



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER
KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLARDA
BAZI EĞRİLİK KOŞULLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan Çınar KAYA

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342405 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Ramazan Çınar KAYA tarafından hazırlanan “**GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK KOŞULLARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Nesip AKTAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynaklarda gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Ramazan Çınar KAYA

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sürecinde bana danışmanlık ederek bilimsel katkılarını ve tecrübelerini esirgemeyen, çalışmalarım sırasında her türlü olanağı sağlayan saygıdeğer hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM' a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü destekleriyle yanımda olan Annem' e, Babam' a, sabır ve zaman alan bu zorlu süreçte desteğini esirgemeyen Eşim ve Kızım' a sonsuz teşekkür ederim.

Ramazan Çınar KAYA

AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
2.1 Riemann Manifoldları	3
2.2 Değme Manifoldlar	9
2.3 Kenmotsu Manifoldlar	11
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLAR	13
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK SONUÇLARI.....	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ.....	50

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK KOŞULLARI

Ramazan Çınar KAYA

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

ÖZET

Bu tezin amacı, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldlarda bazı eğrilik koşullarını incelemektir. Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, konuyla ilgili literatürde yapılan çalışmalardan ve tarihsel gelişmelerden bahsedilmiştir. İkinci bölüm temel kavram ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde tezin orijinal kısmı için temel teşkil eden genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldlarla bazı sonuçlara yer verilmiştir. Dördüncü bölüm, orijinal sonuçlar içerir. Bu bölümde, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldlarda bazı flat olma koşulları ve bazı özel eğrilik tensörlerinin birbiri üzerine etkisi incelenmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değme metrik manifold, Kenmotsu manifold, Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu, Q tensör.

Temmuz, 2022; 50 sayfa

M. Sc. THESIS

**SOME CURVATURE CONDITIONS OF KENMOTSU MANIFOLDS
ADMITTING GENERALIZED TANAKA-WEBSTER CONNECTION**

Ramazan Çınar KAYA

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

ABSTRACT

The aim of this thesis is to examine some curvature conditions in Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection. The thesis consists of five main parts. The first part of the thesis is devoted to the introduction. In this section, studies and historical developments in the related literature are mentioned. The second part is devoted to basic concepts and theorems. In the third chapter, some results with Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection, which are the basis for the original part of the thesis, are given. The fourth section contains the original results. In this section, some flat conditions and the acts of some special curvature tensors on each other are investigated with respect to the Q tensor in Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection. The last section is devoted to conclusions and suggestions.

Keywords: Contact metric manifold, Kenmotsu manifold, Generalized Tanaka-Webster connection, Q tensor.

July, 2022; 50 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{C}$	Konsirküler eğrilik tensörü
$\mathcal{C}^*$	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Konsirküler eğrilik tensörü
$\mathcal{C}^\infty$	Diferansiyellenebilme
$(d\eta)^n$	n yinci mertebeden dış çarpım
g	Riemann metriği
K	Konharmonik eğrilik tensörü
K^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Konharmonik eğrilik tensörü
$\mathcal{K}(\Pi)$	Kesitsel eğrilik
$\mathcal{L}$	Ricci operatörü
M	Manifold
N_ϕ	ϕ nin Nijenhuis torsiyon tensörü
P	Projektif eğrilik tensörü
P^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Projektif eğrilik tensörü
Q	Q eğrilik tensörü
Q^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Q eğrilik tensörü
r	M manifoldunun skaler eğriliği
r^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip manifoldun skaler eğriliği
R	M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü
R^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Riemann eğrilik tensörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S	Ricci tensörü
S^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Ricci tensörü
$T_P(M)$	P noktasında teğet uzay
Z	Z eğrilik tensörü
η	1 – form
ϕ	(1,1) – tipinde tensör alanı
Φ	Temel 2 form
$\chi(M)$	M manifoldunun teğet vektör alanlarının uzayı
ξ	Vektör alanı
$[,]$	Lie parantez operatörü
∇	M manifoldu üzerindeki afin konneksiyon
∇^*	Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu

1. GİRİŞ

Değme geometri, geometrik optik, zamana bağlı Hamiltoniyen ile dinamik sistemlerin mekaniği, termodinamik ve geometrik kuantizasyondaki birçok uygulama ile diferansiyel geometrinin çok verimli bir dalı olarak giderek artan öneme sahiptir. Değme geometrinin tarihçesi ilk olarak yaklaşık 200 yıl önce Sophus Lie'nin değme dönüşümleri, diferansiyel denklemlerin çözümünde bir araç olarak kullanmasıyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra bu konudaki çalışmalara Huygens, Jacobi ve Hamiltonun geometrik optikler üzerindeki çalışmaları örnek verilebilir.

Bu konunun en yeni bölümlerinden biri, Katsuei Kenmotsu'nun kompleks uzay ile reel doğrunun warped çarpımlarının özelliklerini incelemeyi öneren bir makalesinde doğdu. Bu öneri aynı zamanda S. Tanno'nun grup otomorfizmi maksimum boyutlu olan, bağlantılı, hemen hemen değme Riemannian manifoldların sınıflandırmasından biri olduğundan doğal görünüyordu [1]. K. Kenmotsu 1972 yılında Tanno'nun bu sınıflandırmasında yer alan üçüncü durumu tüm geometrik özellikleriyle inceleyerek, yeni bir değme metrik manifold sınıfı ortaya koymuş ve bu manifold Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır [2]. Kenmotsu manifoldlarda bugüne kadar yapılmış olan birçok çalışmada elde edilen önemli sonuçlar G. Pitiş tarafından "Geometry of Kenmotsu manifolds" isimli çalışmada sunulmuştur [3].

Riemann manifoldu bir Riemann metriğine sahiptir ve bu metrik doğal olarak Levi-Civita konneksiyonu doğurur. "Riemann manifold üzerindeki konneksiyon bir Levi-Civita konneksiyon olmadığı zaman manifoldun geometrisinde ne tür değişiklikler olur?" sorusu birçok araştırmacı tarafından sorulmuş ve bu sorudan hareketle bu konneksiyondan faydalanarak farklı konneksiyonlar tanımlanmıştır. Bu konneksiyonlardan biri de genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonudur. Bu kanonik afin konneksiyon birbirinden bağımsız olarak Tanaka ve Webster tarafından non-dejenere pseudo-Hermitian CR-manifoldlarda tanımlanmıştır [4,5]. Daha sonra ilk defa Tanno tarafından genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu değme metrik manifoldlar üzerinde tanımlanmıştır. Bu konneksiyon, eğer CR-yapısı integrallenebilirse genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuyla çakışır [6]. Cho, hemen hemen değme (ϕ, ξ, η, g) yapısına sahip olan bir Kahler manifoldundaki reel hiperyüzey için Tanno'nun genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonunu sıfırdan farklı bir k reel sayısı için uyarlamıştır [7,8]. Genelleştirilmiş Tanaka-Webster

konneksiyonunu kullanarak, bazı geometriciler karmaşık uzay formlarında reel hiperyüzeylerin bazı karakterizasyonlarını incelemişlerdir [9]. Son zamanlarda birçok araştırmacı Kenmotsu manifoldlarında genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu üzerinde çalışmalar yapmıştır [10,11,12].

Öte yandan, Z –simetrik tensör kavramı, ilk olarak, 2012 yılında Mantica ve Molinari’nin birlikte yayınladıkları zayıf Z –simetrik Manifoldlar çalışması ile başlamıştır [13]. Bu çalışmada, zayıf Ricci simetrik, pseudo Ricci simetrik ve pseudo projektif Ricci simetrik manifoldları içeren yeni bir özellikte Riemann manifoldu tanımlanmıştır. Manifold, bir genelleştirilmiş simetrik Z tensörü ile tanımlanmış ve Z –simetrik manifold olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmanın akabinde, 2013 yılında Mantica ve Suh pseudo Q –simetrik Riemann manifoldlar isimli çalışmada, izi Z tensörü olan, Q tensör diye adlandırılan yeni bir tensör tanımlamışlardır [14].

Yapılan çalışmalar ışığında, bu tez çalışmasında genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldlarda Q tensörüne göre bazı önemli eğrilik koşulları elde edilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, Riemann manifoldlar, Değme manifoldlar ve Kenmotsu manifoldların bazı temel kavram ve teoremlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezin orijinal sonuçlarını teşkil eden son bölümünde kullanacağımız, “Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu Manifoldlarda konsirküler eğrilik tensörü” adlı çalışmada elde edilen sonuçlardan bazılarına yer verilmektedir [11]. Son bölümde ise, genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu Manifoldlarda birtakım flat olma koşulları ve bazı özel eğrilik tensörlerinin birbiri üzerine etkisi incelenerek Kenmotsu manifoldların yeni bir karakterizasyonu ortaya konmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Riemann Manifolları

Tanım 2.1.1 M , n – boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun. $\chi(M)$, M üzerinde tanımlı vektör alanlarının uzayı ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan simetrik, 2 – lineer ve pozitif tanımlı g metriğine Riemann metriği denir. g metriği ile birlikte tanımlanan M manifolduna da Riemann manifoldu adı verilir ve (M, g) ile gösterilir. Eğer g metriği pozitif tanımlı, simetrik, 2 – lineer ve dejenere olmayan bir metrik ise g ye pseudo(semi)-Riemann metriği, M manifolduna da pseudo(semi)-Riemann manifoldu denir [15].

Tanım 2.1.2 M , n – boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve $\chi(M)$, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M)$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow \nabla(X_1, X_2) = \nabla_{X_1} X_2$$

ile verilen dönüşüm her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{X_1}(X_2 + X_3) = \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} X_3$$

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} X_3 = f\nabla_{X_1} X_3 + g\nabla_{X_2} X_3$$

$$\nabla_{X_1}(fX_2) = f\nabla_{X_1} X_2 + X_1(f)X_2$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde tanımlı bir afin (lineer) konneksiyon (veya kovaryant türev) denir [16].

