

**GENELLEŞTİRİLMİŞ
STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM VE İNVERSİYON**

Mahmut MAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜŐÜ**

MAYIS 2008

ANKARA

Mahmut MAK tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM VE İNVERSİYON adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliğı ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Baki KARLIĞA

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Erdoğan ESİN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 14/05/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mahmut MAK

GENELLEŞTİRİLMİŞ
STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM VE İNVERSİYON
(Yüksek Lisans Tezi)

Mahmut MAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2008

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlar verilip ikinci ve üçüncü bölümlerde de, sırasıyla, ν -indeksli n -boyutlu pseudoküreler için stereografik izdüşüm ve inversiyon tanıtıldı. Tezin orijinal kısmı olan dördüncü ve beşinci bölümlerde ise, sırasıyla, $(\nu - 1)$ -indeksli n -boyutlu pseudohiperbolik uzayın stereografik izdüşümü ve inversiyonu elde edildi. Son olarak altıncı bölümde de 3-boyutlu hiperbolik uzaydaki bazı özel yüzeylerin stereografik izdüşümü altındaki, görüntüleri 3-boyutlu Öklidiyen uzayda grafiklendirildi.

Bilim Kodu : 204.1.049
Anahtar Kelimeler : Stereografik izdüşüm, inversiyon, pseudoküre, pseudohiperbolik uzay, horocycle
Sayfa Adedi : 58
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Baki Karlığa

**THE GENERALIZED
STEREOGRAPHIC PROJECTION AND INVERSION**

(M.Sc. Thesis)

Mahmut MAK

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

May 2008

ABSTRACT

This thesis is divided into six sections. In the first section, basic notions are given. In the second and third sections, the stereographic projection and inversion are devoted for n -dimensional pseudosphere with index ν , respectively. Stereographic projection and inversion of n -dimensional pseudohyperbolic space with index $(\nu - 1)$ are obtained in the fourth and fifth sections which are original parts of the thesis. Finally, in the 3-dimensional hyperbolic space, the images under stereographic projection of some special surfaces are visualized in three dimensional Euclidean space.

Science Code : 204.1.049

**Key Words : Stereographic projection, inversion, pseudospherical space,
pseudohyperbolic space, horocycle**

Page Number: 58

Adviser : Prof. Dr. Baki Karlığa

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşma aşamasında değerli vaktini harcamaktan çekinmeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya bilimsel araştırmanın yöntem ve tekniklerinde tecrübelerinden faydalanma fırsatı verip eksiklerimi gidermede elinden gelen her yardımı yaptığı için teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu zor süreçte maddi manevi desteklerinden dolayı biricik ailemin fertlerine de çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
RESİMLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. PSEUDOKÜRELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM	9
3. PSEUDOKÜRELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİYON	20
4. PSEUDOHİPERBOLİK UZAY İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM	26
5. PSEUDOHİPERBOLİK UZAY İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİYON	37
6. STEREOGRAFİK İZDÜŞÜMÜN BAZI UYGULAMALARI	43
KAYNAKLAR	52
EKLER	53
EK-1 Matematica Programı ile İzdüşüm Örnekleri	54
ÖZGEÇMİŞ	58

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Dünyanın kuzey yarımküresinin güney kutup noktasından kuzey kutup noktasındaki teğet düzlem üzerine stereografik izdüşüm	1
Şekil 2.1. r -yarıçaplı pseudoküre $(S_1^2(r))$	9
Şekil 4.1. r -yarıçaplı pseudohiperbolik $(H_0^2(r))$	26
Şekil 6.1. Horocycle'ın stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri	46
Şekil 6.2. Horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri	47
Şekil 6.3. Asli normal horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri	50
Şekil 6.4. Binormal horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri	51

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim	Sayfa
Resim 1.1. Astrolabe	1

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
R_ν^n	n-boyutlu ν -indeksli yarı-Öklidiyen uzay
$\bullet$	Standart iç çarpım
$\langle, \rangle$	Skalar çarpım
$\times$	Vektörel Çarpım
$\wedge$	Lorentz Vektörel Çarpım
$S_\nu^n(r)$	n-boyutlu ν -indeksli Pseudoküre
$H_{\nu-1}^n(r)$	n-boyutlu ν -indeksli Pseudohiperbolik uzay
Λ	R_ν^n 'nin null konisi
σ	$S_\nu^n(r)$ için stereografik izdüşüm
τ	$H_{\nu-1}^n(r)$ için stereografik izdüşüm
τ_H	Hiperbolik n-uzayın stereografik izdüşümü
Φ	yarı-Öklidiyen yansıma
Ψ	$S_{\nu-1}^n(r)$ 'nin inversiyonu
$\bar{\Psi}$	$H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ 'nin inversiyonu
κ_h	Hiperbolik eğrilik
τ_h	Hiperbolik burulma
$GL(n, R)$	Genel lineer grup
$gl(n, R)$	$GL(n, R)$ 'nin Lie cebiri
$O_\nu(n)$	yarı-Ortogonal grup
$\mathfrak{o}_\nu(n)$	$O_\nu(n)$ 'nin Lie cebiri
$SO_\nu(n)$	özel yarı-Ortogonal grup
$\mathfrak{so}_\nu(n)$	$SO_\nu(n)$ 'nin Lie cebiri

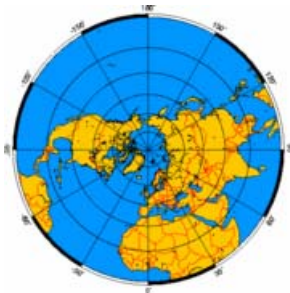
1. GİRİŞ

Stereografik izdüşüm ilk olarak Yunan matematikçi Hipparchus tarafından ifade edilmiştir. Astronom ve Coğrafyacı olan Yunan asıllı Claudius Ptolemy de bu izdüşümden yola çıkarak, gök cisimlerin koordinatlarını hesaplamak için kullanılan *Astrolabe* (Resim 1.1) aletini yapılandırmıştır. Dolayısıyla ilk isimlendirmesi Astrolabe olan izdüşüm, 1613 yılında François d'Aguillon tarafından *Stereografik İzdüşüm* olarak isimlendirilmiştir.



Resim 1.1. Astrolabe

Stereografik izdüşüm, matematiksel ifadesinin yanı sıra uygulama alanları olarak haritacılık bilimi olan kartografi (Şekil 1.1), kristallerin yapısını inceleyen bilim dalı kristalografi ve jeoloji gibi farklı alanlarda kullanılan bir metoddur. Son yıllarda [1]'de başlayıp [2]'de devam eden ve [3]'ün teşekkür kısmından da anlaşılabileceği gibi beş boyutlu Kaluza–Klein teorisinin kurulmasına temel teşkil eden [4]'teki stereografik izdüşümün önemi gün geçtikçe artmaktadır. Bu tezde elde ettiğimiz bulguların da fiziksel kavramlara uyarlanabileceği inancındayız.



Şekil 1.1. Dünyanın kuzey yarımküresinin güney kutup noktasından kuzey kutup noktasındaki teğet düzlem üzerine stereografik izdüşümü

1.1. Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun. $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$ dönüşümü bilinear ve simetrik ise $\langle, \rangle$ 'ye V üzerinde *bilinear form* denir [5].

1.2. Tanım

V bir reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$ simetrik bilinear form ve $v \in V$ olsun. $\forall u \in V$ için $\langle u, v \rangle = 0$ olması $v = 0$ olmasını gerektiriyorsa $\langle, \rangle$ dönüşümüne *non-dejenerer form* denir [5].

1.3. Tanım

V vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$ simetrik bilinear form ve W , V nin bir altvektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\langle, \rangle_W: W \times W \rightarrow R$$

kısıtlaması negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altvektör uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ 'nin *indeksi* denir [5].

1.1. Teorem

$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$ simetrik bilinear formuna karşılık gelen matris M olsun. Bu durumda

M regülerdir $\Leftrightarrow \langle, \rangle$, non-dejeneredir [5].

1.4. Tanım

V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpım* denir [5].

1.1. Örnek

$0 \leq \nu \leq n, \nu \in N$ için

$$\langle, \rangle: R_\nu^n \times R_\nu^n \rightarrow R, \langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^n x_i y_i$$

şeklindeki dönüşüm simetrik, bilineer ve non-dejenere formdur. Bu dönüşüm n -boyutlu ve ν -indeksli R_ν^n reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpımdır.

1.5. Tanım

$(R_\nu^n, \langle, \rangle)$ ikilisine $\langle, \rangle$ skalar çarpımı ile birlikte *yarı-Öklidiyen uzay* denir [5].

1.6. Tanım

x , R_ν^n 'de bir vektör olsun. Bu durumda

- i. $\langle x, x \rangle > 0$ ve $x \neq 0$, ise x *spacelike* vektör,
- ii. $\langle x, x \rangle = 0$ ve $x \neq 0$, ise x *null (lightlike)* vektör,
- iii. $\langle x, x \rangle < 0$ ve $x \neq 0$, ise x *timelike* vektör

diye adlandırılır [5].

1.7. Tanım

$\Lambda = \{x \in R_\nu^n \mid \langle x, x \rangle = 0, x \neq 0\}$ cümlesine R_ν^n yarı-Öklidiyen uzayında orijindeki *null-koni* denir [5].

1.8. Tanım

$y \in R_\nu^n - \{0\}$ ve $H = Sp\{y\}^\perp$ olmak üzere N, H hiperdüzleminin birim normali ise

$$\Phi: R_\nu^n \rightarrow R_\nu^n, \quad \Phi(x) = x - 2\langle x, N \rangle N$$

şeklindeki dönüşüme H hiperdüzlemine göre *yarı-Öklidiyen yansıma* denir [6].

1.1. Lemma

$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$, $0 \leq \nu \leq n$ için bileşenleri $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_\nu = -1$ ve $\varepsilon_{\nu+1} = \dots = \varepsilon_n = +1$ olan işaret matrisi olmak üzere $GL(n, R) = \{A \mid \det A \neq 0\}$ genel lineer grubunun alt grubu

$$O(\nu, n - \nu) = \{A \in GL(n, R) \mid A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon\}$$

cümlesine yarı-Ortogonal grup denir [5].

1.2. Lemma

$\mathfrak{gl}(n, R)$ nin bir alt cebiri olan

$$\mathfrak{o}(\nu, n - \nu) = \mathfrak{o}_\nu(n) = \{S \in \mathfrak{gl}(n, R) \mid S^T = -\varepsilon S \varepsilon\}$$

cümlesine $O_\nu(n) = O(\nu, n-\nu)$ 'nin Lie cebiri denir ve burada S matrisi $a \in \mathfrak{o}(\nu), b \in \mathfrak{o}(n-\nu)$ ve $x, \nu \times (n-\nu)$ tipinde keyfi bir matris olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a & x \\ x' & b \end{bmatrix}$$

formundadır [5].

1.9. Tanım

$n \geq 3$ ve $1 \leq i \leq n-1$ için $u_i = (u_1^i, \dots, u_n^i) \in R^n$ olsun. u_i vektörlerini sırasıyla satır kabul eden $(n-1) \times n$ tipindeki

$$A(u_1, \dots, u_{n-1}) = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisinden j . sütunun silinmesiyle oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki matris B_j olsun.

