

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYEL ALANINDA SPİN-0
PARÇACIKLARININ DAVRANIŞI**

Derya ŞAHİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2019

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYEL ALANINDA SPİN-0
PARÇACIKLARININ DAVRANIŞI**

Derya ŞAHİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2019

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYEL ALANINDA SPİN-0
PARÇACIKLARININ DAVRANIŞI**

Derya ŞAHİN

FİZİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez / / 201..... tarihinde jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Orhan BAYRAK (Danışman)

Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Yusuf SERT

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYEL ALANINDA SPİN-0 PARÇACIKLARININ DAVRANIŞI

Derya ŞAHİN

Yüksek Lisans Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Ocak 2018; 42 sayfa

Literatürde Woods-Saxon veya Modifiye edilmiş Woods-Saxon potansiyelinin Klein-Gordon denklemi için analitik çözümlerinde tutarsızlık olduğunu fark ettik. Nikiforov-Uvarov veya Asimtotik İterasyon metodu kullanılarak elde edilen enerji özdeğerleri ve uygun dalga fonksiyonlarıyla sınır şartları sağlanamamaktadır. Nikiforov-Uvarov veya Asimtotik İterasyon metodu $r=R$ civarında dalga fonksiyonunun doğru davranışını dikkate alamamaktadır. Bu tez çalışmasında $L=0$ durumu için Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyelinin enerji özdeğer ve uygun dalga fonksiyonlarını elde etmek için Klein-Gordon denkleminin analitik çözümünü Hipergeometrik fonksiyonların özelliklerini kullanarak inceledik. Bağlı durum enerji özdeğerlerini ve uygun dalga fonksiyonlarını kapalı formda elde ettik. Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyel alanında hareket eden π^0 parçacıkları için enerji özdeğerleri ve potansiyel parametreleri arasındaki ilişkiyi tartıştık ve çift oluşuma sebep olan kritik V_0 değerlerini sabit potansiyel parametreleri için belirledik.

Bu tez çalışmasında bazı Woods-Saxon veya modifiye Woods-Saxon potansiyellerinin Klein Gordon denklemi için yapılan çözümlerinin hatalı olduğunu gösterdik. Woods-Saxon potansiyelinin daha genel bir formunu kullanarak sınır şartlarını sağlayan analitik çözümler elde ettik. Elde edilen bu analitik çözümler diğer etkileşen sistemlerin davranışını tanımlamada kullanılabilir.

ANAHTAR KELİMELE: Analitik Çözüm, Enerji Özdeğer ve Dalga Fonksiyonu, Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyeli, Klein-Gordon Denklemi.

JÜRİ: Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Yusuf SERT

ABSTRACT

BEHAVIOR OF SPIN-0 PARTICLES IN THE GENERALIZED WOODS-SAXON POTENTIAL FIELD

Derya ŞAHİN

MSc Thesis in Physics

Supervisor: Prof. Dr. Orhan BAYRAK

December 2018; 42 pages

We notice that there is inconsistency in the analytical solution of the Woods-Saxon or modified Woods-Saxon potential for the Klein-Gordon equation in literature. The physical boundary conditions cannot be satisfied with the energy eigenvalues and corresponding wave functions obtained by using the Nikiforov-Uvarov or Asymptotic Iteration Methods for the Woods-Saxon or modified Woods-Saxon potentials. The Nikiforov-Uvarov or Asymptotic Iteration methods cannot take into account the correct behavior of the wave function at the vicinity $r=R$. In this thesis, we examine the analytical solution of the Klein-Gordon equation to determine the energy eigenvalue and corresponding wave function of the Generalized Woods-Saxon potential for $L=0$ state by using the properties of Hypergeometric functions. We obtain the bound state energy eigenvalues and corresponding wave functions in the closed forms. We discuss the correlations between the potential parameters and energy eigenvalues for π^0 particles under moving the Generalized Woods-Saxon potential field and determine the critical V_0 values inducing pair creation for other constant potential parameters.

In this thesis, we show that some solutions of Woods-Saxon or modified Woods-Saxon potentials for the Klein Gordon equation are inaccurate. Using a more general form of the Woods-Saxon potential, we have obtained analytical solutions that provide boundary conditions. These analytical solutions could be used to describe the behavior of other interacting systems.

KEYWORDS: Analytical Solution, Energy Eigenvalue and Wave Function, Generalized Woods-Saxon Potential, Klein-Gordon Equation.

COMMITTEE: Prof. Dr. Orhan BAYRAK

Assoc. Prof. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Asst. Prof. Dr. Yusuf SERT

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyel alanında spin-0 parçacıkların davranışları incelendi. Enerji özdeğeri ve dalga fonksiyonu elde edildi. Sayısal olarak parçacığın davranışı incelendi.

Çalışmalarım sırasında bana her türlü yardımı esirgemeyen çok değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. Orhan BAYRAK'a (Akdeniz Üniversitesi Fizik Bölüm Başkanı) Teşekkürü borç bilirim. Tezin yazım aşamasında kendi tecrübeleri aktaran her konuda destek olan canım arkadaşım Canan DÜLGEROĞLU'na (Akdeniz Üniversitesi Biyoloji Bölümü Araştırma Görevlisi) teşekkürü borç bilirim.

Maddi manevi her zamanda yanımda olan, kardeşim Damla ŞAHİN'e, annem Gülser ŞAHİN'e babam Nihat ŞAHİN'e ve kuzenim Hacer AKSOY'ya çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ.....	iii
AKADEMİK BEYAN.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK TARAMASI.....	4
2.1. Parçacıkların Sınıflandırılması.....	9
2.2. Pionların Özellikleri	12
3. MATERYAL VE METOT.....	15
3.1. Klein Gordon Denklemi	15
3.1.1. Elektromanyetik alanda spin-0 parçacıkların etkileşimi.....	18
3.1.2. Herhangi bir potansiyel ile klein gordon denklemi için dalga fonksiyonun açısal ve radyal kısımlarının ayrılması.....	19
3.2. Asimtotik İterasyon Metodu	20
3.3. Nikiforov Uvarov Yöntemi.....	22
3.4. Pion Parçacıklarının Woods-Saxon Alanındaki Davranışı.....	24
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	31
5. SONUÇLAR.....	36
6. KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyel alanında spin-0 Parçacıklarının davranışı” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

..... /..... /.....

Derya ŞAHİN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A	: Çekirdeğin kütle numarası
a	: Sızma parametresi
E	: Parçacığın enerjisi
H	: Hamiltonyen
r_0	: Nükleer parametre
r	: Hedef ve mermi çekirdek arasındaki merkezi uzaklık
R	: Nükleer yarıçap
V	: Potansiyel enerji
V_0	: Potansiyel derinliği
W_0	: Potansiyel derinliği
ψ	: Dalga fonksiyonu
$\hbar$	: Planck sabitinin 2π 'ye bölümü

Kısaltmalar

AIM	: Asimtotik İterasyon Metodu
$E_n^{üst}$	: Bağlı durumun n . üst enerji değeri
E_n^{alt}	: Bağlı durumun n . alt enerji değeri
GWS	: Genelleştirilmiş Woods-Saxon
GSWS	: Genelleştirilmiş Simetrik Woods-Saxon
KG	: Klein-Gordon
NU	: Nikiforov Uvarov
PSS	: Sözde spin simetri
SD	: Schrödinger denklemi
SS	: Spin simetri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyelinin nükleer yarıçapa göre değişimi (Bayrak ve Açıksöz 2015).....	8
Şekil 4.1. a) Pionun üst enerji özdeğerinin V_0 potansiyel derinliğine göre değişimi b) Pionun üst enerji özdeğerinin nükleer yarıçapa R göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015).....	34
Şekil 4.2. Bazı kuantum sayıları için normalize olmamış dalga fonksiyonunun nükleer yarıçapa göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015)	35

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Leptonların sembolleri, elektrik yükleri, kütlesi, spin kuantum sayısı (Çek 2016)	9
Çizelge 2.2. Kuarkların sembolleri, elektrik yükleri, kütlesi ve spin kuantum sayısı (Çek 2016).....	10
Çizelge 2.3. Hadronların özellikleri (Çek 2016)	11
Çizelge 2.4. Bozonların sembolleri, elektrik yükü, kütlesi ve spini (Çek 2016)	12
Çizelge 2.5. Pionların Özellikleri (Griffiths 2004).....	14
Çizelge 4.1. Pionun üst ve alt enerji özdeğerleri ile V_0, W_0 potansiyel parametrelerinin kuantum sayılarına göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015).....	33

1. GİRİŞ

Klasik fizik makro dünyada bulunan cisimlerin hareketlerini çeşitli kuvvetler altında hareketlerini tanımlamaya çalışır (Tekin 2008). Cismin konumu bulunduğunda ona ait dinamikleri hızı ve momentumu hesaplanabilir. Bu gibi mekanik olayları Newton kanunları, elektrik ve optik olaylarını Maxwell denklemleri, termodinamik olaylarını ise istatistik mekaniği açıklayabiliyordu. Ancak 19.yüzyılın başlarında tüm fiziksel durumlar açıklanabilmesine rağmen 1800'lü yılların bitimine doğru bazı deneyler yapılmıştır: Siyah cisim ışıması, Fotoelektrik Olay, tayf çizgileri, Compton Olayı gibi olayları klasik fizik açıklamakta başarılı olamamıştır. Bu sorunların üzerine yeni bir kurama ihtiyaç duyulmuştur. Uzun yıllar süren arayışın sonunda Kuantum mekaniği denilen yeni bir fizik ortaya konmuştur. Kuantum mekaniği Planck, Einstein, Bohr, De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Dirac ve Pauli gibi bilim insanlarının katkılarıyla ortaya çıkmıştır (Karaoğlu 2008). Kuantum mekaniği atom altı parçacıkların hareketini matematiksel ifadelerle tanımlamıştır. Kuantum mekaniğinde parçacıkların davranışı dalga fonksiyonlarıyla ifade edilir. $\psi(r,t)$ şeklinde gösterilen bu dalga fonksiyonları parçacık ile ilgili bütün bilgileri içinde barındırır. Kuantum mekaniğinde parçacığın herhangi bir anda konumu net olarak bilemeyiz; burada karşımıza çıkan yorum parçacığın bulunma olasılığıdır. Bulunma olasılığı dalga fonksiyonunun karesinden elde edilmektedir. Parçacıkların dinamik hareketini tanımlayan dalga fonksiyonu göreceli olmayan durumlar için Schrödinger denkleminin (SD) çözümünden elde edilmektedir. Schrödinger denkleminin çözümünden elde edilen dalga fonksiyonun fiziksel gözlemler vermesi için karesi integrallenebilir ve sonlu olması gerekmektedir.

Kuantum mekaniğinin postülalarına göre toplam enerji ile Hamiltonyen arasında

$H\psi = E\psi$ şeklinde bir özdeğer denklemi vardır. Hamiltonyen $H = \frac{p^2}{2m} + V$ klasik

fizikteki toplam enerjiyi belirtmektedir. Hamiltonyendeki birinci ve ikinci terim sırasıyla kinetik enerji ve potansiyel enerjiyi temsil etmektedir. Schrödinger denkleminin çözülmesi için ilk olarak Hamiltonyenin kurulması gerekmektedir. Klasik fizikte parçacığın hareketini belirleyen nicelik kuvvettir. Kuantum mekaniğinde ise kuvveti temsil eden potansiyel enerjidir. Bu yüzden denklemleri çözerken parçacıklar arasındaki etkileşimi doğru tanımlayan potansiyel enerji ifadesini belirlemek son derece önemlidir. Çeşitli potansiyellerde Schrödinger denklemi çözülerek dalga fonksiyonu ve ona karşılık gelen enerji özdeğeri elde edilmiştir. Seçtiğimiz potansiyelin süresiz olduğu yerlerde parçacığın dalga fonksiyonunun süreklilik şartını sağlaması gerekir (Griffiths 2005).

Bir kuantum parçacığın davranışını sistematik olarak incelemek istediğimizde etkileşimi tanımlayan herhangi bir potansiyel enerji için parçacık bağlı, yarı bağlı ve saçılma durumlarından birinde olduğu görülür. Ele aldığımız potansiyel enerji parçacığın enerjisinden büyükse parçacık potansiyel kuyunun içinden kaçamaz bu olaya bağlı durum denilmektedir. Bağlı durumlar atom ve molekül fiziği, nükleer fizik ve parçacık fiziğinde önemli bir yere sahiptir. Eğer parçacığın enerjisi potansiyelden büyükse parçacık potansiyel alana yaklaştığında ya yavaşlar ya da hızlanır ve geri döner bu olaya saçılma denilmektedir. Parçacığın saçılması esnek veya esnek olmayan saçılma şeklinde olabilir. Esnek ve esnek olmayan saçılmanın incelenmesi hedef numunenin karakteristik özelliklerinin araştırılmasında önemli bir yere sahiptir. Molekölün,

atomun, çekirdeğin ya da çekirdek altı parçacıkların özelliklerinin belirlenmesinde elastik ve inelastik reaksiyonlar sıklıkla kullanılmaktadır. Yarı bağlı durumlarda parçacık potansiyel kuyusunun içindedir ama enerjisi pozitif olduğu için potansiyel enerjiden daha az enerjiye sahip olsa bile parçacık tünelleyerek bağlı durumdan kurtulabilir. Terside mümkündür. Yani pozitif enerjili parçacık potansiyel engelinden tünelleyerek bağlı duruma geçebilir. Bu durum parçacığın hedef numuneye füzyonu olarak adlandırılır. Bu tür kuantum etkiler parçacığının dalga karakterine sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Schrödinger denklemi sonsuz kuyu, sabit potansiyel kuyusu, basamak potansiyelleri gibi analitik olarak çözülebilir sabit potansiyel enerjiler için bağlı, yarı-bağlı ve saçılma durumları için incelenerek gerçek fiziksel parçacık etkileşimlerine uygulanabilir fakat bu potansiyellerin gözlenirlerin açıklanmasında pek başarılı olamadığı görülmüştür. Parçacıklar arasındaki net kuvveti tanımlayan doğru potansiyel enerji ifadesi kullanılmadıkça gözlenirlerin eş zamanlı açıklanmasının mümkün olmadığı görülmektedir. Harmonik osilatör, Coulomb potansiyeli, Kratzer potansiyeli dalga denklemleri için analitik çözümü olan değişken potansiyel enerji geometrilerine sahiptir. Harmonik osilatör titreşim hareketi yapan parçacıkların davranışını açıklamak için kullanılmaktadır. Coulomb potansiyeli yüklü parçacıkların Coulomb etkileşimini açıklamak için kullanılmaktadır. Kratzer potansiyeli ise özellikle diatomik moleküllerin titreşim spektrumlarının açıklanmasında sıklıkla kullanılmaktadır. Yukarıda bahsedilen potansiyel enerjilerin dışındaki potansiyel enerjiler için dalga denklemlerinin analitik çözümü şuanki bilgimize göre yoktur. Açıl momentumun sıfırdan farklı olduğu durumlar için analitik çözüme sahip olmayan bu potansiyelleri (Morse, Eckart, Pöschl-Teller, Woods-Saxon) çözmek için ya yarı-analitik çözüm yöntemleri kullanılır ya da nümerik olarak çözülür (Flügge 1994). Bilindiği üzere herhangi bir potansiyelin denge noktasında Taylor serisine açılırsa eğer parçacığın hareketi denge noktası civarında ise serinin ilk birkaç elemanı alınarak doğru sonuca yakın çözümler elde edilebilir. Dalga denklemlerini nümerik çözmek için diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesi gerekir (Karaoğlu 2013).

