

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONUNUN
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

GÜLFEM AKIN

ŞUBAT 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONUNUN
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

GÜLFEM AKIN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ŞUBAT 2024

DİYARBAKIR

GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONUNUN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Gülfem AKIN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliđi'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER
Danışman, **Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi**

Sınav Jürisi:

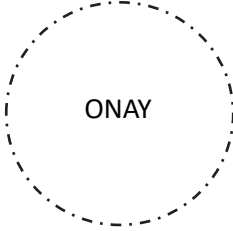
Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY (*)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Bilal ŞEKER
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi

Prof. Dr. Emel YAVUZ
Matematik ve Bilgisayar Bölümü, İstanbul Kültür Üniversitesi



Savunma Tarihi: 17 / 01/2024

(*) Jüri Başkanı.

(**) Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Gülfem AKIN

İmza:

TEŞEKKÜR

Doktora sürecimin her aşamasında bana destek olan, yol gösteren, sabır ve anlayışını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER 'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreçte beni aydınlatan, bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim Dicle Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan, dualarını eksik etmeyen sevgili anne ve babama teşekkür ederim.

Biricik yavrularım Zehra ve Ahmet Enes'e bu zorlu ve uzun süreçte annelerine göstermiş oldukları sabır ve hoşgörü nedeniyle çok teşekkür ederim.

Bu uzun sürecin her aşamasında en büyük destekçim olan, bana her zaman inanan ve güvenen hayat arkadaşım Sedat AKIN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	viii
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Kompleks Analizin Temel Tanım ve Teoremleri.....	3
3. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR	14
3.1 Ünivalent Fonksiyonlar	14
3.2 S Sınıfının Bazı Alt Sınıfları	31
3.3 Bazı Özel Fonksiyonlar.....	49
3.3.1 Gamma Fonksiyonu	50
3.3.2 Bessel Fonksiyonu	51
3.3.3 Wright Fonksiyonu	55
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONU	59
4.1 Genelleştirilmiş Wright-Bessel (-Lommel) Fonksiyonunun Bazı Geometrik Özellikleri.....	59
4.2. Genelleştirilmiş Wright-Bessel Fonksiyonlarının Kısmi Toplamları	73
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	84
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ	89

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$ dönüşümü altında R 'nin w -düzlemindeki resim bölgesi....	13
Şekil 2.2 $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1-2i)$ dönüşümü altında R 'nin w -düzlemindeki resim bölgesi	13
Şekil 3.1 $\varphi(z) = \frac{z^6}{7} + z$ 'nin grafiği	15
Şekil 3.2 $\varphi(z) = \frac{2z^6}{7} + z$ 'nin grafiği	16
Şekil 3.3 Koebe fonksiyonunun elde edilişi.....	20
Şekil 3.4 $f(z) = -z - 2\log(1-z)$ altında D birim diskinin görüntüsü.....	28
Şekil 3.5. $f \prec g$	30
Şekil 3.6 Yıldızlı Küme	32
Şekil 3.7 Konveks Küme	32
Şekil 3.8 $f(z) = \frac{z}{1-z}$ altında D birim diskinin görüntüsü.....	33
Şekil 3.9 $g(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ altında D birim diskinin görüntüsü.....	33
Şekil 3.10 $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ altında D birim diskinin görüntüsü.....	34
Şekil 3.11 $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	34
Şekil 3.12 Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü.....	35
Şekil 3.13 Γ_z yayının f fonksiyonu altındaki görüntüsü olan Γ_w yayı	36
Şekil 3.14 $f(z) = \frac{z-z^2/2}{(1-z)^2}$ altında D birim diskinin görüntüsü.....	45
Şekil 3.15 $\Gamma(x)$ fonksiyonunun grafiği	50
Şekil 3.16 $J_{-1/2}$, J_0 ve $J_{1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri	52

Şekil 3.17 $I_{-1/2}$, I_o ve $I_{1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri	53
Şekil 4.1 $J_{1, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü	63
Şekil 4.2 $J_{10, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü	64
Şekil 4.3 $J_{1, -\frac{1}{2}}^{\frac{14}{10}}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü	67
Şekil 4.4 $J_{1,1}^3(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü	69
Şekil 4.5 $J_{2, \frac{1}{3}}^1(z)$ fonksiyonu altında $D_{1/2}$ diskinin görüntüsü	70
Şekil 4.6 $J_{2,1}^1(z)$ fonksiyonu altında $D_{1/2}$ diskinin görüntüsü	71

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
D	Birim disk
$B_\varepsilon(z_0)$	Merkezi z_0 yarıçapı ε olan açık disk
$\overline{B_\varepsilon(z_0)}$	Merkezi z_0 yarıçapı ε olan kapalı disk
$\partial B_\varepsilon(z_0)$	Merkezi z_0 yarıçapı ε olan çember
$B_\varepsilon^*(z_0)$	z_0 noktasının delinmiş komşuluğu
$f'(z_0)$	f 'nin z_0 'daki türevi
A	Normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı
S	Normalmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfı
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
P	Carathéodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlar sınıfı
Γ_z	Eğri, yay
S^*	D birim diskinde ünivalent olan ve D 'yi orijine göre yıldızıl bir bölgeye resmeden tüm normalize edilmiş fonksiyonların kümesi
C	D birim diskinde ünivalent olan ve D 'yi konveks bir bölgeye resmeden tüm normalize edilmiş fonksiyonların kümesi
K	Konvekse yakın tüm normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı
UCV	Düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı
S_p	Parabolik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$k-UCV$	k – düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı
$k-ST$	k – yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$*$	Hadamard çarpımı

$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$J_p(z)$	Mertebesi p olan birinci tür Bessel fonksiyonu
$I_p(z)$	Modifiye edilmiş mertebesi p olan birinci tür Bessel fonksiyonu
$\Phi_{\lambda,\mu}(z)$	Wright fonksiyonu
$\mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)$	Genelleştirilmiş Wright Bessel (-Lommel) fonksiyonu
$J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)$	Normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright Bessel (-Lommel) fonksiyonu
$[[\mu]]$	μ 'nün tam değeri
$\Lambda[f]$	f fonksiyonunun Alexander dönüşümü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONUNUN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

AKIN, Gülfem

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Şubat 2024, 102 sayfa

Bu tez çalışmasında, ilk olarak genelleştirilmiş Wright- Bessel fonksiyonu ele alınmış, bu fonksiyonun geometrik özellikleri incelenerek D birim diskinde ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik ve konvekse yakınlık için gerekli ve yeterli koşullar bulunmuştur. Daha sonra yine genelleştirilmiş Wright- Bessel fonksiyonu ele alınarak bu fonksiyonun kısmi toplamaları hesaplanmış ve bu kısmi toplamalar için üst sınırlar belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ünivalent, Yıldızlı, Konveks, Konvekse Yakın, Wright Fonksiyonu, Genelleştirilmiş Wright- Bessel Fonksiyonu

ABSTRACT

GEOMETRIC PROPERTIES OF THE GENERALIZED WRIGHT-BESSEL FUNCTION

AKIN, Gülfem

Doctorate, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

February 2024, 102 pages

In this thesis, firstly, the generalized Wright-Bessel function is considered and its geometric properties are investigated. Necessary and sufficient conditions for univalence, starlikeness, convexity and close-to-convexity of this function in the unit disc D are found. Then, the generalized Wright-Bessel function is considered again, the partial sums of this function are calculated and upper bounds for these partial sums are determined.

Keywords: Univalent, Starlike, Convex, Close-to-Convex, Wright Function, Generalized Wright-Bessel Function

1. GİRİŞ

Günümüzde bildiğimiz şekliyle kompleks analiz, matematik, mühendislik, fizik ve fen bilimlerinde muazzam bir etkiye sahip olan 500 yılı aşkın matematiksel gelişimin doruk noktasıdır. Artık "kompleks" olarak bildiğimiz sayılar, ilk kez on altıncı yüzyılda Nicocolo Fontana Tartaglia ve Gerolamo Cardano'nun eserlerinde, kübik ve kuadratik denklemlerin çözümü için negatif değerlerin kareköklerinin kullanılmasıyla ortaya çıkmıştır. Gerçel sayı kavramını da icat eden Descartes, negatif sayıların bu tür kareköklerine, sadece hayal edilebilir oldukları için "hayali (imajiner)" adını vermiştir. İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783), i sembolünü $i = \sqrt{-1}$ veya eşdeğer olarak, $i^2 = -1$ şeklinde tanımlamıştır. Euler, kompleks sayıları kapsamlı bir şekilde kullanmış ve bunları ders kitaplarında da tanıtmıştır. Şimdi yaygın olarak kullandığımız kompleks sayılar terimi, büyük Alman matematikçi Karl Friedrich Gauss (1777-1855) tarafından ilk kez kullanılmıştır. Kompleks sayıların geometrize edilmesine on sekizinci yüzyılın sonlarında Jean-Robert Argand, Caspar Wessel ve Gauss çalışmalarında yer vermiştir. Klasik kompleks analizin gelişiminin büyük bir kısmı on dokuzuncu yüzyılda Augustin-Louis Cauchy ve Bernhard Riemann'ın ardından daha çok geometrik çalışmalarıyla Felix Klein, Henri Poincare ve daha birçok matematikçinin katkılarıyla devam etmiştir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin kökenleri (Riemann dönüşüm teoremi dışında) Koebe'nin 1907 tarihli makalesine, 1914'te Gronwall'ın alan teoreminin kanıtına, Bieberbach'ın 1916'da normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun ikinci katsayısının üst sınırı ile ilgili teoremi ve n . katsayısının üst sınırı ile ilgili tahminine kadar dayanır. Ludwig Bieberbach, S sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için $|a_n| \leq n$ tahmininde bulunmuş ve bu tahminin $n = 2$ için gerçekleştiğini kanıtlamıştır. Bu tahmin Louis de Branges tarafından ispatlanıncaya kadar yıllarca birçok matematikçi tarafından üzerinde uğraşılan bir araştırma konusu olmuştur. Louis de Branges'ın ünlü Bieberbach tahminini çözmesi bu alana bambaşka bir boyut kazandırmış ve üzerinde çalışılacak yeni problemler ortaya çıkarmıştır. Bu alanda çalışmalarını sürdüren matematikçiler, bu problemi S sınıfının altsınıflarına taşıyarak çalışmalarına devam etmişlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, kompleks fonksiyonlar alanındaki en güzel konulardan biridir. Birim disk üzerinde normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların S sınıfı için, Louis de Branges tarafından 1985 yılında çözülen Bieberbach tahmininden, tamamen geometrik yapıya sahip olanlara kadar ekstremal problemler ile ilgili birçok dikkate değer teorem vardır. Bu problemleri incelemek için çok çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynayan özel fonksiyonlar teorisi, esas olarak Carl Friedrich Gauss, Felix Klein, Carl Gustav Jacobi ve diğer birçok bilim insanının katkıları sayesinde on dokuzuncu yüzyılda geliştirilmiştir. Olağanüstü özellikleri nedeniyle, özel fonksiyonlar yüzyıllardır kullanılmıştır. Örneğin, astronomide çok sayıda uygulamaları olduğu için, trigonometrik fonksiyonlar bin yılı aşkın bir süredir incelenmektedir.

Bu çalışmada bir özel fonksiyon olan genelleştirilmiş Wright- Bessel fonksiyonu ele alınmış, bu fonksiyonun geometrik özellikleri incelenerek D birim diskinde ünivalent, yıldızlı, konveks ve konvekse yakın olması için gerekli ve yeterli koşullar bulunmuştur. Daha sonra yine genelleştirilmiş Wright- Bessel fonksiyonu ele alınarak bu fonksiyonun kısmi toplamları hesaplanmış ve bu kısmi toplamalar için üst sınırlar belirlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Kompleks analiz ile ilgili bazı temel kavramlardan bu başlık altında söz edilmiştir.

