

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCI
KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİDEM DAMATOĞLU

TEMMUZ 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCİ
KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem DAMATOĞLU

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Emrah POLATLI

ZONGULDAK
Temmuz 2022

KABUL:

Didem DAMATOĞLU tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş Tamamlanmamış Fibonacci Kuaterniyonları Üzerine” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 27/07/2022

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Emrah POLATLI

.....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ

.....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞAHİN

.....

Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../07/2022

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Didem DAMATOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCI KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

Didem DAMATOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Emrah POLATLI

Temmuz 2022, 33 sayfa

Bu tezin amacı, gerekli olan temel ön bilgileri verdikten sonra literatürde yakın zamanda bulunmuş olan tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların bir genelleştirmesiyle ilgili temel sonuçları ve ispatları detaylı olarak incelemektir.

Bu çalışma toplamda beş bölümden oluşmaktadır.

Bu tezin ilk bölümünde, tezin amacından ve içeriği için gerekli olan literatür özetinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde ise temel tanımlar, kavramlar ve temel teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili temel özellikler ve sonuçlar sunulmuştur.

ÖZET (devam ediyor)

Dördüncü bölümde, geliştirilmiş tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili literatürde var olan sonuçlar paylaşılmış ve bazılarının ispatları detaylı olarak verilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Tamamlanmamış Fibonacci Kuaterniyonları, Tamamlanmamış Lucas Kuaterniyonları, üreteç fonksiyon, rekürans bağıntısı, toplam formülleri, tamsayı dizileri, binomiyal katsayılar

Bilim Kodu: 403.01.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON GENERALIZED INCOMPLETE FIBONACCI QUATERNIONS

Didem DAMATOĞLU

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Emrah POLATLI

July 2022, 33 pages

The aim of this thesis is to examine in detail the main results and proofs about the incomplete Fibonacci and Lucas quaternions and a generalization of these quaternions that have been found recently in the literature after giving the necessary background information.

This study consists of five chapters in total.

In the first part of this thesis, the aim of the thesis and the literature summary necessary for its content are mentioned.

In the second part, basic definitions, concepts and basic theorems are given.

In the third chapter, the main properties and results about incomplete Fibonacci and Lucas quaternions are presented.

ABSTRACT (continued)

In the fourth chapter, the results available in the literature about generalized incomplete Fibonacci and Lucas quaternions are shared and the proofs of some of them are given in detail. In the fifth chapter, the results and recommendations are presented.

Keywords: Incomplete Fibonacci Quaternions, Incomplete Lucas Quaternions, generating function, recurrence relation, sum formulas, integer sequences, binomial coefficients

Science Code: 403.01.00



TEŞEKKÜR

Öncelikle konu seçimimden, araştırmamın yürütülmesi ve tamamlanması aşamalarının her bir basamağında destek ve emeklerini esirgemeyerek, büyük özveri ve sabırla bana yol gösteren, öğrencisi olmaktan çok keyif aldığım, danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Emrah POLATLI'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Değerli zamanlarını ayırarak, tezimin jüri komisyonuna katılmış, çalışmamı geliştirici fikir ve önerileriyle tezime son şeklini kazandırmış olan hocalarım Sayın Doç. Dr. Can KIZILATEŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Hakan Şahin'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli tüm kolaylıkları gösteren okul yöneticilerime teşekkürlerimi sunarım.

Mezuniyetimin 22.yılında, beni cesaretlendirerek, akademik yolda yürümeme esin kaynağı olan değerli dostum Sıdıka ÖZBAKAN KARACA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca beni destekleyen ve hakkını asla ödeyemeyeceğim sevgili anneme teşekkürlerimi sunarım.

Ve tezimin bu döneme kadar uzamasına olan katkılarından dolayı eşim ve oğluma teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
 BÖLÜM 1 GİRİŞ	 1
1.1 AMAÇ VE KAPSAM	2
1.2 KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
 BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR	 7
2.1. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI	7
 BÖLÜM 3 TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI.....	15
3.1 TEMEL TANIM VE SONUÇLAR.....	15
 BÖLÜM 4 TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BİR GENELLEŞTİRMESİ.....	 19
4.1. TEMEL TANIM VE SONUÇLAR	19
 BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	27

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

KAYNAKLAR..... 29

ÖZGEÇMİŞ 33



ÇİZELGELER DİZİNİ

No

Sayfa

Çizelge 2.1 Wn (Horadam) Dizisinin Bazı Özel Durumları 8





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

F_n	: n . Fibonacci sayısı
L_n	: n . Lucas sayısı
W_n	: n . Horadam sayısı
$F_n(k)$	: Tamamlanmamış Fibonacci sayısı
$L_n(k)$	: Tamamlanmamış Lucas sayısı
$P_n(k)$	: Tamamlanmamış Pell sayısı
$Q_n(k)$	: Tamamlanmamış Pell-Lucas sayısı
$J_n(k)$	: Tamamlanmamış Jacobsthal sayısı
$j_n(k)$	: Tamamlanmamış Jacobsthal-Lucas sayısı
$B_n(k)$	: Tamamlanmamış Balancing sayısı
$C_n(k)$	: Tamamlanmamış Lucas-Balancing sayısı
$W_n(k)$	: Tamamlanmamış Horadam sayısı
Q_n	: n . Fibonacci kuaterniyonu
K_n	: n . Lucas kuaterniyonu
$IF_n(s)$	: Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonu
$IL_n(s)$	: Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonu
$IF_n^*(s)$	: Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonlarının eşleniği
$IL_n^*(s)$	: Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonlarının eşleniği
$G(t)$	: $\{r_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu
$U(t)$	: $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu
$GF_{IF_n}(s)$	: Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu
$GF_{IL_n}(s)$	: Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu
$QW_n(k)$	: Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonları
$QW_n^*(k)$	: Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonlarının eşleniği
$GF_{QW_n}(k)$	: Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Tüm reel kuaterniyonların kümesi
s	: Reel kuaterniyon
$\bar{s}$	: s reel kuaterniyonunun eşleniği
$ s $	: s kuaterniyonunun normu



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fibonacci sayıları, tarihsel kayıtlar incelendiğinde her ne kadar Leonardo Fibonacci'nin 1202 yılında yazmış olduğu Liber Abaci (Hesap Kitabı) adlı kitapta bir problemin cevabı olarak Batı Avrupa matematiğine tanıtılsa da esasında MÖ 200'lerde Hint matematiğindeki bazı çalışmalarda kullanılmıştır [24]. Bu sayılar elementer bir rekürans bağıntısına sahip olmasına rağmen yüzyıllardır hem amatör hem de profesyonel matematikçilerin uğraşısı olmuştur. Günümüzde ise Fibonacci dizisi ve çeşitli genelleştirmeleri Matematiğin haricinde Finans, Bilgisayar, Fizik, Tıp, İstatistik, Biyoloji, Mimarlık gibi bilim alanlarında da kullanılmaktadır [6, 17]. Diğer taraftan Fibonacci sayılarını doğada da görmek mümkündür. Örneğin, Fibonacci sayılarının varlığı bazı bitkilerin yaprak ve meyvelerinde, bazı hayvanların kabuklarında gözlemlenmiştir. Fibonacci dizisi, bu dizinin çeşitli genelleştirmeleri ve doğadaki varlığı ilgili kapsamlı bilgiler [16] nolu referansta ele alınmıştır.