Kuantum Mekaniği ortaya çıktıktan sonra atom altı parçacıkların davranışını anlamak için potansiyel modeller ortaya konmuştur. Schrödinger kendi ismiyle anılan dinamik dalga denklemini kurarak Coulomb potansiyeli için doğru enerji spektrumunu elde etmiştir (Schrödinger 1926). Daha sonra bu denklemin relativistik formları elde edilmiştir (Greiner 2000). Kuantum mekaniğinin başarılı uygulamalarından bir diğeri ağır çekirdeklerinin alfa tünelleme olayıdır. Tüm çekirdeklerin alfa bozunması için ampirik olarak Geiger-Nuttall kanunu ortaya konmuştur (Geiger ve Nuttall 1911). Bu kanunun kuantum mekaniğinin prensipleriyle açıklanması 1928 yılında Gamow tarafından verilmiştir (Gamow 1928). Atomik çekirdekdeki pozitif yükler çok kısa mesafede (fermi mertebesinde) çok şiddetli itici olmasına rağmen çekirdeği bir arada tutan kuvvetlerin çekirdekdeki nükleonlar arasında kütleli bozon alış verişi sayesinde olduğu ve bu ara parçacıkların kütlelerinin elektronun kütlelerinden yaklaşık 200 kat daha fazla olduğu Yukawa tarafından bulunmuştur (Yukawa 1935). Potansiyel teorisinin başarılı uygulamalarından bir diğeri nükleer reaksiyonların teorik olarak modellenmesinde karşımıza çıkmaktadır. Karşımıza çıkan potansiyellerden Woods ve Saxon tarafından önerilen potansiyelin formu (Woods ve Saxon 1954)

$$f(r) = \frac{1}{\left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]} \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada R ve a sırasıyla nükleer yarıçap ve çekirdeğin yüzey kalınlığıdır. Bu potansiyel modelinin çekirdek-çekirdek etkileşimlerini tanımlamada önemli bir yere sahip olduğu görülmüştür (Satchler 1980; Mottelson ve Bohr 1998). WS potansiyeli ve onun farklı durumları parçacık denklemleri için çalışılmıştır. Göreli olmayan ve spini sıfır olan parçacıklar için Schrödinger denklemi WS potansiyeli için çözülerek enerji özdeğeri ve dalga fonksiyonu elde edilmiştir (Flügge 1994). Daha sonra bu potansiyel formu spini-0 parçacıklar için Klein-Gordon (KG) ve spini- $\frac{1}{2}$ olan parçacıklar için Dirac denkleminde açısal momentumun sıfır olduğu durumlar ile ele alınarak bağlı ve saçılma durumları elde edilmiştir (Villalba ve Greiner 2003; Villalba ve Rojas 2007; Guo vd. 2009; Jiang vd. 2006).

Bu tezde Genelleştirilmiş Woods-Saxon (GWS) potansiyel alanında hareket eden yüksüz pionların (π^0) davranışını tanımlamak amacıyla relativistik Klein-Gordon denklemini analitik olarak çözülmüştür. Çalışmamızda GWS potansiyelinin KG denklemi için analitik çözümleri Nikiforov-Uvarov (NU) metodu kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Fakat NU metoduyla elde edilen enerji özdeğeri ve dalga fonksiyonlarının sınır şartlarını sağlamadığı görülmüştür. Literatürde Woods-Saxon veya onun değişik formları ile yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçların fiziksel olmadığı gösterilerek doğru çözüm formları elde edilmiştir (Bayrak ve Şahin 2015; Bayrak ve Açıksöz 2015).

Tezin ilk kısmında kaynak araştırmalarına yer verilmiştir. Bu kısımda dalga denklemleri için farklı potansiyeller altında yapılan çalışmalara değinilmiştir. WS potansiyeli ile alakalı bilgiler sunulmuştur. Çalışılan GWS potansiyel formu verilmiştir. Atom altı parçacıklar sınıflandırılıp onlarla ilgili bilgilere değinilmiştir. Son olarak pionların özellikleri anlatılmıştır. Materyal metot kısmında; KG denkleminin elde edilişi, elektromanyetik alanda spini-0 parçacıkların etkileşimi açıklanmıştır. KG denkleminin açısal ve radyal kısımları ayrı ayrı elde edilmiştir. Asimtotik İterasyon Metodu anlatılmıştır. Kullanacağımız yöntem olan Nikiforov Uvarov yöntemi verilmiştir. Son olarak bu kısımda pion parçacıklarının GWS potansiyel alanında ki davranışı incelenmiş kapalı formda enerji özdeğeri ve dalga fonksiyonu yazılmıştır. Bulgular ve Tartışma kısmında kapalı formda elde ettiğimiz denklemleri bilgisayar yazılım programı kullanılarak nümerik olarak değerler verilmiştir. Bu değerler yorumlanmıştır. Aynı şekilde potansiyel derinliklerinin değişimi ile pionun enerji özdeğerindeki değişim grafiği çizilmiştir ve yorumlanmıştır. Enerji özdeğerine karşılık gelen dalga fonksiyonu grafiği çizilerek sınır koşullarına uygun olup olmadığı sonucuna varılmıştır. En son kısım olan sonuç bölümünde ise; tez çalışmamızda elde edilen bulgulara göre yorum yapılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

Nükleer fizikte çekirdeğin yapısını, özelliklerini açıklamak için sıvı damlası, Kabuk modeli, kollektif model gibi teorik yaklaşımlar bulunmaktadır. Kabuk modeli ve kollektif model ortalama alan yaklaşımını temel alarak bir çekirdeğin, diğer tüm nükleonların oluşturduğu çekici potansiyelde hareket ettiğini söylemektedir (Erkol ve Demiralp 2007; Guo ve Sheng 2005; Sadeghi ve Pahlavani 2004). Bu yaklaşımla çekirdeğin tek parçacık enerji seviyeleri doğru bir şekilde tanımlanabilmektedir (Krane 1988). Reaksiyon gözlenirlerini açıklamak için ise optik model kullanılmaktadır. Bu modelde, hedefe gönderilen parçacık kabuk modelinde ele alınan türde bir potansiyel ile karşı karşıya kalmaktadır, ancak bu potansiyele sanal kısımda eklenmiştir. Optik model, nükleer saçılma olaylarını iyi bir şekilde izah etmektedir (Satchler 1980; Krane 1988). Nükleer reaksiyonda hedef ve mermi parçacık arasındaki etkileşimi ifade edecek potansiyelin formu çekirdekler arasındaki yapı ve reaksiyon gözlenirlerini eş zamanlı açıklaması beklenir. Tanımlanan bu potansiyelin gerçel kısmı esnek saçılmayı, sanal kısmı ise soğurulmayı ifade eder (Satchler 1980; Satchler 1983). Literatüre bakıldığında ilk optik potansiyel

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW), & r \leq r_0 A^{1/3} \\ 0, & r > r_0 A^{1/3} \end{cases} \quad (2.1)$$

şekline sahip kare kuyu potansiyelidir (Feshbach vd. 1954). Burada r , hedef ve mermi çekirdek arasındaki merkezi uzaklığı; r_0 , nükleer yarıçapı ve A , çekirdeğin kütle numarasını tanımlamaktadır. Optik modeli kullanabilmek için işe yarar tip de bir potansiyel seçilmelidir. Gelen parçacık ile hedef arasındaki nükleon-nükleon etkileşmesi fazla uzaklıklarda üstel olarak azaldığı için belirlenen optik potansiyelinde aynı karakterde olması gerekir (Krane 1988). Ayrıca çok kısa menzillidir. Bu özelliklere uyan WS potansiyeli önerilmiştir ve yıllardır büyük ilgi görmektedir. Yıllar boyunca WS potansiyeli çekirdeklerin tek çekirdekli enerji düzeylerini açıklamada faydalı modellerden biri olmuştur (Bohr ve Mottelson 1998; Gomez vd. 2003; Massen ve Panos 1998). Aynı zamanda çekirdek-çekirdek etkileşimleri için de faydalı modellerden olmuştur (Brandan ve Satchler 1997; Satchler 1991; Khoa vd. 1997). Ayrıca, parçacık, atom, kimyasal ve yoğun madde fiziği gibi diğer fizik alanlarında da geniş bir uygulama alanına sahiptir (Altuğ vd. 2010). Potansiyelin en bilinen formu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Woods ve Saxon 1954).

$$V(r) = \frac{V_0 + iW}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (2.2)$$

Burada R nükleer yarıçap, a çekirdeğin yüzey kalınlığıdır. V_0 ve W nükleer potansiyelin derinlikleridir. Önceki yapılan çalışmalar incelendiğinde sadece standart formda bilinen WS potansiyeli ile çalışmalar olmadığını görülmektedir. Karşımıza Genelleştirilmiş Woods-Saxon (GWS) veya Genelleştirilmiş Simetrik Woods-Saxon (GSWS) potansiyeli gibi kavramlar çıkmaktadır. WS potansiyelinin sanal kısmı olan soğurma potansiyeli yüzey yakınında artar bu yüzden etkileşme yüzeyde başladığı

düşünülmüştür. Etkileşmeler yüzeyden başlayıp çekirdeğe doğru git gide değişmektedir bu yüzden standart formda bilinen WS potansiyeli yüzey etkileşmelerini açıklayamamıştır. Bundan dolayı WS potansiyeli değiştirilmeye başlanmıştır (Alpdoğan ve Havare 2014; Bayrak ve Açiksöz 2015; Benamira vd. 2007; Berkdemir vd. 2005, 2006; Fakhri ve Sadeghi 2004; Hamzavi ve Rajavi 2013; Pannelle vd. 2010). Çekirdek-çekirdek etkileşmelerinde düşük enerjilerde etkileşim yüzeyde olduğu için WS potansiyeline ek terimler eklenmiştir. Bu ek terim WS potansiyelinin türevidir. Bu formdaki potansiyel Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyeli olarak adlandırılmıştır (Candemir ve Bayrak 2014; Bayrak ve Açiksöz 2015; Bayrak ve Şahin 2015; Lütfüoğlu vd. 2016; Liendo vd. 2016; Çapak ve Gönül 2016; Berkdemir vd. 2006; Gönül ve Köksal 2007). Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyeli veya onun özel durumlarının Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac dalga denklemleri için analitik çözümü, parçacıklar arası etkileşimleri; bağlı durum, yarı bağlı durum ve saçılmayı tanımlamada çok önemli bir yere sahiptir (Flügge 1994). Literatürde WS potansiyelinin analitik çözümüyle ilgili Hipergeometrik diferansiyel denklem kullanılarak yapılan bazı çalışmalar vardır: Radyal Schrödinger denklemi için WS potansiyelinin bağlı durumlar için analitik çözümü Flügge (1994) tarafından verilmiştir. Saçılma durum çözümleri ise Zaichenko (1976) tarafından bulunmuştur. Eşit vektör ve skaler WS potansiyeli için KG denkleminin bağlı durum analitik çözümü incelenmiştir (Chun-Feng vd. 1999). Bir boyutta KG denkleminin vektör potansiyel çözümleri simetrik WS potansiyeli için Clara ve Villalba (2005) tarafından verilerek geçme rezonansının oluşabilmesi için bir ifade türetmişlerdir ve bu ifadenin potansiyelin şekline bağlılığını tartışmışlardır. Asimtotik WS potansiyelinin tek boyuttaki saçılma ve bağlı durum çözümleri vektör potansiyel için (Alpdoğan vd. 2013) ve eşit vektör ve skaler potansiyel için analitik olarak elde edilmiş ve yansıma ve geçme katsayılarının bir olduğu nümerik olarak gösterilmiştir (Hassanabadi vd. 2013). Bir boyutta Dirac denkleminin saçılma ve bağlı durum çözümleri Kennedy (2002) tarafından elde edilerek saçılma durumları için geçiş rezonans şartı bulunmuştur. Ayrıca Kennedy tarafından bağlı durumların enerji özdeğerleri için analitik bir ifade elde edilerek difüzyon kalınlığının sıfır limitinde kare kuyu çözümlerine indirgenebileceği gösterilmiştir (Kennedy 2002).

WS potansiyelinin radyal Dirac denkleminde $l=0$ için çözümleri You vd. (2002) tarafından elde edilmiştir. WS potansiyelin spin ve sözde spin simetrik çözümleri Guo ve Sheng (2005) tarafından çekirdeğin tek nükleon enerji seviyelerini elde etmek amacıyla incelenmiştir. Deforme WS potansiyelinin Dirac denklemi için çözümleri Berkdemir vd. (2006) tarafından SD çözümlerine dönüşüm yapılarak elde edilmiştir. Literatürde, dalga denklemlerinin yaklaşık analitik çözümlerini $l \neq 0$ durumu açısından elde etmek için bazı çabalar vardır; Green ve Aldrich (1976) merkezci

bariyer terimi için $\frac{1}{r^2} \approx \delta^2 \frac{e^{\delta r}}{(1 - e^{\delta r})^2}$ yaklaşımını önermiştir. Ancak bu yaklaşım δ

parametresinin çok küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Pekeris yaklaşımı kullanılarak hem KG hem de Schrödinger denklemi WS potansiyeli için ele alınmıştır (Badalov vd. 2009; Badalov vd. 2010). Bu yazarlar NU yöntemini kullanarak

$z(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$ dönüşümü altında R 'ye bağlı bir özdeğer denklemi elde etmişlerdir

(Badalov vd. 2009; Badalov vd. 2010). Fakat elde ettikleri sonuçların fiziksel olmadığı gösterilmiştir (Bayrak ve Açıksöz 2015). Tek boyutlu Dirac denklemini, konuma bağlı kütle ve psödaskalar etkileşim konum çerçevesindeki WS potansiyeli ile Chargui (2016) tarafından ele alınmıştır. Son zamanlarda Dirac denklemine WS potansiyeli ve konuma bağlı kütleye özel bir ilgi gösterilmiştir. Panella vd. (2010), WS potansiyeli tek boyutlu etkili kütle Dirac denklemi için tam olarak çözülebilir yeni bir model oluşturmuşlardır.