2.1 Kompleks Analizin Temel Tanım ve Teoremleri

Kompleks analizin temel tanım ve teoremleri hakkında bu bölümde yapılacak bilgilendirme, sonraki bölümler için faydalı ve gerekli olacaktır.

Tanım 2.1. $\mathbb{C}$ düzleminde bir z_0 noktası alınsın.

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesi “ z_0 noktasının ε komşuluğu” veya “ z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk” olarak isimlendirilir.

Ayrıca

$$\overline{B_\varepsilon(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye “ z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk”,

$$\partial B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

olarak tanımlanan kümeye “ z_0 merkezli yarıçapı ε olan çember” ve

$$B_\varepsilon^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$$

ile verilen kümeye de “ z_0 noktasının delinmiş komşuluğu” denir.

Tanım 2.2. $\mathbb{C}$ düzleminde bir E kümesi verilsin. E ’deki bir z_0 noktasının en az bir komşuluğu E kümesi tarafından kapsanıyorsa z_0 noktasına E kümesinin bir “iç noktası” adı verilir. E kümesindeki bütün iç noktaların kümesi E° veya $\text{iç}E$ sembolü ile gösterilir. $E^\circ = E$ ise yani her $z_0 \in E$ noktası için z_0 , E ’nin bir iç noktası oluyorsa E ’ye $\mathbb{C}$ de “açık küme” adı verilir.

Örneğin, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ şeklinde verilen kümenin her noktası bir iç nokta, yani $E^\circ = E$ 'dir. Gerçekten $z_0 \in E$ için $\varepsilon = 2 - |z_0|$ alınırsa $B_\varepsilon(z_0) \subset E$ olur. O halde E kümesi açıktır. Diğer taraftan, $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 3\}$ kümesini göz önüne aldığımızda $|z| = 3$ çemberi üzerinde alacağımız herhangi bir z noktası B 'nin iç noktası değildir. O halde B kümesi açık değildir. Bununla birlikte, $i\mathring{B} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ dir.

Tanım 2.3. E , $\mathbb{C}$ 'de herhangi bir küme olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ için her $B_\varepsilon(z_0)$ komşuluğunda $z \neq z_0$ olacak şekilde bir $z \in E$ noktası bulunabiliyorsa z_0 'a, E 'nin bir “yığılma noktası” adı verilir. E 'nin tüm yığılma noktalarının kümesi $\tilde{E}$ sembolü ile gösterilir. $\bar{E} = E \cup \tilde{E}$ kümesine E 'nin “kapanışı” denir. Eğer $\tilde{E} \subset E$ ise yani $\bar{E} = E$ oluyorsa E 'ye, $\mathbb{C}$ 'de “kapalı küme” adı verilir.

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi yığılma noktası kümeye ait olmak zorunda değildir. Ayrıca, kümeye ait her noktanın da yığılma noktası olması gerekmez. Örneğin, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kümesini ele alalım. $\tilde{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 'dir. Dikkat edilirse $|z| = 1$ çemberi üzerindeki noktalar E kümesine ait olmamasına rağmen her biri bir yığılma noktasıdır. $\bar{E} = E \cup \tilde{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ olur. Diğer yandan, $\tilde{E}$, E 'nin alt kümesi olmadığından E kapalı değildir.

Tanım 2.4. Bir $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin bağlantılı olmaması aşağıdaki şartları sağlayan U_1 ve U_2 açık kümelerinin var olması demektir:

- i) $E \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- ii) $E \cap U_1 \neq \emptyset$ ve $E \cap U_2 \neq \emptyset$
- iii) $E \subset U_1 \cup U_2$.

Bir başka ifadeyle E kümesi ayrık iki açık kümenin birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa “ E bağlantısızdır” denir. Yani $E = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ şartını

sağlayan açık U_1 ve U_2 kümeleri bulunabiliyorsa E bağlantısızdır. Eğer bu şekilde iki küme bulunamıyorsa, “ E kümesi bağlantılıdır” denir.

$E \subset \mathbb{C}$ ’nin bağlantılı olması için, E ’nin hem açık hem de kapalı alt kümelerinin sadece $\emptyset$ ve E olması gerekli ve yeterlidir.

Bir E kümesindeki herhangi iki nokta, yine bu E kümesinde kalan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa bu kümeye “*eğrisel (yol) bağlantılı küme*” denir.

Yol bağlantılı olan bir E kümesi bağlantılıdır. Ancak bağlantılı bir kümenin yol bağlantılı olması gerekmez.

Örneğin, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini göz önüne alalım. Bu küme yol bağlantılı olduğundan aynı zamanda bağlantılı bir kümedir.

Tanım 2.5. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ için,

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

sürekli fonksiyonu $\mathbb{C}$ ’de bir “*eğri*” olarak adlandırılır. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ değerlerine γ eğrisinin “*başlangıç ve bitim noktaları*” adı verilir.

$\gamma(a) = \gamma(b)$ şartını sağlayan bir γ eğrisine “*kapalı eğri*” adı verilir.

γ bir eğri olmak üzere, bu eğri üzerinde yalnızca $t_1 = t_2$ olduğunda $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ “*basit*” eğridir. Tanıma göre kendini kesmeyen bir eğri basit eğridir, yani γ bire-bir sürekli bir fonksiyondur. $\gamma(a) = \gamma(b)$ koşulunu sağlayan basit bir γ eğrisi “*basit kapalı eğri (Jordan eğrisi)*” olarak adlandırılır.

γ eğrisinin γ' türevi mevcut ve bu türev sürekli bir fonksiyonsa γ , “*diferansiyellenebilir eğri*” diye adlandırılır.

$\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ diferansiyellenebilir eğrisi “düzgün eğri (regüler eğri)” diye adlandırılır.

$\mathbb{C}$ düzlemindeki eğriler, çoğu zaman

$$z(t) = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

biçiminde yazılır. Bazen bir γ eğrisi

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$$

parametrik gösterimi ile verilebilir.

Bir eğrinin yalnızca noktalar kümesi olmadığı açıktır. Eğriyi oluşturan noktaların dizilişleri de önem arz eder. Böylece eğrilerdeki yönlendirme kavramı karşımıza çıkar.

Bir

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 1$$

eğrisini ve γ ’nın $z_0 = z(0)$ ve $z_1 = z(1)$ uç noktalarını göz önüne alalım. γ eğrisi z_0 ’ dan başlanarak t ’nin artışına göre taranırsa, pozitif yönde (saat ibresinin dönüşünün tersi) dönülmüş olur. Pozitif yönlü eğri γ simgesi ile belirtilir. Eğer z_1 ’den başlanarak t ’nin azalışına karşılık gelen sırada eğri taranırsa, buna da negatif yön denir ve $-\gamma$ simgesi kullanılarak gösterilir. O halde $z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$ ile tanımlı fonksiyon γ eğrisini gösterirken, $z = z(-t)$, $-1 \leq t \leq 0$ şeklindeki fonksiyon da $-\gamma$ eğrisini gösterir.

Tanım 2.6. Bağlantılı açık kümeye “*bölge*”, sınırı n tane bağlantılı ayrık alt kümeden oluşan bölgeye “ n – *bağlantılı bölge*” adı verilir. Özel olarak basit bağlantılı (1 – *bağlantılı*) bölgenin sınırı, bir tane bağlantılı kümeden oluşur. Diğer bir deyişle, $\mathbb{C}$ düzlemindeki bir B bölgesi için, bu bölgedeki basit kapalı tüm eğrilerin içi tamamen B tarafından kapsanıyorsa, B bölgesi basit bağlantılı bölgedir. Genel olarak bölgeye bir isimlendirme yapılırken bölgenin sınırını oluşturan ve ortak noktası olmayan kapalı eğrilerin sayısı dikkate alınır.

Katlı bağlantılı bir bölge, içerisinde birden çok delik bulunan bir bağlantılı bölge olarak düşünülebilir. Bir n – bağlantılı bölgede $n - 1$ tane delik vardır.

$E \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olsun. E 'nin bağlantılı her alt kümesine “ E 'nin bir bileşeni” denir. Bir kümenin birden çok bileşeni olabilir. Örneğin,

$$E = \{z : |z| < 1\} \cup \{z : 1 < |z| < 2\}$$

kümesinin iki bileşeni vardır.

Bir $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin her bir $z_1, z_2 \in E$ noktalarını birleştiren doğru parçası E 'de kapsanıyorsa, E , “konveks (dışbükey) küme” olarak adlandırılır. Buradan $\mathbb{C}$ 'nin açık ve konveks her alt kümesinin bir bölge olduğu söylenebilir. Örneğin bir açık disk konveks kümedir. $E = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ kümesi de bir konveks bölgedir.

Tanım 2.7. f , z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonu z_0 noktasında “diferensiyellenebilir (veya türevlenebilir)” denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ şeklinde gösterilir ve bu değere f 'nin z_0 'daki türevi denir. Kısaca,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dır. Burada $z - z_0 = h$ denirse, yukarıdaki tanım

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

ifadesine eşdeğer olur. Gerçel fonksiyonlardaki limit tanımından farklı olarak, burada $h \rightarrow 0$ yapılırken, h 'ın orijinden geçen her eğri boyunca, özel olarak reel ve imajiner eksen boyunca da sıfıra yaklaştığı varsayılır ve bütün bu yaklaşımlarda limitin aynı değeri alması gerekir.

Gerçel fonksiyonlardaki türev kavramından farklı olarak, kompleks bir fonksiyon açık bir kümede birinci mertebeden türeve sahipse, her mertebeden türeve sahiptir.

Teorem 2.8. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z noktasında diferansiyellenebilirse,

$$f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$$

dir, yani u ve v fonksiyonlarının $z = (x, y)$ noktasında kısmi türevleri vardır ve bu türevler Cauchy-Riemann eşitlikleri olarak adlandırılan

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

eşitliklerini sağlarlar.

Bu teoremden görüldüğü üzere, bir fonksiyonun bir noktada diferansiyellenebilir olması için o noktada Cauchy-Riemann eşitliklerinin gerçekleşmesi gerekir. Ancak bu, diferansiyellenebilirlik için yeterli bir koşul değildir.

Tanım 2.9. Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $B_\delta(z_0)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f , z_0 'da “analitiktir” denir.

Bir E kümesinin tüm noktalarında analitik olan bir f fonksiyonu, E üzerinde analitiktir.

$\mathbb{C}$ 'nin tamamında analitik olan bir f fonksiyonuna “tam (entire) fonksiyon” denir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, bir z_0 noktasında analitik olan bir fonksiyon bu noktada (ve bu noktanın uygun bir komşuluğunda) diferansiyellenebilirdir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $f(z) = |z|^2$, $z = 0$ noktasında diferansiyellenebilir bir fonksiyondur, fakat analitiklik koşulunu sağlamaz. Çünkü f fonksiyonunun diferansiyellenebildiği, $z = 0$ noktasının hiçbir komşuluğu yoktur. Gerçekten de,

$$f(z) = x^2 + y^2 = u + iv$$

olduğundan,

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 0$$

yazılabilir. Böylece,

$$u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0$$

olup, Cauchy-Riemann eşitlikleri $(x, y) = (0, 0)$ dışında hiçbir noktada gerçekleşmez.

Bir z_0 noktasında analitik olan bir f fonksiyonunun, z_0 'ın uygun bir komşuluğundaki tüm noktalarda analitik olacağı açıktır.

f fonksiyonunun z_0 noktasında analitik olduğunu göstermek için, z_0 noktasının f fonksiyonunun diferansiyellenebildiği E kümesinin bir iç noktası olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda, f fonksiyonunun analitik olduğu küme iç noktalardan oluşmaktadır ve dolayısıyla açık bir kümedir.

f fonksiyonu, z_0 noktasında analitik değil ise, z_0 'a f 'nin “*singüler noktası*” denir.