Kuaterniyonlar, İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından 16 Ekim 1843'te keşfedilmiştir. Hamilton'nun amacı, standart karmaşık sayıların düzlemle ilgili olduğu gibi, üç boyutlu uzayla ilgili bir tür hiper karmaşık sayılar bulabilmektir. Esasında Hamilton'dan önce bile kuaterniyon çarpımına benzer bir 4 vektörün çarpımı Leonhard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Olinde Rodrigues (1795-1851) gibi önde gelen matematikçiler tarafından zaten biliniyordu. L. Euler 1748'de dört kare özdeşliğini bulmuş ve Öklid uzayındaki hareketleri tanımlamak için "kuaterniyon" parametre gösterimlerini kullanmıştır. Bu bilgi Wilhelm Blaschke (1885-1962) tarafından 1957'de L. Euler'in Berlin'deki 250. doğum günü sebebiyle yapmış olduğu konuşmada yeniden keşfedilmiştir. Diğer taraftan, dönemin en iyi matematikçilerinden C.F. Gauss, sonuçları anlamayacaklarını düşündüğü için, elde ettiği verileri çağdaşlarıyla paylaşmamıştır. Dolayısıyla kuaterniyonlarla ilgili elde etmiş sonuçları hayatı boyunca yayımlanmadan kalmış ve ancak 1900'de kamuoyuna açıklanmıştır. O. Rodrigues, dört

parametre aracılığıyla genel rotasyonların parametrizasyonunu tanımlamıştır. Daha sonra kuaterniyon çarpımının bir tahminini oluşturan özel bir çarpma tekniği kullanmıştır.

Yaklaşık 10 yıl boyunca karmaşık sayıların üç boyutlu bir genişletmesini elde etmek için sayısız deneme yapılmadan sonra, W.R. Hamilton kendini pes etmenin eşiğinde buldu. Tüm bu süreç en büyük oğlu Archibald Hamilton'a yazdığı mektupların birinde belgelenmiştir. Bu mektuptan kısa bir süre sonra, eşiyle birlikte Dublin'deki Kraliyet Kanalı boyunca yürürken aklına birçok fikir geldi. Esasında ilk baştaki düşündüğü gibi iki hayali parça yerine, üç parçalı bir hayali sistemi kurguladı. O an yaşadığı duygu yoğunluğuyla elindeki çakısıyla Dublin'deki Broome Köprüsü'nün bir taşına i, j, k sembolleriyle aşağıdaki ünlü çarpım formülünü kazımıştır:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Ve böylelikle kuaterniyonlar doğdu. Keşfedilişinden günümüze kadar kuaterniyonlar, matematiğin birçok alanının yanında özellikle robotikte, navigasyonda, uyduların yörünge mekaniğinde ve fiziğin birçok alanında kullanılmaya devam etmektedir. Kuaterniyonlarla ilgili yukarıda bahsedilen tarihsel süreç ve temel kuaterniyon bilgileri için, bakınız [1, 13, 18, 28].

1.1 AMAÇ VE KAPSAM

Bu tezin amacı, gerekli temel önbilgileri verdikten sonra literatürde yakın zamanda bulunmuş olan tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların bir genelleştirmesiyle ilgili temel sonuçları ve ispatları detaylı olarak incelemektir.

Bu çalışma kapsamında, 2. Bölümde, tez boyunca yararlanılacak temel tanım ve teoremler paylaşılacaktır. 3. Bölümde, tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanıtılıp, temel özellikleri verilecektir. 4. Bölümde, genelleştirilmiş tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bazı kombinatorik temel özellikleri ve ilgili sonuçların ispatları detaylı olarak incelenecektir. 5. Bölümde ise sonuçlar ve öneriler sunulacaktır.

1.2 KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda tez içeriğinde kullanılan çalışmalarla ilgili literatür bilgileri verilecektir.

Baez, [1] referansında kuaterniyonlar hakkında kısa bilgiler verdikten sonra, oktanionları, Clifford cebirleri ve spinörleri, Bott periyodikliği, projektif ve Lorentzian geometrisi, Jordan cebirleri ve istisnai Lie grupları ile ilişkilerini tanımlamıştır. Ayrıca bu yapıların kuantum mantığı, özel görelilik ve süpersimetrideki uygulamalarına da değinmiştir.

Belbachir ve Belkhir, [2] referansında $W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}$ reküransı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ başlangıç koşulları ile tanımlanan Horadam sayılarını genelleştiren tamamlanmamış Horadam sayıları $W_n(k)$ ve hiper-Horadam sayılarını $W_n^{(k)}$ tanımlamış ve bu dizilerin bazı kombinatoriyal özelliklerini vermişlerdir. Bir uygulama olarak, bu iki genelleme ile ilişkili r -circulant matrislerinin spektral normları için bir alt ve üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca, tamamlanmamış Horadam ve hiper-Horadam sayıları açısından Horadam sayılarıyla ilişkili r -circulant matrislerinin spektral normları için yeni bir sınır bulmuşlardır.

Catarino ve Campos, [3] referansında tamamlanmamış k -Pell, k -Pell-Lucas ve modifiye k -Pell sayılarının bazı kombinatorik özelliklerini incelemişlerdir.

Djordjević, [4] referansında tamamlanmamış genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonunu elde etmiştir.

Djordjević ve Srivastava, [5] referansında tamamlanmamış genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları ve tamamlanmamış genelleştirilmiş Jacobsthal-Lucas sayılarının sistematik bir incelemesini vermişlerdir.

Ell, Bihan ve Sangwine, [6] referansında sinyal ve görüntü işleme teknolojisinde yapılan güncellemelere dayanan kuaterniyon Fourier dönüşümleri ile ilgili en son araştırma sonuçlarını vermişlerdir.

Ercan, Firengiz ve Tuğlu, [7] referansında özel bir operatör kullanarak q -Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonlarını elde etmiştir. Ayrıca q -Chebyshev polinomlarının bazı formüllerinden yararlanarak, birinci ve ikinci tip tamamlanmamış q -Chebyshev polinomları olarak adlandırılan q -Chebyshev polinomlarının bazı yeni genelleştirmelerini vermişlerdir.

Filipponi, [8] referansında tamamlanmamış Fibonacci $F_n(k)$ ve tamamlanmamış Lucas dizilerinin $L_n(k)$ temel özelliklerini ve birbirleriyle ilişkilerini incelemiştir.

Halıcı, [9] referansında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının Binet formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bazı toplam formüllerini incelemiştir.

Halıcı ve Karataş, [10] referansında Fibonacci kuaterniyonlarının bir genelleştirmesini vermişlerdir. Ayrıca bu yeni kuaterniyon dizisinin Binet formülünü, Cassini özelliğini,

bazı toplam formüllerini ve bazı norm değerlerini elde etmişlerdir.

Horadam, [11] referansında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını tanımlamış ve bazı temel özelliklerini elde etmiştir.

Horadam, [12] referansında genelleştirilmiş Fibonacci dizilerini ve bu dizilerin çeşitli özelliklerini türetmiştir.

Iakin, [14] referansında daha yüksek mertebeden bir kuaterniyon kavramı oluşturmuş ve daha sonra bu kuaterniyonlar için bazı özellikler elde etmiştir.

Kızılateş, [15] referansında bileşenleri tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas sayıları olan kuaterniyonları tanımlamış ve bu kuaterniyonların bazı kombinatoriyel özelliklerini türetmiştir.

Koshy, [16] referansında Fibonacci, Lucas dizileri ve bu dizilerin genelleştirmeleri ilgili kapsamlı sonuçları vermiştir.

Kou ve Xia, [17] referansında kuaterniyon değerli diferansiyel denklemlerin çözümlerini araştırmışlardır.

Morais, Georgiev ve Sprößig, [18] referansında kuaterniyonların ve kuaterniyon fonksiyonlarının cebiri, geometrisi ve temel analizi hakkında kapsamlı bilgiler vermişlerdir.

Patel, Irmak ve Ray, [19] referansında tamamlanmamış balans ve Lucas balans sayılarının bazı kombinatoriyel özelliklerini elde etmişlerdir.