Son zamanlarda, yüzey etkileşim terimlerinin dikkate alındığı genelleştirilmiş simetrik Woods-Saxon potansiyel enerjisinin, fiziksel süreçleri standart forma göre daha iyi tanımladığı gösterilmiştir. Vektör ve skaler GWS potansiyelinin varlığında Klein-Gordon parçacıklarının saçılma durumları Lütüoğlu vd. (2018) tarafından araştırılmıştır. Lütüoğlu vd. (2018) bir boyutta, spin simetrik veya sözde spin simetrik durumlar için Hipergeometrik fonksiyonları kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Hem spin simetrik (SS) hem de sözde spin simetrik (PSS) durumlarda Klein-Gordon parçacığı için yansıma ve geçme olasılıklarını elde etmişlerdir. SS durumunda, potansiyel W 'deki artış (yüzey etkisi) negatif enerjili parçacıklar için saçılma eşiğini önemli ölçüde etkilemediği sonucuna varmışlardır. Eşik potansiyel V_0 tarafından verilmiştir. Öte yandan, pozitif enerjiler için, yüzey etkisinin ne kadar büyük olduğu, saçılma için gereken enerjinin daha büyük olması gerektiği doğrulanmışlardır. Geçme ve yansıma olasılıkları, esas olarak pozitif enerji bölgesinde, yüzey etkisinden etkilenmemektedir. Hem SS hem de PSS durumları için, daha büyük W değerlerinde daha belirgin olan pozitif enerjiler için rezonans gözlemlenebileceğini ortaya koymuşlardır. Klein-Gordon denkleminin karma skaler vektörlü genelleştirilmiş simetrik Woods-Saxon potansiyeli ile olan bağlı-durum çözümleri, spin ve sözde spin simetri limitleri çerçevesinde analitik olarak Lütüoğlu (2018) tarafından incelenmiştir. Genelleştirilmiş WS potansiyeli için Dirac denkleminin çözümleri spin ve sözde spin limitleri Candemir ve Bayrak (2014) tarafından incelenmiştir. Boryum 270'in içinde bulunan α parçacığı için Schrödinger denklemi GWS potansiyeli için çözülerek enerji özdeğeri ve dalga fonksiyonu Lütüoğlu ve Erdoğan (2017) tarafından hesaplanmıştır. WS potansiyel alanda sınırlandırılmış nükleonun yüzey etkilerine termodinamik fonksiyonların etkisi hesaba hatılarak son dönemlerde incelenmektedir. Aynı işlem göreceli olarak Lütüoğlu (2018) tarafından ele alınmıştır. KG denklemi, momentum ve kütleyle bağlı karışık skaler-vektörel genelleştirilmiş simetrik Woods-Saxon potansiyel enerjisinin varlığında çözülmüştür. Schrödinger denklemi, bileşenleri GWS potansiyeli ve spin yörünge etkileşim terimi olan bir potansiyelle Liendo vd. (2016) tarafından çalışılmıştır. Bu elde edilen potansiyel ile orbital açısal momentum kuantum sayısının gücü arasında açık bir ilişkinin varlığını göstermişlerdir. $l \neq 0$ için S-matris kutuplarının pozisyonları, GWS potansiyelinde ve bölünmüş GWS potansiyelinde Salamon vd. (2016) tarafından hesaplanmıştır.

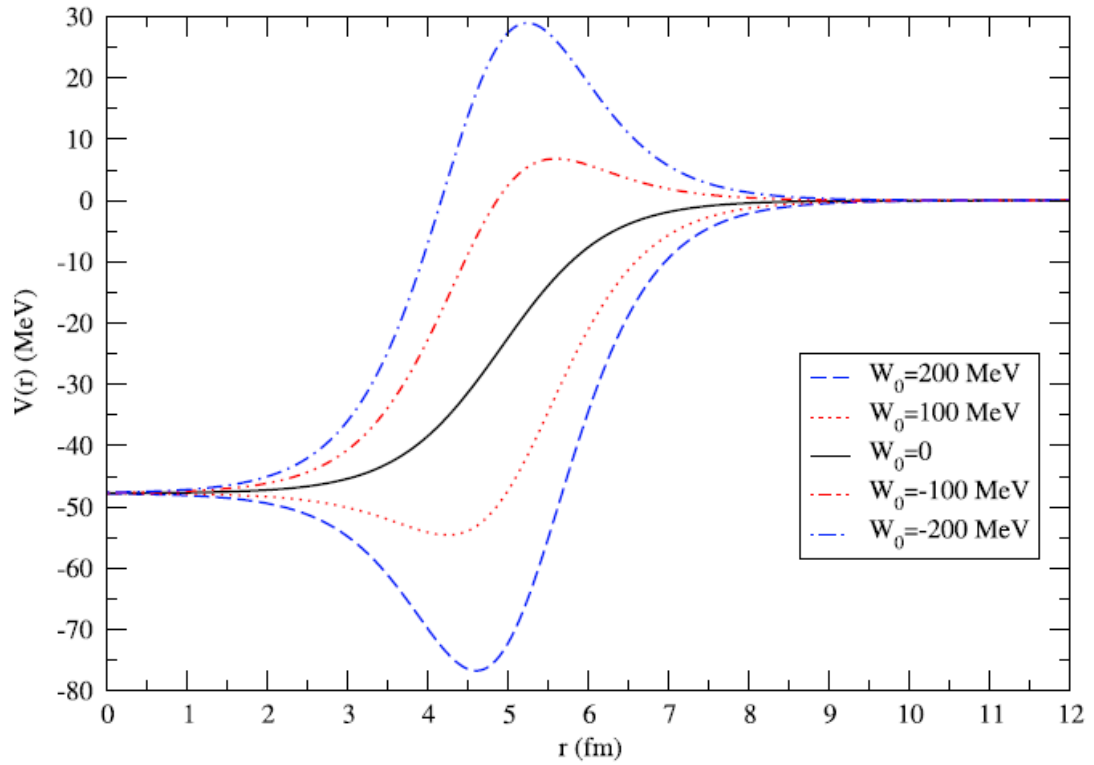
Literatür araştırmalarımız sırasında WS veya onun farklı biçimlerinin çözümlerini incelediğimizde bazı araştırmacıların elde ettikleri enerji özdeğerleri ve buna uygun dalga fonksiyonlarının sınır şartlarını sağlamadığını fark ettik. Yapılan hataların başında potansiyelin içindeki nükleer yarıçap ifadesini $x = r - R$ dönüşümü altında yok etmek gelmektedir. Böyle bir dönüşüm altında potansiyel, Hulthen potansiyeli olmakta ve elde edilen enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonların Hulthen potansiyeline ait olduğu görülmektedir (Flügge 1994). WS potansiyeli $r = R$ 'nin sağ ve sol komşuluğunda farklı karakterler sergilediği için dalga fonksiyonun bu limitte iyi

incelenmesi gerekmektedir. Literatürde WS veya onun modifiye biçimlerinin Schrödinger denklemi için bulunan analitik enerji özdeğerleri ve buna uygun dalga fonksiyonları kuantum mekaniksel sınır şartlarını sağlamamaktadır (Berkdemir vd. 2005; Badalov vd. 2009; İkot ve Akpan 2012; Saha vd. 2011; Pahlavani vd. 2012; İkhdaire vd. 2013). Bu çözümlerin kuantum mekaniksel sınır şartlarını sağlayan doğru çözümleri Bayrak ve Açıksöz (2015) tarafından elde edilmiştir. Literatürde WS veya onun modifiye biçimlerinin Dirac denklemindeki çözümleri kuantum mekaniksel sınır şartlarını sağlamamaktadır (Aydoğdu ve Sever 2009; İkdair ve Sever 2010; Maghsoodi vd. 2012; Hamzavi ve Rajabi 2013). WS ve modifiye biçiminin KG denklemi için elde edilen çözümleri kuantum mekaniksel sınır şartlarını sağlamamaktadır (İkhdaire ve Sever 2007; Badalov vd. 2010; Arda ve Sever 2008).

Bu çalışmada vektör ve skaler potansiyeller eşit ve genelleştirilmiş WS potansiyeli biçiminde alınmıştır. Bu potansiyel (Satchler 1991; Brandan ve Satchler 1997; Bayrak ve Açıksöz 2015),

$$S(r) = V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + a \frac{d}{dr} \left(\frac{W_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. V_0 , W_0 potansiyellerin derinlikleridir. R ve a çekirdeğin yarıçapı ve yüzey kalınlığıdır. Denklem 2.3'deki birinci terim hacim potansiyeli ikinci terim ise yüzey potansiyeli olarak isimlendirilir. GWS potansiyelinin biçimi Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyelinin nükleer yarıçapa göre değişimi (Bayrak ve Açiksöz 2015)

Şekil 2.1’de görüldüğü üzere Denklem 2.3’deki ikinci terim hacim teriminin yüzeysel kısmını deforme etmektedir. W_0 ’ın negatif ya da pozitif olmasına göre potansiyel karakter değiştirmektedir. W_0 negatif olduğu durumda potansiyel yüzey bölgesinde itici bir karakter sergilemektedir. W_0 pozitif olduğu durumda genelleştirilmiş WS potansiyelindeki yüzey terimi potansiyelin yüzey bölgesinde ekstra bir cep oluşturur ve bu cep nükleer etkileşimin elastik olmayan saçılmasını açıklamak için çok önemlidir (Brandan ve Satchler 1997; Satchler 1991). $W_0 < 0$ durumunda WS yüzey potansiyeli bir engel oluşturur. Böylece çekirdeklerdeki rezonans durumların (yarı-bağlı) açıklanmasında kullanılabilir. Genelleştirilmiş WS potansiyelinin özel durumları vardır: GWS potansiyeli $W_0 = 0$ için standart WS formuna $W_0 = 0$ ve $a \rightarrow 0$ için kare kuyu potansiyeline indirgenir (Flügge 1994). Ayrıca GWS potansiyeli $R = 0$ (Berkdemir vd. 2006) için Rosen Morse (Cooper vd.1995) potansiyeline indirgenmektedir.

2.1. Parçacıkların Sınıflandırılması

Doğada dört temel kuvvet bulunmaktadır. Bunlar kütle çekim, elektromagnetik, güçlü nükleer ve zayıf nükleer kuvvetlerdir. Parçacık fiziği 4 temel kuvveti bir araya getirip yeni bir kuram elde etmeyi amaçlamıştır. Elektrik ve Magnetik alanın kaynağı yüklerdir. Bu iki alanın kaynağı yükler olduğu için iki kuvvet Elektromanyetik teori adı altında 19 yy. da tek çatı altında birleştirilmiştir. Zayıf ve elektromanyetik kuvvet standart model ile birleştirilmiştir. Bu dört kuvvetin birleştirilme çalışmaları devam etmektedir (Perini 1998). Standart Model, temel parçacıkların davranışlarını, özelliklerini ve aralarındaki ilişkiyi açıklayan modeldir. Standart Modele göre 2 çeşit temel parçacık bulunmaktadır. Bunlardan ilki fermiyonlardır. Madde fermiyonlardan oluşmuştur ve madde etkileşimleri arasında kuvvet taşıyıcıları vardır (Griffiths 2004). Fermiyonlar iki gruba ayrılmıştır: kuarklar ve leptonlar. SM'e göre 12 tane temel parçacık olduğu öne sürülmüştür (6 lepton, 6 kuark). Leptonlar Çizelge 2.1'de gösterilmiştir (Çek 2016).

Çizelge 2.1. Leptonların sembolleri, elektrik yükleri, kütlesi, spin kuantum sayısı (Çek 2016)

Lepton adı	Sembolü	Elektrik Yükü	Kütle $\left(\frac{MeV}{c^2}\right)$	Spin
Elektron	e	-1	0,511	$\frac{1}{2}$
Müon	μ	-1	105,6	$\frac{1}{2}$
Tau	τ	-1	177	$\frac{1}{2}$
Elektron Nötrinosu	ν_e	0	0	$\frac{1}{2}$
Müon Nötrinosu	ν_μ	0	<000,2	$\frac{1}{2}$
Tau Nötrinosu	ν_τ	0	<0,35	$\frac{1}{2}$

Kuarklar birleşerek baryon ve mezonları oluşturur. Üç kuark birleştiğinde baryonları, kuark ve anti kuark birleşmesinde ise mezon oluşur. Özetle baryonlar (ağır üçlü), mezonlar (orta ağırlıktaki çiftler) ve kuarklar (temel parçacıklar) hadronlar olarak sınıflandırılmıştır. Hadronlar güçlü nükleer kuvvet, çekimsel kuvvet ve elektromanyetik kuvvetler ile etkileşimi sağlanır (Bouchiat vd. 1972; Shupe 1979; Terazawa vd. 1982; Jadach vd. 1991; Zuchelli 2002; Das ve Ferber 2003; Griffiths 2004; Lichtenberg 2007). Kuarklar ve hadronlara ait özellikler Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.3'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. Kuarkların sembolleri, elektrik yükleri, kütlesi ve spin kuantum sayısı (Çek 2016)

Kuarkın adı	Sembolü	Elektrik yükü	Kütle $\left(\frac{MeV}{c^2}\right)$	Spin
Yukarı(up)	<i>u</i>	$+\frac{2}{3}$	1,5 – 4	$\frac{1}{2}$
Aşağı(down)	<i>d</i>	$-\frac{1}{3}$	4 – 8	$\frac{1}{2}$
Garip(strange)	<i>s</i>	$-\frac{1}{3}$	80 – 130	$\frac{1}{2}$
Tılsım(charm)	<i>c</i>	$+\frac{2}{3}$	1150 – 1350	$\frac{1}{2}$
Alt(bottom)	<i>b</i>	$-\frac{1}{3}$	4100 – 4400	$\frac{1}{2}$
Üst(top)	<i>t</i>	$+\frac{2}{3}$	172700	$\frac{1}{2}$

Çizelge 2.3. Hadronların özellikleri (Çek 2016)

Hadron Adı	Hadron Grubu	Sembol	Elektrik Yükü	Kütle $\left(\frac{MeV}{c^2}\right)$	Spini
Pion	Mezon	π^+, π^-	+1, -1	139,6	0
Pion	Mezon	π^0	0	135	0
Kaon	Mezon	K^+	+1	493,7	0
Proton	Baryon	P	+1	938,3	$\frac{1}{2}$
Nötron	Baryon	N	0	939,6	$\frac{1}{2}$
Lambda	Baryon	Λ^0	0	1115,6	$\frac{1}{2}$
Sigma	Baryon	Σ^0	0	1192,5	$\frac{1}{2}$
		Σ^+	+1	1189,4	
		Σ^-	-1	1197,3	
Ksi	Baryon	Ξ^0	0	1315	$\frac{1}{2}$
		Ξ^{-1}	-1	1321	
Omega	Baryon	Ω^{-1}	-1	1672	$\frac{3}{2}$

Diğer temel parçacıklar ise bozonlardır. Temel parçacıkları birbirleri ile etkileşmelerini gerçekleştiren kuvvet taşıyıcıları olduğu dile getirilmiştir. Bu taşıyıcılara bozon denilmiştir. Foton, W^+, W^-, Z^0 ve gluon bilinen bozonlardır. Bozonlara ait özellikler Çizelge 2.4’ de gösterilmiştir.