Tanım 2.1.3 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M manifoldu üzerinde tanımlı bir afin (lineer) konneksiyon olsun ve her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$i) \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = [X_1, X_2] \text{ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$ii) X_{1g}(X_2, X_3) = g(\nabla_{X_1} X_2, X_3) + g(X_2, \nabla_{X_1} X_3)$$

(Koneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne M manifoldu üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyonu veya M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu adı verilir [17].

Tanım 2.1.4 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu, ∇ da M manifoldu üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve her $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X_1, X_2, X_3) \rightarrow R(X_1, X_2)X_3 = \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3$$

şeklinde tanımlı R dönüşümüne M manifoldu üzerinde $(1,3)$ –tipli bir tensör alanıdır denir ve M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

Özel olarak $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$ tensörüne Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

Ayrıca her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için, $R(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda M manifolduna flat (düzlemsel) manifold denir.

Riemann eğrilik tensörü R , aşağıdaki koşulları sağlar [18].

$$R(X_1, X_2)X_3 = -R(X_2, X_1)X_3 \quad (2.1)$$

$$g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) = -g(R(X_1, X_2)X_4, X_3) \quad (2.2)$$

$$g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (2.3)$$

$$g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_1, X_2) \quad (2.4)$$

$$R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 = 0 \quad (2.5)$$

(1. Bianchi Özdeşliği)

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2) \quad (2.6)$$

Tanım 2.1.5 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\chi(M)$ in bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve g , Riemann metriği olsun ve her $X_1, X_2 \in \chi(M)$ için,

$$g(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^n g(X_1, e_i) g(e_i, X_2) \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) = n \quad (2.8)$$

dir [19].

Tanım 2.1.6 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifold olsun. M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun. $T_p(M)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $U, V \in \Pi$ tanjant vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı,

$$g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$\mathcal{K}(U, V) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2}$$

olup buna Π nin kesit eğriliği denir ve $\mathcal{K}(\Pi)$ ile gösterilir [19].

Teorem 2.1.1 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifold olsun. M manifoldu, k sabit kesit eğrilikli ise her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için,

$$R(X_1, X_2)X_3 = k\{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_3)X_1\} \quad (2.9)$$

dir [16].

Tanım 2.1.7 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifold olsun. c sabit eğriliğine sahip, tam ve bağlantılı M manifolduna reel uzay form denir ve $M^n(c)$ ile gösterilir [16].

Sonuç 2.1.1 $M^n(c)$ bir reel uzay form olsun. $n \geq 2$ olmak üzere;

$$M^n(c) = \begin{cases} c = 0 \text{ ise } M^n(c) = E^n \text{ Öklid uzayı (flat),} \\ c = \frac{1}{r^2} \text{ ise } M^n(c) = S^n(r) \text{ küresi (Eliptik),} \\ c = -\frac{1}{r^2} \text{ ise } M^n(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases} \quad (2.10)$$

dır [18].

Tanım 2.1.8 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$\mathcal{L}: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_1) = \mathcal{L}X_1 = -\sum_{i=1}^n R(e_i, X_1)e_i \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{L}$ operatörüne M nin Ricci Operatörü denir [16].

Tanım 2.1.9 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsun. M manifoldu üzerinde,

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow S(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X_1)X_2, e_i) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ – tipindeki S tensör alanına, M manifoldu üzerinde Ricci tensörü denir ve her $X_1, X_2 \in \chi(M)$ için, $S(X_1, X_2) = 0$ olması durumunda M manifolduna Ricci-flat (düzlemsel) manifold denir [16].

Sonuç 2.1.2 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu, $\mathcal{L}$, M nin Ricci Operatörü ve g , Riemann metriği olmak üzere;

$$S(X_1, X_2) = g(\mathcal{L}X_1, X_2) \quad (2.13)$$

eşitliği yazılabilir [16].

Tanım 2.1.10 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun ve her $X_1, X_2 \in \chi(M)$ için,

$$S(X_1, X_2) = \alpha g(X_1, X_2) + \beta \eta(X_1)\eta(X_2) \quad (2.14)$$

olacak biçimde M üzerinde skaler α ve β fonksiyonları varsa M manifolduna η –Einstein manifoldu denir ve ayrıca $\beta = 0$ ise M manifolduna Einstein manifoldu $\alpha = 0$ ise özel tipli η –Einstein manifoldu denir [11,19].

Tanım 2.1.11 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve S, M manifoldu üzerinde tanımlı Ricci tensörü olsun. M nin bir lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.15)$$

ile tanımlı r değerine M manifoldunun skaler eğriliği denir [16].

Tanım 2.1.12 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. R , Riemann eğrilik tensörü, $\mathcal{L}$, Ricci operatörü, S , Ricci tensörü ve M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin P projektif eğrilik tensör alanı

$$P(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 - \frac{1}{(n-1)}\{S(X_2, X_3)X_1 - S(X_1, X_3)X_2\} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için, $P(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması halinde M manifolduna projektif flat (düzlemsel) manifold denir [16].

Tanım 2.1.13 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. R , Riemann eğrilik tensörü ve r , M nin skaler eğriliği ve M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin C konsirküler eğrilik tensör alanı

$$C(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 - \frac{r}{n(n-1)}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $C(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması halinde M manifolduna konsirküler flat (düzlemsel) manifold denir [16].

Tanım 2.1.14 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. R , Riemann eğrilik tensörü, $\mathcal{L}$, Ricci operatörü, S , Ricci tensörü ve M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin K konharmonik eğrilik tensör alanı

$$K(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 - \frac{1}{n-2} \{S(X_2, X_3)X_1 - S(X_1, X_3)X_2 + g(X_2, X_3)\mathcal{L}X_1 - g(X_1, X_3)\mathcal{L}X_2\} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $K(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda M manifolduna konharmonik flat (düzlemsel) manifold denir [20].

Tanım 2.1.15 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. S Ricci tensörü, λ skaler fonksiyon olmak üzere, her X_1, X_2 vektör alanları için,

$$Z(X_1, X_2) = S(X_1, X_2) + \lambda g(X_1, X_2) \quad (2.19)$$

eşitliği ile verilen $(0,2)$ – tipli tensöre Z tensörü denir [13].

Tanım 2.1.16 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. R Riemann eğrilik tensörü, λ skaler fonksiyon ve her X_1, X_2, X_3 vektör alanları olmak üzere;

$$Q(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 - \frac{\lambda}{n-1} \{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (2.20)$$

eşitliği ile verilen ve izi Z tensörü olan $(1,3)$ – tipli tensöre Q tensörü denir [14].

Tanım 2.1.17 (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve $T(0, m)$ – tipinde ($m \geq 1$) tensör alanı olmak üzere, her $U, V, W_1, \dots, W_m$ vektör alanları için R nin T ye etkisi,

$$\begin{aligned} (R(U, V) \cdot T)(W_1, \dots, W_m) &= -T(R(U, V)W_1, W_2, \dots, W_m) \\ &\quad -T(W_1, R(U, V)W_2, \dots, W_m) \\ &\quad - \dots \\ &\quad -T(W_1, \dots, W_{m-1}, R(U, V)W_m) \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlıdır ve $R \cdot T$ ile gösterilir [21].

2.2 Değme Manifolddar

Tanım 2.2.1 M bir $(2n + 1) -$ boyutlu manifold olsun. M manifoldu üzerinde ϕ $(1, 1) -$ tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1 -form olsun. X_1, M manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\phi^2 X_1 = -X_1 + \eta(X_1)\xi \quad (2.22)$$

$$\eta(\xi) = 1 \quad (2.23)$$

koşullarını sağlayan ϕ, ξ, η üçlüsüne M manifoldu üzerinde tanımlı bir hemen hemen değme yapısı denir ve bu yapı ile birlikte M ye de hemen hemen değme manifoldu denir [16].

Teorem 2.2.1 (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için,

$$i) \eta(\phi X_1) = 0 \quad (2.24)$$

$$ii) \phi \xi = 0 \quad (2.25)$$

$$iii) \text{rank} \phi = 2n \quad (2.26)$$

eşitlikleri sağlanır [16].

Teorem 2.2.2 g , bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde tanımlı Riemann metrik tensör alanı olmak üzere;

$$g(X_1, \xi) = \eta(X_1) \quad (2.27)$$

$$g(\phi X_1, \phi X_2) = g(X_1, X_2) - \eta(X_1)\eta(X_2) \quad (2.28)$$

eşitlikleri sağlanır [16].

Sonuç 2.2.1 M hemen hemen değme manifoldu üzerinde tanımlı g Riemann metriği için,

$$g(\phi X_1, X_2) + g(X_1, \phi X_2) = 0 \quad (2.29)$$

eşitliği sağlanır [16].

Tanım 2.2.2 M bir hemen hemen değme manifoldu ve g de M manifoldu üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olsun. (2.27) ve (2.28) şartlarını sağlayan g Riemann metriğine M manifoldu üzerinde tanımlı hemen hemen değme metrik denir, (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapısı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile birlikte M manifolduna da hemen hemen değme metrik manifoldu denir [16].

Tanım 2.2.3 M , (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısıyla tanımlı bir manifold olmak üzere;

$$\Phi(X_1, X_2) = g(X_1, \phi X_2) \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının temel 2 formu denir [16].

Tanım 2.2.4 M , $(2n + 1) -$ boyutlu bir manifold üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \quad (2.31)$$

koşulunu sağlayan bir η 1 –formu var ise M manifoldu bir değme yapıya sahiptir. Böylece M manifolduna bir değme manifoldu denir. Burada η 1 –formu M manifoldunun bir değme formu olarak adlandırılır. Buradaki $(d\eta)^n$ ile de n yinci mertebeden dış çarpım yani,

$$(d\eta)^n = \underbrace{(d\eta) \wedge \dots \wedge (d\eta)}_{n-tane} \quad (2.32)$$

şeklinde gösterilebilir [16].

Teorem 2.2.3 $(2n + 1) -$ boyutlu ve η değme yapısına sahip olan bir M manifoldu üzerinde,

$$g(X_1, \phi X_2) = d\eta(X_1, X_2) \quad (2.33)$$

eşitliğini sağlayan bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır [16].