Teorem 2.10. Kompleks düzlemde tanımlı $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şeklindeki fonksiyon göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun bir B bölgesinde analitik olması için u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerinin var ve bu bölgede sürekli olması ve

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlaması gerekli ve yeterlidir [1].

Teorem 2.11. γ , pozitif yönlü, basit kapalı bir eğri, f fonksiyonu bu eğrinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Bu eğrinin içindeki herhangi bir z_0 noktasında,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

eşitliği sağlanır [2].

Cauchy İntegral Formülü adı verilen bu teoreme göre, f 'nin γ eğrisinin içindeki noktalarda aldığı değerler, bu fonksiyonun γ eğrisi üzerindeki değerleriyle belirlenir. Bu bakımdan karmaşık analizde önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.12. f fonksiyonunu bir B bölgesinde analitik olsun. Bu durumda f 'nin bu bölgede tüm $f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ türevleri mevcuttur ve bu türev fonksiyonları da B bölgesinde analitik olur [2].

Bu teoremin vurguladığı en önemli husus aşağıdaki gibi özetlenebilir;

Bir fonksiyon analitik olduğu bir bölgede her mertebeden türevlenebilir. Ayrıca elde edilen bu türevler yine bu bölgede analitiktir. Verilen bu sonuç aşağıda ifade edilen teoremin temelini oluşturur.

Teorem 2.13. f fonksiyonu basit kapalı ve pozitif yönlü bir γ eğrisi üzerinde ve içinde analitik olsun. Ayrıca z_0 noktası γ içinde bulunsun. Bu durumda,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir [2].

Tanım 2.14. $z_0, c_n \in \mathbb{C}$ sabitler olmak üzere,

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

biçimindeki serilere “*kuvvet serisi*” denir. Genel olarak kuvvet serileri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ile gösterilir. Burada z_0 noktası kuvvet serisinin merkezidir. $z = z_0$ iken toplam c_0 'a eşit olacağından bu kuvvet serisi $z = z_0$ noktasında yakınsaktır.

Teorem 2.15. (Taylor Teoremi) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise, bu noktanın uygun komşuluğundaki z noktaları için,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

biçiminde bir açılıma sahiptir. Bu seri “*f fonksiyonunun $z = z_0$ 'ın komşuluğundaki Taylor açılımı*” olarak adlandırılır. Ayrıca bu seri bir $B_R(z_0)$ diskinde mutlak yakınsak, diskin kompakt alt kümeleri üzerinde ise düzgün yakınsaktır [2].

Kompleks analizde büyük öneme sahip olan Taylor Teoremi bize gösteriyor ki, bir analitik fonksiyon analitik olduğu noktanın bir komşuluğunda bir kuvvet serisi ile gösterilebilir.

Tanım 2.16. B , $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde bir bölge ve $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir dönüşüm olsun. γ_1 ve γ_2 eğrileri, aralarında α açısı olan ve $z_0 \in B$ noktasından geçen düzgün eğriler olsunlar. $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de, z_0 noktasının f altındaki görüntüsü olan w_0 'da α açısı yapıyorsa, f , z_0 'da bir “konform dönüşümdür” denir. Yani, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının yönünü ve büyüklüğünü koruyan bir dönüşüme “ z_0 noktasında konformdur” denir. Bir fonksiyon B 'nin her noktasında konform ise, bu fonksiyon “ B bölgesinde konformdur” adı verilir.

Kompleks düzlemde konform dönüşümlere örnek olarak, a_1, a_2, a_3, a_4 kompleks sabitleri için, genişletilmiş kompleks düzlemi ($\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) kendi üzerine konform olarak resmeden

$$f(z) = \frac{a_1 z + a_2}{a_3 z + a_4}, \quad a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$$

Möbius dönüşümü verilebilir. Ayrıca yine kompleks düzlemde $f(z) = e^z$ dönüşümü de bir konform dönüşümdür.

Aşağıdaki teoremden, analitiklik ile konform dönüşümler arasındaki önemli ilişki verilmiştir:

Teorem 2.17. z_0 'da analitik olan bir f fonksiyonu verilsin. $f'(z_0) \neq 0$ oluyorsa, f , z_0 'da bir konform dönüşümdür [3].

Bazı konform dönüşüm çeşitleri aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.18. (i) $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$ ve $b = \text{sabit}$ biçimindeki doğrusal dönüşümlere “öteleme (translation) dönüşümü” denir.

Öteleme dönüşümleri z – düzlemindeki şekilleri b vektörü yönünde $|b|$ kadar kaydırırlar. Resim orijinaline benzer.

(ii) $T(z) = e^{i\theta} z$ biçimindeki dönüşümlere “dönme (rotation)” denir.

Dönme dönüşümü z – düzlemindeki şekilleri θ açısı kadar döndürür. Eğer $\theta > 0$ ise dönme pozitif yönde, $\theta < 0$ ise dönme negatif yönde olur. Resim orijinal şekle benzer.

(iii) $T(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ biçimindeki dönüşümlere “uzama-kısalma dönüşümleri” denir. Dikkat edilirse $|\alpha| > 1$ ise uzama, $|\alpha| < 1$ ise kısalma olur.

(iv) $T(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümüne “tersinme (inversion)” denir.

Tersinme dönüşümü, bir z noktasının orijine olan uzaklığını bu uzaklığın tersine ve z ’nin argümanını da bu argümanın ters işaretlisine götürür. Çünkü,

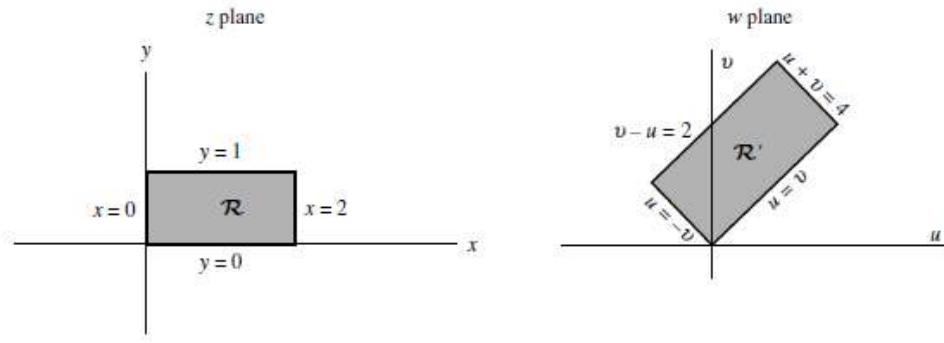
$$|T(z)| = \frac{1}{|z|} \text{ ve } \arg T(z) = -\arg z$$

dir.

Örnek 2.19. z – düzleminde $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan R bölgesini alalım.

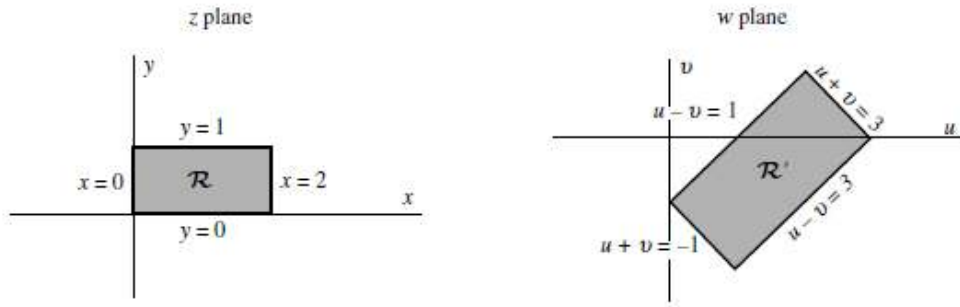
$w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z$ dönüşümü altında R ’nin w – düzlemindeki R' resim bölgesi bulunursa,

R dikdörtgeni pozitif yönde $\frac{\pi}{4}$ açısı kadar döner. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z$ dönüşümü altında R 'nin w – düzlemindeki resim bölgesi

$w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + (1-2i)$ dönüşümü altında R 'nin w – düzlemindeki R' resim bölgesi bulunursa, $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ doğruları $u + v = -1, u + v = 3, u - v = 3, u - v = 1$ doğrularına dönüşür. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2 $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + (1-2i)$ dönüşümü altında R 'nin w – düzlemindeki resim bölgesi

3. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, ünivalent fonksiyon kavramı verilmiştir. Ayrıca ünivalent fonksiyonların bazı önemli sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflarla ilgili temel kavramlardan söz edilmiştir.

3.1 Ünivalent Fonksiyonlar

Bu başlık altında kompleks analizin önemli bir çalışma alanı olan ünivalent fonksiyonlar teorisi ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $B, \mathbb{C}$ 'de bir bölge olmak üzere, $z_1 \neq z_2$ olacak şekildeki tüm $z_1, z_2 \in B$ noktalarında $f(z_1) \neq f(z_2)$ ise, $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu B 'de “*ünivalent (veya schlicht)*” fonksiyondur.

Tanım 3.1.2. $B, \mathbb{C}$ 'de bir bölge, $z_0 \in B$ olmak üzere, f, z_0 'ın en az bir komşuluğunda ünivalent oluyorsa f fonksiyonu bu noktada “*yerel ünivalent*” fonksiyondur.

f fonksiyonu, B bölgesinde analitik olsun. $f'(z_0) \neq 0$ olması için, f 'nin z_0 'da yerel ünivalent olması gerekli ve yeterlidir.

Bir bölgede ünivalent olan bir fonksiyon bu bölgenin tüm noktalarında yerel ünivalenttir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Mesela; $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2, 0 < \arg z < 2\pi\}$ kümesinde tanımlı $f(z) = z^2$ fonksiyonu B bölgesindeki tüm noktalarda yerel ünivalenttir ancak bu fonksiyon B 'de ünivalent değildir. f fonksiyonu B 'de analitik olduğundan bölgedeki her z_0 noktası için $f'(z_0) \neq 0$ dır. Böylece fonksiyonun bu bölgedeki tüm noktalarda yerel ünivalent olduğu açıktır. Ancak $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \in B$ noktaları için,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = i$$

olup, iki farklı noktanın görüntüsü aynı olduğundan, f , B 'de ünivalent değildir.

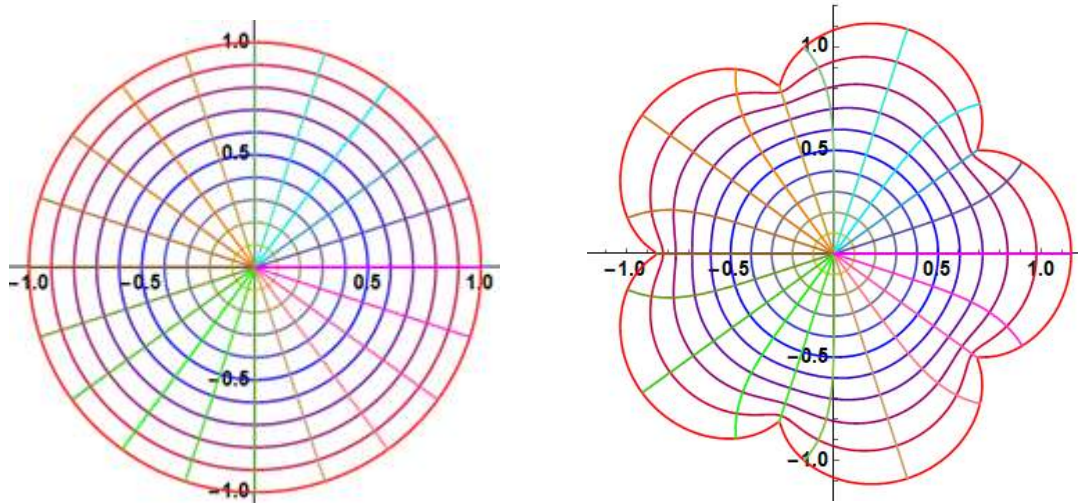
Bir $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, B üzerinde hem analitik hem de ünivalent ise, B üzerinde konformdur. Diğer bir deyişle, f , B üzerinde konformal bir dönüşümdür.