Çizelge 2.4. Bozonların sembolleri, elektrik yükü, kütlesi ve spini (Çek 2016)

Bozon adı	Sembol	Elektrik yükü	Kütle $\left(\frac{MeV}{c^2}\right)$	Spini
Foton	γ	0	0	1
Gluon	g	0	0	1
Graviton	G	0	91200	2
W	W	-1, +1	80400	1
Z	Z	0	91187	1
Higgs	H	0	126000	0

Her temel parçacığın içinde tanımlanabilecek bir içsel dönüşü bulunmuştur. Bu içsel dönüşü spin olarak tanımlamışlardır. Bu dönme hareketinden dolayı momentum meydana gelmiştir. Spinin varlığı parçacık hakkında bilgi edinilmesini sağlamıştır (Çek 2016). Spin buçuklu ve tam sayılarla ifade edilmiştir. Fermiyonlar buçuklu kuantum sayısına $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, bozonlar tam kuantum sayısına 0,1,2,3... sahip olduğu bulunmuştur. Standart model bu kuvvetlerden elektromanyetik ve zayıf nükleer kuvveti bir araya getirmiştir. Buna elektrozayıf etkileşim denilmektedir. Kısaca bu model elektrozayıf etkileşimi ve güçlü nükleer etkileşimleri anlatmıştır. Modelin içerisinde fermiyonlar, bozonlar, madde-karşıt madde ve bunların tesirleri ile ilgili olarak bilgiler vermektedir (Bat 2018).

2.2. Pionların Özellikleri

1935'te Hideki Yukawa'nın kuramsal çalışması, güçlü nükleer kuvvetin taşıyıcı parçacıkları olarak mesonların varlığını öngörmüştü. Güçlü nükleer kuvvet aralığından (atom çekirdeğinin yarıçapından elde edilen), Yukawa yaklaşık 100 MeV'lik bir kütleye sahip bir parçacığın varlığını öngördü. İlk olarak 1936'daki keşfinden sonra, müon (başlangıçta "mu meson" olarak adlandırılmıştır), 106 MeV'lik bir kütleye sahip olduğu için bu parçacık olarak düşünülmüştür. Ancak, daha sonraki deneyler müonun güçlü nükleer etkileşime katılmadığını gösterilmiştir. Yukawa'nın öngördüğü pion mezonları 1947 yılında, kozmik ışınlar sayesinde elde edilmiştir (Riazuddin 1959). Elde edilen bu pion mezonlarının daha önce bulunan mü mezonlarından farklı özelliklerde olmasından dolayı ikisinin farklı mezonlar olduğu anlaşılmıştır.

Parçacık fiziğinde pionlar π^0, π^+, π^- olarak gösterilmiştir. Pionlar en hafif mezonlar olup kararsızdırlar. Güçlü çekirdek kuvvetinde düşük enerjili durumlarını anlatmak da önemli bir yer tutar. Yüklü pionların ortalama ömürleri 26,033 nanosaniye ($2,6033 \times 10^{-8}$ saniye), ve nötr pionun çok daha kısa ömürlü olup $8,4 \times 10^{-17}$ saniyede bozunur. Yüklü pionlar sıklıkla müon ve müon nötrinosuna

dönüşürken, nötr pionlar genellikle gama ışınlarına dönüşürler (Ackermann 2013). π^+ ve π^- mezonların en temel bozunum şekli aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Griffiths 2004).

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Burada μ^+ , μ^- , ν_μ ve $\bar{\nu}_\mu$ sırasıyla pozitif ve negatif müon, müon nötrinosu ve müon anti nötrinosudur. İkinci bozunum gösterimi ise

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$$

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

şeklinde. Burada e^+ , e^- , ν_e ve $\bar{\nu}_e$ sırasıyla pozitif (pozitron) ve negatif elektron, elektron nötrinosu ve elektron anti nötrinosudur. Nötr pion π^0 bozunum ifadeleri ise,

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$$

şeklinde verilmiştir. Burada γ , gama ışınıdır (Griffiths 2004). Nötr pion elektrikli yüklü olmadığı için, yüklü pionlardan daha fazla tespit edilmesi ve gözlemlenmesi daha zor olmuştur. Nötr pionlar, fotografik emülsiyonlarda veya Wilson bulut odalarında izlerini bırakmaz. İki fotona bozunması gözlemlenerek 1950 yılında Kaliforniya'nın siklotron Üniversitesi'nde teşhis edilmiştir (Bjorklund 1950). Radyoaktif bozunmada pionlar üretilmemektedir. Genellikle hadronlar arasındaki çarpışmalarda yüksek enerji hızlandırıcılarında üretilmiştir. Yüksek enerjili kozmik ışın protonları ve diğer kozmik ışın bileşenleri Dünya atmosferinde maddeyle etkileştiğinde, her türlü pion doğal süreçlerde üretilmektedir. Süpernova kalıntılarında nötr pionların bozunmasından kaynaklanan gama ışınları saptanmıştır. Kozmik ışınlar olarak Dünya'da tespit edilen yüksek enerjili protonların üretimi ile bağlantılı olarak pionların üretildiği gösterilmiştir (Ackermann 2013). Pionların temel özelliklerine bakıldığında sıfır dönüşlü mezonlar olarak adlandırılabilir. Mezonlar kuark ve anti kuarktan oluşmuşlardır. Pionlara ait özellikler Çizelge 2.5'de verilmiştir.

Çizelge 2.5. Pionların Özellikleri (Griffiths 2004)

Parçacık	Sembol	Karşıt parçacık	Kuark Yapısı	Spin	Kütle $\left(\frac{MeV}{c^2}\right)$	Yaşam Süresi(s)	Bozunum Ürünleri
Yüklü Pion	π^+	π^-	$u\bar{d}$	0	139,6	$2,60 \times 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
Yüksüz Pion	π^0	Kendisi	$\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	134,977	$0,84 \times 10^{-16}$	2γ

3. MATERİYAL VE METOT

Bu bölümde pionların davranışını tanımlamak için Klein-Gordon denklemi kurularak GWS potansiyeli için analitik çözümler araştırılacaktır. Analitik çözüm bulmak için Öncelikle NU metodu kullanılacak daha sonra hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla çözüm aranacaktır.

3.1. Klein Gordon Denklemi

Bölüm 3.1 ve alt başlıkları Greiner'in (2000) kitabından derlenmiştir. Schrödinger denklemi (SD) görelili olmayan parçacıkların hareketlerini tanımlamak için kullanılır. Temel kuantum mekaniğinden bilinen Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir (Greiner 2000).

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (3.1)$$

Burada $\hbar$; planck sabitinin 2π 'ye bölümüdür. ψ dalga fonksiyonudur. Bu denklem atom altı parçacıkların etkileşimlerini betimlemek için WS, Hulthen, Cusp, Morse gibi potansiyeller altında SD çözülerek bağlı ve saçılma durumları için incelenmiştir (Bianchi 1994; Bohm 1951; Flügge 1994; Newton 1982; Senn 1988). Relativistik olmayan enerji operatörü aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p = -i\hbar \nabla \quad (3.2)$$

ifadeler sırasıyla enerji ve momentum operatörleridir. Kullanmamız gereken bazı matematiksel notasyonlar vardır. Bu matematiksel ifadeler Greiner (2000) tarafından aşağıdaki biçimde ele alınmıştır. Özel rölativite teorisinde uzay-zaman koordinatları kontravaryant vektör bileşenleri

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = \{ct, x, y, z\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Kovaryant vektör bileşenleri ise

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir. Diferansiyel operatörler ise;

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

İle gösterilmektedir. $\partial^\mu \partial_\mu$ işlemi ise;

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Parçacığın momentum vektörü 4'lü kovaryant ve kontravaryant cinsinden gösterildiğinde;

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, p \right) \quad (3.8)$$

$$P_\mu = \left(\frac{E}{c}, -p \right) \quad (3.9)$$

tanımlanır. Parçacığın momentum vektörlerinin invaryant uzunluğu $m^2 c^2$ 'ye eşittir ve

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^3 P^\mu P_\mu &= P^0 P_0 + P^1 P_1 + P^2 P_2 + P^3 P_3 \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m^2 c^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. KG denklemini elde etmek için enerji ve momentum arasındaki bağıntı

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.11)$$

verilir. Denklem 3.9'da yer alan ifadelerde Denklem 3.2'deki ifadeler kullanıldığında

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(r, t) = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem diferansiyel operatörler (denklem) sayesinde

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(r, t) = 0 \quad (3.13)$$

denkleminde indirgenir. Bu denklem serbest parçacık için Klein Gordon denklemdir. $\partial^\mu \partial_\mu \equiv \square$ şeklinde alınır. Burada $\square$; D'Alembert işlemcisidir. Denklem tekrar yazılırsa;

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(r, t) = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(r, t) \quad (3.14)$$

elde edilir. Klein-Gordon denklemini elde etmemizi sağlayan denklemde enerji ve momentum operatörleri kullanıldığı için Schrödinger denkleminde KG denkleminin göreceli olmayan denklemi olarak da isimlendirilmektedir. Serbest parçacık için Dalga denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) \quad (3.15)$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 - p \cdot x)\right] \quad (3.16)$$

$$= \exp\left[+\frac{i}{\hbar} (p \cdot x - Et)\right] \quad (3.17)$$

Son olarak;

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (3.18)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m^2 c^2 \quad (3.19)$$

Denklemleri kullanılarak Enerji denklemi yazılmıştır.

$$E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} \quad (3.20)$$

Enerjinin hem negatif hem de pozitif değer alabildiği görülmektedir. Yani parçacığın enerji aralığı $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a kadar gitmektedir. Negatif enerji'yi yorumlamak zordur. Bu problemi ortadan kaldırmak için Dirac 1927 yılında kendi adıyla anılan göreceli bir denklem ortaya koymuştur. Daha sonra negatif enerji değerlerini anlamlandırmak için bazı bilim insanları tarafından yeniden ele alınmıştır. Onların ifadelerine göre negatif çözümler zamanda ters yönde giden parçacıkları veya zamanda aynı yönde giden pozitif enerjili anti parçacıklar olduğunu söylemişlerdir. Bu ifade Feynman diyagramların temel düşüncesini oluşturmuştur. Günümüzde de kabul görmektedir (Şahin 2006).

3.1.1. Elektromanyetik alanda spin-0 parçacıkların etkileşimi

Elektromanyetik alan aşağıdaki biçimde 4 vektör tarafından tanımlanır. Bu tanımlar Greiner (2000) tarafından özetlenmiştir.

$$A^\mu = \{A_0, A\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.21)$$

$$A_\mu = \{A_0, -A\} = \{A_0, -A_x, -A_y, -A_z\} = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (3.22)$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \quad (3.23)$$

$$p \rightarrow -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} A \quad (3.24)$$

Burada A_0 skaler potansiyel, A vektör potansiyelidir. 4 boyutta ve kovaryant formda ifade edildiğinde

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad (3.25)$$

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \quad (3.26)$$

şeklinde dir. KG denklemini elektromanyetik KG denklemine transfer edildiğinde

$$\begin{aligned} & \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = m^2 c^2 \psi \\ & \left[g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] \psi = m^2 c^2 \psi \\ & \frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \psi = \left(\sum_{i=1}^3 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i \right)^2 + m^2 c^2 \right) \psi \\ & = \left(\left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} A \right)^2 + m^2 c^2 \right) \psi \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

3.1.2. Herhangi bir potansiyel ile klein gordon denklemi için dalga fonksiyonun açısal ve radyal kısımlarının ayrılması

$eA_0 = V(r)$ ve $A = 0$ olarak KG denkleminde yerine yazıldığında

$$\left[(\varepsilon - V(r))^2 - m^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right] \psi(r) = 0 \quad (3.28)$$

olur. Daha açık bir şekilde yazıldığında

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 c^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(r) \\ & = \left[(\varepsilon - V(r))^2 - m^2 c^4 \right] \psi(r) \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklini alır. Dalga fonksiyonu $\psi(r)$ için aşağıdaki ayırım yapıldığında

$$\psi(r) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

Açısal ve radyal dalga denklemleri aşağıdaki formda elde edilmiştir.

$$\hbar^2 c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} + \left\{ (\varepsilon - V(r))^2 - m^2 c^4 - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0 \quad (3.31)$$

Burada λ ayırma sabitidir. $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ olmak üzere son denklemin çözümünden küresel harmonikler elde edilir. Radyal diferansiyel denklem

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = \frac{(\varepsilon - V)^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} R(r) \quad (3.32)$$

elde edilmiştir. $R(r) = \frac{X(r)}{r}$ dönüşümü yapıldığında

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] X(r) = 0 \quad (3.33)$$

denkleminde indirgenir. Burada $k^2 = \frac{(\varepsilon - V(r))^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}$, dir (Greiner 2000).