Bu durumda $u_1, \dots, u_{n-1}$ vektörün *genelleştirilmiş vektörel çarpımı*

$$u_1 \times \dots \times u_{n-1} = \left((-1)^{1+1} \det B_1, (-1)^{1+2} \det B_2, \dots, (-1)^{1+(n-1)} \det B_n \right)$$

dir [7].

1.2. Teorem

$u_1, \dots, u_{n-1}, w \in R^n$ de herhangi vektörler ve $v = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ olsun. Eğer $D = A(w, u_1, \dots, u_{n-1})$ ise $Det(w, u_1, \dots, u_{n-1}) = w \cdot v$ dir [7].

1.1. Sonuç

$u_1, \dots, u_{n-1} \in R^n$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, R^n 'nin standard bazı olsun. Bu durumda

$$(u_1 \times \dots \times u_{n-1}) = Det((e_1, \dots, e_n), u_1 \times \dots \times u_{n-1})$$

1.3. Teorem

Eğer $u_1, \dots, u_{n-1} \in R^n$ ise $u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ vektörü $1 \leq i \leq n-1$ için her bir u_i vektörüne ortogondur. Yani

$$u_i \cdot (u_1 \times \dots \times u_{n-1}) = 0$$

dir [7].

1.4. Teorem

$x, y, z, w \in R^4$ de herhangi vektörler olsun. Bu durumda

$$(1) \ x \times y \times z = y \times z \times x = z \times x \times y,$$

$$(2) \ x \times y \times z = -x \times z \times y = -y \times x \times z = -z \times y \times x,$$

$$(3) \ w \cdot (x \times y \times z) = Det(w, x, y, z)$$

dir [7].

Şimdi [8]'de verilen Lorentziyen vektörel çarpımını ve özelliklerini R_1^4 için verelim.

1.10. Tanım

$x, y, z \in R_1^4$ de herhangi vektörler ve $1 \leq i, j \leq 4$ için işaret matrisi $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$ olsun.

Bu durumda

$$x \wedge y \wedge z = \varepsilon(x \times y \times z)$$

ifadesine x, y, z vektörlerinin *Lorentziyen vektörel çarpımı* denir.

1.5. Teorem

$x, y, z, w \in R_1^4$ de herhangi vektörler olsun. O zaman

- (1) $x \wedge y \wedge z = \varepsilon z \times \varepsilon y \times \varepsilon x$,
- (2) $x \wedge y \wedge z = y \wedge z \wedge x = z \wedge x \wedge y$,
- (3) $x \wedge y \wedge z = -x \wedge z \wedge y = -y \wedge x \wedge z = -z \wedge y \wedge x$,
- (4) $\langle w, x \wedge y \wedge z \rangle = \text{Det}(w, x, y, z)$.

1.2. Sonuç

$x, y, z \in R_1^4$ de herhangi vektörler ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, R_1^4 'ün standard bazı olsun. Bu durumda

$$x \wedge y \wedge z = \langle (-e_1, e_2, e_3, e_4), x \wedge y \wedge z \rangle = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

dir.

1.6. Teorem

Eğer $x_1, x_2, x_3 \in R_1^4$ ise $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ vektörü $1 \leq i \leq 3$ için x_i vektörlerine Lorentz ortogonaldır. Yani

$$\langle x_i, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rangle = 0$$

dır.

1.11. Tanım

C^r sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar M ve N olsun. Bu durumda M 'den N 'ye r . mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli olan dönüşümlerin uzayı $C^r(M, N)$ ile birlikte verilen topolojik yapıya C^r -Whitney (güçlü) topoloji denir.

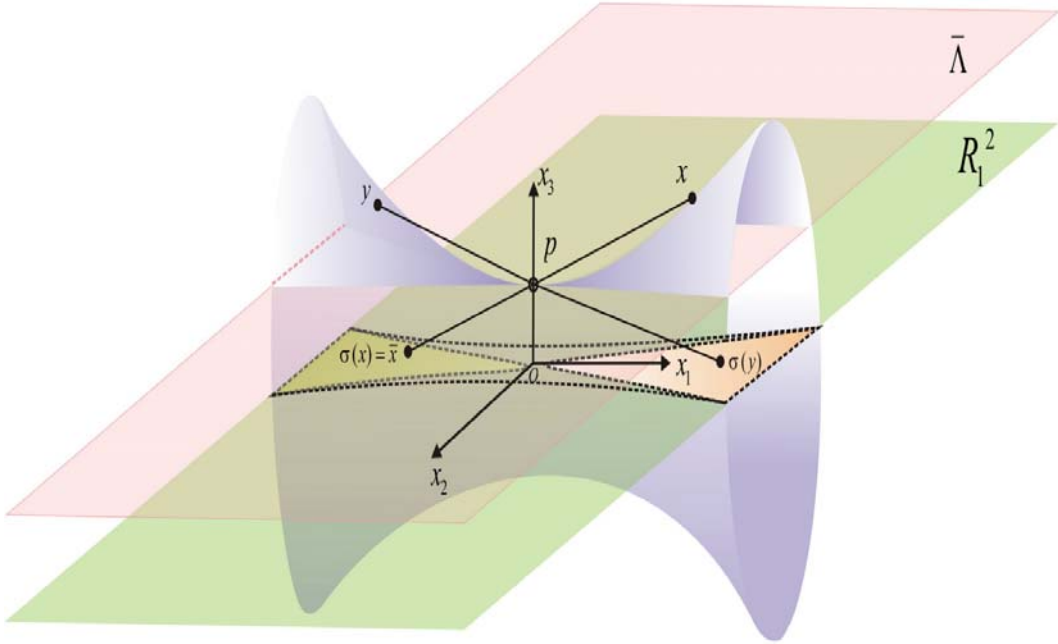
Eğer M ve N manifoldları C^∞ sınıfından iseler $C^\infty(M, N)$ uzayı ile birlikte verilen topolojik yapıya da C^∞ -Whitney topolojisi denir [9].

2. PSEUDOKÜRELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM

$S_\nu^n(r) = \{x \in R_\nu^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r^2\}$ cümlesine ν -indeksli ve r -yarıçaplı n -boyutlu pseudoküre ve $H_\nu^n(r) = \{x \in R_{\nu+1}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2\}$ cümlesine de ν -indeksli ve r -yarıçaplı n -boyutlu pseudohiperbolik uzay denir.

Burada özel olarak $\nu = 1$ için $S_1^n(r)$ pseudoküresel uzayına *de-Sitter n -uzayı* denir.

Şimdi aşağıda şekli verilen $S_1^2(r)$ pseudoküresinden yararlanarak bir dönüşüm tanımlayalım.



Şekil 2.1. r -yarıçaplı pseudoküre $(S_1^2(r))$

$p = (0, \dots, 0, r) \in S_\nu^n(r)$ noktası için $\bar{\Lambda} = \{x \in S_\nu^n(r) \mid x_{n+1} = r\}$, $x \in S_\nu^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ ve

$\bar{x} = \sigma(x) \in \{\bar{x} \in R_\nu^{n+1} \mid \bar{x}_{n+1} = 0\}$ olarak alalım. O halde

$$\overrightarrow{o\bar{x}} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{p\bar{x}}, \quad \overrightarrow{p\bar{x}} = \lambda \overrightarrow{px}$$

eşitliğinde $x_{n+1} \neq r$ için $\lambda = \frac{r}{r - x_{n+1}}$ bulunur. Böylece

$$\bar{x}_i = \frac{rx_i}{r - x_{n+1}}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

elde edilir.

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \frac{r^2}{(r - x_{n+1})^2} \langle z, z \rangle, \quad (x_1, \dots, x_n) = z \in R_v^n$$

ve $x \in S_v^n(r)$ için $\langle x, x \rangle = r^2$ ise

$$\langle z, z \rangle = r^2 - x_{n+1}^2$$

olmasından

$$x_{n+1} = \frac{r \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - r^3}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad (2.2)$$

bulunur. $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \neq -r^2$ için Eş. 2.1 ve Eş. 2.2'den

$$x_i = \frac{2r^2}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \bar{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

elde edilir. O halde $H_{v-1}^{n-1}(r) = \{x \in R_v^n \mid \langle x, x \rangle = -r^2\}$ olmak üzere

$$\sigma: S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda} \rightarrow R_v^n \setminus H_{v-1}^{n-1}(r), \sigma(x) = \frac{r}{r - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

dönüşümü elde edilir. Dönüşümün tersi de Eş. 2.2 ve Eş. 2.3'den

$$\sigma^{-1}: R_v^n \setminus H_{v-1}^{n-1}(r) \rightarrow S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda}, \sigma^{-1}(\bar{x}) = \frac{r}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} (2r\bar{x}_1, \dots, 2r\bar{x}_n, \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - r^2)$$

şeklinde bulunur [4].

2.1. Teorem

σ , birebir ve örten dönüşümdür [4].

İspat

$x, y \in S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ olmak üzere $\sigma(x) = \sigma(y)$ olsun. O zaman

$$\frac{r}{r - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{r}{r - y_{n+1}}(y_1, \dots, y_n)$$

ve

$$x_i = \frac{r - x_{n+1}}{r - y_{n+1}} y_i, \quad (1 \leq i \leq n) \tag{2.4}$$

olur. $x \in S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ için,

$$\langle x, x \rangle = -\sum_{i=1}^v x_i^2 + \sum_{i=v+1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 = r^2$$

ifadesine Eş. 2.4'ün uygulanması ile

$$\frac{r - x_{n+1}}{(r - y_{n+1})^2} \left(-\sum_{i=1}^v y_i^2 + \sum_{i=v+1}^n y_i^2 \right) = r + x_{n+1} \quad (2.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan $y \in S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ için $\langle y, y \rangle = r^2$ olmasından

$$-\sum_{i=1}^v y_i^2 + \sum_{i=v+1}^n y_i^2 = r^2 - y_{n+1}^2 \quad (2.6)$$

yazılabilir. O zaman Eş. 2.5 ve Eş. 2.6'dan $x_{n+1} = y_{n+1}$ bulunur. Eş. 2.4'den $x_i = y_i$, $1 \leq i \leq n+1$ elde edilir. Bu ise σ 'nın birebir olması demektir.

$\forall \bar{x} \in R_v^n \setminus H_{v-1}^{n-1}(r)$ için $\sigma(x) = \bar{x}$ olacak şekilde $\exists x = \sigma^{-1}(\bar{x}) \in S_v^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ mevcut olduğundan σ dönüşümü örtendir.

2.2. Teorem

σ , konform dönüşümdür [4].

İspat

$\bar{x} \in R_v^n \setminus H_{v-1}^{n-1}(r)$ için

$$\sigma^{-1}(\bar{x}) = \frac{r}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} (2r\bar{x}_1, \dots, 2r\bar{x}_n, \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - r^2)$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi R_ν^n 'nin standart bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{x}_i^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$, $1 \leq k, l \leq n$

olmak üzere

$$\frac{\partial \sigma_\ell^{-1}}{\partial \bar{x}_k} = \begin{cases} \left(2r^2 (r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle) - 4\varepsilon_k \bar{x}_k^2 r^2 \right) / (r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2, & k = \ell \\ \left(-4\varepsilon_k \bar{x}_k \bar{x}_\ell r^2 \right) / (r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2, & k \neq \ell \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{-1}}{\partial \bar{x}_k} = \frac{4\varepsilon_k \bar{x}_k r^3}{(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} \quad (2.8)$$

kısmi türevleri bulunur.