B bölgesinin seçiminin fonksiyonun ünivalentliği için çok önemli olduğunu hatırlatmak önemlidir. Örneğin,

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < z < 1, \text{Im}\{z\} > 0, \text{Re}\{z\} > 0\} \\ = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < z < 1, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$$

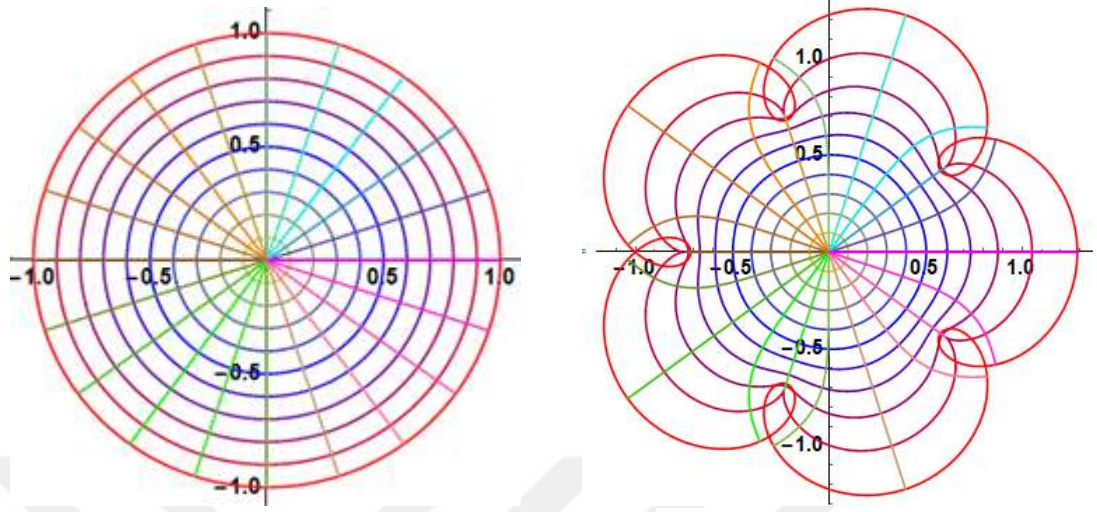
bölgesinde tanımlı $f(z) = z^2$ fonksiyonu B 'yi konformal olarak $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, \text{Im}\{z\} > 0\}$ bölgesi üzerine dönüştürür. Yani $f : B \rightarrow B_1$ fonksiyonu B üzerinde analitik ve ünivalenttir. Bununla birlikte birim diskte tanımlı $h(z) = z^2$ fonksiyonu için, $h\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ olduğundan, h fonksiyonu B 'yi konformal olarak birim disk üzerine dönüştürmez. Ayrıca $h'(0) = 0$ olur ki bu da 0 'ın hiçbir komşuluğunda h 'nin ünivalent olmadığı anlamına gelir.

$\varphi(z) = \frac{z^6}{7} + z$, D 'de ünivalent bir fonksiyondur. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1 $\varphi(z) = \frac{z^6}{7} + z$ 'nin grafiği

$\varphi(z) = \frac{2z^6}{7} + z$ ise D 'de ünivalent olmayan bir fonksiyon örneğidir. (Şekil 3.2)



Şekil 3.2 $\varphi(z) = \frac{2z^6}{7} + z$ 'nin grafiği

Bir kompleks fonksiyon, bir bölgeyi başka bir bölge üzerine resmeder. Bu resmetme işleminde, uygulamalarda kolaylık sağlaması açısından herhangi bir kompleks fonksiyon yerine, analitik fonksiyonlar göz önüne alınırsa, resmetme işlemi konform olarak yapılır. Konform dönüşümlerin birçok alanda önemli uygulamaları vardır. Bu uygulamaların temeli; eldeki problemi verilen bölgeden daha basit bir bölgede kolaylıkla çözerek, bulunan sonucu ters dönüşümle ilk bölgeye taşımaya dayanır. Bunu yapmak için problemdeki bölgeyi istenilen basit bölgeye resmeden analitik ve bire-bir bir fonksiyon bulunmalıdır. Bu analitik fonksiyonun var olduğu Riemann dönüşüm teoremi ile ispatlanmıştır. Analitik fonksiyonlar kuramında önemli bir role sahip olan bu teorem 1851 yılında Riemann tarafından verilmiştir.

Teorem 3.1.3. (Riemann Dönüşüm Teoremi) B en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge olsun. B bölgesini $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerine bire-bir olarak resmeden bir f analitik fonksiyonu vardır. Buna ek olarak, B bölgesini D birim diski üzerine resmeden ve $z_0 \in B$ noktası için $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek konform dönüşüm vardır [3].

Bu teoreme göre, kompleks düzlemdeki keyfi bölgelerde tanımlı analitik fonksiyonlar yerine D birim diskinde tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılabilir.

h fonksiyonu D birim diskinde analitik ise,

$$h(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad (3.1)$$

şeklinde bir Taylor seri gösterimine sahip ve D 'de yakınsak olduğu bilinmektedir. Bu açılımındaki d_n katsayıları ve h 'nin geometrik özellikleri hakkında iki soru akla gelmektedir. Biri d_n katsayılarının h 'nin geometrik özelliklerini ne şekilde etkilediği, diğeri ise h 'nin özellikleri ile d_n katsayılarının bağlantılı olup olmadığıdır. Burada konumuz ünivalent fonksiyonlar olduğundan, özel olarak bu soruları aşağıdaki gibi sorabiliriz:

1. h fonksiyonunun ünivalentliği Taylor seri gösterimindeki d_n katsayılarını nasıl etkiler?
2. Taylor seri gösterimindeki d_n katsayıları verildiğinde, h fonksiyonun ünivalentliği hakkında fikir yürütebilir miyiz?

Eğer h fonksiyonu D 'de ünivalent ise, $h(z) + c$ fonksiyonu da D de ünivalenttir çünkü bir sabitin eklenmesi sadece görüntü bölgesini kaydırır. Normalizasyonun ilk adımı olarak Taylor seri açılımındaki d_0 sabit terimi çıkarılmış olan $h(z) - d_0$ şeklindeki fonksiyonu inceleyelim. Eğer $h'(z_0) = 0$ ise h , z_0 'ın hiçbir komşuluğunda ünivalent olamaz. h 'nin D 'de ünivalent olabilmesi için $h'(0) = 0$ şartı sağlanmalıdır. O halde $d_1 \neq 0$ dır. Böylece $h(z) - d_0$ fonksiyonunu $1/d_1$ ile çarparak $f(z) = (h(z) - d_0)/d_1$ şeklindeki fonksiyonu elde edebiliriz. h fonksiyonunun birim diskte ünivalent olması durumunda $f(z) = (h(z) - d_0)/d_1$ fonksiyonu da birim diskte ünivalent olacaktır çünkü bir fonksiyonu $1/d_1$ ile çarpmak resim bölgesini sadece döndürüp uzatır (veya kısaltır). Tersine, benzer şekilde f , D 'de ünivalent ise h de ünivalent olacaktır. Elde edilen bu son fonksiyonda, $\frac{d_n}{d_1} = a_n$ dersek,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.2)$$

şeklindeki normalize edilmiş forma ulaşırız. (3.2) ile gösterilen fonksiyon “*normalize edilmiştir*”. Normalize edilmiş fonksiyonların oluşturduğu sınıf A ile gösterilir.

(3.2) formunda verilen bir f fonksiyonunun ünivalent olması durumunda bu fonksiyona “*normalize edilmiş ünivalent fonksiyon*” denir. D ’de ünivalent ve analitik olan normalize edilmiş fonksiyonların sınıfını göstermek için S sembolü kullanılır.

(3.1) ile verilen h fonksiyonu D ’de ünivalent ise bu durumda $|d_n|$ keyfi olarak büyük olabilir ($h(z)$ ’yi uygun bir M ile çarparak görülebilir). Ancak, normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların S sınıfını ele alırsak, her $n > 2$ için öyle bir A_n sınırı olduğunu varsayabiliriz ki S ’deki her $f(z)$ için $|a_n| < A_n$ olur. A_n sınırı ile ilgili bir tahminde bulunabilmek için “büyük” katsayılarla sahip ünivalent bir fonksiyon oluşturmaya devam ediyoruz. Bu amaçla,

$$f_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad f_2(z) = f_1^2(z), \quad f(z) = \frac{1}{4}(f_2(z)-1)$$

fonksiyonlar dizisini dikkate alalım. İlk olarak $f_1(z)$ fonksiyonu D ’yi $\text{Re } f_1 > 0$ yarı düzlemine taşır. Bunun ardından $f_2(z) = f_1^2(z)$ dönüşümü bu bölgeyi, reel eksenin negatif kısmı çıkarılmış olan kompleks düzlemin tamamı üzerine resmeder. Daha sonraki adımda yapılan $f(z) = \frac{1}{4}(f_2(z)-1)$ dönüşümü ise sadece normalize işlemidir. Kısacası $f(z)$ ’yi hesaplamak için,

$$f(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] = \frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{4(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

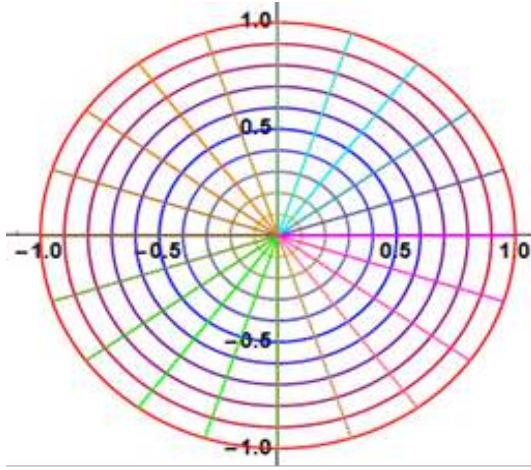
yazabiliriz. Çok önemli olan bu fonksiyon özel bir isme sahiptir: “*Koebe fonksiyonu*”. Koebe fonksiyonu “ $k(z)$ ” ile gösterilir. $k(z)$ ’nin inşa edilişindeki yukarıda açıklanan dönüşümler Şekil 3.3’te verilmiştir.

Koebe fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça önemlidir:

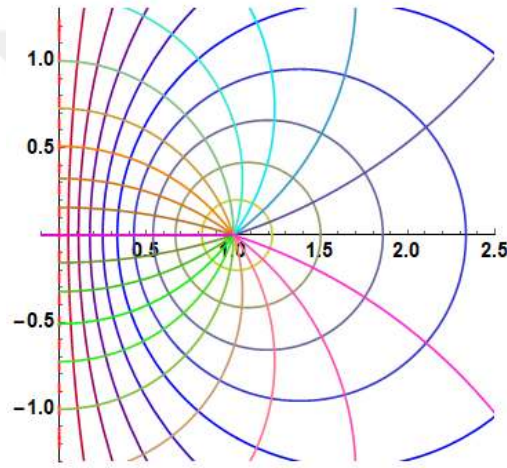
Teorem 3.1.4. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ şeklinde tanımlı

Koebe fonksiyonu S sınıfındadır. Bu fonksiyon D 'yi $w = -\infty$ dan $w = -\frac{1}{4}$ 'e kadar negatif reel eksen boyunca yarık olan kompleks düzlem ile birebir eşler [1].