3.2. Asimtotik İterasyon Metodu

Genel olarak ikinci mertebeden diferansiyel denklemler fiziğin birçok dalında, özellikle Kuantum fiziği ve matematik fiziğinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu yüzden ikinci derece homojen lineer diferansiyel denklemleri sınır koşullarıyla çözmek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de Çiftçi vd. (2003; 2005) tarafından geliştirilen Asimtotik İterasyon Yöntemidir (Asymptotic Iteration Method, AIM). Tezin bu kısmı Çiftçi vd. (2003; 2005) referansından derlenmiştir. AIM ile çözmek için önerilen ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin formu aşağıdaki gibidir.

$$y'' = \lambda_0(x)y' + s_0(x)y \quad (3.34)$$

Burada $\lambda_0(x) \neq 0$, $s_0(x)$ ve $\lambda_0(x)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Denklemin genel çözümünü bulmak için x 'e göre türev alınır.

$$y''' = \lambda_1(x)y' + s_1(x)y \quad (3.35)$$

Bulunur. Burada

$$\lambda_1(x) = \lambda_0'(x) + s_0(x) + \lambda_0^2 \quad (3.36)$$

$$s_1(x) = s_0'(x) + s_0(x)\lambda_0(x) \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde denklemin bir kez daha türevi alınırsa

$$y'''' = \lambda_2(x)y' + s_2(x)y \quad (3.38)$$

bulunur. Burada

$$\lambda_2(x) = \lambda_1'(x) + s_1(x) + \lambda_0(x)\lambda_1(x) \quad (3.39)$$

$$s_2(x) = s_1'(x) + s_0(x)\lambda_1(x) \quad (3.40)$$

Benzer uygulama ile $(n+1)$ inci ve $(n+2)$ nci türevler $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$y^{(n+1)} = \lambda_{n-1}(x)y' + s_{n-1}(x)y \quad (3.41)$$

$$y^{(n+2)} = \lambda_n(x) y' + s_n(x) y \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lambda_n = \lambda'_{n-1} + s_{n-1} + \lambda_0 \lambda_{n-1} \quad (3.43)$$

$$s_n = s'_{n-1} + s_0 \lambda_{n-1} \quad (3.44)$$

tekrarlama terimleri olarak adlandırılır. $(n+2)$ nci ve $(n+1)$ inci türevlerin oranlarından

$$\frac{d}{dx} \ln \left(y^{(n+1)} \right) = \frac{y^{n+2}}{y^{(n+1)}} = \frac{\lambda_n \left(y' + \frac{s_n}{\lambda_n} y \right)}{\lambda_{n-1} \left(y' + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} y \right)} \quad (3.45)$$

bulunur. n' in büyük değerleri için

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \alpha \quad (3.46)$$

olur. Türevlerin oranını sade bir formda yazılırsa, bu oran AIM'nin karakteristik yapısını ifade eder.

$$\frac{d}{dx} \ln \left(y^{(n+1)} \right) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \quad (3.47)$$

Elde edilir. Sonuç olarak n' ye bağlı genel çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y^{(n+1)}(x) = C_1 \exp \left(\int \frac{\lambda_n(t)}{\lambda_{n-1}(t)} dt \right) = C_1 \lambda_{n-1} \exp \left(\int (\alpha + \lambda_0) dt \right) \quad (3.48)$$

C_1 integrasyon sabitidir. İfadeler yerine yazılırsa birince mertebeden diferansiyel denklem edilir.

$$y' + \alpha y = C_1 \exp \left(\int (\alpha + \lambda_0) dt \right) \quad (3.49)$$

Eşitliğin en genel çözümü

$$y(x) = \exp \left(- \int \alpha dt \right) \left[C_2 + C_1 \int \exp \left(\int (\lambda_0(\tau) + 2\alpha(\tau)) d\tau \right) dt \right] \quad (3.50)$$

şeklini alır. Burada C_2 integrasyon sabitidir.

3.3. Nikiforov Uvarov Yöntemi

Nikiforov Uvarov (NU) yöntemi hipergeometrik fonksiyonlar aracılığıyla ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümüne dayanmaktadır. Belirli bir potansiyel için küresel koordinatlarda Schrödinger veya Schrödinger benzeri denklemler uygun koordinat dönüşümü ile genel bir hipergeometrik denkleme indirgenir. Daha sonra kesin veya belirli çözümleri bulmak için sistematik olarak çözülebilir. Tezin bu alt bölümü Nikiforov and Uvarov (1998) kaynağından derlenmiştir. Metot ile ilişkili olan ana denklem aşağıdaki formda verilmiştir:

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi(s) = 0 \quad (3.51)$$

$\sigma(s)$ ve $\tilde{\sigma}(s)$ ikinci dereceden polinomlardır. $\tilde{\tau}(s)$ birinci dereceden polinom ve $\Psi(s)$ dalga fonksiyondur. $\Psi(s) = \phi(s)y(s)$ olarak ve uygun bir fonksiyon $\phi(s)$ seçerek denklem 3.51 anlaşılır forma indirgenir (Berkdemir 2012).

$$y''(s) + \left(2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) y'(s) + \left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) y(s) = 0 \quad (3.52)$$

$y'(s)$ 'nin katsayısı $\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$ alınır yani,

$$2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \quad (3.53)$$

şeklindedir. Bu nedenle en düzenli form aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (3.54)$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \left[\tau(s) - \tilde{\tau}(s) \right] \quad (3.55)$$

Denklem 3.55'in en yararlı gösterimi

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (3.56)$$

şeklindedir. Yeni parametre olan $\pi(s)$ birinci dereceden bir polinomdur. Ek olarak denklem 3.52'deki $y(s)$ katsayısında gözüken $\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}$ terimi aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)' + \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)^2 = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)^2 \quad (3.57)$$

Bu durumda $y(s)$ 'nin katsayısı denklem 3.54'de verilen eşitliği olarak daha uygun bir forma dönüştürülür.

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\sigma^-(s)}{\sigma^2(s)} \quad (3.58)$$

$$\sigma^-(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s) \left[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s) \right] + \pi'(s)\sigma(s) \quad (3.59)$$

dir. Denklem 3.53 ve denklem 3.58'in sağ taraflarının denklem 3.52'e dönüştürülmesiyle hipergeometrik denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} y'(s) + \frac{\sigma^-(s)}{\sigma^2(s)} y(s) = 0 \quad (3.60)$$

Yukarıda belirtilen cebirsel dönüşümlerin sonucu olarak denklem 3.51'in fonksiyonel formu sistematik bir şekilde korunmaktadır. Denklem 3.60'daki $\sigma^-(s)$ polinomu $\sigma(s)$ ile bölünebilir ise

$$\sigma^-(s) = \lambda \sigma(s) \quad (3.61)$$

yazılabilir ve λ sabittir. Denklem 3.60 hipergeometrik denkleme indirgenmiştir.

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (3.62)$$

Böylece onun çözümü hipergeometrik tipin bir fonksiyonu olarak verilir. Polinom $\pi(s)$ 'yi belirlemek için denklem 3.59 ile denklem 3.61 karşılaştırılmış $\pi(s)$ için kuadratik bir denklem aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\pi^2(s) + \pi(s) \left[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s) \right] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0 \quad (3.63)$$

$$k = \lambda - \pi'(s) \quad (3.64)$$

$\pi(s)$ için kuadratik denklemin çözümü aşağıdaki eşitliği verir.

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.65)$$

Denklem 3.65'in artı ve eksi işaretlerine göre olası çözümleri elde etmek için karekök işaret içindeki k parametresi açıkça bilinmelidir. λ_n ise;

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) \text{ şeklinde tanımlar.} \quad (3.66)$$

$$k + \pi'(s) = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.67)$$

kuantizasyon koşuludur.

3.4. Pion Parçacıklarının Woods-Saxon Alanındaki Davranışı

Kütlesi m spini 0 olan göreceli hareket eden bir parçacığın merkezi potansiyel etkisi altındaki davranışını tanımlamak için $R(r) = \frac{X(r)}{r}$ dönüşümü yapıldığında Klein-Gordon denklemi

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(E - V(r))^2 - (mc^2 + S(r))^2 - \frac{l(l+1)\hbar^2 c^2}{r^2} \right] X(r) = 0 \quad (3.68)$$

şeklinde elde edilir. Burada m , $\hbar$, c ve l sırasıyla parçacığın durgun kütlesi, Planck sabitinin 2π 'ye bölümü, ışık hızı ve açısal momentum kuantum sayısıdır. Denklem 3.68'de verilen $V(r)$ ve $S(r)$ sırasıyla vektör ve skaler potansiyellerdir. Bu çalışmada vektör ve skaler potansiyelleri eşit ve $l = 0$ durumu için genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyeli dikkate alınacaktır. Bu potansiyel

$$S(r) = V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} + a \frac{d}{dr} \left(-\frac{W_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \right) \quad (3.69)$$

şeklinde verilir. V_0 ve W_0 potansiyellerin derinlikleridir. R ve a çekirdeğin yarıçapı ve difüzyon kalınlığını ifade eder. Bu tez çalışmasında eşit vektör ve skaler genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyeli KG denklemi için NU metodunuyla çözülecek enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları kapalı formda $l = 0$ durumu için elde edilecektir. Denklem 3.68'de $l = 0$ aldığımız zaman

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(E - V(r))^2 - (m_0 c^2 + S(r))^2 \right] X(r) = 0 \quad (3.70)$$

halini alır. Gerekli işlemler ile,

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[E^2 - m_0^2 c^4 - 2(EV(r) + m_0 c^2 S(r) + V^2(r) - S^2(r)) \right] X(r) = 0 \quad (3.71)$$

olur. Eşit vektör ve skaler alanlar için $S(r) = V(r)$

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left[\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(E + m_0 c^2) S(r)}{\hbar^2 c^2} \right] X(r) = 0 \quad (3.72)$$

olur. GWS potansiyelini Denklem 3.69, Denklem 3.72’de yerine yazdığımızda

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left\{ \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(E + m_0 c^2)}{\hbar^2 c^2} \left(-\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} + a \frac{d}{dr} \left(\frac{W_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \right) \right) \right\} X(r) = 0 \quad (3.73)$$

olur. $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$ dönüşümü yapıldığında;

$e^{\frac{r-R}{a}} = \frac{1-y}{y}$ ifadesini $e^{\frac{r}{a}} e^{-\frac{R}{a}} = \frac{1-y}{y}$ şeklinde yazabiliriz. $e^{-\frac{R}{a}} \approx 1$ alındığında;

$$e^{-\frac{r}{a}} = \frac{y}{1-y} \quad (3.74)$$

Elde edilir. $\frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{a^2} y^2 (y-1)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{a^2} y(y-1)(2y-1) \frac{d}{dy}$ dönüşümünden

$$\begin{aligned} & X''(y) + \frac{1-2y}{y(1-y)} X'(y) \\ & + \frac{1}{y^2(1-y)^2} \left[\frac{(E^2 - m_0^2 c^4) a^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2a^2 (E + m_0 c^2) V_0 y}{\hbar^2 c^2} + \frac{2a^2 (E + m_0 c^2) W_0 y(1-y)}{\hbar^2 c^2} \right] X(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Denklem 3.75 elde edilir. Gerekli tanımlamalar yapılırsa

$$-\varepsilon^2 = \frac{(E^2 - m_0^2 c^4) a^2}{\hbar^2 c^2} \quad (3.76)$$

$$\alpha^2 = 2a^2 \frac{(E + m_0 c^2) V_0}{\hbar^2 c^2} \quad (3.77)$$

$$\beta^2 = \frac{2a^2 (E + m_0 c^2) W_0}{\hbar^2 c^2} \quad (3.78)$$

olur. Klein-Gordon denklemi;

$$X_n''(y) + \frac{1-2y}{y(1-y)} X_n'(y) + \frac{1}{y^2(1-y)^2} \left[-\varepsilon^2 + \alpha^2 y + \beta^2 y(1-y) \right] X_n(y) = 0 \quad (3.79)$$

Elde edilir. Bu denklem; $X_n(r \rightarrow 0, y \rightarrow 1) = 0$ ve $X_n(r \rightarrow \infty, y \rightarrow 0) = 0$ 'da sınır koşullarını sağlamalıdır. Tüm hesaplamalarda $R \gg a$ olduğu dikkate alınmıştır. NU yöntemi Bölüm 3.3'de anlatılmıştır. Gerekli tanımlamalar yapıldığında

$$\tilde{\sigma}(y) = -\beta^2 y^2 + (\alpha^2 + \beta^2) y - \varepsilon^2 \quad (3.80)$$

$$\tilde{\tau}(y) = 1 - 2y \quad (3.81)$$

$$\sigma(y) = y(1-y) = y - y^2 \quad (3.82)$$

Şeklinde. $\sigma(y)$ 'nin birinci ve ikinci türevleri alındığında;

$$\sigma'(y) = 1 - 2y$$

$$\sigma''(y) = -2 \quad (3.83)$$

İfade edilir. Denklem 3.65 göre

$$\pi = \pm \sqrt{(\beta^2 - k) y^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + k) y + \varepsilon^2} \quad (3.84)$$

Elde edilir. Aşağıdaki şekilde tanımlamalar yapılırsa

$$a = \beta^2 - k \quad (3.85)$$

$$b = -(\alpha^2 + \beta^2 + k) \quad (3.86)$$

$$c = \varepsilon^2 \quad (3.87)$$

olur. Buradan a, b, c denklem 3.84'de yerine yazdığımız zaman

$$\pi = \pm \sqrt{ay^2 + by + c} \quad (3.88)$$

Denklem 3.88 elde edilir. π 'nin karekökten kurtulabilmesi için içindeki ifadenin tam kare olması gerekir. Dolayısıyla,

$$\pi = \pm \sqrt{(\sqrt{a}y + \sqrt{c})^2} = \pm (\sqrt{a}y + \sqrt{c}) \quad (3.89)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem 3.89'daki ifadenin içi aşağıdaki şekilde yazıldığında

$$(\sqrt{a}y + \sqrt{c})^2 = ay^2 + 2\sqrt{ac}y + c \quad (3.90)$$

halini alır. Denklem 3.88 ile denklem 3.90 karşılaştırıldığında $b = 2\sqrt{ac}$ olduğunu görürüz. $b = 2\sqrt{ac}$ ifadesinde denklem 3.85, 3.86 ve denklem 3.87 yerine yazılırsa,

$$-(\alpha^2 + \beta^2 + k) = 2\sqrt{(\beta^2 - k)\varepsilon^2} \quad (3.91)$$

elde edilir. Buradan,

$$k_- = \alpha^2 + \beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \quad (3.92)$$

$$k_+ = \alpha^2 + \beta^2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \quad (3.93)$$

olur. Bu ifadeler denklem 3.88'de yazılırsa,

$$\pi = \pm \left\{ \begin{array}{l} \pm \varepsilon \pm \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \right) y \\ \pm \varepsilon \pm \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \right) y \end{array} \quad \begin{array}{l} k_- \\ k_+ \end{array} \right\} \quad (3.94)$$

bulunur. $\tau(y)$,

$$\tau(y) = \tilde{\tau}(y) + 2\pi(y) = 1 - 2y + 2\varepsilon - 2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \right) y \quad (3.95)$$

Şeklinde elde edilir. Burada $\tau'(y) < 0$ olmalıdır. $\tau'(y)$ 'nin türevi

$$\tau'(y) = -2 - 2(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}) \quad (3.96)$$

dir. Dolayısıyla $\tau'(y) < 0$ kriterini sağlamaktadır. Denklem 3.64'e göre

$$\lambda = \alpha^2 + \beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}\right) \quad (3.97)$$

şeklindedir. Daha sade bir şekilde yazılırsa

$$\lambda = \alpha^2 + \beta^2 - (1 + 2\varepsilon)\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}\right) \quad (3.98)$$

şeklini alır. Denklem 3.67’de Denklem 3.94 ve 3.96’yı ve $\sigma''(y) = -2$ ’yi yazdığımız zaman

$$\lambda_n = 2n + 2n\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}\right) + n(n-1) \quad (3.99)$$

elde edilir. $\lambda = \lambda_n$ olduğundan Denklem 3.97 ve 3.99 karşılıklı eşitlenerek,

$$n(n+1) - \alpha^2 - \beta^2 + (1 + 2n + 2\varepsilon)\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}\right) = 0 \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.100)$$

enerji özdeğer denklemi elde edilir. Bulunan enerji özdeğeri denklem 3.108’de yerine yazıldığında dalga fonksiyonunun sınır şartlarını sağlamadığı görülür (Bayrak ve Açiksöz 2015). Dolayısıyla ne NU ne de AIM metodu kullanılarak elde edilen enerji özdeğerleri ve uygun dalga fonksiyonları fiziksel değildir. Bu metotlar dalga fonksiyonunun $y \cong 1$ civarında doğru davranışını dikkate alamamaktadır. Bu yüzden sınır koşulları dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekir.