Tanım 2.2.5 M , diferansiyellenebilir bir manifold ve M manifoldu üzerinde tanımlı $(1, 1)$ –tipinde bir tensör alanı ϕ olsun ve her $X_1, X_2 \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$N_\phi(X_1, X_2) = \phi^2[X_1, X_2] + [\phi X_1, \phi X_2] - \phi[\phi X_1, X_2] - \phi[X_1, \phi X_2]$$

şeklindeki N_ϕ tensörüne, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [16].

2.3 Kenmotsu Manifolds

Tanım 2.3.1 (ϕ, ξ, η, g) metrik yapısına sahip $(2n + 1)$ – boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu, ϕ $(1,1)$ –tipli tensör alanı ve ∇ , afin konneksiyon olmak üzere;

$$(\nabla_{X_1}\phi)(X_2) = g(\phi X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)\phi X_1 \quad (2.34)$$

koşulunu sağlayan M manifolduna Kenmotsu manifoldu denir [2].

Tanım 2.3.2 (ϕ, ξ, η, g) metrik yapısına sahip $(2n + 1)$ – boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olmak üzere;

$$d\eta = 0 \quad (2.35)$$

$$d\Phi = 2\eta \wedge \Phi \quad (2.36)$$

koşullarını sağlayan M manifolduna hemen hemen Kenmotsu manifoldu adı verilir [2].

Teorem 2.3.1 M Kenmotsu manifoldu üzerinde,

$$\nabla_{X_1}\xi = X_1 - \eta(X_1)\xi \quad (2.37)$$

$$(\nabla_{X_1}\eta)X_2 = g(X_1, X_2) - \eta(X_1)\eta(X_2) \quad (2.38)$$

eşitlikleri sağlanır [2].

Teorem 2.3.2 M , bir Kenmotsu manifoldu ve R , bir Riemann eğrilik tensörü olmak üzere;

$$i) R(X_1, X_2)\xi = \eta(X_1)X_2 - \eta(X_2)X_1 \quad (2.39)$$

$$ii) R(\xi, X_1)X_2 = \eta(X_2)X_1 - g(X_1, X_2)\xi \quad (2.40)$$

eşitlikleri sağlanır [2].

Teorem 2.3.3 M , $(2n + 1)$ – boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun ve her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için,

$$\eta(R(X_1, X_2)X_3) = g(X_1, X_3)\eta(X_2) - g(X_2, X_3)\eta(X_1) \quad (2.41)$$

eşitliği sağlanır [2].

Teorem 2.3.4 M , $(2n + 1)$ – boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S ve Ricci operatörü $\mathcal{L}$ olmak üzere;

$$S(X_1, \xi) = -2n\eta(X_1) \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}\xi = -2n\xi \quad (2.43)$$

eşitlikleri sağlanır [2].

Teorem 2.3.5 M , $(2n + 1)$ – boyutlu bir Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S ve ϕ $(1, 1)$ – tipli tensör alanı olmak üzere;

$$S(\phi X_1, \phi X_2) = S(X_1, X_2) + 2n\eta(X_1)\eta(X_2) \quad (2.44)$$

eşitliği sağlanır [2].

Tanım 2.3.3 M , $(2n + 1)$ – boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Böylece $p \in M$ noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayında ξ vektör alanına dik bir X_1 vektör alanı $\{X_1, \phi X_1\}$ ortonormal olacak biçimde var ise $\{X_1, \phi X_1\}$ düzlemine $T_p(M)$ nin ϕ – kesitseli denir. Ayrıca

$$\mathcal{K}(X_1, \phi X_1) = g(R(X_1, \phi X_1)\phi X_1, X_1)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye M nin ϕ – kesitsel eğriliği adı verilir [2].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 3.1 M , $(2n + 1)$ – boyutlu bir Kenmotsu manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu ile ilişkili ∇^* ile gösterilen genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonu;

$$\nabla_{X_1}^* X_2 = \nabla_{X_1} X_2 - \eta(X_2)\nabla_{X_1}\xi + (\nabla_{X_1}\eta)(X_2)\xi - \eta(X_1)\phi X_2 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Teorem 3.1 M , $(2n + 1)$ – boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifold olmak üzere;

$$\nabla_{X_1}^* \xi = 0 \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanır [11].

Tanım 3.2 Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde R^* Riemann eğrilik tensörü,

$$R^*(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 + g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Sonuç 3.1 R^* , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü olsun.

$$i) R^*(X_1, X_2)\xi = 0 \quad (3.4)$$

$$ii) R^*(X_1, \xi)X_3 = 0 \quad (3.5)$$

eşitlikleri sağlanır [11].

Tanım 3.3 S^* , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı Ricci tensörü olmak üzere;

$$S^*(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(R^*(e_i, X_1)X_2, e_i) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Teorem 3.2 S^* , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı Ricci tensörü, $\mathcal{L}^*$, Ricci operatörü ve ϕ , $(1,1) -$ tipli tensör alanı olmak üzere;

$$S^*(X_1, X_2) = S(X_1, X_2) + 2ng(X_1, X_2) \quad (3.7)$$

$$S^*(\phi X_1, \phi X_2) = S(\phi X_1, \phi X_2) + 2ng(\phi X_1, \phi X_2) \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}^* X_1 = \mathcal{L} X_1 + 2nX_1 \quad (3.9)$$

eşitlikleri sağlanır [11].

Teorem 3.3 Genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldunun skaler eğriliği,

$$r^* = r + 2n(2n + 1) \quad (3.10)$$

şeklindedir [11].

Tanım 3.4 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. R^* , Riemann eğrilik tensörü ve r^* , M nin skaler eğriliği olmak üzere, M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin C^* konsirküler eğrilik tensör alanı

$$C^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $C^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip M manifoldu konsirküler flat olarak adlandırılır [11].

Tanım 3.5 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. R^* , Riemann eğrilik tensörü, S^* , Ricci tensörü ve $\mathcal{L}^*$, Ricci operatörü olmak üzere, M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin K^* konharmonik eğrilik tensör alanı

$$K^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{1}{2n-1} \{S^*(X_2, X_3)X_1 - S^*(X_1, X_3)X_2 + g(X_2, X_3)\mathcal{L}^*X_1 - g(X_1, X_3)\mathcal{L}^*X_2\} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $K^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip M manifoldu konharmonik flat olarak adlandırılır [22].

Sonuç 3.2 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. R , Riemann eğrilik tensörü ve K^* , her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin konharmonik eğrilik tensör alanı olmak üzere;

$$K^*(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 - \frac{2n+1}{2n-1} \{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (3.13)$$

eşitliği sağlanır [22].

Tanım 3.6 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. R^* , Riemann eğrilik tensörü ve S^* , Ricci tensörü olmak üzere, M üzerindeki her X_1, X_2, X_3 vektör alanları için, M nin P^* projektif eğrilik tensör alanı

$$P^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{1}{2n} \{S^*(X_2, X_3)X_1 - S^*(X_1, X_3)X_2\} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $P^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip M manifoldu projektif flat olarak adlandırılır [22].

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANAKA-WEBSTER KONNEKSİYONUNA SAHİP KENMOTSU MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK SONUÇLARI

Tanım 4.1 R^* , Riemann eğrilik tensörü ve λ , skaler fonksiyon ve X_1, X_2, X_3 vektör alanlar olmak üzere;

$$Q^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (4.1)$$

eşitliği ile verilen tensöre genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ –boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı Q^* tensörü denir. Özel olarak her $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için $Q^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olması durumunda genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip M manifoldu Q^* – flat olarak adlandırılır.

Teorem 4.1 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Q^* tensörü I. Bianchi Özdeşliğini sağlar.

İspat: Riemann eğrilik tensörü I. Bianchi Özdeşliğini sağladığından (4.1) denklemi kullanılarak,

$$Q^*(X_1, X_2)X_3 + Q^*(X_2, X_3)X_1 + Q^*(X_3, X_1)X_2 = 0 \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.1 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu Kenmotsu manifold olsun. (4.1) denkleminde (3.4), (3.5) ve (2.27) denklemleri kullanılarak,

$$Q^*(X_1, X_2)\xi = -\frac{\lambda}{2n}\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} \quad (4.3)$$

$$Q^*(\xi, X_2)X_3 = -\frac{\lambda}{2n}\{g(X_2, X_3)\xi - \eta(X_3)X_2\} \quad (4.4)$$

$$Q^*(X_1, \xi)X_3 = -\frac{\lambda}{2n}\{\eta(X_3)X_1 - g(X_1, X_3)\xi\} \quad (4.5)$$

sonuçları elde edilir.

Teorem 4.2 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. $Q^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ ise $\lambda = 0$ veya M özel tipli bir η -Einstein manifolddur.

İspat: $Q^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olsun. (4.1) denkleminde,

$$R^*(X_1, X_2)X_3 = \frac{\lambda}{2n} \{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (4.6)$$

elde edilir. Elde edilen (4.6) denklemi ξ ile iç çarpılır ve (2.27) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(R^*(X_1, X_2)X_3, \xi) &= \frac{\lambda}{2n} \{g(X_2, X_3)g(X_1, \xi) - g(X_1, X_3)g(X_2, \xi)\} \\ &= \frac{\lambda}{2n} \{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir.

(3.3) denklemi (4.7) denkleminde yerine yazılır, (2.3) ve (2.27) denklemleri kullanılırsa,

$$R(X_1, X_2, X_3, \xi) = \left(\frac{\lambda}{2n} - 1\right) \{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \quad (4.8)$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlikte (2.27), (2.41) denklemleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \eta(R(X_1, X_2)X_3) &= \left(\frac{\lambda}{2n} - 1\right) \{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \\ g(X_1, X_3)\eta(X_2) - g(X_2, X_3)\eta(X_1) &= \left(\frac{\lambda}{2n} - 1\right) \{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{\lambda}{2n} \{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece, $\lambda = 0$ veya

$$g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2) = 0$$

elde edilir.