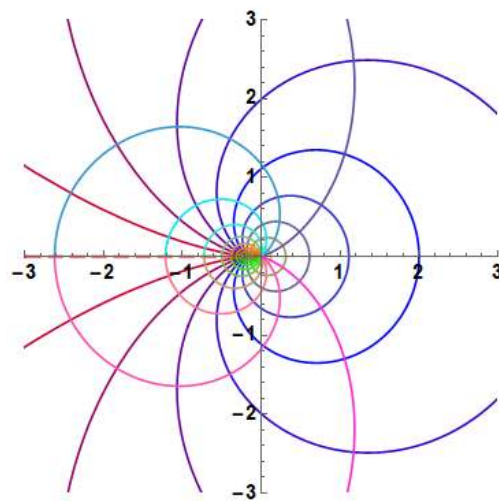




$$u = \frac{1+z}{1-z}$$



$$w = \frac{z}{(1-z)^2}$$



Şekil 3.3 Koebe fonksiyonunun elde edilişi

Koebe fonksiyonu S sınıfına ait en önemli fonksiyondur. S sınıfına ait olan diğer bazı temel fonksiyon örneklerine aşağıda yer verilmiştir:

(i) $w = z$ birim dönüşümü, D birim diskini kendisi üzerine resmeder.

(ii) $w = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ fonksiyonu, D birim diskini konformal olarak

$\operatorname{Re}\{w\} > -1/2$ yarı-düzlemine resmeden doğrusal bir kesirli dönüşümdür.

Normalizasyon koşullarını sağladığı için S 'ye aittir. Bu fonksiyon S 'nin konveks görüntüye sahip fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı için birçok problemde ekstremal bir rol oynamaktadır.

(iii) $w = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu, D birim diskini $\frac{1}{2} \leq x < \infty$ ve $-\infty < x \leq -\frac{1}{2}$ yarı doğruları çıkarılmış kompleks düzleme resmeder.

(iv) $w = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü, D birim diskini $\{-\pi/4 < \operatorname{Im} w < \pi/4\}$ şeridine resmeder.

(v) $w = z - \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} [1 - (1-z)^2]$ dönüşümü, D birim diskini bir kardioidin içi üzerine resmeder.

(vi) Koebe fonksiyonunun rotasyonu, yani $k_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$, $z \in D$, her $\theta \in \mathbb{R}$ için

S sınıfında olan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon altında D birim diskinin görüntüsü, ∞ 'dan $-e^{-i\theta}/4$ 'e radyal bir yarık dışında tüm kompleks düzlemdir.

(vii) Koebe fonksiyonunun karekök dönüşümü olan $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu, D

birim diskini biri $i/2$ noktasından ∞ 'a, öteki $-i/2$ noktasından $-\infty$ 'a uzayan yarıkların tümleyeni üzerine resmeden bir fonksiyondur.

(viii) $f(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right]$, $z \in D$, $\alpha \in (0, 2]$ fonksiyonu genelleştirilmiş Koebe

fonksiyonu olarak adlandırılır. Genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu S sınıfındadır.

(ix) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2e^{-i\alpha} \cos \alpha}}$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ fonksiyonu S sınıfına aittir ve D birim diskini logaritmik bir α – spiral yayın tümleyeni üzerine resmeder.

Diğer taraftan $f(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$, $z \in D$ için, $f'(-1/2) = 0$ olduğundan bu fonksiyon birim diskin tamamında ünivalent değildir. Ancak $D_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$ diski üzerinde ünivalenttir ve bu disk, f 'nin üzerinde ünivalent olduğu orijin merkezli en büyük diskidir.

S sınıfındaki iki fonksiyonun toplamı S sınıfında değildir. Dolayısıyla, S bir vektör uzayı değildir. Örneğin, $f_1(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$ fonksiyonları için $f_1, f_2 \in S$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$\frac{1}{2} \left(f_1'(z) + f_2'(z) \right) = \frac{1 - (1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

olup,

$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

noktası için

$$\frac{1}{2} \left(f_1'(z) + f_2'(z) \right) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2} (f_1 + f_2) \notin S$$

olarak elde edilir.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun S 'de olması durumunda bu fonksiyondan elde edilen ve aşağıda verilen fonksiyonlar yine S sınıfına aittir [3]:

$$(i) \quad e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{Dönme})$$

$$(ii) \overline{f(\bar{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{a}_n z^n \quad (\text{Eşlenik alma})$$

$$(iii) \frac{1}{p} f(pz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n p^{n-1} z^n, \quad 0 < p \leq 1 \quad (\text{Genişleme})$$

$$(iv) [f(z^k)]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2} (2ka_3 - (k-1)a_2^2) z^{2k+1} + \dots, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{Kök})$$

$$(v) f(z) \neq w \text{ iken } g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)} = z + (a_2 + 1/w)z^2 + \dots \quad (\text{İhmal edilmiş değer})$$

$$(vi) g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z \in D) \quad (\text{Disk otomorfizmi / Koebe dönüşümü})$$

S sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için sınır belirlemeye çalışmak uzun yıllar boyunca matematikçilerin uğraştığı problemlerdendir. Bieberbach 1916 yılında yaptığı çalışmasında a_2 katsayısı için kesin sınıra ulaşmıştır.

Teorem 3.1.5. Her $f \in S$ fonksiyonunun ikinci katsayısı için $|a_2| \leq 2$ kesin eşitsizliği vardır. f 'nin,

$$f(z) = e^{-i\alpha} k(e^{i\alpha} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}$$

şeklinde tanımlı Koebe fonksiyonuna ait bir dönme olması, eşitlik hali için gerekli ve yeterlidir [4].

Teoremin şartları altında, eşitliği sağlayan bir fonksiyonun varlığından hareketle, üst sınırı azaltmanın ya da alt sınırı arttırmanın imkansız olduğu eşitsizliklere “*kesin eşitsizlik*” adı verilir. Eşitliği sağlayan ve “*ekstremal fonksiyon*” olarak adlandırılan fonksiyon belirlenerek bir eşitsizliğin kesin olduğu gösterilir. Bieberbach teoremindeki “ $|a_2| \leq 2$ ” eşitsizliği, S sınıfındaki Koebe fonksiyonunun a_2 katsayısı 2 olduğu için kesindir. Bieberbach teoremi için ekstremal fonksiyon Koebe fonksiyonudur.

Koebe tarafından elde edilen örtme teoremi, Bieberbach Teoreminin en önemli sonucudur. S sınıfındaki her f fonksiyonu için $f(0) = 0$ olduğundan, merkezi orijin olan en az bir disk f 'nin resim bölgesi tarafından kapsanır. 1907 yılında Koebe, φ mutlak sabiti için, ortak bir $|w| < \varphi$ diskinin, tüm $f \in S$ fonksiyonlarının resimleri tarafından kapsandığını ispatlamıştır [5]. Koebe fonksiyonu, $\varphi \leq 1/4$ olmasını gerektirir. φ sabitinin $1/4$ alınabileceğini söyleyen Koebe Kestirimi, Bieberbach tarafından daha sonra ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.6. (Koebe 1/4 Teoremi) Kompleks düzlemdeki $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$ diski, her $f \in S$ fonksiyonunun görüntü kümesi tarafından kapsanır. Koebe fonksiyonunun dönmeleri için bu sonuç kesindir [3].

Her $f \in S$ fonksiyonunun görüntü kümesinde kapsanan orijin merkezli en büyük diskin, $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$ diski olduğunu söylemesi bakımından bu teorem oldukça önemlidir.

Bu teoremdeki ünivalentlik koşulu kaldırılamaz. Örneğin,

$$g_k(z) = \frac{1}{k}(e^{kz} - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

fonksiyonları analitiktir ayrıca $g_k(0) = 0$ ve $g_k'(0) = 1$ dir. Bu durumda g_k fonksiyonlarının, orijinde yerel ünivalent olduğu söylenir. Fakat bu fonksiyonlar için $-1/k$ değeri çıkarılır ki bu değer 0 noktasına keyfi derecede yakın seçilebilir.

Teorem 3.1.6'nın ispatlanmış olması, S sınıfındaki fonksiyonlarla ilgili başka teoremlerin ispatlanmasına olanak sağlamıştır. Bükülme Teoremi ve Büyüme Teoremi en önemli teoremler arasında yer alır.

Teorem 3.1.7. (Bükülme Teoremi) Eğer $g(z)$, S sınıfındaysa, D 'deki her $z = \rho e^{i\theta}$ noktası için,

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |g'(z)| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}$$

olur. Bu eşitsizlik kesindir. Ekstreml fonksiyon olarak Koebe fonksiyonunu almak yeterlidir [1].

Teorem 3.1.8. (Büyüme Teoremi) Eğer $g(z)$, S 'de ise, D birim diskindeki herhangi bir z için,

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |g(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \quad \rho = |z|$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Aşağıdaki teoremde verilen eşitsizlik kullanım açısından çoğu zaman daha pratiktir. Bu eşitsizlik bükülme ve büyüme teoremlerinden elde edilmiştir.

Teorem 3.1.9. Eğer $g(z)$, S sınıfındaysa, D 'deki herhangi bir z için,

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} \leq \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı da kesindir. Eşitlik hali $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

şeklindeki Koebe fonksiyonu için gerçekleşir [1].

Teorem 3.1.10. (Branges Teoremi veya Bieberbach Tahmini) S sınıfına ait olan her f fonksiyonu $|a_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$) eşitsizliğini sağlar. Ekstreml fonksiyon olarak Koebe fonksiyonunu veya bir dönmesini almak yeterlidir [4], [6].

Bu tahmin 1916 yılında Bieberbach tarafından yapılmıştır. 1985 yılına kadar a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 katsayıları için yapılabilen ispat, tüm a_n ler için 1985'te Louis De Branges tarafından yapılmıştır. $|a_n| = n$ eşitliği,

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

fonksiyonu için sağlanır. 70 yıl kadar pek çok matematikçiyi uğraştıran bu problemin çözülmesi, bu alana bambaşka bir boyut kazandırmış ve üzerinde çalışılacak yeni problemler ortaya çıkarmıştır.

Teorem 3.1.11. $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq 1$$

ise, $f(z)$, D birim diski üzerinde bire-birdir.

Teorem 3.1.12. (Alan Teoremi) $f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ fonksiyonu, $|z|=1$ çemberi

dışında, ∞ hariç analitik ve bire-bir ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < 1$$

dir.

Aşağıda verilen pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı, kendisi S sınıfında olmamakla beraber, ünivalent fonksiyonlar ile ilgili yapılan çalışmalarda ortaya çıkan bazı problemlerin çözümüne büyük katkı sağlar.

Tanım 3.1.13. $z \in D$ olsun.

$$f(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_n z^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$$

formunda, D 'de analitik ve her $z \in D$ noktasında $\operatorname{Re}\{f(z)\} > 0$ koşulunu gerçekleyen f fonksiyonlarının sınıfına “*Carathéodory sınıfı*” veya “*pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı*” adı verilir. Bu sınıfı göstermek için P sembolü kullanılır.

Yukarıda da belirttiğimiz gibi P sınıfındaki fonksiyonların S sınıfında olması gerekmez. Örnek olarak, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu göz önüne alınabilir. Bu fonksiyon n tamsayı olmak üzere, her $n \geq 0$ için P sınıfına ait olmakla birlikte, $n \geq 2$ için ünivalent olmadığından S sınıfında değildir.

$$L_0(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \dots = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

ile tanımlanan Möbius fonksiyonu P sınıfındadır. Bu fonksiyon analitik ve ünivalenttir. Ayrıca D 'yi $\operatorname{Re} w > 0$ yarı düzlemi üzerine resmeder.

1907 yılında Carathéodory tarafından ispatlanan aşağıdaki teorem P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları hakkında bilgi verir.

Teorem 3.1.14. (Carathéodory Teoremi) Eğer $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ fonksiyonu

Caratheodory sınıfındaysa, $n \geq 1$ tamsayısı için, $|p_n| \leq 2$ kesin eşitsizliği sağlanır.

$\mu_k \geq 0$ ($k=1,2,\dots,n$) ve $\rho = e^{2\pi i/n}$ iken,

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1+\rho^k z}{1-\rho^k z} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m z^m \text{ ve } \sum_{k=1}^n \mu_k = 1$$

ise, $G(z)$ fonksiyonu Caratheodory sınıfındadır ve $p_n = 2$ dir [7].

