkav $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
& \leq \frac{5(b-a)}{72} \left[\left| g'\left(\frac{29b+61a}{90}\right) \right| + \left| g'\left(\frac{61b+29a}{90}\right) \right| \right].
\end{aligned}$$

İspat: İlk olarak $|g'|^q$ konkavlığına ve ortalama eşitsizliğine dikkat edersek

$$|g'(\partial x + (1-\partial)y)|^q \geq \partial |g'(x)|^q + (1-\partial) |g'(y)|^q$$

olup buradan da

$$|g'(\partial x + (1-\partial)y)| \geq \partial |g'(x)| + (1-\partial) |g'(y)|$$

dır ve ayrıca $|g'|$ konkavdır.

Lemma yardımıyla ve Jensen integral eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| g'(tb + (1-t)a) dt \\ & \leq \left(\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| dt \right) \left| g' \left(\frac{\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| [tb + (1-t)a] dt}{\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| dt} \right) \right| \\ & = \frac{5}{72} \left| g' \left(\frac{29b + 61a}{90} \right) \right| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| g'(tb + (1-t)a) dt \\ & \leq \left(\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| dt \right) \left| g' \left(\frac{\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| [tb + (1-t)a] dt}{\int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| dt} \right) \right| \\ & = \frac{5}{72} \left| g' \left(\frac{61b + 29a}{90} \right) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da bu iki eşitsizliği birleştirirsek,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{5(b-a)}{72} \left[\left| g' \left(\frac{29b + 61a}{90} \right) \right| + \left| g' \left(\frac{61b + 29a}{90} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|g'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konkav ise $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right) \left[\left| g'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| + \left| g'\left(\frac{b+3a}{4}\right) \right| \right]$$

İspat: Lemma dan,

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) \int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| |g'(tb + (1-t)a)| dt$$

$$+ (b-a) \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| |g'(tb + (1-t)a)| dt$$

yazılır. Buradan da herbir integrale ayrı ayrı Hölder eşitsizliği uygularsak, $q > 1$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$(b-a) \left(\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right|^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q}{q-1}} \left(\int_{1/2}^1 |g'(tb + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Buradan da içerdeki ilk integral hesaplanılırsa,

$$\int_0^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right|^{\frac{q}{q-1}} dt = \int_{1/2}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right|^{\frac{q}{q-1}} dt = \frac{1}{6^{\frac{2q-1}{q-1}}} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right)$$

olur. Diğer integral için ise $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konkav olduğundan Jensen integral eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} |g'(tb + (1-t)a)|^q dt &= \int_0^{1/2} t^0 |g'(tb + (1-t)a)|^q dt \\
&\leq \left(\int_0^{1/2} t^0 dt \right) \left| g' \left(\frac{\int_0^{1/2} (tb + (1-t)a) dt}{\int_0^{1/2} t^0 dt} \right) \right|^q \\
&= \frac{1}{2} \left| g' \left(2 \int_0^{1/2} (tb + (1-t)a) dt \right) \right|^q \\
&= \frac{1}{2} \left| g' \left(\frac{b+3a}{4} \right) \right|^q
\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\int_{1/2}^1 |g'(tb + (1-t)a)|^q dt \leq \frac{1}{2} \left| g' \left(\frac{3b+a}{4} \right) \right|^q$$

bulunur. Böylece elde ettiğimiz tüm eşitsizlikleri birleştirirsek

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{6^{\frac{2q-1}{q-1}}} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} \right)^q \left[\left| g' \left(\frac{3b+a}{4} \right) \right| + \left| g' \left(\frac{b+3a}{4} \right) \right| \right] \\
&\leq (b-a) \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right) \left[\left| g' \left(\frac{3b+a}{4} \right) \right| + \left| g' \left(\frac{b+3a}{4} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde sürekli bir dönüşüm öyle ki $g' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ $a < b$ olsun. $|g'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konkav ise $s \in (0, 1]$ ve $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) 2^{(s-1)/q} \frac{1}{6^{\frac{2q-1}{q-1}}} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right)$$

$$\times \left[\left| g'\left(\frac{3a+b}{2}\right) \right| + \left| g'\left(\frac{a+3b}{2}\right) \right| \right]$$