$\lambda \neq 0$ olsun. $\mathcal{L}$ Ricci operatörü olmak üzere, (4.9) denkleminde X_1 vektör alanı yerine $\mathcal{L}X_1$ yazılır ve (2.27), (2.13) ve (2.42) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{g(X_2, X_3)\eta(\mathcal{L}X_1) - g(\mathcal{L}X_1, X_3)\eta(X_2)\} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{g(X_2, X_3)g(\mathcal{L}X_1, \xi) - g(\mathcal{L}X_1, X_3)\eta(X_2)\} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{g(X_2, X_3)S(X_1, \xi) - S(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{g(X_2, X_3)(-2n\eta(X_1)) - S(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{-2ng(X_2, X_3)\eta(X_1) - S(X_1, X_3)\eta(X_2)\} = 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.10) denkleminde $X_2 = \xi$ yazılır ve (2.27) denklemini kullanılırsa,

$$\left(\frac{\lambda}{2n}\right) \{-2n\eta(X_3)\eta(X_1) - S(X_1, X_3)\} = 0$$

dır. Buradan,

$$S(X_1, X_3) = -2n\eta(X_3)\eta(X_1) \quad (4.11)$$

elde edilir. Böylece, (4.11) denkleminde, M manifoldu özel tipli η –Einstein manifolddur.

Teorem 4.3 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. $Q^*(X_1, X_2)\xi = 0$ ise M , bir $\xi - Q^*$ flat manifolddur. Böylece aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) M , $\xi - Q^*$ flat manifold

ii) $\lambda = 0$.

İspat: $i \Rightarrow ii$:

$Q^*(X_1, X_2)\xi = 0$ olsun. (4.1) denkleminde (3.3) denklemini kullanarak,

$$Q^*(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 + \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right)\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $X_3 = \xi$ yazılırsa,

$$Q^*(X_1, X_2)\xi = R(X_1, X_2)\xi + \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right)\{g(X_2, \xi)X_1 - g(X_1, \xi)X_2\}$$

elde edilir. Son eşitlikte (2.27) denklemini kullanarak,

$$Q^*(X_1, X_2)\xi = R(X_1, X_2)\xi + \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right)\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} \quad (4.12)$$

elde edilir.

(2.39) denklemini (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$Q^*(X_1, X_2)\xi = \frac{\lambda}{2n}R(X_1, X_2)\xi \quad (4.13)$$

elde edilir. Böylece, $Q^*(X_1, X_2)\xi = 0$ olduğundan,

$$\lambda = 0$$

dır.

$ii \Rightarrow i$:

$\lambda = 0$ olsun. Denklem (4.12) den,

$$Q^*(X_1, X_2)\xi = R(X_1, X_2)\xi + \{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\}$$

elde edilir. Böylece, (2.39) denklemini son elde edilen eşitlikte yazılırsa,

$Q^*(X_1, X_2)\xi = 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 4.2 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde ϕ $(1, 1)$ –tipinde tensör alanı ve her X_1, X_2, X_3, X_4 vektör alanı olmak üzere,

$$g(Q^*(\phi X_1, \phi X_2)\phi X_3, \phi X_4) = 0 \quad (4.14)$$

koşulunu sağlayan genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifolduna $\phi - Q^*$ flat manifold denir.

Teorem 4.4 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M , $\phi - Q^*$ flat manifold ise η –Einstein manifolddur.

İspat: (4.1) denklemi (4.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g\left(R^*(\phi X_1, \phi X_2)\phi X_3 - \frac{\lambda}{2n}\left\{g(\phi X_2, \phi X_3)\phi X_1\right\}, \phi X_4\right) = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} R^*(\phi X_1, \phi X_2, \phi X_3, \phi X_4) &= \frac{\lambda}{2n}\{g(\phi X_2, \phi X_3)g(\phi X_1, \phi X_4) \\ &\quad - g(\phi X_1, \phi X_3)g(\phi X_2, \phi X_4)\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

olur.

Denklem (4.16) da $X_1 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n} R^*(\phi e_i, \phi X_2, \phi X_3, \phi e_i) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda}{2n} \left\{ g(\phi X_2, \phi X_3)g(\phi e_i, \phi e_i) \right\}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte (2.7) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{2n} g(R^*(\phi e_i, \phi X_2)\phi X_3, \phi e_i) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda}{2n} \{g(\phi X_2, \phi X_3)g(\phi e_i, \phi e_i) - g(\phi X_2, \phi X_3)\}$$

olur. Bu eşitlikte (2.8) ve (3.6) denklemleri kullanılırsa,

$$S^*(\phi X_2, \phi X_3) = \frac{\lambda}{2n}(2n-1)g(\phi X_2, \phi X_3) \quad (4.17)$$

elde edilir. Daha sonra (4.17) denkleminde (3.8) ve (2.44) denklemleri kullanılarak,

$$S(X_2, X_3) = \left(\frac{\lambda}{2n}(2n-1) - 2n\right)g(\phi X_2, \phi X_3) - 2n\eta(X_2)\eta(X_3) \quad (4.18)$$

sonucuna ulaşılır. Burada elde edilen denklemde (2.28) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S(X_2, X_3) &= \left(\frac{\lambda}{2n}(2n-1) - 2n\right)g(X_2, X_3) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2n}(2n-1)\eta(X_2)\eta(X_3) \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Böylece, (4.19) denkleminde, M manifoldu η –Einstein manifolddur.

Sonuç 4.2 M , $(2n+1)$ –boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $\phi - Q^*$ flat Kenmotsu manifold olsun. M nin skaler eğriliği,

$$r = \lambda(2n-1) - 2n(2n+1)$$

dir.

İspat: Denklem (4.19) da $X_2 = X_3 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n+1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left(\frac{\lambda}{2n}(2n-1) - 2n\right)g(e_i, e_i) - \frac{\lambda}{2n}(2n-1)\eta(e_i)\eta(e_i)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (2.23), (2.8) ve (2.15) denklemleri kullanılarak,

$$r = \lambda(2n-1) - 2n(2n+1)$$

elde edilir.

Tanım 4.3 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $\phi(1,1)$ – tipinde tensör alanı ve her X_1, X_2, X_3, X_4 vektör alanı olmak üzere;

$$g(Q^*(\phi X_1, X_2)X_3, \phi X_4) = 0 \quad (4.20)$$

koşulunu sağlayan genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifolduna pseudo $\phi - Q^*$ flat manifold denir.

Teorem 4.5 M , $(2n + 1)$ –boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip pseudo $\phi - Q^*$ flat Kenmotsu manifold ise M bir η –Einstein manifolddur.

İspat: (4.20) denkleminde (4.1) denklemi yazılır ve (3.3) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g \left(R^*(\phi X_1, X_2)X_3 - \frac{\lambda}{2n} \{g(X_2, X_3)\phi X_1 - g(\phi X_1, X_3)X_2\}, \phi X_4 \right) &= 0 \\ g(R(\phi X_1, X_2)X_3, \phi X_4) + \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right) (g(X_2, X_3)g(\phi X_1, \phi X_4) \\ &\quad - g(\phi X_1, X_3)g(X_2, \phi X_4)) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Denklem (4.21) de $X_2 = X_3 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (R(\phi X_1, e_i)e_i, \phi X_4) + \sum_{i=1}^{2n+1} \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right) \{g(\phi e_i, \phi e_i)g(\phi X_1, \phi X_4) - g(\phi X_1, e_i)g(e_i, \phi X_4)\} = 0$$

bulunur ve bu eşitlikte (2.7) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(\phi X_1, e_i, e_i, \phi X_4) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left(\frac{\lambda}{2n} - 1\right) \begin{Bmatrix} g(\phi e_i, \phi e_i)g(\phi X_1, \phi X_4) \\ -g(\phi X_1, \phi X_4) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

elde edilir. Son denklemde (2.8) ve (2.12) denklemleri kullanılarak,

$$S(\phi X_1, \phi X_4) = (\lambda - 2n)g(\phi X_1, \phi X_4) \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir.

Denklem (4.23) te (2.28) ve (2.44) denklemleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$S(X_1, X_4) + 2n\eta(X_1)\eta(X_4) = (\lambda - 2n)(g(X_1, X_4) - \eta(X_1)\eta(X_4))$$

$$S(X_1, X_4) = (\lambda - 2n)g(X_1, X_4) + (2n - \lambda)\eta(X_1)\eta(X_4) - 2n\eta(X_1)\eta(X_4)$$

$$S(X_1, X_4) = (\lambda - 2n)g(X_1, X_4) - \lambda\eta(X_1)\eta(X_4) \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece, (4.24) denkleminde, M manifoldu η –Einstein manifolddur.

Sonuç 4.3 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu pseudo $\phi - Q^*$ flat Kenmotsu manifold olsun. M nin skaler eğriliği,

$$r = 2n(\lambda - 2n - 1)$$

dir.