Alexander tarafından ispatlanan aşağıdaki teorem, P sınıfına ait fonksiyonlar ile ünivalent fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi göstermesi bakımından önemlidir.

Teorem 3.1.15. Eğer $f'(z) \in P$ ise bu fonksiyon D birim diskinde ünivalenttir [1].

Noshiro [8] ve Warschawski [9] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilen aşağıdaki teorem, bu teoremin bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.1.16. (Noshiro-Warschawski Teoremi) B konveks bir bölge olsun.

$\forall z \in B$ ve $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ için,

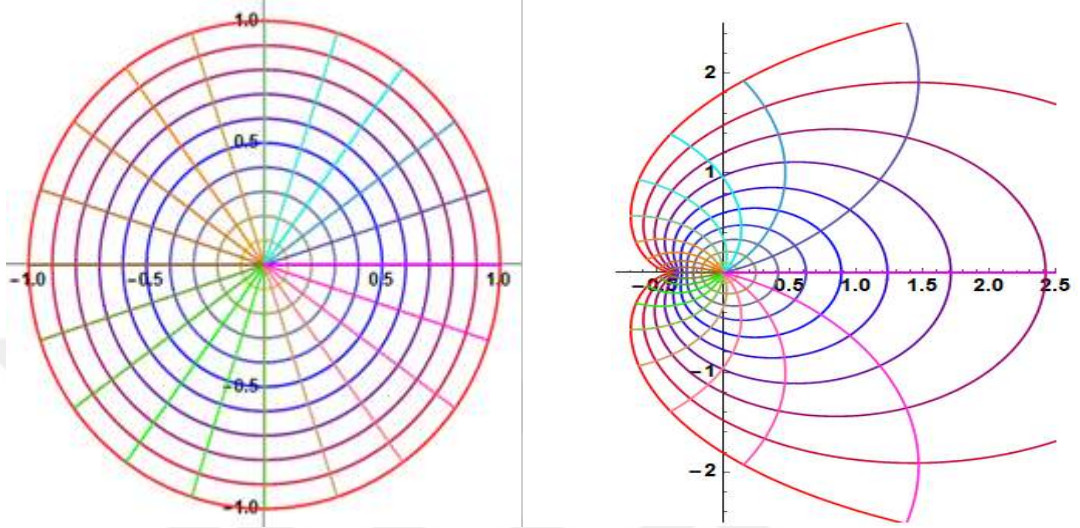
$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha} f'(z)) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonu bu bölgede ünivalenttir.

Örneğin, $f(z) = -z - 2 \log(1-z)$ fonksiyonu için,

$$f'(z) = \frac{1+z}{1-z} = L_0(z) \in P$$

dir. D bölgesi konveks olduğundan f fonksiyonu D birim diskinde ünivalent olur.



Şekil 3.4 $f(z) = -z - 2 \log(1-z)$ altında D birim diskini görüntüsü

S sınıfında olmayıp geometrik fonksiyonlar teorisi için önemli olan fonksiyonlardan biri de aşağıda tanımlanan Schwarz fonksiyonudur.

Tanım 3.1.17. D birim diskinde, $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ olan analitik fonksiyonlardan oluşan sınıfa “Schwarz fonksiyonlarının sınıfı” adı verilir. Bu sınıfı göstermek için Ω sembolü kullanılır [10].

$$\rho(z) \in P \Leftrightarrow \rho(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}, \quad w(z) \in \Omega.$$

Yukarıda ifade edilen bağıntı P sınıfına ait $\rho(z)$ fonksiyonları ile Ω sınıfına ait $w(z)$ fonksiyonları arasında ilişki kurması bakımından oldukça önemlidir.

Yardımcı Önerme 3.1.18. $f(z)$, $|z| < R$ için analitik olsun ve $f(0) = 0$ koşulunu sağlasın. Eğer $|z| < R$ içinde, $|f(z)| \leq M$ ise,

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} \text{ ve } |f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. f fonksiyonu, $f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa eşitlik hali geçerlidir [11].

Schwarz Yardımcı Önermesi adı verilen bu yardımcı önermede, $R=1$ ve $f(z)$ Schwarz fonksiyonu olarak alınırsa,

$$|f'(0)| \leq 1 \text{ ve } |f(z)| \leq |z|$$

olup, eşitlik hali $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için sağlanır.

Tanım 3.1.19. D birim diskinde analitik olan f ve g fonksiyonları verildiğinde, eğer $f = g \circ \varphi$ koşulunu sağlayan bir $\varphi \in \Omega$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, “ f , g ’ye *subordinatedir*” denir ve $f \prec g$ sembolü ile gösterilir [10].

Böylece eğer $f \prec g$ oluyorsa,

$$f(0) = g(0) \text{ ve } f(D) \subseteq g(D)$$

dir. Yardımcı Önerme 3.1.18’den şu sonuç çıkar:

Her $r \in (0,1)$ için,

$$|f'(0)| \leq |g'(0)| \text{ ve } f(D_r) \subseteq g(D_r)$$

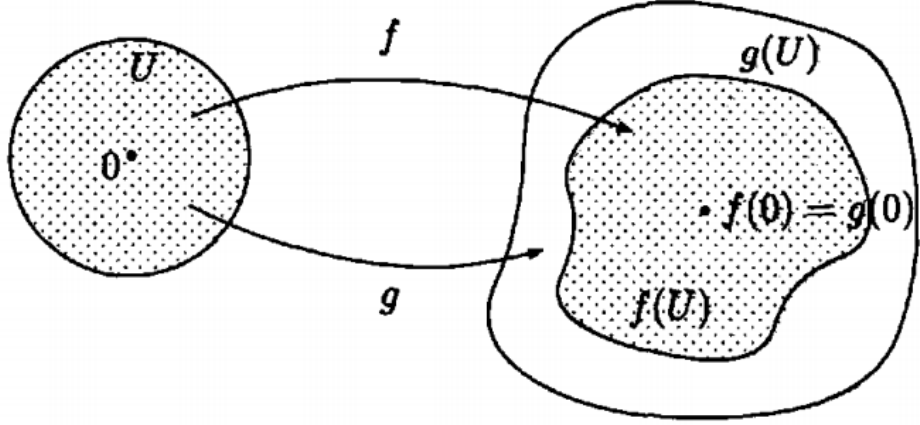
dir. Bundan başka eğer $f \prec g$ ise,

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|, \quad r \in (0,1)$$

yazılabilir.

g fonksiyonunun D birim diskinde ünivalent olması durumunda, açıkça görülüyor ki $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subseteq g(D)$ şartlarının sağlanması, $f \prec g$ olması için gerekli ve

yeterlidir. Bu koşullar altında her $r \in (0,1)$ için $f(D_r) \subseteq g(D_r)$ olduğu gerçeği “subordinasyon ilkesi” olarak bilinir.



Şekil 3.5 $f \prec g$

Örneğin, $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları göz önüne alınırsa, bu fonksiyonlar D birim diskinde analitiktir. $f \prec g$ olduğunu göstermek için, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| \leq 1$ koşullarını sağlayan ve her $z \in D$ noktasında $f(z) = (g \circ \varphi)(z)$ koşulunu sağlayan bir φ fonksiyonu bulunmalıdır.

$$f(z) = g(\varphi(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \Rightarrow \varphi(z) = \frac{z}{z + 2}$$

olup, $\varphi(z) = \frac{z}{z+2}$ fonksiyonu için $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| \leq 1$ koşullarının sağlandığı açıktır. Böylece $f \prec g$ dir. Bunun yanı sıra, g ünivalent olduğundan, $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subseteq g(D)$ 'dir.

D 'de $p(0) = 1$ olacak şekildeki p analitik fonksiyonunun D 'de $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ koşulunu sağlaması P sınıfında olması için gerekli ve yeterlidir.

Benzer şekilde, D 'de $\varphi(0) = 0$ olacak şekildeki φ analitik fonksiyonunun D 'de $\varphi(z) \prec z$ koşulunu sağlaması Ω sınıfına ait olması için gerekli ve yeterlidir.

3.2 S Sınıfının Bazı Alt Sınıfları

Başta konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları olmak üzere S sınıfının önemli alt sınıfları bu bölümde tanıtılacaktır.

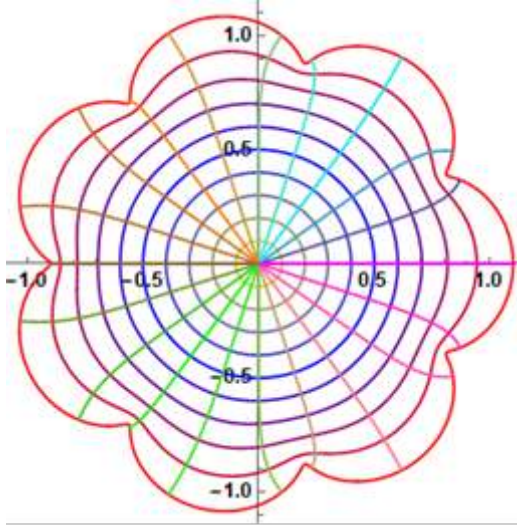
Yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının her ikisi de geometrik düşüncelerle tanımlanmıştır. Ancak bu sınıfların sahip olduğu analitik karakterizasyonlar uygulamalarda kolaylık sağladığı için çok faydalıdır. Bu alt sınıflarda, Taylor serisi katsayıları için sınırlar S sınıfına göre çok daha kolayca elde edilir. Yıldızıl fonksiyonlar, S sınıfı ile benzer özellik gösterir ve S sınıfı için sağlanan teoremleri sağlar. Ancak konveks fonksiyonlar ve bazı başka alt sınıflar için daha güçlü sonuçlar geçerlidir.

Eğer ünivalent bir fonksiyonun D birim diskini bazı iyi özelliklere sahip bir bölgeye eşlediğini biliyorsak, daha derinlemesine bir çalışma için gerekli araçlara sahip oluruz. İyi özelliklere sahip olan bir bölgenin olağanüstü bir örneği, konveks bir bölgedir. Bir noktaya göre yıldızıl bir bölge ise başka bir örnek olarak verilebilir.

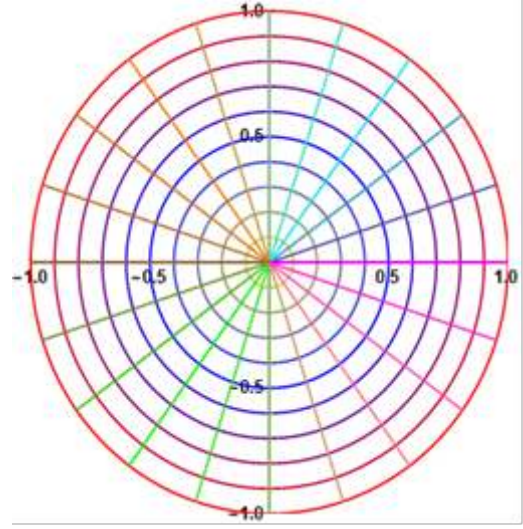
Tanım 3.2.1. $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, sabit bir $w_0 \in B$ noktası için, w_0 'ı $\forall w \in B$ noktasıyla birleştiren doğru parçasının tamamı B de kapsanıyorsa, B kümesine “ w_0 'a göre yıldızıl küme” adı verilir. Özel olarak, $w_0 = 0$ alınırsa, B 'ye “yıldızıl küme” denir.