$V_{\bar{x}}$, $T_{\bar{x}} R_\nu^n$ 'nin bir tanjant vektörü olsun. Bu durumda R_ν^{n+1} 'in standart bazı $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}\}$ için yarı-Öklidiyen uzayda $(\sigma^{-1})_* = \sigma_*^{-1}$ olmak üzere

$$\sigma_*^{-1} : T_{\bar{x}} R_\nu^n \rightarrow T_{\sigma^{-1}(\bar{x})} R_\nu^{n+1}, \quad \sigma_*^{-1}(V_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell V_{\bar{x}}[\sigma_\ell^{-1}] \bar{e}_\ell \quad (2.9)$$

türev dönüşümünü verelim. Burada $V_{\bar{x}}[\sigma_\ell^{-1}] = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k V_k(\bar{x}) \frac{\partial \sigma_\ell^{-1}}{\partial \bar{x}_k}$ olduğundan Eş. 2.7

ve Eş. 2.8'den

$$V_{\bar{x}}[\sigma_\ell^{-1}] = \frac{-4r^2 \bar{x}_\ell \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right)}{(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} + \frac{2r^2 \varepsilon_\ell V_\ell(\bar{x})}{(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)}, \quad 1 \leq \ell \leq n \quad (2.10)$$

$$V_{\bar{x}}[\sigma_{n+1}^{-1}] = \frac{4r^3 \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right)}{(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} \quad (2.11)$$

elde edilir. Eş. 2.10 ve Eş. 2.11 eşitlikleri Eş.2.9'a uygulandıktan sonra $1 \leq \ell \leq n+1$ için $\varepsilon_\ell = \bar{\varepsilon}_\ell$ alınması halinde

$$A_\ell = \frac{-4r^2 \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right) \bar{x}_\ell + 2r^2 \left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right) \bar{\varepsilon}_\ell V_\ell}{\left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}, \quad 1 \leq \ell \leq n$$

$$A_{n+1} = \frac{4r^3 \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right)}{\left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece

$$\sigma_*^{-1}(V_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell A_\ell \bar{e}_\ell \quad (2.12)$$

elde edilir. Eğer benzer işlemler $W_{\bar{x}} \in T_{\bar{x}} R_V^n$ için uygulanırsa;

$$B_\ell = \frac{-4r^2 \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k W_k(\bar{x}) \right) \bar{x}_\ell + 2r^2 \left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right) \bar{\varepsilon}_\ell W_\ell}{\left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}, \quad 1 \leq \ell \leq n$$

$$B_{n+1} = \frac{4r^3 \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k W_k(\bar{x}) \right)}{\left(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}$$

ifadeleri ile birlikte

$$\sigma_*^{-1}(W_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell B_\ell \bar{e}_\ell \quad (2.13)$$

bulunur. Bu durumda Eş. 2.12 ve Eş. 2.13 kullanılarak

$$\left\langle \sigma_*^{-1}(V_{\bar{x}}), \sigma_*^{-1}(W_{\bar{x}}) \right\rangle_{R_v^{n+1}} = \frac{4r^4}{(r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} \langle V_{\bar{x}}, W_{\bar{x}} \rangle_{R_v^n} \quad (2.14)$$

Eş. 2.14’de σ ’nin *konform dönüşüm* olduğunu gösterir.

2.1. Sonuç

σ , $\nu = 0$ alınması halinde $S^n(r)$ ’nin stereografik izdüşümüne dönüşür [4].

İspat

$\nu = 0$ için $S_0^n(r) = S^n(r)$, $\bar{\Lambda} = \{(0, \dots, 0, r)\}$ ve $H_{-1}^{n-1}(r) = \emptyset$ olması sebebiyle $\sigma: S^n(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\} \rightarrow R_0^n = E^n$ dönüşümü

$$\sigma(x) = \frac{r}{r - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

ve dönüşümün tersi de

$$\sigma^{-1}(\bar{x}) = \frac{r}{r^2 + \|\bar{x}\|^2} \left(2r\bar{x}_1, \dots, 2r\bar{x}_n, \|\bar{x}\|^2 - r^2 \right)$$

olarak bulunur.

2.1. Tanım

$\sigma: S_\nu^n(r) \setminus \bar{\Lambda} \rightarrow R_\nu^n \setminus H_{\nu-1}^{n-1}(r)$, $\sigma(x) = \frac{r}{r - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$ dönüşümüne, $0 \leq \nu \leq n$ için

$S_\nu^n(r)$ ’nin *genelleştirilmiş stereografik izdüşümü* denir [4].

2.2. Sonuç

$\nu = n$ olması halinde $\sigma : S_n^n(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\} \rightarrow R_n^n \setminus S^{n-1}(r)$ dönüşümü bulunur [4].

İspat

$\nu = n$ olmak üzere $y \in H_{n-1}^{n-1}(r) = \{y \in R_n^n \mid \langle y, y \rangle = -r^2\}$ olsun. $\langle y, y \rangle = -\sum_{i=1}^n y_i^2$

olduğundan $\sum_{i=1}^n y_i^2 = r^2$ elde edilir. Bu eşitlikten $H_{n-1}^{n-1}(r) = S_0^{n-1}(r)$ bulunur. Böylece

$$\sigma : S_n^n(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\} \rightarrow R_n^n \setminus S^{n-1}(r)$$

dönüşümü elde edilir.

2.3. Sonuç

$x \in S_\nu^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ olmak üzere

$$(i) \ x_{n+1} > r \Leftrightarrow \sigma(x) \in \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2\}$$

$$(ii) \ x_{n+1} < r \Leftrightarrow \sigma(x) \in \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^2\}.$$

İspat

$x \in S_\nu^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ için

(i) $x_{n+1} > r$ olsun. Eş. 2.2'den

$$\frac{r(\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - r^2)}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > r \Rightarrow \frac{-2r^3}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + r^2 < 0$$

olduğundan

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2$$

elde edilir.

Tersine $\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle < -r^2$ olsun. Bu durumda Eş. 2.2'den

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \frac{r^3 + r^2 x_{n+1}}{r - x_{n+1}} < -r^2 \Rightarrow \frac{2r^3}{r - x_{n+1}} < 0$$

ve $r > 0$ olmasından $x_{n+1} > r$ elde edilir.

(ii) Benzer olarak $x_{n+1} < r$ ise $\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle > -r^2$ bulunur. Tersine

$$\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle > -r^2 \text{ ise } x_{n+1} = \frac{r(\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle - r^2)}{\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle + r^2} < r \text{ olarak bulunur.}$$

2.4. Sonuç

$\nu = n$ için $x \in S^n(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\}$ ve $B = \{x \in R^n \mid \|x\|_{R^n} < r\}$ R^n 'de açık yuvar olsun. O zaman

$$(i) \ x_{n+1} > r \Leftrightarrow \sigma(x) \in R^n \setminus B$$

$$(ii) \ x_{n+1} < r \Leftrightarrow \sigma(x) \in B.$$

İspat

Sonuç 2.2'den $S^{n-1}(r) = \left\{ \bar{x} \in R^n : \|\bar{x}\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = r^2 \right\}$ olacağından

$$\sigma: S_n^n(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\} \rightarrow R_n^n \setminus S^{n-1}(r)$$

dönüşümü bulunur. Bu durumda

(i) $x_{n+1} > r$ olsun. $\sigma(x) = \bar{x} \in R_n^n \setminus S^{n-1}(r)$ olmak üzere

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_{R_n^n} = -\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2$$

ve Sonuç 2.3 (i)'den $-\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 < -r^2$ olur. O halde $\|\bar{x}\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 > r^2$ ve $r > 0$ olduğundan $\|\bar{x}\|_{R^n} > r$ bulunur. Buradan $\sigma(x) = \bar{x} \in R^n / B$.

Tersine $\sigma(x) = \bar{x} \in R^n / B$ olsun.

$$\|\bar{x}\|_{R^n} > r \Rightarrow \|\bar{x}\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 > r^2 \Rightarrow -\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 < -r^2$$

olduğundan $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_{R_n^n} < -r^2$ dir. O halde $\nu = n$ için Sonuç 2.3 (i)'den $x_{n+1} > r$.

(ii) $x_{n+1} < r$ olsun. $\sigma(x) = \bar{x} \in R_n^n \setminus S^{n-1}(r)$ ise $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_{R_n^n} = -\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2$ ve Sonuç 2.3 (ii)

gereğince $-\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 > -r^2$.

Bu durumda

$$\|\bar{x}\|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 < r^2 \Rightarrow \|\bar{x}\|_{R^n} < r$$

olduğundan $\bar{x} = \sigma(x) \in B$ olur. Tersini de benzer şekilde gösterilir.

2.5. Sonuç

$x \in S_\nu^n(r)$ olmak üzere;

$x_{n+1} = -r \Leftrightarrow \sigma(x), R_\nu^n \setminus H_{\nu-1}^{n-1}(r)$ cümlesinin bir null noktasıdır [4].

İspat

Eğer $x \in S_\nu^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ ise

$$\langle x, x \rangle = r^2 \Rightarrow -\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^n x_i^2 = 0$$

olup $z = (x_1, \dots, x_n) \in R_\nu^n$ için

$$\langle z, z \rangle = 0 \tag{2.15}$$

olup $x_{n+1} = -r$ için $\sigma(x) = \frac{z}{2}$ ve Eş. 2.15'den

$$\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle = 0$$

bulunur.

Tersine Eş. 2.2'den $x_{n+1} = \frac{r \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - r^3}{r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ olduğundan $x_{n+1} = -r$ olarak

bulunur.

3. PSEUDOKÜRELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİYON

σ , genelleştirilmiş stereografik izdüşüm, Φ , $\Omega = \{x \in R_\nu^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ hiperdüzlemine göre R_ν^{n+1} 'in yarı-Öklidiyen yansıması ve Λ , R_ν^n 'nin orijindeki null-konisi olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem, $S_\nu^{n-1}(r)$ 'in inversiyonunu tanımlamamıza imkân verir.

3.1. Teorem

Ψ dönüşümü $0 \leq \nu \leq n-1$ için

$$\Psi = \sigma \circ \Phi \circ \sigma^{-1} : R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda) \rightarrow R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda), \quad \Psi(\bar{x}) = \frac{r^2 \bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $S_\nu^{n-1}(r)$, Ψ dönüşümü altında değişmezdir [4].

İspat

$\bar{x} \in S_\nu^{n-1}(r)$ ise $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = r^2$ ve Ψ nin tanımından $\Psi(\bar{x}) = \bar{x}$ dir. O zaman

$$\langle \Psi(\bar{x}), \Psi(\bar{x}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = r^2$$

olduğu görülür.

3.1. Tanım

Ψ dönüşümüne, $S_\nu^{n-1}(r)$ pseudoküresine göre *genelleştirilmiş inversiyon* denir [4].

3.1. Sonuç

$\nu = 0$ ise Ψ dönüşümü E^n Öklidiyen uzayında $S^{n-1}(r)$ küresine göre inversiyon ile çakışır [4].