Patel ve Behera, [20] referansında tamamlanmamış Horadam kuaterniyonlarını tanıtmış ve bu kuaterniyonlarla ilgili çeşitli sonuçlar türetmişlerdir.

Pinter ve Srivastava, [21] referansında tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas sayıları için iki tür üreteç fonksiyon elde etmişlerdir.

Ramirez, [22] referansında tamamlanmamış k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarının temel özelliklerini türetmiştir.

Ramirez, [23] referansında tamamlanmamış genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarıyla ilişkili bazı sonuçlar elde etmiştir.

Srivastava ve Manocha, [25] referansında üreteç fonksiyonlar hakkında çok kapsamlı bilgiler ve sonuçlar paylaşmışlardır.

Taşçı ve Firengiz, [26] referansında Fibonacci ve Lucas p -sayılarını tanımlayıp, bu sayıların rekürans bağıntılarını ve bazı kombinatoriyel özelliklerini incelemişlerdir.

Taşçı ve Firengiz, [27] referansında tamamlanmamış iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarını tanımlamış, bu polinomların bazı temel özelliklerini ve üreteç fonksiyonlarını

bulmuşlardır.

Ward, [28] referansında kuatertiyonlarla ve Cayley sayıları ile ilgili temel bilgileri vermiştir.





BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin tamamına temel teşkil edecek olan önbilgiler ve temel kavramlar verilecektir.

İlk olarak literatürde iyi bilinen Fibonacci ve Lucas dizileri tanıtılarak bu bölüme giriş yapılacaktır.

2.1 FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI

Tanım 2.1.1 *Fibonacci dizisi, her $n \geq 0$ doğal sayısı için, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır [16].

İlk birkaç Fibonacci sayısı 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 tür.

Tanım 2.1.2 *Lucas dizisi, her $n \geq 0$ doğal sayısı için, $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n , n . Lucas sayısıdır [16].

İlk birkaç Lucas sayısı 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 dur.

Hemen belirtelim ki, Fibonacci ve Lucas dizileri aynı rekürans bağıntısını sağlamasına rağmen aralarındaki temel fark başlangıç koşullarından kaynaklanmaktadır. Literatürde Fibonacci, Lucas dizilerini ve bu dizilerin çeşitli genelleştirmelerini içeren çok sayıda özellik bulunmaktadır.

Horadam [12], Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesini, her $n \geq 0$ tamsayısı için, a, b, p ve q birer tamsayı ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$W_{n+2} = pW_{n+1} + qW_n \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlamıştır. Bu dizi literatürde sembolik olarak $W(p, q; a, b)$ ile (bazen de sadelik açısından W_n ile) gösterilir. a, b, p ve q nun özel değerlerine göre W_n dizisi literatürde iyi bilinen bazı tamsayı dizilerine indirgenebilir. Aşağıdaki tablo bu durumu özetler:

Çizelge 2.1 W_n (Horadam) Dizisinin Bazı Özel Durumları

$W(p, q; a, b)$	Dizinin İsmi	Dizinin Sembolik Gösterimi
$W(1, 1; 0, 1)$	Fibonacci	F_n
$W(1, 1; 2, 1)$	Lucas	L_n
$W(k, 1; 0, 1)$	k -Fibonacci	$F_{k,n}$
$W(k, 1; 2, 1)$	k -Lucas	$L_{k,n}$
$W(2, 1; 0, 1)$	Pell	P_n
$W(2, 1; 2, 2)$	Pell-Lucas	PL_n
$W(2, k; 0, 1)$	k -Pell	$P_{k,n}$
$W(2, k; 2, 2)$	k -Pell-Lucas	$PL_{k,n}$
$W(1, 2; 0, 1)$	Jacobsthal	J_n
$W(1, 2; 2, 1)$	Jacobsthal-Lucas	j_n

W_n (Horadam) dizisinin Binet formülü, $\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ ve $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

$$x^2 - px - q = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri ve $A = b - a\beta$, $B = a\alpha - b$ olmak üzere

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}$$

formunda verilir. Burada

- $\alpha + \beta = p$
- $\alpha - \beta = \sqrt{p^2 + 4q}$

- $\alpha\beta = -q$

olduğu kolayca görülebilir [12, 16].

W_n (Horadam) dizisinin üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{W_0 + (W_1 - pW_0)x}{1 - px - qx^2}$$

formunda verilir [12]. Not edelim ki, $n \geq 0$, $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ ve $\sigma = (1 - \sqrt{5}) / 2$ olmak üzere, Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonlarının

- $F_n = \frac{\phi^n - \sigma^n}{\phi - \sigma},$
- $L_n = \phi^n + \sigma^n,$
- $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2},$
- $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2},$

olduğu Tablo 2.1 den kolayca görülür [16].

Tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas sayıları Filipponi tarafından [8] de sırasıyla

$$F_n(k) = \sum_{j=0}^k \binom{n-1-j}{j}, \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right), \quad (2.2)$$

$$L_n(k) = \sum_{j=0}^k \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}, \quad \left(n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right). \quad (2.3)$$

formunda tanımlanmıştır. Özel olarak $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ durumunda $F_n(k) = F_n$ ve $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ durumunda $L_n(k) = L_n$ elde edilir. Ayrıca 2.2 in bazı özel durumları

$$\begin{aligned} F_n(0) &= 1 \quad (n \geq 1), \\ F_n(1) &= n-1 \quad (n \geq 3), \\ F_n(2) &= n^2 - 5n + 10 \quad (n \geq 5), \end{aligned}$$

ve 2.3 nin bazı özel durumları

$$\begin{aligned} L_n(0) &= 1 \quad (n \geq 1), \\ L_n(1) &= n+1 \quad (n \geq 2), \\ L_n(2) &= n^2 - n + 2 \quad (n \geq 4) \end{aligned}$$

biçimindedir. Örneğin, Tamamlanmamış Fibonacci sayıları için $n = 6$ alınırsa $0 \leq k \leq 2$ olur. Böylece

- Eğer $k = 0$ ise $F_6(0) = \sum_{j=0}^0 \binom{5-j}{j} = 1$
- Eğer $k = 1$ ise $F_6(1) = \sum_{j=0}^1 \binom{5-j}{j} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} = 5$
- Eğer $k = 2$ ise $F_6(2) = \sum_{j=0}^2 \binom{5-j}{j} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_6$

elde edilir. Aynı şekilde Tamamlanmamış Lucas sayıları için $n = 6$ alınırsa $0 \leq k \leq 3$ olur. Böylece

- Eğer $k = 0$ ise $L_6(0) = \sum_{j=0}^0 \frac{6}{6-j} \binom{6-j}{j} = 1$
- Eğer $k = 1$ ise $L_6(1) = \sum_{j=0}^1 \frac{6}{6-j} \binom{6-j}{j} = 7$
- Eğer $k = 2$ ise $L_6(2) = \sum_{j=0}^2 \frac{6}{6-j} \binom{6-j}{j} = 16$
- Eğer $k = 3$ ise $L_6(3) = \sum_{j=0}^3 \frac{6}{6-j} \binom{6-j}{j} = 18 = L_6$

elde edilir.