Dalga fonksiyonunun $X(r)$ asimtotik davranışını elde etmek için Denklem 3.54 kullanılmıştır ve $\phi(y) = y^\varepsilon (1-y)^{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}}$ dönüşümü yapılmıştır. Sonuç olarak asimtotik formda dalga fonksiyonu

$$X(y) = y^\varepsilon (1-y)^\mu f(y) \quad (3.101)$$

şeklindedir. Burada

$$\mu^2 = \varepsilon^2 - \alpha^2 \quad (3.102)$$

$$\alpha^2 = \varepsilon^2 - \mu^2 \quad (3.103)$$

Şeklindedir. Denklem 3.79’a Denklem 3.101’i eklenirse,

$$\begin{aligned} y(y-1)f''(y) + \left[-(1+2\varepsilon) + 2y(1+\varepsilon+\mu)\right]f'(y) \\ + \left(-\beta^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \mu + 2\varepsilon\mu + \mu^2\right)f(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

halini alır. Denklem 3.104'ü düzenlendiğinde,

$$y(1-y)f''(y) + [(1+2\varepsilon) - (2+2\varepsilon+2\mu)y]f'(y) - (-\beta^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \mu + 2\varepsilon\mu + \mu^2)f(y) = 0$$

elde edilir. Hipergeometrik denklem aşağıdaki şekilde tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1964).

$$y(1-y)w''(y) + [c - (a+b+1)y]w'(y) - abw(y) = 0 \quad (3.105)$$

Fiziksel sınır koşullarını sağlayan çözümlerden biri $w(y) = {}_2F_1(a, b; c; y)$ dir. Denklem 3.104 ve Denklem 3.105 karşılaştırılırsa a, b, c parametreleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + 2\varepsilon + 2\mu \pm \sqrt{1 + 4\beta^2} \right) \quad (3.106)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(1 + 2\varepsilon + 2\mu \pm \sqrt{1 + 4\beta^2} \right) \quad c = 1 + 2\varepsilon \quad (3.107)$$

Sonuç olarak dalga fonksiyon;

$$X(y) = y^\varepsilon (1-y)^\mu {}_2F_1(a, b; c; y) \quad (3.108)$$

kapalı forma sahip olur. Dalga fonksiyonunun $y \cong 1$ civarında doğru davranışını elde etmek için aşağıdaki ilişki kullanılmıştır (Flügge 1994).

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; y) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-y) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-y) \end{aligned} \quad (3.109)$$

${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$ dir. Bu nedenle sınır koşullarını $X_n(r \rightarrow 0, y \rightarrow 1) = 0$ ve yukarıda elde ettiğimiz Denklem 3.109 kullanılarak

$$\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(1 + e^{R/a} \right)^{-2\mu} = -1 \quad (3.110)$$

elde edilir. Burada $\mu = i\lambda$ ve $\lambda = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}$ 'dir. Denklem 3.110'un fiziksel sistemlere uygulanmasında $e^{R/a} \gg 1$ olduğu için $1 + e^{R/a} \approx e^{R/a}$ şeklinde yaklaşım yaparak özdeğerde çok çok az bir yüzde hata oranı ile denklemi daha kapalı bir forma sokabiliriz

(Bayrak ve Açıksöz 2015). Sonuç olarak Denklem 3.110'un daha kapalı formdaki enerji özdeğeri ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\arg\Gamma(2i\lambda) - \arg\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(1+2\varepsilon+2i\lambda-\sqrt{1+4\beta^2}\right)\right) - \arg\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(1+2\varepsilon+2i\lambda+\sqrt{1+4\beta^2}\right)\right) + \frac{R\lambda}{a} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (3.111)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

özdeğer denkleminde karşılık gelen radyal dalga fonksiyonunun kapalı formu da aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\chi(r) = N \left(\frac{1}{1+e^{\frac{r-R}{a}}} \right)^{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{1+e^{\frac{r-R}{a}}} \right)^{\mu} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} \left(1+2\varepsilon+2\mu+\sqrt{1+4\beta^2} \right), \frac{1}{2} \left(1+2\varepsilon+2\mu-\sqrt{1+4\beta^2} \right); 1+2\varepsilon; \frac{1}{1+e^{\frac{r-R}{a}}} \right) \quad (3.112)$$

Burada N normalizasyon sabitidir. Kapalı formdaki enerji özdeğer ifadesi Denklem 3.111, Denklem 3.112'de yazılarak uygun parametreler için dalga fonksiyonunun grafiği çizilirse dalga fonksiyonunun sınır şartlarını sağladığı görülür (Şekil 4.2). Enerji özdeğer ifadesi Denklem 3.100 AIM metodu kullanılarak da elde edilebilir. Denklem 3.100'ü Denklem 3.112'de yazar, uygun parametreler için dalga fonksiyonunun grafiğini çizersek dalga fonksiyonunun sınır şartlarını sağlamadığını görürüz. Dolayısıyla NU ve AIM metotlarından elde edilen enerji özdeğer ifadesi doğru değildir. Literatürde bu tarz yapılan hatalar başka bir makalemiz de tartışılmıştır (Bayrak ve Açıksöz 2015).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Materyal ve metot bölümde genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyel alanında hareket eden yüksüz piyonların davranışını tanımlamak amacıyla relativistik Klein-Gordon denklemi çözülmüş, enerji özdeğerleri (Denklem 3.111) ve buna uygun dalga fonksiyonları (Denklem 3.112) elde edilmiştir. Elde ettiğimiz bu denklemlerin fiziksel uygulamasını yüksüz pionların π^0 , GWS potansiyelindeki hareketine uyguladık. İlk olarak π^0 parçacıklarının enerji özdeğerlerini nümerik olarak hesaplamak için pionların enerjisini $m_{\pi^0}c^2 = 134,977 \text{ MeV}$ ve $\hbar c = 197,29 \text{ MeV.fm}$ alınmıştır. Denklem 3.110'da enerji özdeğeri ikinci dereceden olduğu için 2 tane enerji özdeğeri çözümü bulunmuştur. Bu değerler üst enerji özdeğeri ($E_n^{üst}$) ve alt enerji özdeğeri (E_n^{alt}) olarak adlandırılmıştır. π^0 parçacığının bağlı durum enerji özdeğeri $-m_{\pi^0}c^2 \leq E_n \leq +m_{\pi^0}c^2$ aralığındadır. Böylece parçacıklar $0 \leq E_n \leq m_{\pi^0}c^2$ aralığına, karşıt parçacıklar ise $-m_{\pi^0}c^2 \leq E_n \leq 0$ aralığına yerleşmiştir (Greiner 2000). Yani parçacıklar bu enerji aralığında iken bağlı durumdadır. $E_n^{üst} > E_n^{alt}$ dır.

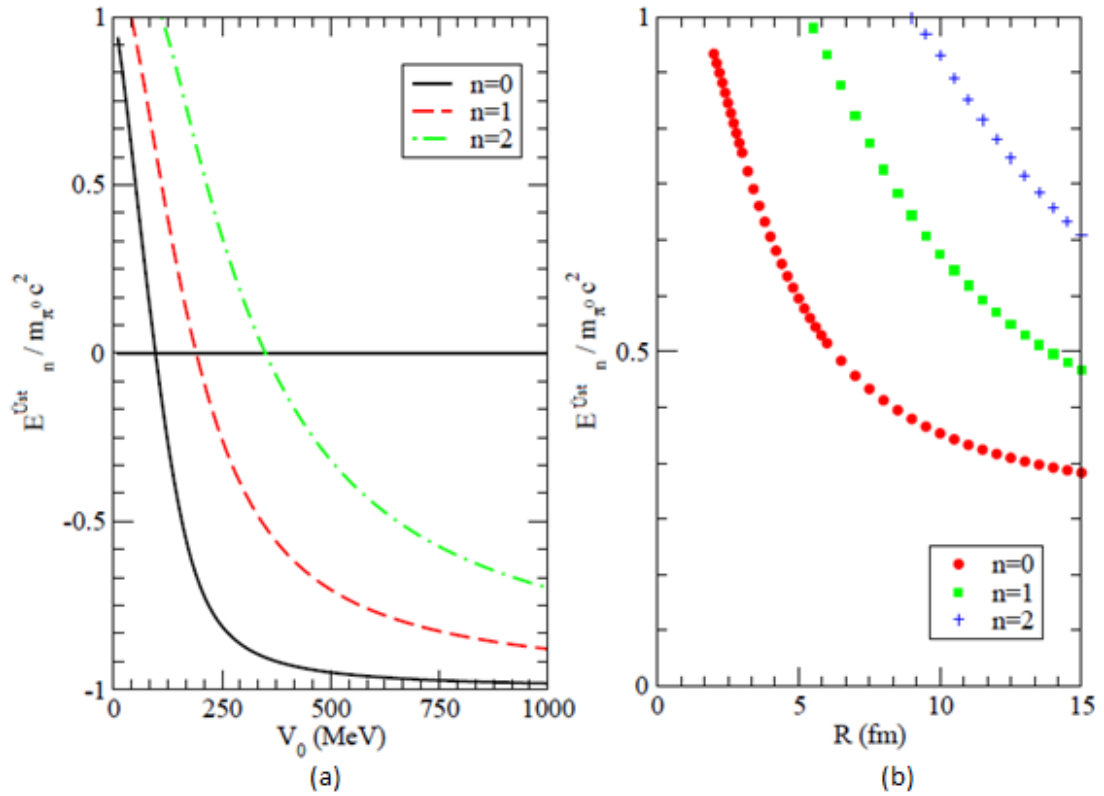
Çizelge 4.1' de $E_n^{üst}$ ve E_n^{alt} enerji özdeğerlerini V_0 ve W_0 parametrelerinin ve n kuantum sayısının bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Hesaplama $R = 6 \text{ fm}$ ve $a = 0,6 \text{ fm}$ olarak alınmıştır. İlk durumda $n=0$ ve W_0 sabit tutularak V_0 değeri arttırıldığında $E_n^{üst}$ ve E_n^{alt} enerji özdeğerlerini incelenmiştir. $n=0$, $W_0 = 30 \text{ MeV}$ değerleri sabit iken V_0 değeri sırasıyla 50, 100, 200 MeV olarak alınmıştır bu durumda $E_n^{üst}$ değerlerinde pion bağlı durumdadır, ancak E_n^{alt} değerlerinde pion parçacığı bağlı değildir ve serbest duruma geçmiştir. Bu sefer $n=0$, $V_0 = 50 \text{ MeV}$ değerleri sabit alınıp W_0 değeri sırasıyla 50, 100 ve 200 MeV olarak arttırılarak enerji özdeğerleri elde edilmiştir. $E_n^{üst}$ değeri 134,977 MeV değerinden küçük olduğu için parçacık bağlı durumdadır. E_n^{alt} değerinde ise -134,977 MeV değerinden küçük olduğu için parçacık bağlı durumda değildir. $n=1$, $V_0 = 50 \text{ MeV}$ ve $W_0 = 30 \text{ MeV}$ değerlerine bakıldığında $E_n^{üst}$ değeri 134,977 MeV değerinden küçük olduğu için parçacık bağlı durumdadır. E_n^{alt} değerinde ise -134,977 MeV değerinden küçük olduğu için parçacık bağlı durumda değildir. Serbest durumdadır. $n=1$ ve $V_0 = 50 \text{ MeV}$ değerleri sabit tutularak W_0 değeri sırasıyla 50,100 ve 200 MeV olarak arttırıldığında $E_n^{üst}$ değerlerinin 134,977 MeV değerinden küçük çıktığını ve parçacığın bağlı konumda olduğunu E_n^{alt} değerinin ise -134,977 MeV değerinden küçük çıktığı için parçacığın serbest konumda olduğu anlaşılmaktadır. $n=1$, $V_0 = 200 \text{ MeV}$ ve $W_0 = 30 \text{ MeV}$ değerinde

aynı şekilde $E_n^{üst}$ değerinin bağlı durumda olduğu E_n^{alt} değerinin ise serbest durumda olduğu görülmüştür. $n = 2$ için hesaplanan değerlere bakıldığında $V_0 = 200$ MeV ve $W_0 = 30$ MeV değerlerinde $E_n^{üst}$ ve E_n^{alt} değerlerinde sırasıyla bağlı ve serbest durumda olduğu görülmüştür. Ancak bazı değerlerde bu durumları sağlamamaktadır. $n = 2$ ve $W_0 = 30$ MeV değerleri sabit tutularak V_0 değeri sırasıyla 50 MeV ve 100 MeV olarak arttırıldığında $E_n^{üst}$ değerinin 134,977 MeV' den büyük çıktığını yani parçacığın serbest durumda olduğunu, E_n^{alt} değerinin -134,977 MeV'den küçük olduğunu yani parçacığın serbest durumda olduğu görülmüştür. Aynı şekilde $n = 2$ 'de ve $V_0 = 50$ MeV değerleri sabit tutularak W_0 sırasıyla 50 MeV ve 100 MeV olarak arttırılmıştır. Bu durumda enerjinin üst ve alt değerlerine göre parçacığın serbest durumda olduğu görülmüştür. Yüzey potansiyelin (W_0) derinliğinin pionun enerji özdeğeri üzerindeki etkisinin çok zayıf olduğu Çizelge 4.1'den anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.1. Pionun üst ve alt enerji özdeğerleri ile V_0 , W_0 potansiyel parametrelerinin kuantum sayılarına göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015)

n	V_0 (MeV)	W_0 (MeV)	$E_n^{üst}$ (MeV)	E_n^{alt} (MeV)
0	50	30	69,178	-146,728
0	100	30	-4,346	-156,682
0	200	30	-93,777	-275,771
0	50	50	66,764	-146,930
0	50	100	59,926	-147,465
0	50	200	42,998	-148,669
1	50	30	127,223	-219,529
1	50	30	78,3535	-252,139
1	200	30	-6,364	-370,907
1	50	50	124,56	-220,51
1	50	100	118,113	-223,074
1	50	200	107,135	-228,736
2	50	30	206,136	-323,329
2	100	30	141,055	-368,278
2	200	30	76,904	-494,725
2	50	50	202,946	-324,847
2	50	100	195,216	-328,75