İspat: Teoremin ispatında olduğu gibi benzer şekilde yapılabilir. Jensen integral eşitsizliği yerine Hermite-Hadamard eşitsizliği konkav fonksiyon için kullanılırsa,

$$\int_0^{1/2} |g'(tb + (1-t)a)|^q dt \leq 2^{s-1} \left| g'\left(\frac{3a+b}{2}\right) \right|^q$$

ve

$$\int_{1/2}^1 |g'(tb + (1-t)a)|^q dt \leq 2^{s-1} \left| g'\left(\frac{a+3b}{2}\right) \right|^q$$

böylece,

$$\left| \frac{1}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) 2^{(s-1)/q} \frac{1}{6^{\frac{2q-1}{q-1}}} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right) \left(2^{\frac{2q-1}{q-1}} + 1 \right)$$

$$\times \left[\left| g'\left(\frac{3a+b}{2}\right) \right| + \left| g'\left(\frac{a+3b}{2}\right) \right| \right]$$

ispat tamamlanır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMPSON TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Aşağıdaki eşitsizlik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem: $f : [a, b] \rightarrow R$ 4.dereceden (a, b) aralığında sürekli türevlenebilir ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4 \quad (4.1)$$

Son yıllarda Simpson eşitsizliği ile ilgili olarak farklı türlerden bir çok çalışma literatürde bulunmaktadır bunlar için, bakınız ([1]–[21]). [2]’de Dragomir ve diğerleri Simpsonun geri kalanının dördüncü türevden daha düşük türevlerle ifade edilebileceği ile ilgili eşitsizlik üzerine yakın zamandaki bazı sonuçları aşağıda ki gibi ispatlamıştır.

Teorem: Farz edelim ki $f : [a, b] \rightarrow R$, (a, b) aralığında türevlenebilir sürekli dönüşüm ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f'(a) + f'(b)}{2} + 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f'^{(4)}\| (b-a)^4$$

burada $\|f'\|_1 = \int_a^b |f'(x)| dx$ dır.

Yukarıda ki eşitsizliğin sağ tarafındaki sabit için L-Lipschitzian dönüşümü için $\frac{5}{36} L(b-a)$ verilmiştir.

Teorem: Farz edelim ki $f: [a, b] \rightarrow R$ (a, b) aralığında türevlenebilir sürekli dönüşüm ve $f' \in L_p[a, b]$ olsun. Bu durum da $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{6} \left[\frac{2^{q+1} + 1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dır.

Bu bölümde amacımız, türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyon sınıfı için Simpson tipli eşitsizliğinin yeni bir genelleştirmesi aşağıda verilecektir. Bunun için sonuçlar elde etmemize yardımcı olacak olan aşağıdaki Lemma ile başlayalım:

Lemma: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde mutlak sürekli $f' \in L_1[a, b]$ ile $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Bu durumda $w = ha + (1-h)b$, $h \in [0, 1]$ için aşağıdaki özdeşlik vardır.

$$\begin{aligned} & \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{3} - \frac{t}{2} \right) f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} b \right) dt \\ & + \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right) f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} a \right) dt \\ & = \frac{1}{6} f(w) + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w) f \left(\frac{w+b}{2} \right) + (w-a) f \left(\frac{a+w}{2} \right) \right] \\ & - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \end{aligned}$$

İspat: İlk olarak, integraller için kısmi integrtasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1-t}{3} - \frac{t}{2} \right) f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} b \right) dt \\ &= -\frac{2}{b-w} \left(\frac{1-t}{3} - \frac{t}{2} \right) f \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} b \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{b-w} \int_0^1 f \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} b \right) dt \\ &= \frac{2}{6(b-w)} f(w) + \frac{2}{3(b-w)} f \left(\frac{w+b}{2} \right) - \frac{2}{(b-w)^2} \int_w^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \end{aligned}$$

ve benzer metodla aşağıdaki ifade bulunur;

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right) f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} a \right) dt$$

$$= \frac{2}{6(w-a)} f(w) + \frac{2}{3(w-a)} f\left(\frac{a+w}{2}\right) - \frac{2}{(w-a)^2} \int_{\frac{w+a}{2}}^w f(u) du.$$

Yukarda ki iki sonucu yeniden düzenleyerek taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} I_1 + \frac{(w-a)^2}{2(b-a)} I_2 \\ &= \frac{b-w}{6(b-a)} f(w) + \frac{b-w}{3(b-a)} f\left(\frac{a+w}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_w^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \\ &+ \frac{w-a}{6(b-a)} f(w) + \frac{w-a}{3(b-a)} f\left(\frac{a+w}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^w f(u) du \\ &= \frac{1}{6} f(w) + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w) f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a) f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \end{aligned}$$

istenilen sonucun ispatı tamamlanır.