İspat: Denklem (4.24) te $X_1 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} (\lambda - 2n)g(e_i, e_i) - \lambda\eta(e_i)\eta(e_i)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (2.8), (2.23) ve (2.15) denklemleri kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$r = 2n(\lambda - 2n - 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.6 Q^* , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı tensör olmak üzere;

$$Q^*(\xi, X_1)Q^* = 0$$

ise $\lambda = 0$ veya M bir η –Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned}
(Q^*(\xi, X_1)Q^*)(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi - Q^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\
&\quad - Q^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi - Q^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitliği ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
Q^*(\xi, X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)[R^*(X_2, X_3)\xi \\
&\quad - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, \xi)X_2 - g(X_2, \xi)X_3\}]
\end{aligned}$$

eşitliğinde (4.1), (3.4) ve (2.27) denklemleri kullanılarak,

$$Q^*(\xi, X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi = -\frac{\lambda}{2n}[\eta(X_3)Q^*(\xi, X_1)X_2 - \eta(X_2)Q^*(\xi, X_1)X_3]$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.1), (3.5) ve (2.27) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
Q^*(\xi, X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda^2}{4n^2} \left[\eta(X_3)\{g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1\} \right. \\
&\quad \left. - \eta(X_2)\{g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1\} \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{4n^2} \left[\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_3)\eta(X_2)X_1 \right. \\
&\quad \left. - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi + \eta(X_2)\eta(X_3)X_1 \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{4n^2} [\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$Q^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = Q^*(R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_2)\xi - g(\xi, X_2)X_1\}, X_3)\xi$$

eşitliğinde (4.1) ve (3.5) denklemleri kullanılarak,

$$Q^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = -\frac{\lambda}{2n}Q^*(g(X_1, X_2)\xi - g(\xi, X_2)X_1, X_3)\xi$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.27), (4.1), (2.23) ve (3.4) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
Q^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n}Q^*(g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1, X_3)\xi \\
&= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_2)Q^*(\xi, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_2)Q^*(X_1, X_3)\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_2) \left[R^*(\xi, X_3)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_3\} \right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_2) \left[R^*(X_1, X_3)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, \xi)X_1 - g(X_1, \xi)X_3\} \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{4n^2} \left[\begin{aligned} &g(X_1, X_2)\{\eta(X_3)\xi - X_3\} \\ &-\eta(X_2)\{\eta(X_3)X_1 - \eta(X_1)X_3\} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$Q^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = Q^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_3)\xi - g(\xi, X_3)X_1\})\xi$$

eşitliğinde denklem (4.1), (3.5) ve (2.27) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
Q^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n}Q^*(X_2, g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1)\xi \\
&= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_3)Q^*(X_2, \xi)\xi + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_3)Q^*(X_2, X_1)\xi \\
&= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_3) \left[R^*(X_2, \xi)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(\xi, \xi)X_2 - g(X_2, \xi)\xi\} \right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_3) \left[R^*(X_2, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, \xi)X_2 - g(X_2, \xi)X_1\} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4), (2.23) ve (2.27) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
Q^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi &= \frac{\lambda^2}{4n^2} [g(X_1, X_3)\{X_2 - \eta(X_2)\xi\} \\
&\quad - \eta(X_3)\{\eta(X_1)X_2 - \eta(X_2)X_1\}]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$Q^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = Q^*(X_2, X_3) \left[R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\} \right]$$

eşitliğinde (4.1), (3.4), (2.23) ve (2.27) denklemleri kullanılarak,

$$Q^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = -\frac{\lambda}{2n}Q^*(X_2, X_3)[\eta(X_1)\xi - X_1]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{2n}\eta(X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n}Q^*(X_2, X_3)X_1 \\
&= -\frac{\lambda}{2n}\eta(X_1)\left[R^*(X_2, X_3)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, \xi)X_2 - g(X_2, \xi)X_3\}\right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2n}\left[R^*(X_2, X_3)X_1 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3\}\right] \\
&= -\frac{\lambda}{2n}\eta(X_1)\left[-\frac{\lambda}{2n}\{\eta(X_3)X_2 - \eta(X_2)X_3\}\right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2n}\left[R^*(X_2, X_3)X_1 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3\}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar (4.25) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{\lambda}{2n}\left[R^*(X_2, X_3)X_1 + \frac{\lambda}{n}\{\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi\}\right] = 0 \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $\lambda = 0$ veya

$$R^*(X_2, X_3)X_1 = -\frac{\lambda}{n}\{\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi\} \quad (4.27)$$

elde edilir. Son elde edilen denklemde (3.3) denklemi yazılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X_2, X_3)X_1 &= g(X_2, X_1)X_3 - g(X_3, X_1)X_2 \\
&\quad - \frac{\lambda}{n}\{\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi\}
\end{aligned} \quad (4.28)$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklem X_4 ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X_2, X_3, X_1, X_4) &= g(X_2, X_1)g(X_3, X_4) - g(X_3, X_1)g(X_2, X_4) \\
&\quad - \frac{\lambda}{n}\{\eta(X_3)g(X_1, X_2)g(\xi, X_4) - \eta(X_2)g(X_1, X_3)g(\xi, X_4)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki son denklemde $X_2 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[g(e_i, X_1)g(X_3, e_i) - g(X_3, X_1)g(e_i, e_i) - \frac{\lambda}{n} \{ \eta(X_3)g(X_1, e_i)g(\xi, e_i) - \eta(e_i)g(X_1, X_3)g(\xi, e_i) \} \right]$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte (2.7), (2.8), (2.23) ve (2.27) denklemleri kullanılırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[g(X_1, X_3) - g(X_3, X_1)g(e_i, e_i) - \frac{\lambda}{n} \{ \eta(X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3) \} \right] \quad (4.29)$$

elde edilir.

(4.29) denkleminde (2.12) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} S(X_3, X_1) &= -2ng(X_1, X_3) + \frac{\lambda}{n} [g(X_1, X_3) - \eta(X_1)\eta(X_3)] \\ S(X_3, X_1) &= \left(-2n + \frac{\lambda}{n}\right) g(X_1, X_3) - \frac{\lambda}{n} \eta(X_1)\eta(X_3) \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece, (4.30) denkleminde, M manifoldu η –Einstein manifolddur.

Sonuç 4.4 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. $Q^*(\xi, X_1)Q^* = 0$ ise M nin skaler eğriligi,

$$r = -2n(2n + 1) + 2\lambda$$

dır.

İspat: (4.30) denkleminde $X_1 = X_3 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left(-2n + \frac{\lambda}{n} \right) g(e_i, e_i) - \frac{\lambda}{n} \eta(e_i)\eta(e_i) \quad (4.31)$$

elde edilir. Böylece (4.31) denkleminde (2.8), (2.23) ve (2.15) denklemleri kullanılarak ve gerekli işlemler yapılsa,

$$r = -2n(2n + 1) + 2\lambda$$

elde edilir.

Sonuç 4.5 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M , Q^* -flat ise $-1 + \frac{\lambda}{2n}$ sabit eğrilığe sahiptir.

İspat: (4.1) denkleminde (3.3) denklemi yazılırsa,

$$Q^*(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 + g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \quad (4.32)$$

elde edilir.

$Q^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olsun. Buradan (4.32) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$R(X_1, X_2)X_3 = g(X_1, X_3)X_2 - g(X_2, X_3)X_1 + \frac{\lambda}{2n}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\}$$

$$R(X_1, X_2)X_3 = (-1 + \frac{\lambda}{2n})\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\}$$

elde edilir ve böylece M manifoldunun $-1 + \frac{\lambda}{2n}$ sabit eğrilikli olduğu görülür.

Teorem 4.7 Q^* , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu M Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı tensör ve R^* , Riemann eğrilik tensörü olmak üzere;

$$Q^*(\xi, X_1)R^* = 0$$

ise $\lambda = 0$ veya M bir Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$(Q^*(\xi, X_1)R^*)(X_2, X_3)\xi = Q^*(\xi, X_1)R^*(X_2, X_3)\xi - R^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi - R^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi - R^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = 0 \quad (4.33)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (3.4) denklemi kullanılırsa,

$$Q^*(\xi, X_1)R^*(X_2, X_3)\xi = R^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = R^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = 0$$

olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $R^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi$ eşitliğinin hesabını yapmak yeterli olacaktır.

$$R^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = R^*(X_2, X_3) \left[R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n} \{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\} \right]$$

eşitliğinde (4.1), (3.4), (2.27) ve (2.23) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} R^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi &= R^*(X_2, X_3) \left[-\frac{\lambda}{2n} \{\eta(X_1)\xi - X_1\} \right] \\ &= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1)R^*(X_2, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n} R^*(X_2, X_3)X_1 \\ &= \frac{\lambda}{2n} R^*(X_2, X_3)X_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece, $\lambda = 0$ veya

$$R^*(X_2, X_3)X_1 = 0 \quad (4.35)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte (3.3) denklemi kullanılır ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = g(X_2, X_1)X_3 - g(X_3, X_1)X_2 \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36) denklemi X_4 ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} g(R(X_2, X_3)X_1, X_4) &= g(X_2, X_1)g(X_3, X_4) - g(X_3, X_1)g(X_2, X_4) \\ R(X_2, X_3, X_1, X_4) &= g(X_2, X_1)g(X_3, X_4) - g(X_3, X_1)g(X_2, X_4) \end{aligned} \quad (4.37)$$

elde edilir.

Denklem (4.37) de $X_2 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} [g(e_i, X_1)g(X_3, e_i) - g(X_3, X_1)g(e_i, e_i)]$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte (2.7), (2.8) ve (2.12) denklemleri kullanılırsa,

$$S(X_3, X_1) = -2ng(X_3, X_1) \quad (4.38)$$

elde edilir. Böylece, (4.38) denkleminde M manifoldu Einstein manifolddur.

Sonuç 4.6 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde,

$$Q^*(\xi, X_1)R^* = 0$$

ise M manifoldu, $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.

İspat: $Q^*(\xi, X_1)R^* = 0$ olsun. Bu eşitliğin sonucunda elde edilen (4.36) denkleminde gerekli düzenleme yapılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = -[g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3]$$

elde edilir. Böylece, M manifoldu (-1) sabit eğrilikli bir manifold olduğundan

$H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.

Sonuç 4.7 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde, $Q^*(\xi, X_1)R^* = 0$ ise M nin skaler eğriliği,

$$r = -2n(2n + 1)$$

dır.