Filipponi'nin [8] elde ettiği bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- $F_{n+2}(k+1) = F_{n+1}(k+1) + F_n(k) \quad (0 \leq k \leq \frac{n-2}{2})$
- $F_{n+2}(k) = F_{n+1}(k) + F_n(k) - \binom{n-1-k}{k}$
- $\sum_{j=0}^h \binom{h}{j} F_{n+j}(k+j) = F_{n+2h}(k+h) \quad (0 \leq k \leq \frac{n-h-1}{2})$
- $\sum_{j=0}^{h-m} \binom{h}{m+j} F_{n+j}(j) = F_{n+2h-m}(h-m) \quad (h \geq m; n \geq h-m+1)$

- $\sum_{j=0}^{h-1} F_{n+j}(k) = F_{n+h+1}(k+1) - F_{n+1}(k+1) \quad (n \geq 2k+2)$
- $L_n(k) = F_{n-1}(k-1) + F_{n+1}(k) \quad (0 \leq k \leq \frac{n}{2})$
- $L_{n+2}(k+1) = L_{n+1}(k+1) + L_n(k) \quad (0 \leq k \leq \frac{n}{2})$
- $L_n(k) = F_{n+2}(k) - F_{n-2}(k-2) \quad (0 \leq k \leq \frac{n}{2})$
- $\sum_{j=0}^h \binom{h}{j} L_{n+j}(k+j) = L_{n+2h}(k+h) \quad (0 \leq k \leq \frac{n-h}{2})$
- $\sum_{j=0}^{h-1} L_{n+j}(k) = L_{n+h+1}(k+1) - L_{n+1}(k+1) \quad (n \geq 2k+1)$

Filipponi'nin bu çalışmasından sonra birçok matematikçi çeşitli tamsayı dizilerinin tamamlanmamış versiyonlarını çalışmıştır. Tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri ve bu genelleştirilmiş dizilerin özellikleri [3, 4, 5, 19, 22, 23, 26, 27] nolu referanslarda detaylı olarak incelenmiştir. Yakın zamanda Belbachir ve Belkhir [2], tamamlanmamış Horadam dizisini a, b, p, q tamsayılar olmak üzere

$$W_n(k) = \sum_{j=0}^k \frac{(n-2j)b + apj}{n-j} \binom{n-j}{j} q^j p^{n-2j-1} \quad \left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \quad (2.4)$$

formunda tanımlamışlardır. Tanımdan aşağıdaki eşitlikler kolayca görülür:

- $W_n(k) = 0 \quad (0 \leq n < 2k),$
- $W_{2k}(k) = W_{2k}$
- $W_{2k+1}(k) = W_{2k+1}.$

$W_n(k) = W_n(k; a, b, p, q)$ tamamlanmamış Horadam sayılarının a, b, p, q tamsayıları için bazı özel durumları

- Tamamlanmamış Fibonacci sayıları $F_n(k) = W_n(k; 1, 1, 1, 1),$
- Tamamlanmamış Lucas sayıları $L_n(k) = W_n(k; 2, 1, 1, 1),$
- Tamamlanmamış Pell sayıları $P_n(k) = W_n(k; 1, 2, 2, 1),$

- Tamamlanmamış Pell-Lucas sayıları $Q_n(k) = W_n(k; 2, 2, 2, 1)$,
- Tamamlanmamış Jacobsthal sayıları $J_n(k) = W_n(k; 1, 1, 1, 2)$,
- Tamamlanmamış Jacobsthal-Lucas sayıları $j_n(k) = W_n(k; 2, 1, 1, 2)$,
- Tamamlanmamış Balancing sayıları $B_n(k) = W_n(k; 1, 6, 6, -1)$,
- Tamamlanmamış Lucas-Balancing sayıları $C_n(k) = W_n(k; 1, 3, 6, -1)$.

şeklindedir [2].

Diğer taraftan Srivastava ve Manocha [25, s. 355] α ve β , n den bağımsız kompleks sayılar, ζ da

$$\zeta = t(1 + \zeta)^{\beta+1}, \quad \zeta(0) = 0$$

olacak şekilde t nin bir fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + (\beta + 1)n}{n} t^n = \frac{(1 + \zeta)^{\alpha+1}}{1 - \beta\zeta} \quad (2.5)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + (\beta + 1)n} \binom{\alpha + (\beta + 1)n}{n} t^n = (1 + \zeta)^{\alpha} \quad (2.6)$$

olduğunu belirtmiştir.

$a, b \in \mathbb{C}$ ve $\{r_n\}$ verilen bir kompleks dizi olmak üzere, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki homojen olmayan rekürans bağıntısını sağlayan bir dizi olsun:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + r_n \quad (n > 1).$$

O zaman $G(t)$, $\{r_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $U(t)$ nin

$$U(t) = \frac{G(t) + s_0 - r_0 + (s_1 - s_0a - r_1)t}{1 - at - bt^2} \quad (2.7)$$

formunda olduğunu Pinter ve Srivastava [21] göstermiştir.

Bir s reel kuaterniyonu [18], bileşenleri s_0, s_1, s_2, s_3 reel sayıları ve taban elemanları $1, i, j, k$ olan

$$s = s_0 + s_1i + s_2j + s_3k$$

şeklinde bir hiperkompleks sayıdır ve i, j, k aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$$

Hemen belirtelim ki, i, j, k taban elemanlarının kendi aralarındaki çarpımları değişme özelliğini sağlamaz. Ayrıca $\{1, i, j, k\}$, $\mathbb{R}^4$ ün bir tabanı olduğundan bir s reel kuaterniyonu

$$s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$$

biçiminde sıralı dördütlü olarak da gösterilebilir. Burada $1, i, j, k$ taban elemanlarına sırasıyla $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ ve $(0, 0, 0, 1)$ sıralı dördütlüleri karşılık gelir. Tüm reel kuaterniyonların kümesi, William Rowan Hamilton'un anısına sembolik olarak $\mathbb{H}$ harfi ile gösterilir [18].

Şimdi reel kuaterniyonların sağladığı bazı temel aritmetik işlemleri kısaca özetleyelim:

$$q_1 = p_1 + r_1i + s_1j + t_1k,$$

$$q_2 = p_2 + r_2i + s_2j + t_2k,$$

iki reel kuaterniyon olsun. Bu iki kuaterniyonun eşit olabilmesi için her iki kuaterniyonun da birbirlerine karşılık gelen bileşenleri eşit olmalıdır [28]. Yani

$$p_1 = p_2, \quad r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2, \quad t_1 = t_2$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. q_1, q_2 iki reel kuaterniyon ve μ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [18]:

$$q_1 + q_2 = (p_1 + p_2) + (r_1 + r_2)i + (s_1 + s_2)j + (t_1 + t_2)k,$$

$$q_1 - q_2 = (p_1 - p_2) + (r_1 - r_2)i + (s_1 - s_2)j + (t_1 - t_2)k,$$

$$\mu q_1 = \mu p_1 + (\mu r_1)i + (\mu s_1)j + (\mu t_1)k,$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (p_1 p_2 - r_1 r_2 - s_1 s_2 - t_1 t_2) + (p_1 r_2 + r_1 p_2 + s_1 t_2 - t_1 s_2)i \\ &\quad + (p_1 s_2 - r_1 t_2 + s_1 p_2 + t_1 r_2)j + (p_1 t_2 + r_1 s_2 - s_1 r_2 + t_1 p_2)k. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ için

$$1. \quad q_1 + q_2 = q_2 + q_1,$$

$$2. \quad q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3,$$

$$3. \quad q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3,$$

$$4. \quad (q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$$

özelliklerinin de reel kuaterniyonlar için geçerli olduğu görülmüştür. Kuaterniyonlar toplama işlemine göre birleşmeli ve değişmeli olup, çarpma işlemine göre birleşmeli fakat değişmeli olmayan cebir yapısındadır.

Bir s reel kuaterniyonunun eşleniği $\bar{s} = s_0 - s_1i - s_2j - s_3k$ formunda tanımlanır. Böyle s kuaterniyonu ve eşleniğinin çarpımından

$$s.\bar{s} = (s_0 + s_1i + s_2j + s_3k)(s_0 - s_1i - s_2j - s_3k) = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = |s|^2$$

elde edilir. Burada $|s| = \sqrt{s.\bar{s}}$ reel sayısına, s kuaterniyonunun normu denir [18].