Teorem: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm öyle ki $f' \in L_1[a, b]$
 $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} f(w) + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w) f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a) f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \right| \\ & \leq \frac{61[(b-w)^2 + (w-a)^2] |f'(w)| + 29[(b-w)^2 |f'(b)| + (w-a)^2 |f'(a)|]}{6^4(b-a)} \end{aligned}$$

burada $w = ha + (1-h)b$, $h \in [0, 1]$ dır.

İspat: Lemma 4.1.4 yardımıyla ve $|f'|$ konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} f(w) + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w) f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a) f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{w+b}{2}} f(u) du \right| \\
& \leq \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| \left[\frac{1+t}{2} |f'(w)| + \frac{1-t}{2} |f'(b)| \right] dt \\
& \quad + \frac{(w-a)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\frac{1+t}{2} |f'(w)| + \frac{1-t}{2} |f'(a)| \right] dt \\
& = \frac{(b-w)^2}{4(b-a)} |f'(w)| \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| (1+t) dt + \frac{(b-w)^2}{4(b-a)} |f'(b)| \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| (1-t) dt \\
& \quad + \frac{(w-a)^2}{4(b-a)} |f'(w)| \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1+t) dt + \frac{(w-a)^2}{4(b-a)} |f'(a)| \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1-t) dt
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan da basit hesaplama ile

$$\int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1+t) dt = \frac{61}{3^4 2^2}$$

ve

$$\int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1-t) dt = \frac{29}{3^4 2^2}$$

olacağından ispat tamamlanır.

Uyarı: Eğer Teorem de $h=0$ seçersek, $w=b$ olur ve

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} f(b) + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \\
& \leq (b-a) \frac{61|f'(b)| + 29|f'(a)|}{6^4}
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde Teorem 4.1.5 de $h=1$ seçersek, $w=a$ olur ve

$$\left| \frac{1}{6} f(a) + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \right|$$

$$\leq (b-a) \frac{61|f'(a)| + 29|f'(b)|}{6^4}$$

dır. Buradan da bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{5}{72} (b-a) [|f'(a)| + |f'(b)|]$$

Sonucu elde edilir ki bu sonuç, Sarıkaya ve arkadaşları [13, (for s=1)] tarafından elde edilmiştir.

Teorem: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm öyle ki $f' \in L_1[a, b]$ $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left| \frac{f(w)}{6} + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w) f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a) f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{b+w}{2}} f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{12(b-a)} \left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{ (b-w)^2 \left[\frac{3|f'(w)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + (w-a)^2 \left[\frac{3|f'(w)|^q + |f'(a)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

burada $w = ha + (1-h)b$, $h \in [0,1]$ dır.

İspat: Lemma dan ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(w)}{6} + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w)f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a)f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{b+w}{2}} f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| \left| f'\left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}b\right) \right| dt \\
& \quad + \frac{(w-a)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| f'\left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}a\right) \right| dt \\
& \leq \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(w-a)^2}{2(b-a)} \left(\int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}a\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da basit hesaplama ile

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right|^p dt = \frac{2(1+2^{p+1})}{6^{p+1}(p+1)}$$

bulunur. Ayrıca, $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}w + \frac{1-t}{2}b\right) \right|^q dt \\
& \leq \int_0^1 \left[\frac{1+t}{2} |f'(w)|^q + \frac{1-t}{2} |f'(b)|^q \right] dt \\
& = \frac{3|f'(w)|^q + |f'(b)|^q}{4}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} a \right) \right|^q dt \\
& \leq \int_0^1 \left[\frac{1+t}{2} |f'(w)|^q + \frac{1-t}{2} |f'(a)|^q \right] dt \\
& = \frac{3|f'(w)|^q + |f'(a)|^q}{4}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu üç sonuç yukarıda yerlerine yazılırsa teoremden istenilen eşitsizlik elde edilir.