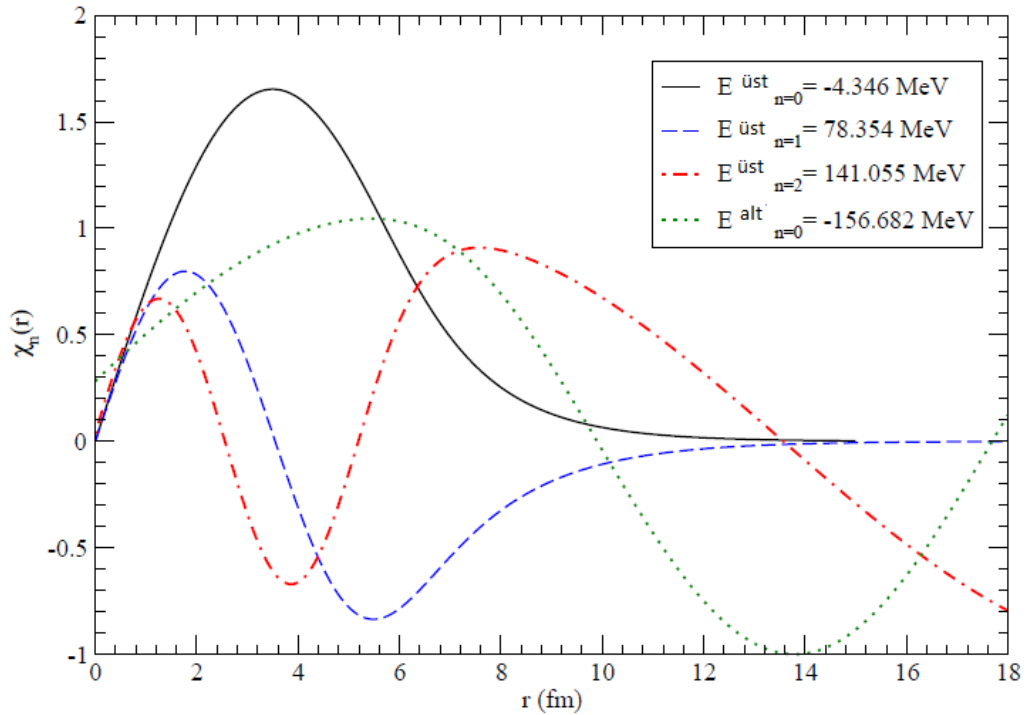
Nükleer potansiyel parametrelerinin pionun enerji özdeğerleri üzerindeki etkilerini ortaya koymak için V_0 ve R değişkenlerine karşılık enerji özdeğerinin grafiği Şekil 4.1’de çizilmiştir.



Şekil 4.1. a) Pionun üst enerji özdeğerinin V_0 potansiyel derinliğine göre değişimi **b)** Pionun üst enerji özdeğerinin nükleer yarıçapa R göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015)

Burada potansiyel parametreleri $W_0 = 30$ MeV, $R = 6$ fm, $a = 0,6$ fm ve $V_0 = 50$ MeV alınmıştır. Şekil 4.1.a'ya bakıldığında artan potansiyel derinliği ile π^0 parçacığı üst sürekli durumlardan ($E_n > +m_{\pi^0} c^2$) bağlı durumların enerji alanına girdiği ve $V_0 = 96,799$ MeV'de $E_0 = 0$ 'a sahip olduğu görülmüştür. Bu potansiyel parametrelerinde parçacığın enerjisi sıfır olmakta çift oluşum meydana gelmektedir. Çift oluşum için kritik potansiyel parametreleri $n=1$ ve $n=2$ durumları için $V_0 = 190,592$ MeV ve $V_0 = 349,587$ MeV değerleridir (Şekil 4.1.a). Enerji özdeğerlerini sıfır yapan kritik V_0 değerlerinin Şekil 4.1.a'da daha büyük n kuantum sayıları için arttığı görülmektedir. Daha büyük V_0 değerleri için parçacık anti parçacık haline gelir ve enerji özdeğerleri negatif olur. Anti-pionun enerji özdeğeri $-m_{\pi^0} c^2$ alanına yaklaşır ancak antipion alt süreklilik içine giremez. ($E_n < m_{\pi^0} c^2$) benzer davranış, Şekil 4.1.b'de artan nükleer yarıçap için de görülmüştür. Parçacığın ve anti parçacığın enerji özdeğerleri Şekil 4.1.a'daki WS potansiyelinin yapısına bağlı olarak $E_{00} = 0$ sınır çizgisine göre simetrik değildir.

Dalga fonksiyonu yorumlamak için Şekil 4.2'deki grafik çizilmiştir. Şekil 4.2'de bazı kuantum sayıları için pionun normalize olmamış dalga fonksiyonları gösterilmiştir. Pionu bağlı durumda tutmak için potansiyel parametreleri $V_0 = 100$ MeV, $W_0 = 30$ MeV, $R = 6$ fm, $r = 0,6$ fm $a = 0,6$ fm şeklinde alınmıştır. Pionun bağlı durum enerji özdeğerleri $n=0$ ve $n=1$ durumları için $E_0^{üst} = -4,346$ MeV ve $E_1^{üst} = 78,354$ MeV bulunmuştur. Bu durumlarda parçacık ve anti parçacık bağlı durumdadır. Şekil 4.2 grafiğine bakıldığında $E_0^{üst} = -4,346$ MeV ve $E_1^{üst} = 78,354$ MeV değerlerine karşılık gelen dalga fonksiyonu sınır koşullarını sağlamaktadır. Yani bağlı durumlara karşılık gelen dalga fonksiyonları Şekil 4.2'deki sınır koşullarına uygun olduğu gösterilmiştir. $E_2^{üst} = 141,055$ MeV ve $E_0^{alt} = -156,682$ MeV değerlerinde çizilen dalga fonksiyonlarının bağlı durum sınır koşullarını sağlamadığı görülmüş ve parçacık ve anti-parçacığın bağlı durumdan kurtularak serbest hale geçtiği anlaşılmıştır.



Şekil 4.2. Bazı kuantum sayıları için normalize olmamış dalga fonksiyonunun nükleer yarıçapa göre değişimi (Bayrak ve Şahin 2015)

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında yüksüz pionunun π^0 genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyel alanındaki davranışı $l = 0$ durumu için relativistik Klein-Gordon denklemi çözülerek incelenmiştir. Klein-Gordon denklemini çözebilmek için analitik çözüm yöntemi olan NU metodu kullanılmış enerji özdeğerleri ve uygun dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Elde edilen enerji özdeğer ifadesinin doğruluğunun kontrolü için potansiyel parametrelerine nümerik değerler verilmiş ve enerji özdeğeri elde edilmiştir. Elde edilen bu nümerik enerji özdeğeri ifadesi dalga fonksiyonunda yerine yazılarak dalga fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Grafikten dalga fonksiyonun sınır şartlarını sağlamadığı anlaşılmıştır. $r=R$ 'de NU metodunun dalga fonksiyonun doğru davranışını dikkate alamadığı görülmüştür. Dolayısıyla dalga fonksiyonun doğru tanımını elde etmek için $r=R$ 'de dalga fonksiyonunun davranışı hipergeometrik fonksiyonların özellikleri kullanılarak incelenmiş ve sınır şartlarından doğru enerji özdeğeri ve uygun dalga fonksiyonları analitik olarak kapalı formda elde edilmiştir. π^0 parçacığının davranışını incelemek için potansiyel parametrelerinin parçacığın bağlı durum enerjisine göre değişimi bilgisayar yazılım programı kullanılarak hesaplanmıştır ve bu değerler Çizelge 4.1, Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de gösterilerek yorumlanmıştır. Çizelge 4.1'de n , V_0 , W_0 parametrelerinin değişimine bağlı olarak enerji özdeğerinin üst ve alt değerleri hesaplanmıştır. Bu hesaplanan değerlere göre parçacığın bağlı durumda veya serbest durumda olduğu yorumuna varılmıştır. $E_n^{üst}$ değerinin pozitif olması gerektiğini önceden dile getirilmiştir. Bazı $E_n^{üst}$ değerlerinin negatif çıktığı görülmüştür. Negatif çıkan enerji değerinde parçacık anti-parçacık durumuna geldiği yorumu yapılmıştır. $n = 0$ $V_0 = 100$ MeV $W_0 = 30$ MeV değerlerinde enerji üst değerinin negatif çıktığı ve bu parametrelerde parçacık anti parçacık olduğu sonucuna varılmıştır. Bu durum birkaç değerde daha görülmektedir. n değeri ve V_0 değeri arttıkça parçacık üst sürekli durumlardan alt süreklilik durumuna geldiği ifade edilmiştir. Şekil 4.1 grafiğinde artan n kuantum sayıları ile beraber potansiyel V_0 derinliği arttıkça parçacık Şekil 4.1.a'daki grafikten de görüldüğü üzere parçacık negatif enerji alanına girdiği ve $E = 0$ 'a neden olan kritik V_0 değerleri ortaya konmuştur. Verilen potansiyel parametreleri için artan n kuantum sayısına göre parçacık bağlı durumdan serbest duruma geçtiği ve bağlı durum dalga fonksiyonlarının serbest durum dalga fonksiyonlarına dönüştüğü görülmüştür.

Diğer spini 0 olan parçacıklar içinde benzer işlemler gerçekleştirilebileceği düşünülmektedir. Benzer bir model π^+ ve π^- parçacıkları için de yapılabilir. Görüleceği üzere bu parçacıklar yüklüdür. Yüklü oldukları için GWS potansiyeline ek olarak Coulomb potansiyeli gelir ve yapılan bu çalışmada $l \neq 0$ farklı alınarak işlemler gerçekleştirilebilir. Fakat analitik çözümler isteniyorsa Coulomb ve merkezci potansiyel terimlerine yaklaşım yapılmalıdır ya da parçalı potansiyel olarak düşünülmelidir. Enerji özdeğerinin potansiyel parametrelerine bağlılığı benzer şekilde incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publicationsi INC., New York, 1016p.
- Ackermann, M., Ajello, M., Allafort, A., Baldini, L., Ballet, J., Barbiellini, G., Baring, M.G., Bastieri, D., Bechtol, K., Bellazzini, R. vd. 2013. Detection of the characteristic pion-decay signature in süpernova remnants. *Science*, 339(6121): 807-811
- Alpdoğan, S., Aydoğdu, O. and Havare, A. 2013. Relativistic spinless particles in the generalized asymmetric Woods-Saxon potential. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 46(1): 015301.
- Alpdoğan, S. and Havare, A. 2014. Dirac particle for the position dependent mass in the generalized asymmetric Woods-Saxon potential. *Adv. High Energy Phys.* 973847: 1-10.
- Altuğ, A., Aydoğdu, O. and Sever, R. 2010. Scattering of the Woods-Saxon potential in the Schrödinger equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43(42): 425204.
- Arda, A. and Sever, R. 2008. Bound states of the Klein-Gordon equation for Woods-Saxon potential with position dependent mass. *Int. J. Mod. Phys. C*, 19(05):763-773.
- Aydoğdu, O. and Sever, R. 2009. Pseudospin and spin symmetry in the Dirac equation with Woods-Saxon potential and tensor potential. *Eur. Phys. J. A*, 43(1): 73-81.
- Badalov, V. H., Ahmadov, H. I. and Ahmadov, A. I. 2009. Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l state. *Int. J. Mod. Phys. E*, 18(03): 631-641.
- Badalov, V. H., Ahmadov, H. I. and Badalov, S.V. 2010. Any l-state analytical solutions of the Klein-Gordon equation for the Woods-Saxon potential. *Int. J. Mod. Phys. E*, 19(07): 1463-1475.
- Bat, A. 2018. Search for new particles decaying to dijet with quark/gluon jet tagging in 13 Tev proton-proton collisions at cms. Ph. D. Thesis, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat, 118s.
- Bayrak, O. and Açiksöz, E. 2015. Corrected analytical solution of the generalized Woods-Saxon potential for arbitrary l states. *Phys. Scr.*, 90(1): 015302.
- Bayrak, O. and Sahin, D. 2015. Exact analytical solution of the Klein-Gordon equation in the Generalized Woods-Saxon potential. *Commun. Theor. Phys.*, 64(3): 259-262.
- Benamira, F., Guechi, L., Mameri, S. and Sadoun, M.A. 2007. Unified path integral treatment for generalized Hulthen and Woods-Saxon potentials. *Ann. of Phys.*, 322(9): 2179-2194.
- Berkdemir, C., Berkdemir, A. and Sever, R. 2005. Polynomial solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential. *Phys. Rev. C*,

72(2): 027001.