Daha resimsel bir dille ifade etmek gerekirse, B kümesinin w_0 'a göre yıldızıl küme olması için, B 'nin her noktasının w_0 'dan görülebilir olması gerekir. (Şekil 3.5)

Tanım 3.2.2. $B, \mathbb{C}$ de bir küme olmak üzere, tüm $z, w \in B$ noktaları için, z ile w 'yı birleştiren doğru parçasının tamamı B 'de kapsanıyorsa, B 'ye “konveks küme” adı verilir. Diğer bir deyişle, B kümesinin tüm noktalarına göre yıldızıl olması, konveks olması için gerekli ve yeterlidir. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6 Yıldızlı Küme



Şekil 3.7 Konveks Küme

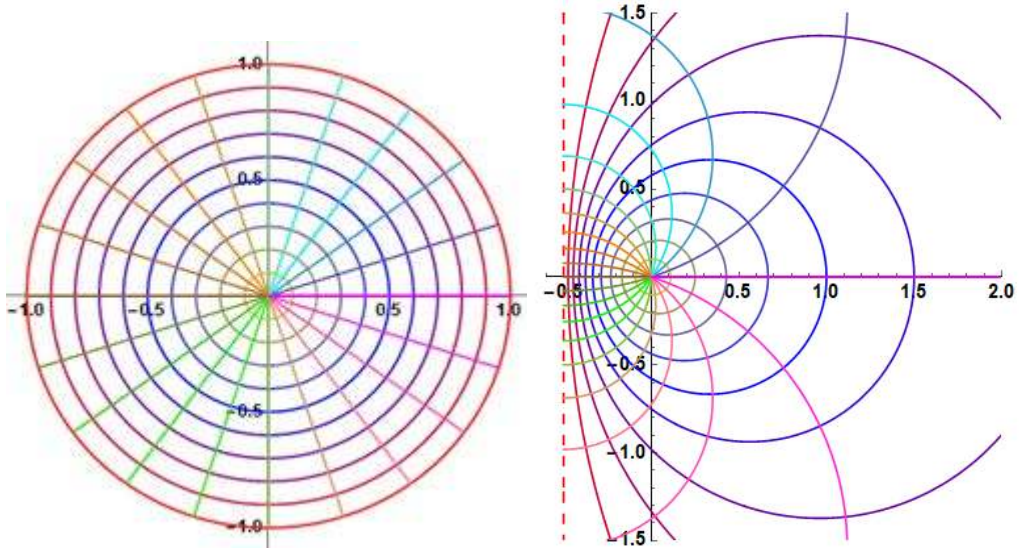
Kompleks düzlemdeki tüm yarı düzlemler ve dairesel diskler birer konveks kümedir. İki konveks kümenin arakesiti de bir konveks kümedir.

Tanım 3.2.3 D 'yi konveks bir bölgeye resmeden bir f fonksiyonuna “konveks fonksiyon” adı verilir.

Tanım 3.2.4 D 'yi w_0 'a göre yıldızlı bir bölgeye resmeden bir f fonksiyonuna “ w_0 noktasına göre yıldızlı fonksiyon” denir. Herhangi bir w_0 noktası yerine, $w_0 = 0$ noktası seçilirse bu durumda f fonksiyonu “yıldızlı fonksiyon” olarak adlandırılır.

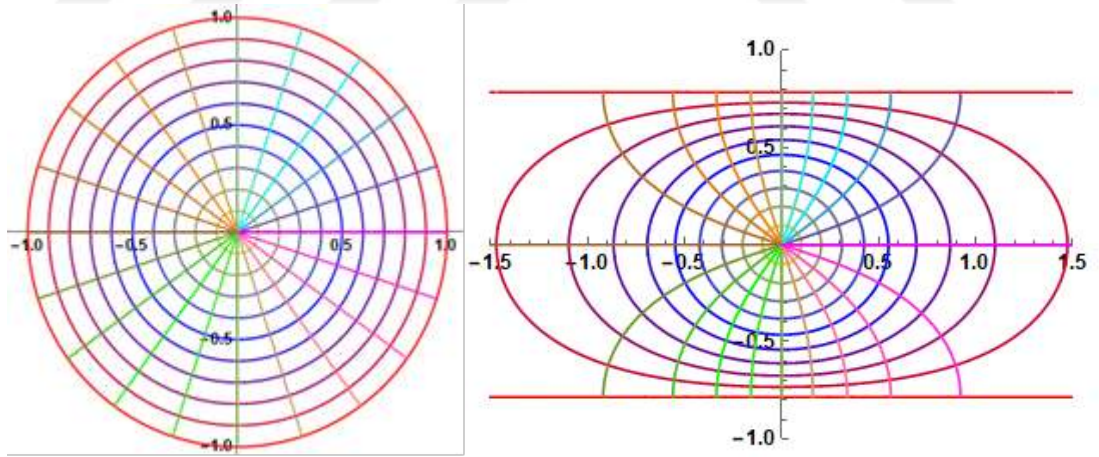
Bazı konveks ve yıldızlı fonksiyon örneklerine aşağıda yer verilmiştir:

(i) $f(z) = \frac{z}{1-z}$ konveks bir fonksiyondur. Bu fonksiyon D birim diskini $\text{Re}\{w\} > -1/2$ bölgesi üzerine konformal olarak resmeder.



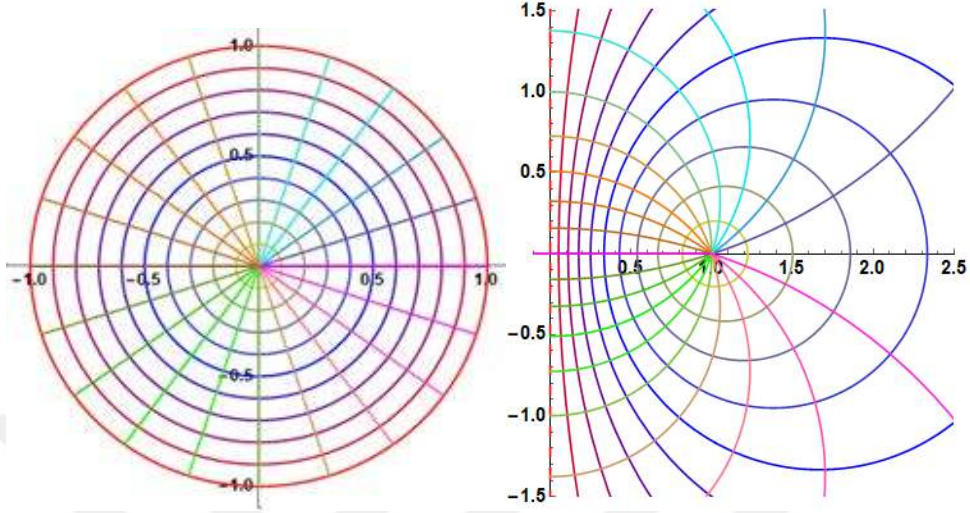
Şekil 3.8 $f(z) = \frac{z}{1-z}$ altında D birim diskinin görüntüsü

- (ii) $g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ ile verilen fonksiyon konvektir. D 'yi $\{-\pi/4 < \text{Im } w < \pi/4\}$ şeridine resmeder.



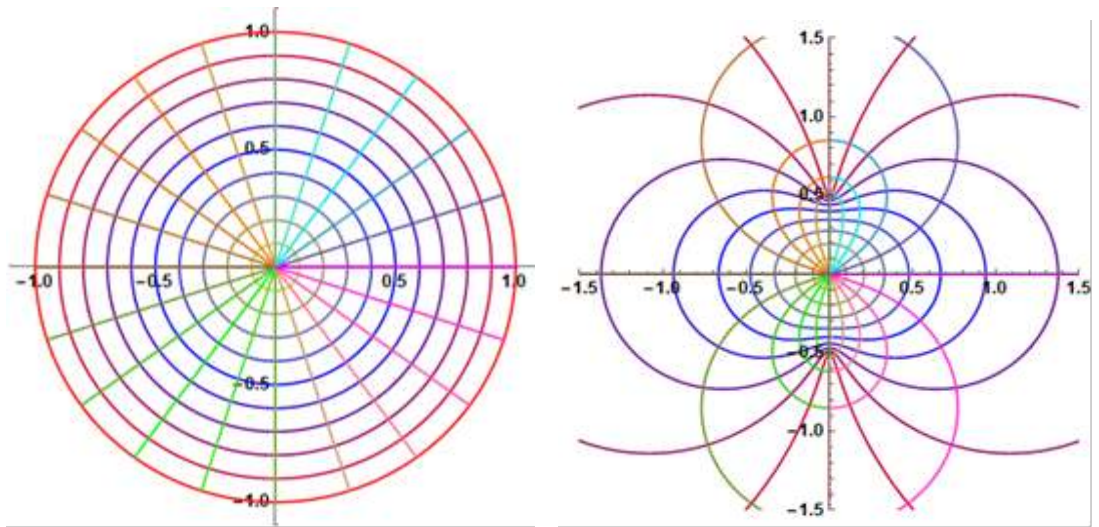
Şekil 3.9 $g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü

- (iii) $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ konveks bir fonksiyondur ve D diskini $\mathbb{C}$ 'nin sağ yarı düzlemi üzerine resmeder.



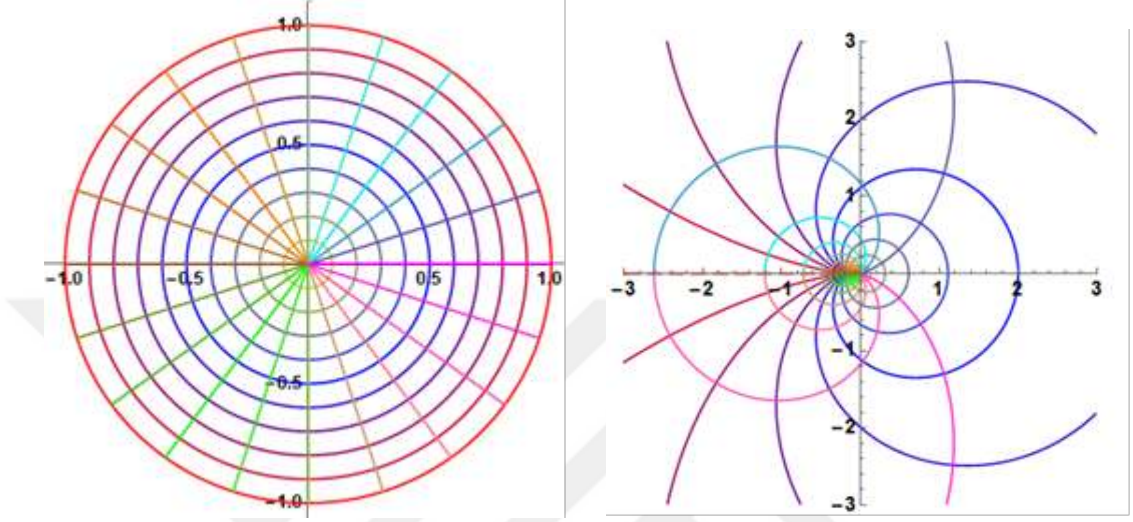
Şekil 3.10 $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ altında D birim diskini görüntüsü

- (iv) $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu yıldızlıdır. D 'yi $(-\infty, -1/2]$ ve $[1/2, \infty)$ yarı doğruları atılmış tüm $\mathbb{C}$ 'ye resmeder.



Şekil 3.11 $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altında birim disk resmi

(v) $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızlıdır. Bu fonksiyon D 'yi $w = -\infty$ dan $w = -\frac{1}{4}$ e kadar negatif reel eksen boyunca yarık olan kompleks düzlem ile birebir eşler. Koebe fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyon konveks değildir.