İspat

$\nu = 0$ için $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_{R_0^n} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = \|\bar{x}\|_{R^n}^2$ olup Ψ 'nin tanımından

$$\Psi(\bar{x}) = \frac{r^2 \bar{x}}{\|\bar{x}\|_{R^n}^2} \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.1 istenen inversiyon dönüşümüdür.

3.2. Sonuç

$R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda)$ cümlesinin spacelike ve timelike noktaları Ψ dönüşümü altında değişmezdir [4].

İspat

$\bar{x} \in R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda)$ olmak üzere;

$\bar{x}$ spacelike ise $\langle \Psi(\bar{x}), \Psi(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0$ olduğundan $\Psi(\bar{x})$ spacelike,

$\bar{x}$ timelike ise $\langle \Psi(\bar{x}), \Psi(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$ olduğundan $\Psi(\bar{x})$ timelike

olur. O halde $R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda)$ cümlesinin spacelike ve timelike noktaları Ψ dönüşümü altında değişmez.

3.2. Teorem

Ψ , $S_\nu^{n-1}(r)$ 'in genelleştirilmiş inversiyonu olsun. Bu takdirde $\Psi = \Psi^{-1}$ dir [4].

İspat

$\bar{x} \in R_\nu^n \setminus (H_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \Lambda)$ olsun.

$$\Psi^2(\bar{x}) = \Psi(\Psi(\bar{x})) = \Psi\left(\frac{r^2 \bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}\right) = \frac{r^2 \left(\frac{r^2 \bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}\right)}{\left\langle \frac{r^2 \bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}, \frac{r^2 \bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \right\rangle} = \bar{x} \quad (3.2)$$

O halde Eş. 3.2'den

$$\Psi^2(\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \Psi^2 = I$$

olmasından istenen elde edilmiş olur.

3.3. Sonuç

$$M_1 = \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2\}, M_2 = \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid -r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0\}$$

$$N_1 = \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid -r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\}, N_2 = \{\bar{x} \in R_\nu^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2\}$$

cümlelerine göre $i = 1, 2$ için $\Psi|_{M_i}: M_i \rightarrow N_i$ dönüşümü örtendir [4].

İspat

$\forall \bar{y} \in N_i$ için $\Psi|_{M_i}(\bar{x}) = \bar{y}$ olacak şekilde $\exists \bar{x} \in M_i$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

$i = 1$ için $\bar{y} \in N_1$ olsun. Bu durumda

$$-r^2 < \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \Rightarrow \langle \Psi|_{M_1}(\bar{x}), \Psi|_{M_1}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > -r^2 \Rightarrow \frac{r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^2 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$$

olur.

II. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2$$

olur.

O halde II. durumdan $\exists \bar{x} \in M_1$ olup $\Psi|_{M_1}$ örtendir.

$i = 2$ için $\bar{y} \in N_2$ olsun. Bu durumda

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle < -r^2 \Rightarrow \langle \Psi|_{M_2}(\bar{x}), \Psi|_{M_2}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < -r^2 \Rightarrow \frac{r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0 \Rightarrow -r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$$

olur.

II. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ olması halinde çelişki olur.

O halde I. durumdan $\exists \bar{x} \in M_2$ olup $\Psi|_{M_2}$ örtendir.

3.4. Sonuç

$$M_1' = \{ \bar{x} \in R_v^n \mid 0 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \}, M_2' = \{ \bar{x} \in R_v^n \mid r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \}$$

$$N_1' = \{ \bar{x} \in R_v^n \mid r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \}, N_2' = \{ \bar{x} \in R_v^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \}$$

cümlelerine göre $i = 1, 2$ için $\Psi|_{M_i'}: M_i' \rightarrow N_i'$ dönüşümü örtendir [4].

İspat

$\forall \bar{y} \in N_i'$ için $\Psi|_{M_i'}(\bar{x}) = \bar{y}$ olacak şekilde $\exists \bar{x} \in M_i'$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

$i = 1$ için $\bar{y} \in N_1'$ olsun.

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle > r^2 \Rightarrow \langle \Psi|_{M_1'}(\bar{x}), \Psi|_{M_1'}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > r^2 \Rightarrow \frac{r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0 \Rightarrow 0 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2$$

olur.

II. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ olması halinde çelişki olur.

O halde I. durumdan $\exists \bar{x} \in M_1'$ olup $\Psi|_{M_1'}$ örtendir.

$i = 2$ için $\bar{y} \in N_2'$ olsun.

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle < r^2 \Rightarrow \left\langle \Psi|_{M_2'}(\bar{x}), \Psi|_{M_2'}(\bar{x}) \right\rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < r^2 \Rightarrow \frac{r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$$

olur.

II. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

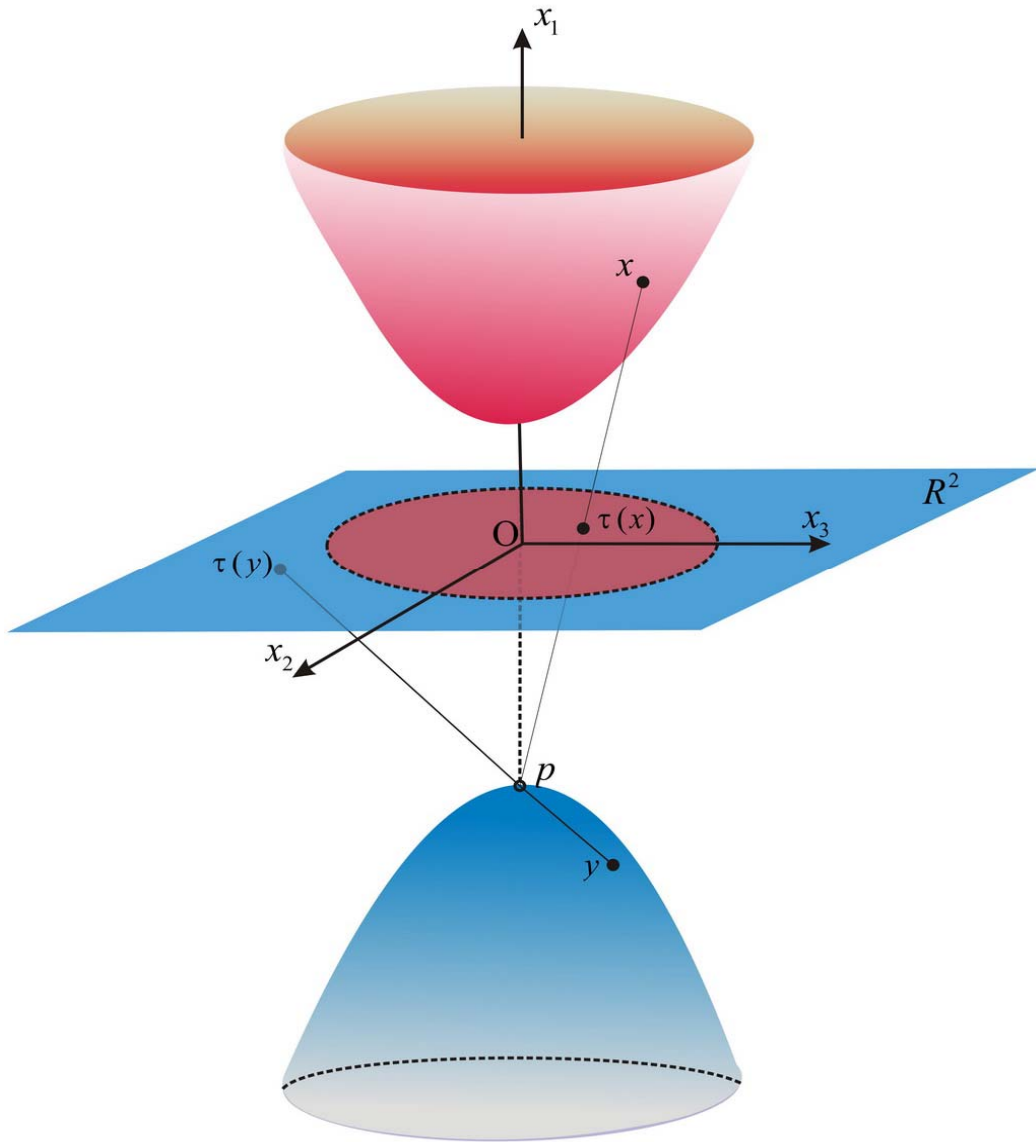
$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^2$$

olur.

O halde II. durumdan $\exists \bar{x} \in M_2'$ olup $\Psi|_{M_2'}$ örtendir

4. PSEUDOHİPERBOLİK UZAY İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM

Bu bölümde [4]'de anti-izometri kullanılarak bulunabileceği söylenen pseudohiperbolik uzaylar için stereografik izdüşüm, bu anti-izometriye ihtiyaç duyulmadan elde edilecektir. Ayrıca Bölüm 2'de verilen teorem ve sonuçlar, *pseudohiperbolik uzayın genelleştirilmiş stereografik izdüşümü* için ifade ve ispat edilecektir.



Şekil 4.1. r -yarıçaplı pseudohiperbolik $(H_0^2(r))$

$p = (-r, 0, \dots, 0) \in H_{\nu-1}^n(r)$, $\bar{\bar{\Lambda}} = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H_{\nu-1}^n(r) \mid x_1 = -r\}$ hiperdüzlemi ve $x \in H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}$ için $\bar{x} = \tau(x) \in \{\bar{x} \in R_{\nu}^{n+1} \mid \bar{x}_1 = 0\}$ olsun. Şekil 4.1 yardımıyla

$$\overrightarrow{o\bar{x}} = \overrightarrow{op} + \mu \overrightarrow{px}, \quad \overrightarrow{p\bar{x}} = \mu \overrightarrow{px}$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda $x_1 \neq -r$ için $\mu = \frac{r}{r+x_1}$ olup,

$$\bar{x}_j = \frac{r}{r+x_1} x_j, \quad 2 \leq j \leq n+1 \quad (4.1)$$

elde edilir.

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \frac{r^2}{(r+x_1)^2} \langle u, u \rangle, \quad (x_2, \dots, x_{n+1}) = u \in R_{\nu-1}^n$$

ve $x \in H_{\nu-1}^n(r)$ için $\langle x, x \rangle = -r^2$ ise $\langle u, u \rangle = x_1^2 - r^2$ eşitliğinden

$$x_1 = \frac{r \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + r^3}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad (4.2)$$

bulunur. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2'den $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \neq r^2$ olmak üzere

$$x_j = \frac{2r^2}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \bar{x}_j, \quad 2 \leq j \leq n+1 \quad (4.3)$$

bulunur. Burada $S_{\nu-1}^{n-1}(r) = \{x \in R_{\nu-1}^n \mid \langle x, x \rangle = r^2\}$ olduğundan

$$\tau : H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}} \rightarrow R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r), \quad \tau(x) = \frac{r}{r+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1})$$

dönüşümünü elde ederiz.

Bu dönüşümün tersinin de Eş. 4.2 ve Eş. 4.3'den

$$\tau^{-1} : R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r) \rightarrow H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}, \quad \tau^{-1}(\bar{x}) = \frac{r}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \left((r^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle), 2r\bar{x}_2, \dots, 2r\bar{x}_{n+1} \right)$$

olduğunu görürüz.