Uyarı: Teorem de $h=0$ seçersek $w=b$ olur ve

$$\left| \frac{f(b)}{6} + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Benzer şekilde, Teorem 4.1.7 de $h=1$ seçersek $w=a$ olur ve

$$\left| \frac{f(b)}{6} + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Bu iki sonuç taraf tarafa toplanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left[\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ki bu sonuç Sarıkaya ve arkadaşlarının [13, (s=1)] de elde edilmiştir.

Teorem: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm öyle ki $f' \in L_1[a, b]$
 $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise $q \geq 1$ aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(w)}{6} + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w)f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a)f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{b+w}{2}} f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2(b-a)} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \cdot \left[(b-w)^2 \left(\frac{61|f'(w)|^q + 29|f'(b)|^q}{3^4 x 2^3} \right)^{\frac{1}{q}} + (w-a)^2 \left(\frac{61|f'(w)|^q + 29|f'(a)|^q}{3^4 x 2^3} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

burada $w = ha + (1-h)b$, $h \in [0,1]$ dır.

İspat: Lemma dan ve kuvvet eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(w)}{6} + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w)f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a)f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{b+w}{2}} f(x) dx \right| \\
& = \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right|^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| \left\| f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} b \right) \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right|^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| \left\| f' \left(\frac{1+t}{2} w + \frac{1-t}{2} a \right) \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon olduğundan

$$\left| \frac{f(w)}{6} + \frac{1}{3(b-a)} \left[(b-w)f\left(\frac{w+b}{2}\right) + (w-a)f\left(\frac{a+w}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+w}{2}}^{\frac{b+w}{2}} f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-w)^2}{2(b-a)} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$x \left(\frac{|f'(w)|^q}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| (1+t) dt + \frac{|f'(b)|^q}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \right| (1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(w-a)^2}{2(b-a)} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$x \left(\frac{|f'(w)|^q}{2} \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1+t) dt + \frac{|f'(a)|^q}{2} \int_0^1 \left| \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \right| (1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[(b-w)^2 \left(\frac{61}{3^4 2^3} |f'(w)|^q + \frac{29}{3^4 2^3} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ (w-a)^2 \left(\frac{61}{3^4 2^3} |f'(w)|^q + \frac{29}{3^4 2^3} |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

sonucu elde edilir bu da ispatı tamamlar.

Uyarı: Eğer Teorem de $h=0$ seçersek $w=b$ olur ve

$$\left| \frac{f(b)}{6} + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{29|f'(a)|^q + 61|f'(b)|^q}{3^4 \times 2^3} \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Benzer şekilde Teorem de $h=1$ seçersek $w=a$ olur ve

$$\left| \frac{f(b)}{6} + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{61|f'(a)|^q + 29|f'(b)|^q}{3^4 x 2^3} \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Böylece bu iki sonuç taraf tarafa toplanılırsa,

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{29|f'(a)|^q + 61|f'(b)|^q}{3^4 x 2^3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{61|f'(a)|^q + 29|f'(b)|^q}{3^4 x 2^3} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

sonucu elde edilir ki bu sonuç ta Sarıkaya ve arkadaşlarının [13,(s=1)] de elde edilmiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Simpson eşitsizliği için literatürde farklı türden birçok çalışma vardır. Bu tezde amacımız 4. Bölümde yer alan Lemma da yeni bir özdeşlik elde ederek, konveks fonksiyonlar için farklı bir açıdan daha genel sonuçlar elde edilmiştir ki sonuçlarımızın özel durumlarının daha önce yapılan sonuçlar olduğu son bölümde verilmiştir. Dolayısıyla, bu bölümde yer alan Lemma özdeşliğimizi kullanarak, farklı türevden konveks fonksiyonlar kullanılarak birçok çalışma elde edilebilir. Bu da açık problem olarak okuyuculara bırakılmıştır.