İspat: Denklem (4.38) de $X_3 = X_1 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} -2ng(e_i, e_i) \quad (4.39)$$

elde edilir. Böylece (4.39) denkleminde (2.8) ve (2.15) denklemleri kullanılırsa,

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Sonuç 4.8 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde,

$$R^*(\xi, X_1)Q^* = R^*(\xi, X_1)R^*$$

dir.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} (R^*(\xi, X_1)Q^*)(X_2, X_3)\xi &= R^*(\xi, X_1)Q^*(X_2, X_3)\xi - Q^*(R^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\ &\quad - Q^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3)\xi - Q^*(X_2, X_3)R^*(\xi, X_1)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} (R^*(\xi, X_1)R^*)(X_2, X_3)\xi &= R^*(\xi, X_1)R^*(X_2, X_3)\xi - R^*(R^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\ &\quad - R^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3)\xi - R^*(X_2, X_3)R^*(\xi, X_1)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.40) ve (4.41) eşitliklerinin (3.4) ve (3.5) denklemlerinden sıfıra eşit olduğu aşikârdır. Böylece,

$$R^*(\xi, X_1)Q^* = R^*(\xi, X_1)R^* \quad (4.42)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.8 M , $(2n + 1) -$ boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldu olsun. O halde

$$Q^*(\xi, X_1)S^* = 0$$

ise M bir Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$(Q^*(\xi, X_1)S^*)(X_2, \xi) = S^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, \xi) + S^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)\xi) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (3.4), (3.6) ve (3.7) denklemleri kullanılırsa,

$$S^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)\xi) = S(X_2, Q^*(\xi, X_1)\xi) + 2ng(X_2, Q^*(\xi, X_1)\xi) = 0$$

elde edilir. Son elde edilen eşitlikte (4.1), (3.4), (2.23), (2.42) ve (2.27) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)\xi) &= S\left(X_2, R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\}\right) \\
&\quad + 2ng\left(X_2, R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\}\right) \\
&= S\left(X_2, -\frac{\lambda}{2n}\{\eta(X_1)\xi - X_1\}\right) + 2ng\left(X_2, -\frac{\lambda}{2n}\{\eta(X_1)\xi - X_1\}\right) \\
&= -\frac{\lambda}{2n}\eta(X_1)S(X_2, \xi) + \frac{\lambda}{2n}S(X_2, X_1) - \lambda\eta(X_1)g(X_2, \xi) + \lambda g(X_2, X_1) \\
&= \lambda\eta(X_1)\eta(X_2) + \frac{\lambda}{2n}S(X_2, X_1) - \lambda\eta(X_1)\eta(X_2) + \lambda g(X_2, X_1) \\
&= \frac{\lambda}{2n}S(X_2, X_1) + \lambda g(X_2, X_1) = 0 \\
S(X_2, X_1) &= -2ng(X_2, X_1) \tag{4.43}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (4.43) denkleminde M manifoldu Einstein manifolddur.

Sonuç 4.9 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde, $Q^*(\xi, X_1)S^* = 0$ ise M nin skaler eğriliği,

$$r = -2n(2n + 1)$$

dir.

İspat: Denklem (4.43) te $X_2 = X_1 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} -2ng(e_i, e_i)$$

elde edilir. Böylece (2.8) ve (2.15) denklemleri kullanılırsa,

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.9 M , $(2n + 1)$ –boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldu olsun. O halde,

$$Q^*(\xi, X_1)C^* = 0$$

ise M , bir Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} (Q^*(\xi, X_1)C^*)(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)C^*(X_2, X_3)\xi - C^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\ &\quad - C^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi - C^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir ve eşitlik ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)C^*(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)[R^*(X_2, X_3)\xi \\ &\quad - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_3, \xi)X_2 - g(X_2, \xi)X_3\}] \end{aligned}$$

eşitliğinde (3.11), (3.4), (2.27) ve (4.1) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)C^*(X_2, X_3)\xi &= -\frac{r^*}{2n(2n+1)} Q^*(\xi, X_1)[\eta(X_3)X_2 - \eta(X_2)X_3] \\ &= -\frac{r^*}{2n(2n+1)} [\eta(X_3) Q^*(\xi, X_1)X_2 - \eta(X_2) Q^*(\xi, X_1)X_3] \\ &= -\frac{r^*}{2n(2n+1)} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3) \left\{ R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n} \left(\begin{aligned} &g(X_1, X_2)\xi \\ &-g(\xi, X_2)X_1 \end{aligned} \right) \right\} \\ &- \eta(X_2) \left\{ R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n} \left(\begin{aligned} &g(X_1, X_3)\xi \\ &-g(\xi, X_3)X_1 \end{aligned} \right) \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.5) ve (2.27) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)C^*(X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3)\{g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1\} \\ &- \eta(X_2)\{g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1\} \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_3)\eta(X_2)X_1 \\ &- \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi + \eta(X_2)\eta(X_3)X_1 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} [\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi]$$

elde edilir.

$$C^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = C^*(R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_2)\xi - g(\xi, X_2)X_1\}, X_3)\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5) ve (2.27) ve (3.11) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} C^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n} C^*(g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1, X_3)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_2)C^*(\xi, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_2)C^*(X_1, X_3)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_2) \left[R^*(\xi, X_3)\xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(X_3, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_3\} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_2) \left[R^*(X_1, X_3)\xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(X_3, \xi)X_1 - g(X_1, \xi)X_3\} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4), (2.27) ve (2.23) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} C^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \left[\begin{aligned} &g(X_1, X_2)\{\eta(X_3)\xi - X_3\} \\ &-\eta(X_2)\{\eta(X_3)X_1 - \eta(X_1)X_3\} \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} [g(X_1, X_2)\eta(X_3)\xi - g(X_1, X_2)X_3 \\ &\quad - \eta(X_2)\eta(X_3)X_1 + \eta(X_2)\eta(X_1)X_3] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$C^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = C^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_3)\xi - g(\xi, X_3)X_1\})\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5) ve (2.27) ve (3.11) denklemleri kullanılarak,

$$C^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = -\frac{\lambda}{2n} C^*(X_2, g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1)\xi$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_3) C^*(X_2, \xi) \xi + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_3) C^*(X_2, X_1) \xi \\
&= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_3) \left[R^*(X_2, \xi) \xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(\xi, \xi) X_2 - g(X_2, \xi) \xi\} \right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_3) \left[R^*(X_2, X_1) \xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(X_1, \xi) X_2 - g(X_2, \xi) X_1\} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4), (3.5), (2.23) ve (2.27) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C^*(X_2, Q^*(\xi, X_1) X_3) \xi &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} g(X_1, X_3) [X_2 - \eta(X_2) \xi] \\
&\quad - \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \eta(X_3) [\eta(X_1) X_2 - \eta(X_2) X_1] \\
&= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \left[\frac{g(X_1, X_3) \{X_2 - \eta(X_2) \xi\}}{-\eta(X_3) \{\eta(X_1) X_2 - \eta(X_2) X_1\}} \right] \\
C^*(X_2, Q^*(\xi, X_1) X_3) \xi &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{g(X_1, X_3) X_2 - g(X_1, X_3) \eta(X_2) \xi \\
&\quad - \eta(X_3) \eta(X_1) X_2 + \eta(X_3) \eta(X_2) X_1\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$C^*(X_2, X_3) Q^*(\xi, X_1) \xi = C^*(X_2, X_3) \left[R^*(\xi, X_1) \xi - \frac{\lambda}{2n} \{g(X_1, \xi) \xi - g(\xi, \xi) X_1\} \right]$$

eşitliğinde (4.1), (3.4), (2.23), (2.27) ve (3.11) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
C^*(X_2, X_3) Q^*(\xi, X_1) \xi &= -\frac{\lambda}{2n} C^*(X_2, X_3) [\eta(X_1) \xi - X_1] \\
&= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1) C^*(X_2, X_3) \xi + \frac{\lambda}{2n} C^*(X_2, X_3) X_1 \\
&= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1) \left[R^*(X_2, X_3) \xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)} \left\{ \frac{g(X_3, \xi) X_2}{-g(X_2, \xi) X_3} \right\} \right] + \frac{\lambda}{2n} C^*(X_2, X_3) X_1 \\
C^*(X_2, X_3) Q^*(\xi, X_1) \xi &= \frac{\lambda}{2n} \frac{r^*}{2n(2n+1)} \{\eta(X_3) \eta(X_1) X_2 \\
&\quad - \eta(X_1) \eta(X_2) X_3\} + \frac{\lambda}{2n} C^*(X_2, X_3) X_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar (4.44) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$C^*(X_2, X_3)X_1 = -\frac{r^*}{2n(2n+1)}[g(X_1, X_3)X_2 - g(X_1, X_2)X_3] \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. Burada elde edilen denklem ile (3.11) denklemini eşitlenirse,

$$\begin{aligned} R^*(X_2, X_3)X_1 - \frac{r^*}{2n(2n+1)}[g(X_1, X_3)X_2 - g(X_1, X_2)X_3] \\ = -\frac{r^*}{2n(2n+1)}[g(X_1, X_3)X_2 - g(X_1, X_2)X_3] \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$R^*(X_2, X_3)X_1 = 0 \quad (4.46)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte (3.3) denklemini yazılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = g(X_2, X_1)X_3 - g(X_3, X_1)X_2 \quad (4.47)$$

elde edilir. En son elde edilen eşitlik X_4 ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} g(R(X_2, X_3)X_1, X_4) &= g(X_2, X_1)g(X_3, X_4) - g(X_3, X_1)g(X_2, X_4) \\ R(X_2, X_3, X_1, X_4) &= g(X_2, X_1)g(X_3, X_4) - g(X_3, X_1)g(X_2, X_4) \end{aligned} \quad (4.48)$$

elde edilir.

Denklem (4.48) de $X_2 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n+1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} [g(e_i, X_1)g(X_3, e_i) - g(X_3, X_1)g(e_i, e_i)]$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte (2.7), (2.8) ve (2.12) denklemleri kullanılırsa,

$$S(X_3, X_1) = -2ng(X_3, X_1) \quad (4.49)$$

elde edilir. Böylece, (4.49) denkleminde M manifoldu Einstein manifolddur.

Sonuç 4.10 M , $(2n + 1)$ –boyutlu genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldu olsun. $Q^*C^* = 0$ ise M manifoldu $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.

İspat: (4.47) denklemi ile elde edilen eşitlik üzerinde gerekli düzenleme yapılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = -[g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3]$$

elde edilir. Böylece, M manifoldu (-1) sabit eğrilikli olup $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.

Sonuç 4.11 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde, $Q^*(\xi, X)C^* = 0$ ise M nin skaler eğriliği,

$$r = -2n(2n + 1)$$

dir.