4.1. Teorem

τ dönüşümü birebir ve örtendir.

İspat

$x, y \in H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}$ için $\tau(x) = \tau(y)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{r+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{r}{r+y_1}(y_2, \dots, y_{n+1})$$

ve

$$x_j = \frac{r+x_1}{r+y_1} y_j, \quad (2 \leq j \leq n+1) \tag{4.4}$$

olur. $x \in H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}$ olduğundan

$$\langle x, x \rangle = -x_1^2 - \sum_{i=2}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i^2 = -r^2$$

eşitliğine Eş.4.4'ün uygulanması ile

$$\frac{(r + x_1)^2}{(r + y_1)^2} \left(-\sum_{i=2}^{\nu} y_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} y_i^2 \right) = x_1^2 - r^2 \quad (4.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $y \in H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}$ için $\langle y, y \rangle = -r^2$ olduğundan

$$-\sum_{i=2}^{\nu} y_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} y_i^2 = y_1^2 - r^2 \quad (4.6)$$

yazılabilir. O zaman Eş. 4.5 ve Eş. 4.6'dan $x_1 = y_1$ bulunur. Son olarak Eş. 4.4'den $x_j = y_j$, $2 \leq j \leq n+1$ elde edilir. Böylece τ dönüşümü birebirdir.

İkinci olarak;

$\forall \bar{x} \in R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r)$ için $\tau(x) = \bar{x}$ olacak şekilde

$$\exists x = \left(\frac{r(\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + r^2)}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}, \frac{2r\bar{x}_2}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}, \dots, \frac{2r\bar{x}_{n+1}}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \right) \in H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}}$$

mevcut olduğundan τ dönüşümü örtendir.

4.2. Teorem

τ , konform dönüşümdür.

İspat

Herhangi $\bar{x} \in R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r)$ için

$$\tau^{-1}(\bar{x}) = \left(\frac{r \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + r^3}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}, \frac{2r}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \bar{x}_2, \dots, \frac{2r}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \bar{x}_{n+1} \right)$$

olduğu gösterildi.

Şimdi $R_{\nu-1}^n$ 'nin standart bazı $\{e_2, \dots, e_{n+1}\}$, $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$, $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=2}^{n+1} \varepsilon_j \bar{x}_j^2$ olmak üzere $2 \leq k, l \leq n+1$ için

$$\frac{\partial \tau_1^{-1}}{\partial \bar{x}_k} = \frac{4\varepsilon_k \bar{x}_k r^3}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \tau_\ell^{-1}}{\partial \bar{x}_k} = \begin{cases} \left(2r^2 (r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle) + 4\varepsilon_k \bar{x}_k^2 r^2 \right) / (r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2, & k = \ell \\ (4\varepsilon_k \bar{x}_k \bar{x}_\ell r^2) / (r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2, & k \neq \ell \end{cases} \quad (4.8)$$

kısmi türevleri bulunur.

R_ν^{n+1} 'in standart bazı $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}\}$ ve $V_{\bar{x}}$, $T_{\bar{x}} R_{\nu-1}^n$ 'nin bir tanjant vektörü olsun. Bu durumda yarı-Öklidiyen uzayda $(\tau^{-1})_* = \tau_*^{-1}$ için

$$\tau_*^{-1} : T_{\bar{x}} R_{\nu-1}^n \rightarrow T_{\tau^{-1}(\bar{x})} R_\nu^{n+1}, \quad \tau_*^{-1}(V_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell V_{\bar{x}}[\tau_\ell^{-1}] \bar{e}_\ell \quad (4.9)$$

türev dönüşümünü ele alalım.

$$V_{\bar{x}}[\tau_\ell^{-1}] = \sum_{k=2}^{n+1} \varepsilon_k V_k(\bar{x}) \frac{\partial \tau_\ell^{-1}}{\partial \bar{x}_k}, \quad 1 \leq \ell \leq n+1$$

olmak üzere Eş. 4.7 ve Eş. 4.8'den

$$V_{\bar{x}}[\tau_1^{-1}] = \frac{4r^3}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} \sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \quad (4.10)$$

$$V_{\bar{x}}[\tau_\ell^{-1}] = \frac{4r^2 \bar{x}_\ell \left(\sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right)}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2} + \frac{2r^2 \varepsilon_\ell V_\ell(\bar{x})}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)} \quad (4.11)$$

elde edilir. Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 eşitlikleri Eş.4.9'a uygulandıktan sonra $1 \leq \ell \leq n+1$ için $\varepsilon_\ell = \bar{\varepsilon}_\ell$ alınması halinde kolay gösterim açısından

$$R_1 = \frac{4r^3 \left(\sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right)}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2}$$

$$R_\ell = \frac{4r^2 \bar{x}_\ell \left(\sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k V_k(\bar{x}) \right) + 2r^2 (r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle) \bar{\varepsilon}_\ell V_\ell(\bar{x})}{(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2}, \quad 2 \leq \ell \leq n+1$$

eşitliklerinin yazılmasıyla

$$\tau_*^{-1}(V_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell R_\ell \bar{\varepsilon}_\ell \quad (4.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde $W_{\bar{x}} \in T_{\bar{x}} R_{\nu-1}^n$ için

$$S_1 = \frac{4r^3 \left(\sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k W_k(\bar{x}) \right)}{\left(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}$$

$$S_\ell = \frac{4r^2 \bar{x}_\ell \left(\sum_{k=2}^{n+1} \bar{x}_k W_k(\bar{x}) \right) + 2r^2 \left(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right) \bar{\varepsilon}_\ell W_\ell(\bar{x})}{\left(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2}, \quad 2 \leq \ell \leq n+1$$

eşitliklerinin yardımıyla

$$\tau_*^{-1}(W_{\bar{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \bar{\varepsilon}_\ell S_\ell \bar{\varepsilon}_\ell \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda Eş. 4.12 ve Eş. 4.13'den

$$\left\langle \tau_*^{-1}(V_{\bar{x}}), \tau_*^{-1}(W_{\bar{x}}) \right\rangle_{R_{\nu}^{n+1}} = \frac{4r^4}{\left(r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \right)^2} \left\langle V_{\bar{x}}, W_{\bar{x}} \right\rangle_{R_{\nu-1}^n} \quad (4.14)$$

elde edilir.

4.1. Tanım

$1 \leq \nu \leq n+1$ için

$$\tau : H_{\nu-1}^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}} \rightarrow R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r), \quad \tau(x) = \frac{r}{r + x_1} (x_2, \dots, x_{n+1})$$

dönüşümüne, pseudohiperbolik uzayda $H_{\nu-1}^n(r)$ 'nin *genelleştirilmiş stereografik izdüşümü* denir.

4.1. Sonuç

$\nu = 1$ için $\tau : H^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}} \rightarrow E^n \setminus S^{n-1}(r)$ d6şümü elde edilir.

İspat

$H_0^n(r) = H^n(r) = \{z \in R_1^{n+1} \mid \langle z, z \rangle = -r^2\}$ ve $R_0^n = E^n$ olsun. Bu durumda $S_0^{n-1}(r) = S^{n-1}(r) = \{\bar{z} = (z_2, \dots, z_{n+1}) \in R^n \mid \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle = r^2\}$ küresi ile birlikte $\nu = 1$ özel halinde

$$\tau : H^n(r) \setminus \bar{\bar{\Lambda}} \rightarrow E^n \setminus S^{n-1}(r)$$

bulunur.

4.2. Sonuç

$\nu = n + 1$ için $\tau : S^n(r) \setminus \{(-r, 0, \dots, 0)\} \rightarrow R_n^n \setminus S_n^n(r)$ haline dönüşür.

İspat

$H_n^n(r) = \{z \in R_{n+1}^{n+1} \mid \langle z, z \rangle = -r^2\}$ olsun. $z \in R_{n+1}^{n+1}$ için $\langle z, z \rangle = -\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2$ olduğundan

$\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = r^2$ ve $z \in S^n(r)$ olur. Yani $H_n^n(r) = S^n(r)$.

Böylece $\nu = n + 1$ için $\tau : S^n(r) \setminus \{(-r, 0, \dots, 0)\} \rightarrow R_n^n \setminus S_n^n(r)$ dönüşümü elde edilir.

4.2. Tanım

τ stereografik izdüşümünün $H_+^n(r) = \{z \in R_1^{n+1} \mid \langle z, z \rangle = -r^2, z_1 \geq r\}$ cümlesine kısıtlanmış olan

$$\tau_H : H_+^n(r) \setminus \bar{\Lambda} \rightarrow R^n \setminus S^{n-1}(r)$$

dönüşümüne *hiperbolik n-uzayın stereografik izdüşümü* denir.

$H_+^n(r)$ hiperbolik uzay üzerine kısıtlanmış olan τ_H stereografik izdüşümü [10]'daki stereografik izdüşüm ile örtüşmektedir.

4.3. Sonuç

$x \in H_{v-1}^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ olmak üzere

$$(i) \ x_1 > -r \Leftrightarrow \tau(x) \in \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2\}$$

$$(ii) \ x_1 < -r \Leftrightarrow \tau(x) \in \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^2\}.$$

İspat

$x \in H_{v-1}^n(r) \setminus \bar{\Lambda}$ için

$$(i) \ x_1 > -r \text{ olsun. Eş. 4.2'den } x_1 = \frac{r\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + r^3}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > -r \text{ olduğundan } \frac{2r^3}{r^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0 \text{ dir.}$$

Buradan $r > 0$ olmasından dolayı $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2$ bulunur.

Tersine $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2$ olsun. Bu durumda Eş. 2.2'den $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \frac{r^2(x_1 - r)}{(x_1 + r)}$ yazılabilir.

Dolayısıyla $\frac{r^2(x_1 - r)}{(x_1 + r)} < r^2$ eşitsizliğinden

$$\frac{-2r}{x_1 + r} < 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Son olarak $r > 0$ olması ile Eş. 4.15'den $x_1 > -r$ elde edilir.

(ii) Benzer olarak $x_1 < -r$ ise $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^2$ ve tersine $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^2$ iken $x_1 < -r$ bulunur.

4.4. Sonuç

$x \in H_{\nu-1}^n(r)$ olmak üzere

$x_1 = r \Leftrightarrow \tau(x), R_{\nu-1}^n \setminus S_{\nu-1}^{n-1}(r)$ cümlesinin bir null noktasıdır.

İspat

Eğer $x \in H_{\nu-1}^n(r)$ ve $x_1 = r$ ise $-\sum_{i=2}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i^2 = 0$ olup $u = (x_2, \dots, x_{n+1}) \in R_{\nu-1}^n$ için

$$\langle u, u \rangle = 0 \quad (4.16)$$

bulunur. $x_1 = r$ için $\tau(x) = \frac{u}{2}$ ve Eş. 4.16'den

$$\langle \tau(x), \tau(x) \rangle = 0 \quad (4.17)$$

O halde Eş. 4.17'den $\tau(x)$, $R_{v-1}^n \setminus S_{v-1}^{n-1}(r)$ 'in bir null noktasıdır.

Tersine Eş. 4.2'den $x_1 = \frac{r \langle \tau(x), \tau(x) \rangle + r^3}{r^2 - \langle \tau(x), \tau(x) \rangle}$ ve $\langle \tau(x), \tau(x) \rangle = 0$ olduğundan $x_1 = r$.