- Berkdemir, C., Berkdemir, A. and Sever, R. 2006. Systematical approach to the exact solution of the Dirac equation for a deformed form of the Woods-Saxon potential. *J.Phys. A: Math. Gen.*, 39(43): 13455-13463.
- Berkdemir, C. 2012. Application of the Nikiforov-Uvarov method in Quantum mechanics. In: Pahlavani, M. R. (Ed.), Theoretical Concepts of Quantum Mechanics. InTech, Croatia, pp. 225-252.
- Bianchi, M.S. 1994. Levinson's theorem zero-energy resonances and time delay in one-dimensional scattering systems. *J. Math. Phys.* 35(6): 2719-2733.
- Bjorklund, R., Crandall, W.E. and Moyer, B.J. 1950. High energy photons from proton-nucleon collisions. *Phys. Rev.*, 77(2): 213-218.
- Brandan, M.E. and Satchler, G.R. 1997. The Interaction between light heavy-ions and what it tells us. *Pyhs.Rep.*, 285(4-5): 143-243.
- Bohm, D. 1951. Quantum mechanics 2nd ed. Prentice-Hall, New York, 245p.
- Bohr, D. And Mottelson, B. 1988. Nuclear structure. Word Scientific, London, 748p.
- Bouchiat, C., Illiopoulos, J. and Meyer, P. 1972. An anomaly-free version of Weinberg's model. *Phys. Lett. B*, 38(7): 519-523.
- Candemir, N. and Bayrak, O. 2014. Bound states of the Dirac equation for the generalized Woods-Saxon potential in pseudospin and spin symmetry limits. *Mod. Phys. Lett. A*, 29(35): 1450180.
- Chargui, Y. 2016. Effective mass and Pseudoscalar Interaction in the Dirac equation with Woods-Saxon potential. *Few-Body syst.*, 57(4): 289-306.
- Chun-Feng, H., Zhong-Xiang, Z. and Yan, L. 1999. Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Woods-Saxon potentials. *Chin. Phys. Soc.*, 8(8): 561-564
- Clara, R. and Villalba, V.M. 2005. Scattering of a Klein-Gordon particle by a Woods-Saxon potential. *Phys. Rev. A*, 71(5): 052101.
- Cooper, F., Khare, A. and Sukhatme, U. 1995. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, 251: 267-385.
- Çapak, M. and Gönül, B. 2016. Remarks on the Woods-Saxon potential. *Mod. Phys. Lett. A*, 31: 1650134.
- Çek, N. 2016. Parçacıklar ve Parçacıkların enerji kaynakları üzerinde etkileri. *Eur. J. Sci. Theol.*, 4(7): 1-8.
- Çiftci, H., Hall, R. and Saad, N. 2003. Asymtotic iteration method for eigenvalue problems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36(47): 11807-11816.
- Çiftci, H., Hall, R. and Saad, N. 2005. Construction of exact solutions to eigenvalue problems by the asymtotic iteration method. *J.Phys. A: Math. Gen.*, 38(5): 1147-1155.
- Das, A. and Ferber, T. 2003. Introduction to Nuclear and Particle Physics. World scientific, London, 399p.

- Erkol, H. and Demiralp, E.2007. The Woods-Saxon potential with point interactions. *Phys. Lett. A*, 365(1-2): 55-63.
- Fakhri, H. and Sadeghi, J. 2004. Supersymmetry approaches to the bound states of the generalized Woods-Saxon potential. *Mod. Phys. Lett. A*, 19(8): 615-625.
- Feshbach, H., Porter, C.E. and Weisskopf V.F. 1954. Model for Nuclear Reactions with Neutrons. *Phys. Rev.*, 96(2): 448-464.
- Flügge, S.1994. Practical Quantum Mechanics. Springer, Berlin, 287s.
- Gamow, G. 1928. Zur Quantentheorie des Atomkernes (On the quantum theory of the atomic nucleus), *Zeitschrift für Physik*, 51: 204-212.
- Geiger H. and Nuttall, J.M.1911. The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation, *Philosophical Magazine*, 22(130): 613-621.
- Graf, R.J. and Rowland, G.G. 1987. Effect of plant density on yield and components of yield of faba bean. *Canadian J. Plant Science*, 676 (1): 1-10.
- Greene, R. L. and Aldrich, C. 1976. Variational wave functions for a screened Coulomb potential. *Phys. Rev. A*, 14(6): 2363-2366.
- Greiner, W. 2000. Relativistic Quantum Mechanics wave equations. Springer, Berlin, 424p.
- Griffiths, D. 2004. Introduction to elementary particles. Deutsche Nationalbibliothek, Germany, 392p.
- Griffiths, D. 2005. Introduction to quantum mechanics. Pearson prentice hall, ABD, 468p.
- Gomez, G., Kar, K., Kota, V.K.B., Molina, R.A. and Retamosa, J. 2003. Localization in 2 p 1 f nuclear shell-model wavefunctions. *Phys. Lett. B*, 567(3-4): 251-258.
- Gönül, B. and Köksal, K. 2007. Solutions for a generalized Woods-Saxon potential. *Phys. Scr.*, 76(5): 565-570.
- Guo, J. Y. and Sheng, Z.Q. 2005. Solution of the Dirac equation for the Woods-Saxon potential with spin and pseudospin symmetry. *Phys. Lett. A*, 338(2): 90-96.
- Guo, J.Y., Yu, Y. and Jin, S.W.2009. Transmission resonance for a Dirac particle in a one-dimensional Hulthen potential. *Cent. Eur. J. Phys.*,7(1): 168-174.
- Hamzavi, M. and Rajabi, A.A. 2013. Generalized nuclear Woods-Saxon potential under relativistic spin symmetry limit. *ISRN High Energy Phys.*, 987632: 1-7.
- Hassanabadi, H., Maghsoodi, E., Zarrinkamar, S. and Salehi, N. 2013. Scattering of relativistic spinless particles by the Woods-Saxon potential. *Few-body syst.*, 54(11): 2009-2016.
- Ikhdaïr, S.M., Falaye, B.J. and Hamzavi, M. 2013. Approximate eigensolutions of the deformed Woods-Saxon potential via AIM. *Chinese Phys. Lett.*, 30(2): 020305.
- Ikhdaïr, S.M. and Sever, R. 2007. Exact solution of the Klein-Gordon equation for the PT-symmetric generalized Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method. *Ann. Phys.*, 16(3): 218-232.

- Ikhdaïr, S.M. and Sever, R. 2010. Approximate analytical solutions of the generalized Woods-Saxon potentials including the spin-symmetry. *Cent. Eur. J. Phys.*, 8(4): 652-666.
- Ikot, A. N. and Akpan, I.O. 2012. Bound state solutions of the Schrödinger equation for a more general Woods-Saxon potential with arbitrary l-state. *Chinese Phys. Lett.*, 29(9): 090302.
- Jadach, S., Ward, B. F. L. and Was, Z. 1991. The Monte Carlo program Koralz, version 3.8, for the lepton or quark pair production at LEP/SLC energies. *Comput. Phys. Commun.*, 66(2-3): 276-292.
- Jiang, Y., Dong, S., Antillon, A. and Cassou, M.L. 2006. Low momentum scattering of the Dirac particle with an asymmetric cusp potential. *Eur. Phys. J. C*, 45(2): 525-528.
- Karaoğlu, B., 2008. Kuantum mekaniğine giriş. Seçkin, Ankara, 279s.
- Karaoğlu, B., 2013. Fortran ve Python ile Sayısal Fizik, Seçkin Yayıncılık.
- Kennedy, P. 2002. The Woods-Saxon potential in the Dirac equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35(3): 689-698.
- Khoa, D.T., Satchler, G.R. and von Oertzen, W. 1997. Nuclear incompressibility and density dependent NN interactions in the folding model for nucleus-nucleus potentials. *Phys. Rev. C*, 56(2): 954-969.
- Krane, K.S. 1988. Introductory Nuclear Physics. John Wiley and Sons, New York, 845p.
- Lichtenberg, D. 2007. Evren ve Atom. World Scientific, London, 311p.
- Liendo, J.A., Castro, E., Gomez, R. and Caussyn, D. D. 2016. A study of shell model neutron states in ^{207;209}Pb using the generalized Woods-Saxon plus spin-orbit potential. *Inter. J. of Mod. Phys. E*, 25(08): 1650055.
- Lütfüoğlu, B.C. 2018. An investigation of the bound-state solutions of the Klein-Gordon equation for the generalized Woods-Saxon potential in symmetry and pseudo-spin symmetry limits. *Eur. Phys. J. Plus*, 133(8): 309.
- Lütfüoğlu, B.C. 2018. Surface interaction effects to a Klein-Gordon particle embedded in a Woods-Saxon potential well in terms of thermodynamic functions. *Can. J. Phys.*, 96(7): 843-850.
- Lütfüoğlu, B.C., Akdeniz, F. and Bayrak, O. 2016. Scattering, bound and quasi-bound states of the generalized symmetric Woods-Saxon potential. *J. of Math. Phys.*, 57(3): 032103.
- Lütfüoğlu, B.C. and Erdoğan, M. 2017. Properties of an α particle in a Bohrium 270 nucleus under the generalized symmetric Woods-Saxon potential. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen bilimleri enstitüsü dergisi, cilt 21, sayı 2, 316-321.
- Lütfüoğlu, B.C., Lipovsky, J. and Kriz, J. 2018. Scattering of Klein-Gordon particles in the background of mixed scalar-vector generalized symmetric Woods-Saxon potential. *Eur. Phys. J. plus*, 133(1): 17.
- Maghsoodi, E., Hassanabadi, H., Zarrinkamar, S. and Rahimov, H. 2012. Relativistic

- symmetries of the Dirac equation under the nuclear Woods-Saxon potential. *Phys. Scr.*, 85(5): 055007.
- Massen, S.E. and Panos, C.P. 1998. Universal property of the information entropy in atoms, nuclei and atomic cluster. *Phys. Lett. A*, 246(6): 530-533.
- Mottelson, B.R. and Bohr., 1998. A.N. Nuclear Structure, World Scientific Pub Co Inc., 1219p.
- Newton, R.G. 1982. Scattering theory of waves and particles **2nd** ed. Springer Verlag, New York, 744p.
- Nikiforov, A.F. and Uvarov, V.B. 1988. Special Functions of Mathematical Physics. Birkhauser, Basel. 427p.
- Pahlavani, M. R. and Alavi, S.A. 2012. Solutions of Woods-Saxon potential with spin-orbit and centrifugal terms through Nikiforov-Uvarov method. *Commun. Theor. Phys.*, 58(5): 739-743.
- Panella, O., Biondini, S. and Arda, A. 2010. New exact solution of the one-dimensional Dirac equation for the Woods-Saxon potential within the effective mass case. *J.Phys. A: Math. Theor.*, 43(32): 325302.
- Perini, K.L. 1998. Discovery potential of the Standart Model Higgs in CMS at the LHC. PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 169s.
- Riazuddin. 1959. Charge Radius of Pion. *Phys. Rev.*, 114(4): 1184-1186.
- Sadeghi, J. And Pahlavani, M.R.2004. The hierachy of Hamiltonian for spherical Woods-Saxon potential. *Afr. J. Math. Pyhs.*, 1(2): 195-199.
- Saha, A., Das, U. and Talukdar, B. 2011. on eigenvalue problems in quantum mechanics. *Phys. Scr.*, 83(6): 065003.
- Salamon, P., Baran, A. and Vertse, T. 2016. Distributions of the S-matrix poles in Woods-Saxon and cut-off Woods-Saxon potentials. *Nücl. Phys. A*, 952: 1-17.
- Satchler, G. R. 1980. Introduction to Nuclear Reactions. *Mc Millan press Ltd*, London,153-210.
- Satchler, G. R. 1983. Direct Nuclear Reactions. *Oxford University Press*, Newyork, 392-680.
- Satchler, G. R. 1991. Heavy-ion scattering and reactions near the Coulomb barrier and threshold anomalies. *Phys. Rep.*, 199(3): 147-190.
- Schrödinger, E. 1926. Quantisierung als Eigenwertproblem; von Erwin Schrödinger. *Annalen der Physik*. 384: 361–377.
- Senn, P. 1988. Threshold anomalies in one-dimensional scattering. *Am. J. Phys.*, 56(10): 916-921.
- Shupe, M. A. 1979. A composite model of leptons and quarks. *Phys. Lett. B*, 86(1): 87-92.
- Şahin, B. 2006. Ep çarpışmasında üst kuarkın spin polarizasyonu. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 133s.
- Tekin, S. 2008. Değişken kütleli relativistik olmayan ve relativisitk dalga

- denklemlerinin analitik olarak çözümlenmesi. Yüksek lisans tezi, Erciyes üniversitesi, Kayseri, 43s.
- Terazawa, H., Yasue, M., Akama, K. and Hayashi, M. 1982. Observable effects of the possible sub-structure of leptons and quarks. *Phys. Lett. B*, 112(4-5): 387-392.
- Villalba, V.M. and Greiner, W. 2003. Transmission resonances and supercritical states in a one-dimensional cusp potential. *Phys. Rev. A*, 67(5): 052707.
- Villalba, V.M. and Rojas, C. 2006. Bound states of the Klein gordon equation in the presence of short range potential. *Int. J. Mod. Phys. A*, 21(02): 313-325.
- Villalba, V.M. and Rojas, C. 2007. Scattering of a relativistic scalar particle by a cusp potential. *Phys. Lett. A*, 362(1): 21-25.
- Woods, R.D. and Saxon, D.S. 1954. Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering. *Phys. Rev.*, 95(2): 577-578.
- You, G. J., Zheng, F.X. and Xin, X.F. 2002. solution of the relativistic Dirac-Woods-Saxon problem. *Phys. Rev. A*, 66(6): 062105.
- Yukawa, H. 1935. On the interaction of elementary particles, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 17: 48-5
- Zaichenko, A.K. and Ol'Khovskii, V.S. 1976. Analytic solutions of the scattering by potentials of the Eckart class. *Theo. And Math. Phys.*, 27(2): 475-477.
- Zucchelli, P. 2002. Anovel concept for a $\bar{\nu}_e/\nu_e$ neutrino factory: the beta-beam. *Phys. Lett. B*, 532(3-4): 166-172.

ÖZGEÇMİŞ

Derya ŞAHİN

derya_cufku_89@hotmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2012-2019	Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2009-2012	Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Bayrak O., Şahin D. (2015). Exact Analytical Solution of the Klein-Gordon Equation in the Generalized Woods-Saxon Potential. *Commun. Theor. Phys.*, 64(3), 259-262.