İspat: Denklem (4.49) da $X_3 = X_1 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} -2ng(e_i, e_i) \quad (4.50)$$

elde edilir. Böylece (4.50) denkleminde (2.8) ve (2.15) denklemleri kullanılırsa,

$$r = -2n(2n + 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.10 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1)$ – boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. O halde,

$$Q^*(\xi, X_1)K^* = 0$$

ise M bir η –Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Q^*(\xi, X_1)K^*)(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)K^*(X_2, X_3)\xi - K^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\ &\quad - K^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi - K^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik ayrı ayrı hesaplanır, $\mathcal{L}X_1 \rightarrow X_1, \mathcal{L}X_2 \rightarrow X_2, \mathcal{L}X_3 \rightarrow X_3$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)K^*(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)[R^*(X_2, X_3)\xi - \frac{1}{2n-1}\{S^*(X_3, \xi)X_2 \\ &\quad - S^*(X_2, \xi)X_3 + g(X_3, \xi)\mathcal{L}^*X_2 - g(X_2, \xi)\mathcal{L}^*X_3\}] \end{aligned}$$

eşitliğinde (3.12), (3.4), (2.27), (3.9), (3.6) ve (4.1) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)K^*(X_2, X_3)\xi &= -\frac{1}{2n-1}(1+2n)Q^*(\xi, X_1)[\eta(X_3)X_2 - \eta(X_2)X_3] \\ &= -\frac{1}{2n-1}(1+2n)\eta(X_3)Q^*(\xi, X_1)X_2 \\ &\quad + \frac{1}{2n-1}(1+2n)\eta(X_2)Q^*(\xi, X_1)X_3 \\ &= -\frac{1+2n}{2n-1} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3) \left\{ R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n} \begin{pmatrix} g(X_1, X_2)\xi \\ -g(\xi, X_2)X_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &- \eta(X_2) \left\{ R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n} \begin{pmatrix} g(X_1, X_3)\xi \\ -g(\xi, X_3)X_1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.5) ve (2.27) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q^*(\xi, X_1)K^*(X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3)\{g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1\} \\ &- \eta(X_2)\{g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1\} \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)} \left[\begin{aligned} &\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)\eta(X_3)X_1 \\ &- \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi + \eta(X_3)\eta(X_2)X_1 \end{aligned} \right] \\ Q^*(\xi, X_1)K^*(X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)} [\eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$K^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = K^*(R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_2)\xi - g(\xi, X_2)X_1\}, X_3)\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5), (2.27) ve (3.12) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} K^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n}K^*(g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1, X_3)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_2)K^*(\xi, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_2)K^*(X_1, X_3)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_2)[R^*(\xi, X_3)\xi - \frac{1}{2n-1}\{S^*(X_3, \xi)\xi \\ &\quad - S^*(\xi, \xi)X_3 + g(X_3, \xi)\mathcal{L}^*\xi - g(\xi, \xi)\mathcal{L}^*X_3\}] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_2)[R^*(X_1, X_3)\xi - \frac{1}{2n-1}\{S^*(X_3, \xi)X_1 \\ &\quad - S^*(X_1, \xi)X_3 + g(X_3, \xi)\mathcal{L}^*X_1 - g(X_1, \xi)\mathcal{L}^*X_3\}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.4), (3.5), (2.23), (2.27), (3.6), (2.43) ve (3.9) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} K^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= \frac{\lambda}{2n(2n-1)}g(X_1, X_2)\mathcal{L}^*X_3 \\ &\quad - \frac{\lambda}{2n(2n-1)}\eta(X_2)\{\eta(X_3)\mathcal{L}^*X_1 - \eta(X_1)\mathcal{L}^*X_3\} \\ &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)}[g(X_1, X_2)X_3 - \eta(X_2)\{\eta(X_3)X_1 - \eta(X_1)X_3\}] \\ &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)}\{g(X_1, X_2)X_3 - \eta(X_3)\eta(X_2)X_1 + \eta(X_2)\eta(X_1)X_3\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$K^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = K^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_3)\xi - g(\xi, X_3)X_1\})\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5) ve (2.27) denklemleri kullanılarak,

$$= -\frac{\lambda}{2n}K^*(X_2, g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1)\xi$$

$$= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_3) K^*(X_2, \xi) \xi + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_3) K^*(X_2, X_1) \xi$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4), (3.6), (2.23), (2.43), (2.27) ve (3.9) denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} K^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n} g(X_1, X_3) [R^*(X_2, \xi)\xi - \frac{1}{2n-1} \{S^*(\xi, \xi)X_2 \\ &\quad - S^*(X_2, \xi)\xi + g(\xi, \xi)\mathcal{L}^*X_2 - g(X_2, \xi)\mathcal{L}^*\xi\}] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n} \eta(X_3) [R^*(X_2, X_1)\xi - \frac{1}{2n-1} \{S^*(X_1, \xi)X_2 \\ &\quad - S^*(X_2, \xi)X_1 + g(X_1, \xi)\mathcal{L}^*X_2 - g(X_2, \xi)\mathcal{L}^*X_1\}] \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra gerekli sadeleştirmeler yapılsa,

$$\begin{aligned} K^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi &= \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)} \{g(X_1, X_3)X_2 - \eta(X_3)\eta(X_1)X_2 \\ &\quad + \eta(X_3)\eta(X_2)X_1\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$K^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = K^*(X_2, X_3) \left[R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n} \{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\} \right]$$

eşitliğinde (4.1), (2.23), (2.27), (3.4), (3.12) ve (3.6) kullanılarak,

$$\begin{aligned} K^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi &= -\frac{\lambda}{2n} K^*(X_2, X_3) [\eta(X_1)\xi - X_1] \\ &= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1) K^*(X_2, X_3)\xi + \frac{\lambda}{2n} K^*(X_2, X_3)X_1 \\ &= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1) [R^*(X_2, X_3)\xi \\ &\quad - \frac{1}{2n-1} \{S^*(X_3, \xi)X_2 - S^*(X_2, \xi)X_3 \\ &\quad + g(X_3, \xi)\mathcal{L}^*X_2 - g(X_2, \xi)\mathcal{L}^*X_3\}] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n} K^*(X_2, X_3)X_1 \end{aligned}$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak (3.9) denklemi kullanılırsa,

$$K^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = \frac{\lambda(1+2n)}{2n(2n-1)} \{\eta(X_1)\eta(X_3)X_2 - \eta(X_1)\eta(X_2)X_3\} + \frac{\lambda}{2n} K^*(X_2, X_3)X_1$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar (4.51) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$K^*(X_2, X_3)X_1 = \frac{2n+1}{2n-1} \{ \eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi - g(X_1, X_2)X_3 - g(X_1, X_3)X_2 \} \quad (4.52)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (4.52) denklemi ve (3.13) denklemi eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = \frac{2n+1}{2n-1} \{ \eta(X_3)g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)g(X_1, X_3)\xi - 2g(X_1, X_2)X_3 \} \quad (4.53)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik X_4 ile iç çarpılırsa,

$$g(R(X_2, X_3)X_1, X_4) = \frac{2n+1}{2n-1} \{ \eta(X_3)g(X_1, X_2)g(X_4, \xi) - \eta(X_2)g(X_1, X_3)g(X_4, \xi) - 2g(X_1, X_2)g(X_3, X_4) \} \quad (4.54)$$

elde edilir.

Denklem (4.54) te $X_2 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n+1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{2n+1}{2n-1} \left\{ \begin{array}{l} \eta(X_3)g(X_1, e_i)g(e_i, \xi) \\ -\eta(e_i)g(X_1, X_3)g(e_i, \xi) \\ -2g(X_1, e_i)(X_3, e_i) \end{array} \right\}$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte (2.7), (2.23), (2.27) ve (2.12) denklemleri kullanılırsa,

$$S(X_3, X_1) = \frac{2n+1}{2n-1} \{ -3g(X_1, X_3) + \eta(X_1)\eta(X_3) \}$$

$$S(X_3, X_1) = -\frac{6n+3}{2n-1}g(X_1, X_3) + \frac{2n+1}{2n-1}\eta(X_3)\eta(X_1) \quad (4.55)$$

elde edilir. Böylece, (4.55) denkleminde M manifoldu η –Einstein manifolddur.

Sonuç 4.12 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde, $Q^*(\xi, X_1)K^* = 0$ ise M nin skaler eğriliği,

$$r = -\frac{2(2n + 1)(3n + 1)}{2n - 1}$$

dır.

İspat: Denklem (4.55) te $X_3 = X_1 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} -\frac{6n+3}{2n-1} g(e_i, e_i) - \frac{2n+1}{2n-1} \eta(e_i) \eta(e_i) \quad (4.56)$$

elde edilir. Böylece, (4.56) denkleminde (2.8), (2.15) ve (2.23) denklemleri kullanılırsa,

$$r = -\frac{2(2n + 1)(3n + 1)}{2n - 1}$$

elde edilir.

Teorem 4.11 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. O halde,

$$Q^*(\xi, X_1)P^* = 0$$

ise M bir Einstein manifolddur.

İspat: (2.21) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} (Q^*(\xi, X_1)P^*)(X_2, X_3)\xi &= Q^*(\xi, X_1)P^*(X_2, X_3)\xi - P^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi \\ &\quad - P^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi - P^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$Q^*(\xi, X_1)P^*(X_2, X_3)\xi = Q^*(\xi, X_1) \left[R^*(X_2, X_3)\xi - \frac{1}{2n} S^*(X_3, \xi)X_2 - S^*(X_2, \xi)X_3 \right]$$

eşitliğinde (3.14), (3.4) ve (3.6) denklemleri kullanılarak,

$$Q^*(\xi, X_1)P^*(X_2, X_3)\xi = 0$$

elde edilir.

$$P^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = P^*(R^*(\xi, X_1)X_2 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_2)\xi - g(\xi, X_2)X_1\}, X_3)\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5), (2.27) ve (3.14) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} P^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n}P^*(g(X_1, X_2)\xi - \eta(X_2)X_1, X_3)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_2)P^*(\xi, X_3)\xi - \eta(X_2)P^*(X_1, X_3)\xi\} \\ &= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_2)[R^*(\xi, X_3)\xi - \frac{1}{2n}\{S^*(X_3, \xi)\xi - S^*(\xi, \xi)X_3\}] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_2)[R^*(X_1, X_3)\xi - \frac{1}{2n}\{S^*(X_3, \xi)X_1 - S^*(X_1, \xi)X_3\}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4) ve (3.6) denklemleri kullanılırsa,

$$P^*(Q^*(\xi, X_1)X_2, X_3)\xi = 0$$

elde edilir.