6. KAYNAKLAR

- [1] C. Jordan ve P. Mansio, Charles Hermite (1822-1901). Paris, France: CRC, 1993.
- [2] J. Hadamard, “Etude sur les propriétés des jonctions entiers et en particulier d’une jonction considérée par riemann,” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, c. 58, ss. 171–215, 1893.
- [3] M. Sarikaya, “On new hermite hadamard fejer type integral inequalities,” *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, c. 57, sayı. 3, ss. 377–386, 2012.
- [4] F. Chen and S. Wu, “Several complementary inequalities to inequalities of hermite-hadamard type for s-convex functions,” *Journal of Nonlinear Sciences ve Applications*, c. 9, sayı. 2, ss. 705–716, 2016.
- [5] S. S. Dragomir, “Refinements of the hermite-hadamard integral inequality for log-convex functions,” *RGMI Research Report Collection*, c. 3, sayı. 4, 2000.
- [6] S. Fitzpatrick ve S. Dragomir, “The hadamard’s inequality for s-convex functions in the second sense,” *Demonstratio Math*, c. 32, sayı. 4, ss. 687–696, 1999.
- [7] M. Z. Sarikaya ve S. Erden, “On the weighted integral inequalities for convex function,” *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, c. 6, sayı. 2, ss. 194–208, 2014.
- [8] M. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, ve N. Basak, “Hermite -hadamard’s inequalities for fractional integrals ve related fractional inequalities,” *Mathematical ve Computer Modelling*, c. 57, ss. 2403–2407, 2013.
- [9] I. Iscan, “Hermite-hadamard-fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals,” *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, c. 60, sayı. 3, ss. 355–366, 2015.
- [10] M. Jleli ve B. Samet, “On hermite-hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function,” *Journal of Nonlinear Sciences ve Applications*, c. 9, sayı. 3, ss. 1252–1260, 2016. *Analysis ve Applications*, c. 446, sayı. 2, ss. 1274–1291, 2017.
- [11] G. Farid, A. Rehman ve M. Zahra, “On hadamard-type inequalities for k-fractional integrals,” *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 4, sayı. 2, ss. 79–86, 2016.
- [12] M. Iqbal, S. Qaisar ve M. Muddassar, “A short note on integral inequality of type hermite-hadamard through convexity,” *Journal of Computational Analysis ve Applications*, c. 21, sayı. 5, ss. 946–953, 2016.
- [13] I.I. Scan, “Generalization of different type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals,” *Applicable Analysis*, c. 93, sayı. 9, ss. 1846–1862, 2014.

- [14] B. Ahmad, M. Alsaedi, A. Kirane ve B. T. Torebek, "Hermite–hadamard, hermite–hadamard–fejér, dragomir–agarwal ve pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals," *Journal of Computational ve Applied Mathematics*, c. 353, ss. 120–129, 2019.
- [15] M. A. Noor ve M. U. Awan, "Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals," *Transylvanian Journal of Mathematics ve Mechanics*, c. 5, sayı. 2, ss. 129–136, 2013.
- [16] F. Chen, "A note on hermite-hadamard inequalities for products of convex functions." *Journal of Applied Mathematics*, 2013.
- [17] N. N. Hue ve D. Q. Huy, "Some inequalities of the hermite hadamard type for product of two functions," *Journal of New Theory*, sayı. 13, ss. 26–37, 2016.
- [18] M. Iscan, I. ve Kunt, "Hermite-hadamard type inequalities for product of ga-convex functions via hadamard fractional integrals," *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, c. 62, sayı. 4, ss. 451–459, 2017.
- [19] E. Set, J. Choi ve B. Çelik, "New hermite-hadamard type inequalities for product of different convex functions involving certain fractional integral operators," *Journal of Mathematics ve Computer Science*, c. 18, ss. 29–36, 2018.
- [20] H. P. Yin ve F. Qi, "Hermite–hadamard type inequalities for the product of (a, m)-convex functions," *Journal of Nonlinear Sciences ve Applications*, c. 8, ss. 231–236, 2015.
- [21] F. Chen, "A note on hermite-hadamard inequalities for products of convex functions via riemann-liouville fractional integrals," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 33, ss. 299–306, 2014.
- [22] M. Latif ve M. Alomari, "Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates," c. 4, sayı. 47, ss. 2327–2338, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sakine OKUMUŞ
Doğum Tarihi ve Yeri : 01/06/1995, İstanbul
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : sakine.bardak@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Uygulamalı Matematik	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2017
Lise	Sayısal	Güngören Anadolu Lisesi	2013

YAYINLAR