5. PSEUDOHİPERBOLİK UZAY İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİYON

τ , pseudohiperbolik uzayın genelleştirilmiş stereografik izdüşümü olsun. Bu durumda $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Omega} = \{x \in R_{\nu}^{n+1} \mid x_1 = 0\}$ hiperdüzlemine göre R_{ν}^{n+1} 'in yarı-Öklidiyen yansıması olmak üzere; $\tilde{\Lambda} = \{\bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in R_{\nu-1}^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0\}$ cümlesi $R_{\nu-1}^n$ 'nin orijindeki null-konisi olsun. O halde aşağıdaki teorem $H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ için inversiyon tanımlama imkânı verir.

5.1. Teorem

$2 \leq \nu \leq n+1$ için

$$\bar{\Psi} = \tau \circ \tilde{\Phi} \circ \tau^{-1} : R_{\nu-1}^n \setminus (S_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \tilde{\Lambda}) \rightarrow R_{\nu-1}^n \setminus (S_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \tilde{\Lambda})$$

$$\bar{\Psi}(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) = \frac{-r^2}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1})$$

şeklinde tanımlı dönüşüm altında $H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ değişmez.

İspat

$\forall \bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ için $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = -r^2$ olup $\bar{\Psi}$ 'nin tanımından

$$\bar{\Psi}(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1})$$

olduğu görülür. Bu takdirde $\langle \bar{\Psi}(\bar{x}), \bar{\Psi}(\bar{x}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = -r^2$ olur.

5.1. Tanım

$\bar{\Psi}$ dönüşümüne, $H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ pseudohiperbolik uzayına göre genelleştirilmiş inversiyon denir.

5.1. Sonuç

$R_{\nu-1}^n \setminus (S_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \tilde{\Lambda})$ cümlesinin spacelike ve timelike noktaları $\bar{\Psi}$ dönüşümü altında değişmezdir.

İspat

$\bar{x} \in R_{\nu-1}^n \setminus (S_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \tilde{\Lambda})$ olmak üzere

$\bar{x}$ spacelike ise $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için $\langle \bar{\Psi}(\bar{x}), \bar{\Psi}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0$ olduğundan $\bar{\Psi}(\bar{x})$ spacelikedir.

$\bar{x}$ timelike ise $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için $\langle \bar{\Psi}(\bar{x}), \bar{\Psi}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$ olduğundan $\bar{\Psi}(\bar{x})$ timelikedir.

5.2. Teorem

$\bar{\Psi}$, $H_{\nu-2}^{n-1}(r)$ için genelleştirilmiş inversiyon olsun. Bu takdirde $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^{-1}$ dir.

İspat

$\bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in R_{\nu-1}^n \setminus (S_{\nu-1}^{n-1}(r) \cup \tilde{\Lambda})$ için

$$\bar{\Psi}^2(\bar{x}) = \bar{\Psi}(\bar{\Psi}(\bar{x})) = \bar{\Psi}\left(\frac{-r^2\bar{x}}{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle}\right) = \frac{-r^2\left(\frac{-r^2\bar{x}}{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle}\right)}{\left\langle\frac{-r^2\bar{x}}{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle}, \frac{-r^2\bar{x}}{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle}\right\rangle} = \bar{x}$$

O halde

$$\bar{\Psi}^2 = I$$

olur.

5.2. Sonuç

$$U_1 = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle < -r^2\}, U_2 = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid -r^2 < \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle < 0\}$$

$$V_1 = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid -r^2 < \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle\}, V_2 = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle < -r^2\}$$

cümlelerine göre $i = 1, 2$ için $\bar{\Psi}|_{U_i}: U_i \rightarrow V_i$ dönüşümü örtendir.

İspat

$\forall \bar{y} = (\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n+1}) \in V_i$ için $\bar{\Psi}|_{U_i}(\bar{x}) = \bar{y}$ olacak şekilde $\exists \bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in U_i$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

$i = 1$ için $\bar{y} \in V_1$ olmak üzere

$$-r^2 < \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle \Rightarrow \langle\bar{\Psi}|_{U_1}(\bar{x}), \bar{\Psi}|_{U_1}(\bar{x})\rangle = \frac{r^4}{\langle\bar{x}, \bar{x}\rangle} > -r^2 \Rightarrow \frac{r^4 + r^2 \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle}{\langle\bar{x}, \bar{x}\rangle} > 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^2 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$$

olur.

II. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < -r^2$$

olur.

O halde II. durumdan $\exists \bar{x} \in U_1$ olup $\bar{\Psi}|_{U_1}$ örtendir.

$i = 2$ için $\bar{y} \in V_2$ olmak üzere

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle < -r^2 \Rightarrow \langle \bar{\Psi}|_{U_2}(\bar{x}), \bar{\Psi}|_{U_2}(\bar{x}) \rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < -r^2 \Rightarrow \frac{r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > -r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0 \Rightarrow -r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$$

olur

II. durum, $r^4 + r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ olması halinde çelişki olur.

O halde I. durumdan $\exists \bar{x} \in U_2$ olup $\bar{\Psi}|_{U_2}$ örtendir.

5.3. Sonuç

$$U_1' = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid 0 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2\}, U_2' = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\}$$

$$V_1' = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid r^2 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\}, V_2' = \{\bar{x} \in R_{v-1}^n \mid \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2\}$$

cümlelerine göre $i = 1, 2$ için $\bar{\Psi}|_{U_i'}: U_i' \rightarrow V_i'$ dönüşümü örtendir.

İspat

$\forall \bar{y} = (\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n+1}) \in V_i'$ için $\bar{\Psi}|_{U_i'}(\bar{x}) = \bar{y}$ olacak şekilde $\exists \bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}) \in U_i'$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

$i = 1$ için $\bar{y} \in V_1'$ olmak üzere

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle > r^2 \Rightarrow \left\langle \bar{\Psi}|_{U_1'}(\bar{x}), \bar{\Psi}|_{U_1'}(\bar{x}) \right\rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > r^2 \Rightarrow \frac{r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} > 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0 \Rightarrow 0 < \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2$$

olur.

II. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ olması halinde çelişki olur.

O halde I. durumdan $\exists \bar{x} \in U_1'$ olup $\Psi|_{U_1'}$ örtendir.

$i = 2$ için $\bar{y} \in V_2'$ olmak üzere

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle < r^2 \Rightarrow \left\langle \bar{\Psi}|_{U_2'}(\bar{x}), \bar{\Psi}|_{U_2'}(\bar{x}) \right\rangle = \frac{r^4}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < r^2 \Rightarrow \frac{r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} < 0$$

elde edilir.

I. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < r^2 \text{ ve } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$$

olur.

II. durum, $r^4 - r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$ ve $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$ için

$$r^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^4 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > r^2$$

olur.

O halde II. durumdan $\exists \bar{x} \in U_2'$ olup $\Psi|_{U_2'}$ örtendir.

6. STEREOGRAFİK İZDÜŞÜMÜN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde hiperbolik 3-uzaydaki $(H_+^3(1))$ bazı yüzey çeşitleri ve bunların stereografik izdüşümleri incelendi. Şimdi $H_+^3(1)$ 'in Lorentziyen modelini ele alıp bazı temel tanım ve teoremleri verelim.

6.1. Tanım

c bir reel sayı olmak üzere R_1^4 'de ω *pseudo-normalli* bir hiperdüzlem

$$HP(\omega, c) = \{x \in R_1^4 \mid \langle x, \omega \rangle = c\}$$

ile gösterilsin. Eğer

ω spacelike ise $HP(\omega, c)$ timelike hiperdüzlem,

ω timelike ise $HP(\omega, c)$ spacelike hiperdüzlem,

ω lightlike ise $HP(\omega, c)$ lightlike hiperdüzlem

denir [11].

6.2. Tanım

R_1^4 'ün standart bazı $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ ve $x_i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ olmak üzere herhangi $x_1, x_2, x_3 \in R_1^4$ için $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ vektörüne x_i ($i = 1, 2, 3$) vektörlerine *pseudo-ortogonal vektör* denir ve

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

determinantı ile ifade edilir [11].

6.3. Tanım

R_1^4 'de verilen $H(\omega, c)$ hiperdüzlemiyle $H_+^3(1)$ 'in arakesiti ile belirlenen $\Gamma(\omega, c) = H_+^3(1) \cap H(\omega, c)$ yüzeyine;

$H(\omega, c)$ spacelike hiperdüzlem ise *küre*,

$H(\omega, c)$ timelike hiperdüzlem ise hiperküre,

$H(\omega, c)$ lightlike hiperdüzlem ise *horoküre*

denir [11].

Özel olarak $\Gamma(\omega, c)$ horoküre ise $HS^2(\omega, c) = H_+^3(1) \cap H(\omega, c)$ şeklinde gösterilir.

$\gamma : I \rightarrow H_+^3(1)$ s yay parametrelili regüler birim hızlı bir eğri olsun. O zaman $t(s) = \gamma'(s)$ teğet vektörüne sahiptir. $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq -1$ olması halinde

$n(s) = \frac{t'(s) - \gamma(s)}{\|t'(s) - \gamma(s)\|}$ birim vektörüne sahiptir. Bununla birlikte

$e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$ vektörünü tanımlayalım. O zaman R_1^4 'ün γ boyunca bir

$\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ pseudo ortonormal bazı ele alınabilir. O halde $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq -1$

şartı ile aşağıdaki Serret-Frenet tipindeki formulleri yazabiliriz.

$$\kappa_h(s) = \|t'(s) - \gamma(s)\|, \quad \tau_h(s) = \frac{\det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{(\kappa_h(s))^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= t(s) \\
t'(s) &= \kappa_h(s)n(s) + \gamma(s) \\
n'(s) &= -\kappa_h(s)t(s) + \tau_h(s)e(s) \\
e'(s) &= -\tau_h(s)n(s)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur [11].

6.4. Tanım

$\kappa_h(s) \equiv 1$ ve $\tau_h(s) \equiv 0$ olması halinde γ 'ya bir *horocycle* denir [12].

6.1. Teorem

$a_0 \in H_+^3(1)$ ve $a_1, a_2 \in S_1^3(1)$ için $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$, ($\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) olsun. Bu durumda $\gamma(0) = a_0$, $\gamma'(0) = a_1$, $\gamma''(0) = a_0 + a_2$ başlangıç şartları ile verilen horocycle $\gamma(s) = a_0 + sa_1 + \frac{s^2}{2}(a_0 + a_2)$ şeklinde tek türlü ifade edilir [12].