$$P^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = P^*(X_2, R^*(\xi, X_1)X_3 - \frac{\lambda}{2n}\{g(X_1, X_3)\xi - g(\xi, X_3)X_1\})\xi$$

eşitliğinde (4.1), (3.5), (2.27) ve (3.14) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} P^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi &= -\frac{\lambda}{2n}P^*(X_2, g(X_1, X_3)\xi - \eta(X_3)X_1)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_3)P^*(X_2, \xi)\xi + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_3)P^*(X_2, X_1)\xi \\ &= -\frac{\lambda}{2n}g(X_1, X_3)[R^*(X_2, \xi)\xi - \frac{1}{2n}\{S^*(\xi, \xi)X_2 - S^*(X_2, \xi)\xi\}] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2n}\eta(X_3)[R^*(X_2, X_1)\xi - \frac{1}{2n}\{S^*(X_1, \xi)X_2 - S^*(X_2, \xi)X_1\}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4) ve (3.6) denklemleri kullanılırsa,

$$P^*(X_2, Q^*(\xi, X_1)X_3)\xi = 0$$

elde edilir.

$$P^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = P^*(X_2, X_3) \left[R^*(\xi, X_1)\xi - \frac{\lambda}{2n} \{g(X_1, \xi)\xi - g(\xi, \xi)X_1\} \right]$$

eşitliğinde (4.1), (3.4), (2.23) ve (2.27) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} P^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi &= -\frac{\lambda}{2n} P^*(X_2, X_3)[\eta(X_1)\xi - X_1] \\ &= -\frac{\lambda}{2n} \{\eta(X_1)P^*(X_2, X_3)\xi - P^*(X_2, X_3)X_1\} \\ &= -\frac{\lambda}{2n} \eta(X_1)[R^*(X_2, X_3)\xi - \frac{1}{2n}\{S^*(X_3, \xi)X_2 \\ &\quad - S^*(X_2, \xi)X_3\}] + \frac{\lambda}{2n} P^*(X_2, X_3)X_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4) ve (3.6) denklemleri kullanılırsa,

$$P^*(X_2, X_3)Q^*(\xi, X_1)\xi = \frac{\lambda}{2n} P^*(X_2, X_3)X_1$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar (4.57) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{\lambda}{2n} P^*(X_2, X_3)X_1 = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\lambda = 0$ veya

$$P^*(X_2, X_3)X_1 = 0 \tag{4.58}$$

dır. Böylece, (4.58) ve (3.14) denklemleri eşitlenirse,

$$P^*(X_2, X_3)X_1 = R^*(X_2, X_3)X_1 - \frac{1}{2n} \{S^*(X_3, X_1)X_2 - S^*(X_2, X_1)X_3\} = 0$$

elde edilir. Son elde edilen eşitlikte (3.3), (3.7), (2.13) denklemleri kullanılır,

$\mathcal{L}X_2 \rightarrow X_2$, $\mathcal{L}X_3 \rightarrow X_3$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
P^*(X_2, X_3)X_1 &= R(X_2, X_3)X_1 + g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3 \\
&\quad - \frac{1}{2n}\{S(X_3, X_1)X_2 + 2ng(X_3, X_1)X_2 \\
&\quad - S(X_2, X_1)X_3 - 2ng(X_2, X_1)X_3\} \\
&= R(X_2, X_3)X_1 + g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3 \\
&\quad - \frac{1}{2n}\{g(\mathcal{L}X_3, X_1)X_2 + 2ng(X_3, X_1)X_2 \\
&\quad - g(\mathcal{L}X_2, X_1)X_3 - 2ng(X_2, X_1)X_3\} \\
&= R(X_2, X_3)X_1 - \frac{1}{2n}\{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir ve son eşitlikte düzenleme yapılırsa,

$$R(X_2, X_3)X_1 = \frac{1}{2n}\{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3\} \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.59) denklemi X_4 ile iç çarpılırsa,

$$g(R(X_2, X_3)X_1, X_4) = \frac{1}{2n}\{g(X_3, X_1)g(X_4, X_2) - g(X_2, X_1)g(X_3, X_4)\} \quad (4.60)$$

elde edilir.

Denklem (4.60) ta $X_2 = X_4 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} R(e_i, X_3, X_1, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2n}\{g(X_3, X_1)g(e_i, e_i) - g(e_i, X_1)g(X_3, e_i)\}$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte (2.7) ve (2.8) denklemleri kullanılırsa,

$$S(X_3, X_1) = g(X_3, X_1) \quad (4.61)$$

elde edilir. Böylece, (4.61) denkleminde M manifoldu Einstein manifolddur.

Sonuç 4.13 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. O halde, $Q^*(\xi, X_1)P^* = 0$ ise M nin skaler eğriliği,

$$r = 2n + 1$$

dir.

İspat: Denklem (4.61) de $X_3 = X_1 = e_i$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$) yazılıp kontraksiyon uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte (2.8) ve (2.15) denklemleri kullanılırsa,

$$r = 2n + 1$$

elde edilir.

Sonuç 4.14 M , genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip $(2n + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu P^* –flat ise manifoldun sabit eğriliği $\frac{1}{2n}$ dir.

İspat: $P^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olsun. (4.59) eşitliğinde elde edilen denklem,

$$R(X_2, X_3)X_1 = \frac{1}{2n} \{g(X_3, X_1)X_2 - g(X_2, X_1)X_3\}$$

(2.9) denklemine göre $\frac{1}{2n}$ sabit eğriliğe sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

“Riemann manifold üzerindeki konneksiyon bir Levi-Civita konneksiyon olmadığı zaman manifoldun geometrisinde ne tür değişiklikler olur?” sorusu birçok araştırmacı tarafından sorulmuş ve Levi-Civita konneksiyonundan faydalanarak oldukça farklı konneksiyonlar tanımlanmış ve bu konneksiyonlarla birlikte farklı tipte manifold sınıflarının geometrisi incelenmiştir. Son yıllarda manifoldlar üzerinde farklı konneksiyonlar kullanarak yapılan çalışmalar artan bir ilgiye sahiptir. Bu sorudan hareketle bu çalışmada genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldların yeni bir karakterizasyonu elde edilmiştir. Yapmış olduğumuz çalışmada Mantica ve Suh’un yakın zamanda tanımlamış olduğu Q tensörünün [14] genelleştirilmiş Tanaka-Webster konneksiyonuna sahip Kenmotsu manifoldlarda çok iyi bilinen bazı temel eğrilik tensörleriyle etkisi incelendi ve önemli sonuçlar elde edildi. İleride yapılacak çalışmalar için Q tensörü kullanılarak farklı manifold türlerinde veya farklı konneksiyonlara sahip manifold türlerinde incelenip önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Tanno, S., 1969. The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Mathematical Journal*, 21, 1, 21-38.
2. Kenmotsu, K., 1972. A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Mathematical Journal*, 24, 1, 93-103.
3. Pitiş, G., 2007. *Geometry of Kenmotsu Manifolds*, Publishing House of Transilvania University of Braşov, Romania.
4. Tanaka, N., 1976. On Non-degenerate Real Hypersurfaces, Graded Lie Algebras and Cartan Connections, *Japanese Journal of Mathematics*, 2, 1, 131-190.
5. Webster, S. M., 1978. Pseudo-Hermitian Structures on a Real Hypersurface, *Journal of Differential Geometry*, 13, 1, 25-41.
6. Tanno, S., 1989. Variational Problems on Contact Riemannian Manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 314, 1, 349-379.
7. Cho, J. T., 1999. CR-structures on Real Hypersurfaces of a Complex Space Form, *Publicationes Mathematicae*, 54, 473-487.
8. Cho, J. T., 2008. Pseudo-Einstein CR-structures on real Hypersurfaces of a Complex Space Form, *Hokkaido Mathematical Journal*, 37, 1-17.
9. Takagi, R., 1975. Real Hypersurfaces in Complex Projective Space with Constant Principal Curvatures, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 27, 1, 45-53.
10. Perktaş, S. Y., Acet, B. E. ve Kılıç, E., 2013. Kenmotsu Manifolds with Generalized Tanaka-Webster Connection, *Adıyaman University Journal of Science*, 3, 2, 79-93.
11. Kıran Kumar, D. L., Nagaraja, H. G. ve Kumari, D., 2019. Conircular Curvature Tensor of Kenmotsu Manifolds Admitting Generalized Tanaka-Webster Connection, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 9, 4, 447-462.
12. Ghosh, G. ve De, U. C., 2017. Kenmotsu Manifold with Generalized Tanaka-Webster Connection, *Publications de l'Institut Mathematique-Beograd*, 102, 116, 221-230.
13. Mantica, C. A. ve Molinari, L. G., 2012. Weakly Z-symmetric Manifolds, *Acta Mathematica Hungarica*, 135, (1-2), 80-96.
14. Mantica, C. A. ve Suh, Y. J., 2013. Pseudo Q-symmetric Riemannian Manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 10, 5, 1-25.
15. Şahin, B., 2012. *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

16. Yano, K. ve Kon, M., 1984. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Corporation, Singapore.
17. Hacısalihoğlu, H. H., 1983. Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, Malatya.
18. O'Neill, B., 1983. Semi Riemann Geometry, Academic Press, London, England.
19. Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N., 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
20. Ishii, Y., 1957. On Conharmonic Transformations, Tensor New Series, 7, 2, 73-80.
21. Deszcz, R., 1992. On Pseudosymmetric Spaces, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique Série A, 44, 1-34.
22. Prakasha, D. G. ve Hadimani, B. S., 2018. On the Conharmonic Curvature Tensor of Kenmotsu Manifolds with Generalized Tanaka-Webster Connection, Miskolc Mathematical Notes, 19, 1, 491-503.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ramazan Çınar KAYA

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2008-2012

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. M.E.B., Matematik Öğretmeni, 2015-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Mustafa Yıldırım, R. Çınar Kaya (2022). Some Curvature Conditions of Kenmotsu Manifolds Admitting Generalized Tanaka-Webster Connection, 8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, 16-19 June 2022, Türkiye.