Bileşenleri özel tamsayı dizilerinin elemanları olan kuaterniyonlar ilk olarak Horadam [11] tarafından incelenmiştir. Horadam [11], n . Fibonacci ve n . Lucas kuaterniyonunu sırasıyla

$$Q_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k,$$

ve

$$K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k,$$

formunda tanımlamıştır. Burada F_n , n . Fibonacci sayısı ve L_n , n . Lucas sayısıdır. Horadam [11] deki çalışmasında bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayıları olan kuaterniyonların temel özelliklerini vermiştir. Ayrıca bulduğu sonuçların bileşenleri genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan kuaterniyonlara da uygulanabileceğini belirtmiştir. İakin [14], Horadam'ın vermiş olduğu tanımdan yola çıkarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının Binet formüllerini, Halıcı [9] ise Binet formüllerinin yanı sıra bu kuaterniyonların üreteç fonksiyonlarını ve bazı toplam formüllerini araştırmıştır. Daha sonra Halıcı ve Karataş [10], bileşenleri Horadam sayıları olan kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini incelemiştir.

BÖLÜM 3

TAMAMLANMAMIŞ FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde sırasıyla tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının tanımları ve temel özellikleri verilecektir.

Bu bölümdeki tüm sonuçlar [15] dan alıntılanmıştır.

3.1 Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım 3.1.1 *Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonları $IF_n(s)$, n ve s tamsayılar olmak üzere*

$$IF_n(s) = \sum_{t=0}^3 F_{n+t}(s)e_t, \quad \left(0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) \quad (3.1)$$

formunda tanımlanır. Burada $\{e_0 = \mathbf{1}, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}\}$, $\mathbb{R}^4$ ün standart ortonormal tabanıdır.

$IF_n^*(s)$, tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonlarının eşleniği olmak üzere yukarıdaki tanımdan

$$IF_n(s) + IF_n^*(s) = 2F_n(s)$$

olduğu görülür.

Eş. (3.1) den, tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı

$$IF_{n+2}(s+1) = IF_{n+1}(s+1) + IF_n(s), \quad \left(0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, n \in \mathbb{N}\right) \quad (3.2)$$

biçiminde elde edilir.

Eş. (2.2) ve Eş. (3.1) kullanılarak, Eş. (3.2) aşağıdaki gibi homojen olmayan rekürans bağıntısına dönüştürülebilir:

$$IF_n(s) = IF_{n-1}(s) + IF_{n-2}(s) - \sum_{t=0}^3 \binom{n-s+t-3}{s} e_t.$$

Önerme 3.1.2 *Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonları için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\sum_{t=0}^m \binom{m}{t} IF_{n+t}(s+t) = IF_{n+2m}(s+m).$$

Önerme 3.1.3 *$n \geq 2s + 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\sum_{t=0}^{m-1} IF_{n+t}(s) = IF_{n+m+1}(s+1) - IF_{n+1}(s+1).$$

Tanım 3.1.4 *Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonları $IL_n(s)$, n ve s tamsayılar olmak üzere*

$$IL_n(s) = \sum_{t=0}^3 L_{n+t}(s)e_t, \quad \left(0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \quad (3.3)$$

formunda tanımlanır. Burada $\{e_0 = \mathbf{1}, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}\}$, $\mathbb{R}^4$ ün standart ortonormal tabanıdır.

$IL_n^*(s)$, tamamlanmamış Lucas kuaterniyonlarının eşleniği olmak üzere yukarıdaki tanımdan

$$IL_n(s) + IL_n^*(s) = 2L_n(s)$$

olduğu görülür.

Önerme 3.1.5 *Tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için*

$$IL_n(s) = IF_{n-1}(s-1) + IF_{n+1}(s), \quad \left(0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \in \mathbb{N}\right) \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanır.

Eş. (3.2), Eş. (3.3) ve Eş. (3.4) den tamamlanmamış Lucas kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı

$$IL_{n+2}(s+1) = IL_{n+1}(s+1) + IL_n(s), \quad \left(0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, n \in \mathbb{N}\right) \quad (3.5)$$

formunda elde edilir.

Eş.(2.3) ve Eş. (3.3) kullanılarak, Eş. (3.5) aşağıdaki gibi homojen olmayan rekürans bağıntısına dönüştürülebilir:

$$IL_n(s) = IL_{n-1}(s) + IL_{n-2}(s-1) - \sum_{t=0}^3 \frac{n-2+t}{n-2-s+t} \binom{n-2-s+t}{s} e_t. \quad (3.6)$$

Önerme 3.1.6 *Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonları için*

$$IL_n(s) = IF_{n+2}(s) - IF_{n-2}(s-2)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 3.1.7 *Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonları için*

$$\sum_{t=0}^m \binom{m}{t} IL_{n+t}(s+t) = IL_{n+2m}(s+m)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 3.1.8 *Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonları için*

$$\sum_{t=0}^{m-1} IL_{n+t}(s) = IL_{n+m+1}(s+1) - IL_{n+1}(s+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.9 *Tamamlanmamış Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu*

$$GF_{IF_n(s)} = t^{2s+1} \frac{IF_{2s+1} + \alpha + (IF_{2s+2} - IF_{2s+1} + \beta)t - \gamma}{1 - t - t^2}$$

formundadır. Burada $\alpha = e_2 + (s+1)e_3$, $\beta = e_1 + (s+1)e_2 + \frac{(s+1)(s+2)}{2}e_3$ ve

$$\gamma = \frac{t^3 + t^2e_1 + te_2 + (1 - (1-t)^{s+1})}{t(1-t)^{s+1}}e_3 \text{ tür.}$$

Teorem 3.1.10 *Tamamlanmamış Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu*

$$GF_{IL_n(s)} = t^{2s} \frac{IL_{2s} + \delta + (IL_{2s+1} - IL_{2s} + \varepsilon)t - \eta}{1 - t - t^2}$$

formundadır. Burada $\delta = 2e_2 + (2s+1)e_3$, $\varepsilon = 2e_1 + (2s+1)e_2 + (s+1)^2e_3$ ve

$$\eta = \frac{t(2-t)(t^2 + te_1 + e_2) + [2(1 - (1-t)^{s+1}) - t]e_3}{t(1-t)^{s+1}}$$

şeklindedir.



BÖLÜM 4

TAMAMLANMAMIŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu bölümde, 3. Bölümde verilmiş olan tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesi incelenecektir. Verilecek sonuçların bazılarının ispatları literatürde mevcut olanlardan daha detaylı olarak ele alınacaktır. İspatları verilmemiş olan sonuçların ise ispatları yapılacaktır.

Bu bölümde verilecek olan tüm sonuçlar [20] den alıntılanmıştır.

4.1 Temel Tanım ve Sonuçlar

Tanım 4.1.1 a, b, p ve q tamsayılar olmak üzere, tamamlanmamış Horadam kuaterniyonları $QW_n(k)$,

$$QW_n(k; a, b, p, q) = \sum_{r=0}^3 W_{n+r}(k; a, b, p, q) e_r, \quad (4.1)$$

formunda tanımlanır ve kısaca

$$QW_n(k) = \sum_{r=0}^3 W_{n+r}(k) e_r, \left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

şeklinde verilir. Burada $\{e_0 = \mathbf{1}, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}\}$, $\mathbb{R}^4$ ün standart ortonormal tabanıdır.