6.1. Örnek

$U \subset \mathbb{R}^2$ nin açık bir altcümlesi için

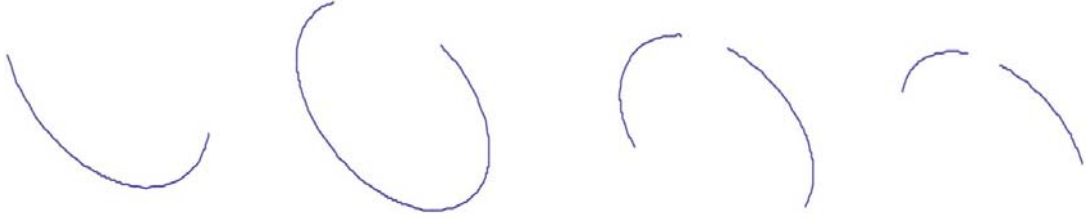
$$x: U \rightarrow H_+^3(1), \quad x(u, v) = (\sqrt{2} \cosh u, \sin v, \sqrt{2} \sinh u, \cos v)$$

regüler bir yüzey olmak üzere $M = x(U)$ olsun. Bu durumda $E: U \rightarrow S_1^3$, $E(u_1, u_2) = e(u_1, u_2)$ x 'in de-Sitter Gauss dönüşümü olmak üzere

$$e(u, v) = \frac{x(u, v) \wedge x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)}{\|x(u, v) \wedge x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)\|} \text{ şeklinde tanımlansın. } v = v_0 \text{ sabit değeri için}$$

$$a_0 = x(0, v_0), \quad a_1 = \frac{x_u(u, v)}{\|x_u(u, v)\|}, \quad a_2 = e(0, v_0)$$

seçimleriyle $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$, $(\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1)$ olur. O halde Şekil 6.1, Teorem 6.1 gereğince $v = \frac{\pi}{3}$ sabit değeri için tek türlü olan $\gamma(s) = a_0 + sa_1 + \frac{s^2}{2}(a_0 + a_2)$ horocycle'ın τ_H stereografik izdüşümü altındaki görüntüsüdür.



Şekil 6.1. Horocycle'ın stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri

6.5. Tanım

$\gamma : I \rightarrow H_+^3(1)$ ve $i=1,2$ için $a_i : I \rightarrow S_1^3(1)$ düzgün(diferensiyellenebilir) dönüşümler ve $\langle \gamma(t), a_i(t) \rangle = \langle a_1(t), a_2(t) \rangle = 0$ olsun. $a_3(t) = \gamma(t) \wedge a_1(t) \wedge a_2(t)$ birim spacelike vektörü ile R_1^4 'ün bir pseudo-orthonormal bazı $\{\gamma, a_1, a_2, a_3\}$ olsun. Bu durumda $\ell(t) = \gamma(t) + a_2(t)$ olmak üzere

$$F_{(\gamma, a_1, a_2)} : R \times I \rightarrow H_+^3(1), \quad F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t) = \gamma(t) + sa_1(t) + \frac{s^2}{2} \ell(t)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *horodairesel yüzey* denir [12].

6.2. Örnek

γ, a_1, a_2 eğrileri

$$\gamma : I \rightarrow H_+^3(1), \quad \gamma(t) = (\sqrt{2} \cosh t, \cos t, \sqrt{2} \sinh t, \sin t)$$

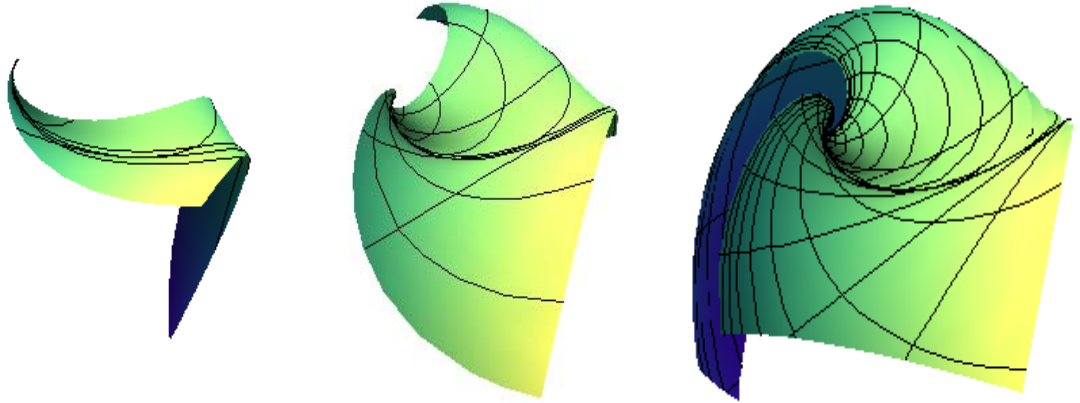
$$a_1 : I \rightarrow S_1^3(1), a_1(t) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sinh t, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, \sqrt{\frac{2}{3}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \right)$$

$$a_2 : I \rightarrow S_1^3(1), a_2(t) = (-\cosh t, -\sqrt{2} \cos t, -\sinh t, -\sqrt{2} \sin t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Şekil 6.2

$$F_{(\gamma, a_1, a_2)} : R \times I \rightarrow H_+^3(1), F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t) = \gamma(t) + s a_1(t) + \frac{s^2}{2} \ell(t)$$

dönüşümü ile belirlenen horodairesel yüzeyin τ_H stereografik izdüşümü altındaki görüntüsüdür.



Şekil 6.2. Horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri

6.6. Tanım

$\{\gamma, a_1, a_2, a_3\}$ pseudo-orthonormal bazı yardımıyla tanımlanan $c_i(t), 1 \leq i \leq 6$ ifadelerine hiperbolik invaryant denir.

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \langle \gamma'(t), a_1(t) \rangle = -\langle \gamma(t), a_1'(t) \rangle, & c_4(t) &= \langle a_1'(t), a_2(t) \rangle = -\langle a_1(t), a_2'(t) \rangle, \\ c_2(t) &= \langle \gamma'(t), a_2(t) \rangle = -\langle \gamma(t), a_2'(t) \rangle, & c_5(t) &= \langle a_1'(t), a_3(t) \rangle = -\langle a_1(t), a_3'(t) \rangle, \\ c_3(t) &= \langle \gamma'(t), a_3(t) \rangle = -\langle \gamma(t), a_3'(t) \rangle, & c_6(t) &= \langle a_2'(t), a_3(t) \rangle = -\langle a_2(t), a_3'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Bu invariantlar ile horodairesel yüzeyler için aşağıdaki diferensiyel eşitlikler ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= c_1(t)a_1(t) + c_2(t)a_2(t) + c_3(t)a_3(t), \\ a_1'(t) &= c_1(t)\gamma(t) + c_4(t)a_2(t) + c_5(t)a_3(t), \\ a_2'(t) &= c_2(t)\gamma(t) - c_4(t)a_1(t) + c_6(t)a_3(t), \\ a_3'(t) &= c_3(t)\gamma(t) + c_5(t)a_1(t) - c_6(t)a_2(t).\end{aligned}$$

Bu diferensiyel eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \gamma'(t) \\ a_1'(t) \\ a_2'(t) \\ a_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(1,3)$$

katsayılar matrisi özel yarı-Ortogonal grup $SO(1,3)$ 'ün Lie cebiri $\mathfrak{so}(1,3)$ 'in elemanıdır.

$A(t_0) \in SO(1,3)$ başlangıç şartı altında $C : I \rightarrow \mathfrak{so}(1,3)$, $C(t) = A'(t)A(t)^{-1}$ ile tanımlı düzgün eğri olacak şekilde bir tek $A : I \rightarrow SO(1,3)$ eğrisi mevcuttur. Bu C eğrisi $\{\gamma(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)\}$ pseudoortonormal bazının hiperbolik invariantıdır [12].

Bu durumda *Whitney* C^∞ topolojisi ile birlikte $\mathfrak{so}(1,3)$ 'de düzgün eğrilerin uzayı $C^\infty(I, \mathfrak{so}(1,3))$ [12].

6.7. Tanım

I bir açık aralık olmak üzere $C^\infty(I, \mathfrak{so}(1,3))$ uzayına *horodairesel yüzeylerin uzayı* denir [12].

6.8. Tanım

$\mathfrak{so}(1,3)$ 'in bir lineer altuzayı

$$\mathfrak{hf}(1,3) = \left\{ C = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ c_2 & -c_4 & 0 & c_6 \\ c_3 & -c_5 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(1,3) \mid c_2 = c_1 - c_4 = 0 \right\}$$

olmak üzere *Whitney* C^∞ topolojisi ile birlikte $C^\infty(I, \mathfrak{hf}(1,3))$ ikilisine *horo-flat horodairesel yüzeylerin uzayı* denir [12].

6.9. Tanım

$\tau_h(t) \equiv 0$ olmak üzere $\gamma(t)$ hiperbolik düzlem eğrisi olsun. Bu durumda

$$a_1 = e \text{ ve } a_2(t) = \pm n(t) \text{ için } F_{(\gamma, e, \pm n)}(s, t) = \gamma(t) + se + \frac{s^2}{2}(\gamma(t) + n(t))$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeye γ hiperbolik düzlem eğrisinin binormal horodairesel yüzeyi ve

$$a_1(t) = n(t) \text{ ve } a_2 = \mp e \text{ için } F_{(\gamma, n, \pm e)}(s, t) = \gamma(t) + sn(t) + \frac{s^2}{2}(\gamma(t) \pm e)$$

parametrizasyonu ile verilen yüzeye de γ hiperbolik düzlem eğrisinin asli normal horodairesel yüzeyi denir [12].

6.3. Örnek

$\gamma: I \rightarrow H_+^3(1)$ hiperbolik düzlem eğrisi

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{7}})t^2, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(-\sqrt{\frac{6}{7}} + \frac{\sqrt{3}}{2})t^2, t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{7}})t^2 \right) \text{ ile verilsin.}$$

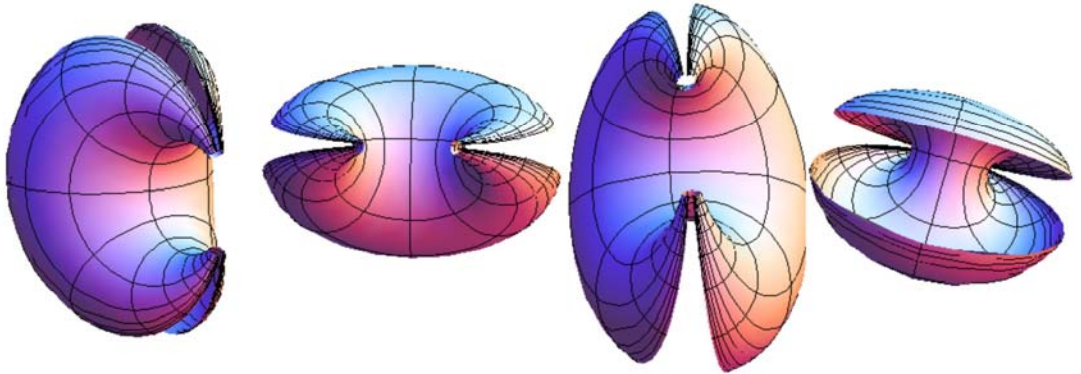
Bu durumda Şekil 6.3

$$n(t) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{7} + \left(\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{7}}{14} \right) t^2, -\sqrt{\frac{6}{7}} + \left(\sqrt{\frac{13}{14}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) t^2, -t, \sqrt{\frac{2}{7}} - \frac{1}{28}(7 + 2\sqrt{14})t^2 \right)$$

$$e = \left(-\sqrt{\frac{6}{7}}, -\frac{5}{2\sqrt{7}}, 0, \frac{3\sqrt{\frac{3}{7}}}{2} \right)$$

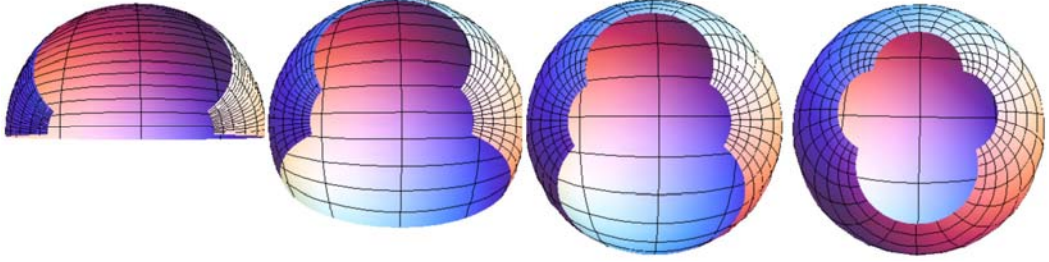
olduğuna göre γ hiperbolik düzlem eğrisinin asli normal horodairesel yüzeyi

$F_{(\gamma, n, e)}(s, t)$ 'nin τ_H altındaki görüntüsüdür.



Şekil 6.3. Asli normal horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri

Şekil 6.4 de aynı γ hiperbolik düzlem eğrisinin $F_{(\gamma,e,n)}(s,t)$ ile belirlenen binormal horodairesel yüzeyinin τ_H altındaki görüntüsüdür.



Şekil 6.4. Binormal horodairesel yüzeyin stereografik izdüşümü altındaki görüntüleri

KAYNAKLAR

1. Gladush, V., D., "Five dimensional general relativity and Kaluza-Klein theory", *Theoretical and Mathematical Physics*, 136(3):1312-1324 (2003).
2. Gladush, V., D., Galadgyi, M., V., "The model of the vacuum configuration and the Kaluza-Klein space", *Journal of Physical Studies*, 9(3):187-197 (2005).
3. Gladush, V., D., "A vacuum-like configuration in general relativity as a manifestation of a Lorentz-invariant mode of five dimensional gravity", *International Journal of Modern Physics*, 16(1):711-736 (2007).
4. Karlğa, B., "On the generalized stereographic projection", *Contributions to Algebra and Geometry*, 37(2): 329-336 (1996).
5. O'Neill, B., "Semi-Riemannian geometry", *Academic Press*, New York, 46-58 (1983).
6. Karlğa, B., "Reflection groups on semi-Euclidean spaces", *Erc. Üniv. Fen. Bil. Derg.*, 13(2): 98-109 (1997).
7. Bloom, W., M., "Linear Algebra and Geometry", *Cambridge University Press*, London, 364-369 (1979).
8. Ratcliffe, J., G., "Foundations of hyperbolic manifolds 2nd ed.)", *Springer-Verlag*, Graduate Texts in Mathematics 149, New York, 35-36, 61-62 (2006).
9. Borisovich, Y., Bliznyakov, N., Izrailevich, Y. and Romenko, T., "Introduction to topology", Oleg Efimov, Mir Publishers, Moscow, 149-164 (1985).
10. Perdigão do Carmo, M., "Riemannian geometry", Francis Flaherty, *Instituto de Matematica Pura e Aplicada*, Birkhäuser Boston, 184-185 (1992).
11. Izumiya, S., Pei, D. And Sano, T., "Horospherical surfaces of curves in hyperbolic space", *Publ. Math. Debrecen*, 64(1-2):1-13 (2004).
12. Izumiya, S., Saji, K. and Takahashi, M., "Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space", *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics*, Preprint, (2007).

EKLER

EK-1 Mathematica Programı ile Stereografik İzdüşüm Örnekleri

1.1. Örnek

$\gamma: I \rightarrow H_+^3(1)$ hiperbolik uzay eğrisi için temel hesaplamalar ve tanımlamalar

J işaret matrisi,

$$J = \{ \{-1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\} \}$$

γ eğrisi,

$$\gamma_0[s_-] == \gamma_0[s]$$

$$\gamma_1[s_-] == \gamma_1[s]$$

$$\gamma_2[s_-] == \gamma_2[s]$$

$$\gamma_3[s_-] == \gamma_3[s]$$

$$\gamma[s_-] = \{\gamma_0[s], \gamma_1[s], \gamma_2[s], \gamma_3[s]\}$$

$\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle$ skalar çarpımı,

$$J.\gamma(s).\gamma(s)$$

$\|\gamma'(s)\|$ normu,

$$Abs[J.\gamma'[s].\gamma'[s]]^{\frac{1}{2}}$$

$\gamma(s), t(s), n(s), e(s)$ Serret-Frenet vektörlerinin tanımlanması,

$$t[s_-] = \gamma'[s]$$

EK-1 (Devam) Matematica Programı ile Stereografik İzdüşüm Örnekleri

$$\begin{aligned}
 n_0[s] &= \frac{\gamma_0''[s] - \gamma_0[s]}{Abs[(J.(\gamma''[s] - \gamma[s]).(\gamma''[s] - \gamma[s]))]^{\frac{1}{2}}} \\
 n_1[s] &= \frac{\gamma_1''[s] - \gamma_1[s]}{Abs[(J.(\gamma''[s] - \gamma[s]).(\gamma''[s] - \gamma[s]))]^{\frac{1}{2}}} \\
 n_2[s] &= \frac{\gamma_2''[s] - \gamma_2[s]}{Abs[(J.(\gamma''[s] - \gamma[s]).(\gamma''[s] - \gamma[s]))]^{\frac{1}{2}}} \\
 n_3[s] &= \frac{\gamma_3''[s] - \gamma_3[s]}{Abs[(J.(\gamma''[s] - \gamma[s]).(\gamma''[s] - \gamma[s]))]^{\frac{1}{2}}} \\
 n[s_] &= \{n_0[s], n_1[s], n_2[s], n_3[s]\}
 \end{aligned}$$

$e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$ vektörü için,

$$\begin{aligned}
 M &= \{ \{1, 1, 1, 1\}, \{\gamma_0[s], \gamma_1[s], \gamma_2[s], \gamma_3[s]\}, \{\gamma'_0[s], \gamma'_1[s], \gamma'_2[s], \gamma'_3[s]\}, \\
 &\quad \{n_0[s], n_1[s], n_2[s], n_3[s]\} \} \\
 e_0[s] &= -Minors[M][[4, 4]] \\
 e_1[s] &= -Minors[M][[4, 3]] \\
 e_2[s] &= Minors[M][[4, 2]] \\
 e_3[s] &= -Minors[M][[4, 1]] \\
 e[s_] &= \{e_0[s], e_1[s], e_2[s], e_3[s]\}
 \end{aligned}$$

$\kappa_h(s)$ 'nin tanımlanması,

$$\kappa_h[s_] = Abs[(J.(\gamma''[s] - \gamma[s]).(\gamma''[s] - \gamma[s]))]^{\frac{1}{2}}$$

$\tau_h(s)$ 'nin tanımlanması,

$$\tau_h[s_] = -\frac{Det[\{\gamma[s], \gamma'[s], \gamma''[s], \gamma'''[s]\}]}{(\kappa_h[s])^2}$$

EK-1 (Devam) Matematica Programı ile Stereografik İzdüşüm Örnekleri

$H_+^3(1)$ için τ_H stereografik izdüşümü,

$$\tau_H = \left\{ \frac{\#2}{1+\#1}, \frac{\#3}{1+\#1}, \frac{\#4}{1+\#1} \right\} \&$$

1.2. Örnek

Bir $\gamma : I \rightarrow H_+^3(1)$, $\gamma(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \cos s, \sqrt{2} \sinh s, \sin s)$ hiperbolik uzay eğrisi ve

$$a_1 : I \rightarrow S_1^3(1), a_1(t) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sinh t, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, \sqrt{\frac{2}{3}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \right)$$

$$a_2 : I \rightarrow S_1^3(1), a_2(t) = (-\cosh t, -\sqrt{2} \cos t, -\sinh t, -\sqrt{2} \sin t)$$

ve $a_3 = \gamma \wedge a_1 \wedge a_2$ olmak üzere R_1^4 için $\{\gamma, a_1, a_2, a_3\}$ bir pseudo-ortonormal bazdır.

Bu durumda γ horocycle eğrisi tarafından üretilen horodairesel yüzeyin parametrizasyonu

$$F_{(\gamma, a_1, a_2)} : R \times I \rightarrow H_+^3(1)$$

$$F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t) = \left(\sqrt{2} \cosh t + \frac{s^2}{2} (-1 + \sqrt{2}) \cosh t + \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh t, \cos t - \frac{(-1 + \sqrt{2})}{2} s^2 \cos t - \frac{s \sin t}{\sqrt{3}} \right. \\ \left. s \sqrt{\frac{2}{3}} \cosh t + \sqrt{2} \sinh t + \frac{(-1 + \sqrt{2})}{2} s^2 \sinh t, \frac{s \cos t}{\sqrt{3}} + \sin t - \frac{(-1 + \sqrt{2})}{2} s^2 \sin t \right)$$

olarak bulunur. O halde $\text{Im}(F_{(\gamma, a_1, a_2)})$ horodairesel yüzeyinin stereografik izdüşümü

EK-1 (Devam) Matematica Programı ile Stereografik İzdüşüm Örnekleri

$$\tau_H(F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t)) = \left(\begin{array}{l} \frac{(6 - 3(-1 + \sqrt{2})s^2)Cost - 2\sqrt{3}S \text{ int}}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht}, \\ \frac{2s\sqrt{6}Cosht + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Sinht}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht}, \\ \frac{2s\sqrt{3}Cost + 3(2 - (-1 + \sqrt{2})s^2)S \text{ int}}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht} \end{array} \right)$$

olup sırasıyla $-1 \leq s \leq 1, -4 \leq s \leq 4, -15 \leq s \leq 15$ aralıklarında $0 < t \leq 2\pi$ için

$$\text{ParametricPlot3D} \left[\left\{ \begin{array}{l} \frac{(6 - 3(-1 + \sqrt{2})s^2)Cost - 2\sqrt{3}S \text{ int}}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht}, \\ \frac{2s\sqrt{6}Cosht + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Sinht}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht}, \\ \frac{2s\sqrt{3}Cost + 3(2 - (-1 + \sqrt{2})s^2)S \text{ int}}{6 + 3(2\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})s^2)Cosht + 2s\sqrt{6}Sinht} \end{array} \right\}, \{s, -1, 1\}, \{t, 0, 2\pi\}, \text{Axes} \rightarrow \text{None}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False} \right]$$

komutu ile çizimi yapılır.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : MAK, Mahmut
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 11.06.1983 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0505 447 59 24
 E-mail : makmahmut@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2005
Lise	Fatih Sultan Mehmet Süper Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2007	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2007-	Ahi Evran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Sempozyumlar

1. Karlığa, B., Mak, M., “Genelleştirilmiş Stereografik İzdüşüm ve İnversiyon”, V. Ulusal Geometri Sempozyumu, Sakarya, 2007.
2. Yücekaya, G., K., Mak, M., “Kapalı Lorentz Küresel Eğrilerinin Alan Vektörleri Ve Holditch Teoremi”, III. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Ankara, 2008.

Hobiler

Programlama Dilleri, Voleybol, Basketbol, Yüzme