$QW_n^*(k)$, tamamlanmamış Horadam kuaterniyonunun eşleniği olmak üzere

$$QW_n(k) + QW_n^*(k) = 2W_n(k)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Önerme 4.1.2 Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonları aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar:

$$QW_{n+2}(k+1) = pQW_{n+1}(k+1) + qQW_n(k) \quad \left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right). \quad (4.2)$$

İspat. Tanım (4.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& p \sum_{r=0}^3 W_{n+1+r}(k+1)e_r + q \sum_{r=0}^3 W_{n+r}(k)e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 \left[\sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+1-2j)b+apj}{n+r+1-j} \binom{n+r+1-j}{j} q^j p^{n+r+1-2j} \right] e_r \\
&\quad + \sum_{r=0}^3 \left[\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-2j)b+apj}{n+r-j} \binom{n+r-j}{j} q^{j+1} p^{n+r-1-2j} \right] e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+1-2j)b+apj}{n+r+1-j} \binom{n+r+1-j}{j} q^j p^{n+r+1-2j} \\ & + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+2-2j)b+apj-ap}{n+r+1-j} \binom{n+r+1-j}{j-1} q^j p^{n+r+1-2j} \\ & - \frac{(n+r+2)b-ap}{n+r+1} \binom{n+r+1}{-1} p^{n+r+1} \end{aligned} \right] e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+1-2j)b+apj}{n+r+1-j} \left[\binom{n+r+1-j}{j} + \binom{n+r+1-j}{j-1} \right] \\ & \times q^j p^{n+r+1-2j} + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{b-ap}{n+r+1-j} \binom{n+r+1-j}{j-1} q^j p^{n+r+1-2j} \end{aligned} \right] e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+1-2j)b+apj}{n+r+1-j} \binom{n+r+2-j}{j} q^j p^{n+r+1-2j} \\ & + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(b-ap)j}{(n+r+1-j)(n+r+2-j)} \binom{n+r+2-j}{j} q^j p^{n+r+1-2j} \end{aligned} \right] e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 \left[\sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n+r+2-2j)b+apj}{n+r+2-j} \binom{n+r+2-j}{j} q^j p^{n+r+1-2j} \right] e_r \\
&= \sum_{r=0}^3 QW_{n+2+r}(k+1)e_r
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Burada (4.2) bağıntısı aşağıdaki homojen olmayan rekürans bağıntısına dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
QW_n(k) &= pQW_{n-1}(k) + qQW_{n-2}(k) \\
&\quad - \sum_{r=0}^3 \frac{(n+r-2k-2)b+apk}{n+r-k-2} \binom{n+r-2-k}{k} q^{k+1} p^{n+r-2k-3} e_r.
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek

$$pQW_{n-1}(k) = \sum_{r=0}^3 \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-1-2j)b+apj}{n+r-1-j} \binom{n+r-1-j}{j} q^j p^{n+r-2j-1} \right) e_r$$

ve

$$qQW_{n-2}(k) = \sum_{r=0}^3 \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-2-2j)b+apj}{n+r-2-j} \binom{n+r-2-j}{j} q^{j+1} p^{n+r-2j-3} \right) e_r$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& pQW_{n-1}(k) + qQW_{n-2}(k) \\
& - \sum_{r=0}^3 \frac{(n+r-2k-2)b + apk}{n+r-k-2} \binom{n+r-2-k}{k} q^{k+1} p^{n+r-2k-3} e_r \\
& = \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-1-2j)b + apj}{n+r-1-j} \binom{n+r-1-j}{j} q^j p^{n+r-2j-1} \right) \\ & + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(n+r-2-2j)b + apj}{n+r-2-j} \binom{n+r-2-j}{j} q^{j+1} p^{n+r-2j-3} \right) \\ & + \frac{(n+r-2-2k)b + apk}{n+r-2-k} \binom{n+r-2-k}{k} q^{k+1} p^{n+r-2k-3} \\ & - \frac{(n+r-2-2k)b + apk}{n+r-2-k} \binom{n+r-2-k}{k} q^{k+1} p^{n+r-2k-3} \end{aligned} \right] e_r \\
& = \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-1-2j)b + apj}{n+r-1-j} \binom{n+r-1-j}{j} q^j p^{n+r-2j-1} \right) \\ & + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(n+r-2-2j)b + apj}{n+r-2-j} \binom{n+r-2-j}{j} q^{j+1} p^{n+r-2j-3} \right) \end{aligned} \right] e_r \\
& = \sum_{r=0}^3 \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-1-2j)b + apj}{n+r-1-j} \binom{n+r-1-j}{j} q^j p^{n+r-2j-1} \right) \\ & + \left(\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-2j)b + ap(j-1)}{n+r-1-j} \binom{n+r-1-j}{j-1} q^j p^{n+r-2j-1} \right) \end{aligned} \right] e_r \\
& = \sum_{r=0}^3 \left[\sum_{j=0}^k \frac{(n+r-2j)b + apj}{n+r-j} \binom{n+r-j}{j} q^j p^{n+r-2j-1} \right] e_r \\
& = QW_n(k)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3 $0 \leq k \leq \frac{n-m-1}{2}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{t=0}^m p^t q^{m-t} \binom{m}{t} QW_{n+t}(k+t) = QW_{n+2m}(k+m).$$

İspat. m üzerinden tümevarım yapalım. $m = 0$ için

$$QW_n(k) = QW_n(k)$$

ve $m = 1$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^1 p^t q^{1-t} \binom{1}{t} QW_{n+t}(k+t) &= pQW_{n+1}(k+1) + qQW_n(k) \\
&= QW_{n+2}(k+1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki iddia $m > 1$ için sağlansın. Buradan

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{m+1} p^t q^{m+1-t} \binom{m+1}{t} QW_{n+t}(k+t) \\
&= \sum_{t=0}^{m+1} p^t q^{m+1-t} \left[\binom{m}{t} + \binom{m}{t-1} \right] QW_{n+t}(k+t) \\
&= q \sum_{t=0}^m p^t q^{m-t} \binom{m}{t} QW_{n+t}(k+t) + p \sum_{t=0}^m p^t q^{m-t} \binom{m}{t} QW_{n+t+1}(k+t+1) \\
&= qQW_{n+2m}(k+m) + pQW_{n+2m+1}(k+m+1) \\
&= QW_{n+2+2m}(k+m+1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 4.1.4 Herhangi bir $m \geq 2k+2$ tamsayısı için

$$\sum_{t=0}^{m-1} qp^{m-t-1} QW_{n+t}(k) = QW_{n+m+1}(k+1) - p^m QW_{n+1}(k+1).$$

İspat. m üzerinden tümevarım uygularsak iddianın $m=1$ için

$$qQW_n(k) = QW_{n+2}(k+1) - pQW_{n+1}(k+1)$$

ve $m=2$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^1 qp^{1-t} QW_{n+t}(k) &= qpQW_n(k) + qQW_{n+1}(k) \\
&\quad + p^2 QW_{n+1}(k+1) - p^2 QW_{n+1}(k+1) \\
&= p(pQW_{n+1}(k+1) + qQW_n(k)) \\
&\quad + qQW_{n+1}(k) - p^2 QW_{n+1}(k+1) \\
&= pQW_{n+2}(k+1) + qQW_{n+1}(k) - p^2 QW_{n+1}(k+1) \\
&= QW_{n+3}(k+1) - p^2 QW_{n+1}(k+1)
\end{aligned}$$

sağlandığı görülür. Herhangi $m \geq 1$ tamsayı için iddianın doğru olduğunu varsayalım ve $m+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^m qp^{m-t} QW_{n+t}(k) &= p \sum_{t=0}^{m-1} qp^{m-t-1} QW_{n+t}(k) + qQW_{n+m}(k) \\
&= p(QW_{n+m+1}(k+1) - p^m QW_{n+1}(k+1)) + qQW_{n+m}(k) \\
&= (pQW_{n+m+1}(k+1) + qQW_{n+m}(k)) - p^{m+1} QW_{n+1}(k+1) \\
&= QW_{n+m+2}(k+1) - p^{m+1} QW_{n+1}(k+1)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.1.5 *Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu*

$$GF_{QW_n(k)} := \sum_{n=0}^{\infty} QW_n(k)t^n = t^{2k} \frac{QW_{2k-1} + \alpha + (qQW_{2k-2} + \beta)t - \gamma}{1 - pt - qt^2}$$

olup burada

$$\alpha = aq^{k+1}e_2 + (b + apk)q^{k+1}e_3,$$

$$\beta = aq^{k+1}e_1 + (b + apk)q^{k+1}e_2 + \frac{p(k+1)(2b + apk)}{2}q^{k+1}e_3,$$

ve

$$\gamma = q^{k+1} \frac{(a + (b - ap)t)(t^3e_0 + t^2e_1 + te_2)}{t(1 - pt)^{k+1}} + q^{k+1} \frac{((a + (b - ap)t) - a(1 - pt)^{k+1})e_3}{t(1 - pt)^{k+1}}$$

formundadır.

İspat. k sabit bir pozitif tamsayı olsun. Tamamlanmamış Horadam kuaterniyonlarının tanımından $0 \leq n < 2k$ için $QW_n(k) = 0$ dır. Ayrıca $QW_{2k}(k) = QW_{2k-1}$ ve $QW_{2k+1}(k) = QW_{2k}$ dır. Bunun yanında $n \geq 2k + 2$ için

$$\begin{aligned} QW_n(k) &= pQW_{n-1}(k) + qQW_{n-2}(k) \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \frac{(n + r - 2k - 2)b + apk}{n + r - k - 2} \binom{n + r - 2 - k}{k} p^{n+r-2k-3} q^{k+1} e^r \end{aligned}$$

olduğunu da biliyoruz. Şimdi farz edelim ki,

$$s_0 = QW_{2k}(k), \quad s_1 = QW_{2k+1}(k), \quad \dots, \quad s_n = QW_{2k+n}(k)$$

$$r_0 = aq^{k+1}e_2 + (b + apk)q^{k+1}e_3,$$

$$r_1 = aq^{k+1}e_1 + (b + apk)q^{k+1}e_2 + \frac{p(k+1)(2b + apk)}{2}q^{k+1}e_3,$$

$$r_n = \sum_{r=0}^3 \left[\frac{(n + r - 2)b + apk}{n + r + k - 2} \binom{n + r - 2 + k}{k} p^{n+r-3} q^{k+1} \right] e_r.$$

olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} QW_{n+2k}(k) &= pQW_{n+2k-1}(k) + qQW_{n+2k-2}(k) \\ &\quad - \sum_{r=0}^3 \left[\frac{(n + r - 2)b + apk}{n + r + k - 2} \binom{n + r + k - 2}{k} p^{n+r-3} q^{k+1} \right] e^r \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi Lemma 3.1.9 u kullanabilmemiz için öncelikle r_n dizisinin üreteç fonksiyonu olan $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n$ yi bulmalıyız. Dolayısıyla ilk hedefimiz

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^3 \left[\frac{(n+r-2)b + apk}{n+r+k-2} \binom{n+r-2+k}{k} p^{n+r-3} q^{k+1} \right] e_r \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n-2)b + apk}{n+k-2} \binom{n+k-2}{k} p^{n-3} q^{k+1} t^n \right] e_0 \quad (I) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n-1)b + apk}{n+k-1} \binom{n+k-1}{k} p^{n-2} q^{k+1} t^n \right] e_1 \quad (II) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{bn + apk}{n+k} \binom{n+k}{k} p^{n-1} q^{k+1} t^n \right] e_2 \quad (III) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)b + apk}{n+k+1} \binom{n+k+1}{k} p^n q^{k+1} t^n \right] e_3 \quad (IV)
\end{aligned}$$

toplamını olabildiğince basitleştirmektir. İlk olarak (I) kısmını hesaplayalım.

$$\frac{(n-2)b + apk}{n+k-2} = \frac{nb - 2b + apk + bk - bk}{n+k-2} = b + \frac{apk - bk}{n+k-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n-2)b + apk}{n+k-2} \binom{n+k-2}{k} p^{n-3} q^{k+1} t^n \right] e_0 \\
&= \left(b \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} p^{n-3} q^{k+1} t^n + (ap - b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n+k-2} \binom{n+k-2}{k} p^{n-3} q^{k+1} t^n \right) e_0 \\
&= q^{k+1} \underbrace{\frac{b}{p^3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{n-2} (pt)^n e_0}_{(A)} + \frac{(ap-b)}{p^3} q^{k+1} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n+k-2} \binom{n+k-2}{k-2} (pt)^n e_0}_{(B)}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) den

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{n-2} (pt)^n = \frac{(pt)^2}{(1-pt)^{k+1}}$$

ve

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n+k-2} \binom{n+k-2}{n-2} (pt)^n = \frac{(pt)^2}{(1-pt)^k}$$

bulunur. Dolayısıyla yukarıda bulguları toparlarsak (I) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n-2)b + apk}{n+k-2} \binom{n+k-2}{k} p^{n-3} q^{k+1} t^n \right] e_0 \\
&= \left[\frac{bq^{k+1}}{p^3} \frac{(pt)^2}{(1-pt)^{k+1}} + \frac{ap-b}{p^3} q^{k+1} \frac{(pt)^2}{(1-pt)^k} \right] e_0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde (2.5) ve (2.6) kullanılarak (II), (III) ve (IV) sırasıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n-1)b + apk}{n+k-1} \binom{n+k-1}{k} p^{n-2} q^{k+1} t^n \right] e_1 \\
&= \left[\frac{bq^{k+1}}{p^2} \frac{pt}{(1-pt)^{k+1}} + \frac{ap-b}{p^2} q^{k+1} \frac{pt}{(1-pt)^k} \right] e_1, \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{bn + apk}{n+k} \binom{n+k}{k} p^{n-1} q^{k+1} t^n \right] e_2 \\
&= \left[\frac{bq^{k+1}}{p} \frac{1}{(1-pt)^{k+1}} + \frac{ap-b}{p} q^{k+1} \frac{1}{(1-pt)^k} \right] e_2, \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)b + apk}{n+k+1} \binom{n+k+1}{k} p^n q^{k+1} t^n \right] e_3 \\
&= \left[bq^{k+1} \frac{1 - (1-pt)^{k+1}}{pt(1-pt)^{k+1}} + (ap-b) q^{k+1} \frac{1 - (1-pt)^k}{pt(1-pt)^k} \right] e_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n &= \frac{q^{k+1}}{t(1-pt)^{k+1}} \\
&\times \left(\begin{aligned} & \left[\frac{bt^3}{p} + \frac{(ap-b)t^3(1-pt)}{p} \right] e_0 \\ & + \left[\frac{bt^2}{p} + \frac{(ap-b)t^2(1-pt)t^2}{p} \right] e_1 \\ & + \left[\frac{bt}{p} + \frac{(ap-b)t(1-pt)}{p} \right] e_2 \\ & + \left[\frac{b}{p}(1-(1-pt))^{k+1} + \frac{(ap-b)}{p}(1-(1-pt))^k(1-pt) \right] e_3 \end{aligned} \right) \\
&= q^{k+1} \frac{(a + (b-ap)t) [t^3 e_0 + t^2 e_1 + t e_2] + [a + (b-ap)t - a(1-pt)^{k+1}] e_3}{t(1-pt)^{k+1}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Lemma 3.1.9 da, yukarıda bulunan $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n$ yerine yazılırsa

$$QF_{QW_n(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} QW_n(k) t^n = t^{2k} \frac{QW_{2k-1} + \alpha + (qQW_{2k-2} + \beta) t - \gamma}{1 - pt - qt^2}$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.1.5 te $QW_n(k; a, b, p, q) = QW_n(k; 1, 2, 2, 1)$ alınırsa tamamlanmamış Pell kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$\alpha_1 = e_2 + 2(k+1)e_3,$$

$$\beta_1 = e_1 + 2(k+1)e_2 + (k+1)(k+2)e_3,$$

ve

$$\gamma_1 = \frac{(t^3 + t^2e_1 + te_2) + (1 - (1-2t)^{k+1})e_3}{t(1-2t)^{k+1}}$$

olmak üzere

$$GF_{QP_n(k)} = t^{2k} \frac{QP_{2k-1} + \alpha_1 + (QP_{2k-2} + \beta_1)t - \gamma_1}{1 - 2t - t^2}$$

formundadır. Benzer şekilde Teorem 4.1.5 te $QW_n(k; a, b, p, q) = QW_n(k; 2, 2, 2, 1)$ alınırsa tamamlanmamış Pell-Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$\alpha_2 = 2e_2 + 2(2k+1)e_3,$$

$$\beta_2 = 2e_1 + 2(2k+1)e_2 + 4(k+1)^2e_3,$$

ve

$$\gamma_2 = \frac{2(1-t)(t^3 + t^2e_1 + te_2) + 2(1-t - (1-2t)^{k+1})e_3}{t(1-2t)^{k+1}}$$

olmak üzere

$$GF_{QQ_n(k)} = t^{2k} \frac{QQ_{2k-1} + \alpha_2 + (QQ_{2k-2} + \beta_2)t - \gamma_2}{1 - 2t - t^2}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan özel olarak $QW_n(k; a, b, p, q) = QW_n(k; 1, 1, 1, 1)$ ve

$QW_n(k; a, b, p, q) = QW_n(k; 2, 1, 1, 1)$ seçilirse

- Önerme 4.1.3 $\longrightarrow$ Önerme 3.1.2 ve Önerme 3.1.7 ye
- Önerme 4.1.4 $\longrightarrow$ Önerme 3.1.3 ve Önerme 3.1.8 e
- Teorem 4.1.5 $\longrightarrow$ Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.1.10 a

indirgendiği görülür.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma toplamda beş bölümden oluşmaktadır. Bu tezin ilk bölümünde, tezin amacından ve içeriği için gerekli olan literatürdeki kaynaklardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise temel tanımlar, kavramlar ve temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili sonuçlar sunulmuştur. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş tamamlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili literatürde var olan sonuçlar paylaşılmış ve bazılarının detaylı ispatları verilmiştir. Bu tezden yola çıkarak, bileşenleri tamamlanmamış Tribonacci dizisi elemanları olan veya daha yüksek mertebeden dizilerin elemanları olan kuaterniyon aileleri tanımlanabilir ve çeşitli özellikleri incelenebilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Baez J (2002)** *The Octonions*. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 145–205.
- [2] **Belbachir H and Belkhir A (2018)** *On some generalizations of Horadam numbers*. Filomat, 32, 5037–5052.
- [3] **Catarino P and Campos H (2017)** *Incomplete k -Pell, k -Pell-Lucas and modified k -Pell numbers*. Hacet. J. Math. Stat. 46, 361–372.
- [4] **Djordjević G B (2004)** *Generating function of the incomplete generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers*. The Fib. Quart., 42 (2), 106–113.
- [5] **Djordjević G B and Srivastava H M (2005)** *Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers*. Math. Comput. Modelling, 42, 1049–1056.
- [6] **Ell T, Bihan N and Sangwine S (2014)** *Quaternion Fourier transforms for signal and image processing*. John Wiley & Sons Publishing.
- [7] **Ercan E, Firengiz M and Tuğlu N (2018)** *Incomplete q -Chebyshev Polynomials*. Filomat, 32:10, 3599–3607.
- [8] **Filipponi P (1996)** *Incomplete Fibonacci and Lucas numbers*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 45(2), 37–56.
- [9] **Halıcı S (2012)** *On Fibonacci quaternions*. Adv. Appl. Clifford Algebras, 22 (2), 321–327.
- [10] **Halıcı S and Karataş A (2017)** *On a generalization for Fibonacci quaternions*. Chaos Solitons and Fractals, 98, 178–182.
- [11] **Horadam A F (1963)** *Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions*. Amer. Math. Monthly, 70 (3), 289–291.

- [12] **Horadam A F (1965)** *Basic Properties of Certain Generalized Sequence of numbers*. The Fib. Quart., 3 (3), 161–176.
- [13] <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [14] **Iakin A L (1981)** *Extended Binet forms for generalized quaternions of higher order*. The Fib. Quart., 19 (5), 410–413.
- [15] **Kızılateş C (2019)** *On quaternions with incomplete Fibonacci and Lucas numbers components*. Util. Math., 110, 263–269.
- [16] **Koshy T (2001)** *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Canada: A Wiley-Interscience Publication.
- [17] **Kou K and Xia Y H (2018)** *Linear quaternion differential equations: Basic theory and fundamental results*. Stud. Appl. Math., 141, 3–45.
- [18] **Morais J, Georgiev S and Spröbig W (2014)** *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Basel: Birkhäuser.
- [19] **Patel B K, Irmak N and Ray P K (2018)** *Incomplete balancing and Lucas-balancing numbers*. Math. Rep. (Bucur.) 20, 59–72.
- [20] **Patel B K and Behera N (2021)** *On a generalization of incomplete Fibonacci quaternions*. Journal of Indian Math. Soc., 88 (3-4), <https://doi.org/10.18311/jims/2021/25549>.
- [21] **Pinter A and Srivastava H M (1999)** *Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 48: 2, 591–596.
- [22] **Ramirez J L (2013)** *Incomplete k -Fibonacci and k -Lucas numbers*. Chinese Journal of Mathematics, Volume 2013, Article ID 107145, 7 pages.
- [23] **Ramirez J L (2015)** *Incomplete generalized Fibonacci and Lucas polynomials*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44 (2), 363–373.

- [24] **Singh P (1985)** *The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India*.
Historia Mathematica, 12, 229–244.
- [25] **Srivastava H M and Manocha H L (1984)** *A Treatise on Generating Functions*.
Halsted Press, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK, John Wiley & Sons.
- [26] **Taşçı D and Firengiz M C (2010)** *Incomplete Fibonacci and Lucas p -numbers*.
Math. Comput. Modelling, 52, 1763–1770.
- [27] **Taşçı D and Firengiz M C (2012)** *Incomplete bivariate Fibonacci and Lucas polynomials*. Discrete Dyn. Nat. Soc., Volume 2012, Article ID 840345, 12 pages.
- [28] **Ward J P (1997)** *Quaternions and Cayley Numbers*. Springer, Kluwer Academic Publishing, ISBN: 978-94-010-6434-7.



ÖZGEÇMİŞ

Didem DAMATOĞLU, İlk, orta ve lise öğrenimini Zonguldak'ta tamamladı. Zonguldak Mehmet Çelikel Lisesi'nden mezun olduktan sonra 1995 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Matematik Bölümüne girdi. 2000 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra 2000-2002 yılları arasında Zonguldak ilinde özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2002 yılında Işıkveren İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmenliğine atandı. Burada kısa bir süre çalıştıktan sonra 2002-2007 yılları arasında Asma İlköğretim Okulu'nda görevine devam etti. 2007 yılında Anadolu ve Fen Liselerine öğretmen seçme sınavını kazanarak, Yayla Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde göreve başladı. 10/02/2014-04/07/2014 tarihleri arasında aynı okulda müdür yardımcısı olarak görevlendirildi ve matematik öğretmenliğini sürdürdü. 31/08/2021-07/02/2022 tarihleri arasında Zonguldak Ölçme ve Değerlendirme Merkezi'nde görevlendirildi. Halen Yayla Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde, matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.