Şekil 3.12 Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Konveks ve yıldızlı fonksiyonlarla ilgili çalışmamıza, bir Γ_z eğrisinin, bu eğri üzerinde analitik olan bir f fonksiyonu altındaki görüntüsünü ele alarak başlıyoruz. Nihayetinde Γ_z 'nin bir çember, bir doğru parçası ya da başka bir temel yay olacağı açıktır. Bu nedenle, Γ_z 'nin düzgün bir eğri olduğunu, $x(t)$ ve $y(t)$ reel fonksiyonları için,

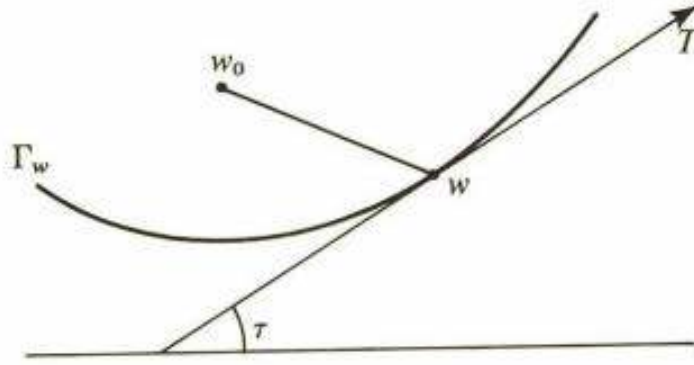
$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

biçiminde parametre edilebildiğini ve $t \in [a, b]$ için,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$$

olduğunu varsayıyoruz. Γ_z yayı yönlendirilmiş bir yaydır ve yönü, t arttıkça belirlenen yöndür.

f fonksiyonu Γ_z yayı üzerinde analitik bir fonksiyon olmak üzere, Γ_w , Γ_z yayının, $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü olsun. w_0 'ın Γ_w üzerinde olmadığını varsayalım (Şekil 3.12).



Şekil 3.13 Γ_z yayının f fonksiyonu altındaki görüntüsü olan Γ_w yayı

Eğer $t \in [a, b]$ iken,

$$\frac{d}{dt} \arg(w - w_0) \geq 0$$

ise, Γ_w yayına w_0 'a göre yıldızlı adı verilir. Verilen son ifadeyi tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arg(w - w_0) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \ln(w - w_0) = \operatorname{Im} \left(\frac{d}{dt} \ln(w - w_0) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{d}{dz} \ln(w - w_0) \frac{dz}{dt} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \frac{dz}{dt} \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. (Buradaki $\arg(w - w_0)$ çok değerli bir fonksiyondur, ancak verilen koşullar altında türevlenebilir olduğu tek değerli bir dal seçebiliriz.)

Yardımcı Önerme 3.2.5. $\Gamma_z : z = z(t)$ eğrisinin f altındaki görüntüsünün w_0 'a göre yıldızlı olması için, $t \in [a, b]$ iken,

$$\operatorname{Im} \left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} z'(t) \right) \geq 0 \quad (3.3)$$

olması gerekli ve yeterlidir [1].

Eğer Γ_w 'nın teğetinin argümanı t 'nin azalmayan bir fonksiyonu ise, Γ_w yayı konvekstir (Şekil 3.12). Γ_z 'nin teğetinin yönü $\arg z'(t)$ olur ve dönüşüm, bu teğet vektörünü bir $\arg f'(z)$ açısı kadar döndürür. Dolayısıyla,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(\arg(z'(t)f'(z))) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

olması, Γ_w yayının konveks olması için gerekli ve yeterlidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\arg(z'(t)f'(z))) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\ln z'(t) + \ln f'(z)) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{d}{dz}(\ln f'(z)) \frac{dz}{dt} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t) \right) \end{aligned}$$

yazılır.

Yardımcı Önerme 3.2.6. $\Gamma_z : z = z(t)$ eğrisi boyunca $f'(z) \neq 0$ olsun. Γ_z 'nin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün konveks bir yay olması için,

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t) \right) \geq 0, \quad t \in [a, b] \quad (3.4)$$

olması gerekli ve yeterlidir [1].

Şimdi bu formülleri Γ_z eğrisini $C_R : |z| = R$ çemberi seçerek özelleştirelim. Bu çemberi $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ şeklinde yazarsak, bu durumda

$$z'(t) = iRe^{it} = iz$$

$$z''(t) = -Re^{it} = -z$$

olduğundan (3.3) eşitsizliği,

$$\operatorname{Im} \left(i \frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} \right) \geq 0 \quad (3.5)$$

ve (3.4) eşitsizliği de,

$$\operatorname{Im} \left(i + i \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0 \quad (3.6)$$

şeklinde olacaktır.

D ’de ünivalent ve analitik olan f fonksiyonu C_R çemberini basit kapalı konveks bir eğri üzerine resmediyorsa o zaman bu eğri konveks bir bölgeyi sınırlar. Diğer taraftan, f fonksiyonu, D_R ’yi ($R < 1$) konveks bir bölgeye eşliyorsa, bölgenin sınırı olan eğri, konveks ve basit kapalı bir eğri olacaktır. Yıldızlı eğriler hakkında da bu açıklamaya benzeyen bir açıklama yapılabilir.

(3.5) ve (3.6) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde edebiliriz. (Burada kolaylık olması açısından $w_0 = 0$ olarak alınmıştır).

Teorem 3.2.7. f , $\overline{D_R} : |z| \leq R$ diskinde analitik ve ünivalent bir fonksiyon ise, f ’nin $\overline{D_R}$ ’yi konveks bir bölge üzerine resmetmesi için, $C_R : |z| = R$ çemberi üzerindeki z noktalarında,

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0 \quad (3.7)$$

koşulunun gerçekleşmesi gerekli ve yeterlidir [12].

$f(0) = 0$ olsun. f ’nin D_R ’yi $w = 0$ ’a göre yıldızlı bir bölge üzerine dönüştürmesi için, $C_R : |z| = R$ çemberi üzerindeki z noktalarında,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 0 \quad (3.8)$$

koşulunun gerçekleşmesi gerekli ve yeterlidir [13].

Teorem 3.2.7’de bahsedilen f fonksiyonunun ünivalent olduğunu varsaymalıyız (ya da bunu başka bir koşulla değiştirmeliyiz) yoksa hataya düşeriz. $f(z) = z^2$ fonksiyonu göz önüne alınırsa, (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri sağlanır. Ancak D ’nin $f(z) = z^2$ fonksiyonu altındaki iki katlı görüntüsü, Tanım 3.2.3 ve Tanım 3.2.4’e uygun olarak gerçekten konveks veya yıldızlı bir bölge değildir.

f fonksiyonu S sınıfında olsun ve $R < 1$ olarak alınsın. f , D_R 'yi konveks bölgeye dönüştürürse, her $r < R$ için D_r diskini de konveks bir bölgeye dönüştürür.

f fonksiyonu, D_R 'yi yıldızıl bölge üzerine dönüştürürse, her $r < R$ için D_r diskini de yıldızıl bölge üzerine dönüştürür.

Konveks fonksiyonlar ile yıldızıl fonksiyonlar arasında, ilk kez J. W. Alexander'ın fark ettiği temel ve güzel bir ilişki vardır. Herhangi bir h fonksiyonu için,

$$H(z) = zh'(z)$$

olarak alalım. Buradan,

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = z \frac{h'(z) + zh''(z)}{zh'(z)}$$

ve dolayısıyla $H(z) \neq 0$ için,

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = 1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \quad (3.9)$$

olarak yazılabilir. Eğer h 'nin orijinde m . dereceden bir sıfırı varsa, (3.9)'un her iki tarafındaki fonksiyonlar $z = 0$ noktasında analitiktir. (3.9) ile verilen ifadeyi, konveks ve yıldızıl fonksiyonlar için daha önce verilen (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri ile karşılaştırsak,

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zH'(z)}{H(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right]$$

sonucuna ulaşırız. Bu son eşitsizlik bizi aşağıda verilen Alexander Teoremine götürür.

Teorem 3.2.8. (Alexander Teoremi) D_R 'de $h'(z) \neq 0$ olsun. $h(z)$ 'nin D_R diskinde konveks olabilmesi için $H(z) = zh'(z)$ 'nin D_R 'de yıldızıl olması gerekli ve yeterlidir [14].

Alexander teoremine enteresan bir örnek olarak D 'yi $\operatorname{Re} w > -1/2$ bölgesine eşleyen

$$h(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

göz önüne alındığında, h , D ’de konveks olduğundan,

$$H(z) = zh'(z) = z \frac{(1-z) - z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

D ’de yıldızlı olur. Elde edilen son eşitliğin sağ tarafının Koebe fonksiyonu olduğu bilinmektedir.

D birim diskinde ünivalent olan ve D ’yi konveks bir bölgeye resmeden tüm normalleştirilmiş fonksiyonların kümesi C ile gösterilir.

D birim diskinde ünivalent olan ve D ’yi orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmeden tüm normalleştirilmiş fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir.

Yıldızlı fonksiyonlar sınıfının analitik gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$S^* = \left\{ f : f \in A, \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, z \in D \right\}.$$

Konveks fonksiyonlar sınıfının analitik gösterimi ise,

$$C = \left\{ f : f \in A, \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0, z \in D \right\}$$

şeklindedir.

Bu yeni gösterimler kullanılarak Teorem 3.2.8 aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$(i) f(z) \in C \Rightarrow zf'(z) \in S^*$$

$$(ii) F(z) \in S^* \Rightarrow \int_0^z \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in C.$$

Nevanlinna, S^* sınıfına ait fonksiyonların Taylor seri açılımındaki katsayılar için aşağıda verilen teoremi 1921 yılında ispatlamıştır.

Teorem 3.2.9. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu S^* 'da ise, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$|a_n| \leq n$$

dir. Ayrıca bu eşitsizlik kesindir. $f(z)$, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise eşitlik gerçekleşir [13].

1917 yılında Loewner tarafından verilen aşağıdaki teorem, C sınıfına ait fonksiyonların Taylor seri açılımındaki katsayılar ile ilgilidir:

Teorem 3.2.10. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu C 'de ise, her n pozitif tamsayısı için

$$|a_n| \leq 1$$

dir. Ayrıca, bu eşitsizlik her n için kesindir. $f(z)$ Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise eşitlik hali gerçekleşir [15].

Belirli bir z_0 noktasında $f(z)$ analitik ve $f'(z) \neq 0$ olsun. Eğer r yeterince küçükse her $|z - z_0| = r$ çemberi $f(z)$ tarafından neredeyse bir çember olan basit kapalı bir eğri üzerine resmedilir. Burada $f(z)$ üzerine bazı koşullar koyulursa, görüntü eğrisinin "neredeyse bir çember" olduğu sonucuna varılması kesin olur. Bu bölümde, $f(z)$ fonksiyonunun S sınıfında olduğunu varsaymak ve "neredeyse bir çember" ifadesini kapalı konveks bir eğri olarak yorumlamak doğaldır.

Teorem 3.2.11. $f \in S$ ise, her $r \leq 2 - \sqrt{3}$ için, $|z| = r$ çemberinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü basit kapalı konveks bir eğridir. $R_c = 2 - \sqrt{3}$ sayısı kesindir. S sınıfında, her $r > R_c$ için $|z| = r$ eğrisini konveks bir eğriye dönüştürmeyen bir fonksiyon vardır [13].

Tanım 3.2.12. $R_C = 2 - \sqrt{3}$ sayısına “ S sınıfının konvekslik yarıçapı” denir.

S sınıfının konvekslik yarıçapını veren Teorem 3.2.11’e yıldızlılık yarıçapı olan R_{S^*} ile ilgili bir teoremin eşlik etmesi beklenir. Ancak, önemli bir zorluk söz konusudur. Koebe fonksiyonu, $|z| < 2 - \sqrt{3}$ için konveks olan, ancak daha büyük hiçbir diskte konveks olmayan ekstremal fonksiyondur. Bununla birlikte, aynı fonksiyon D ’de yıldızlıdır ve bu nedenle yıldızlılık yarıçapı için ekstremal fonksiyon olamaz. Koebe fonksiyonu için kesin olan eşitsizlikler Teorem 3.2.11’in kanıtlanmasında faydalı olabilir ancak yıldızlılık yarıçapının belirlenmesine yardımcı olamaz. Daha derin yöntemlere ihtiyaç vardır ve bunlar 1923 yılında Loewner tarafından sağlanmıştır. Burada sadece 1934 yılında Grunsky tarafından ulaşılan aşağıdaki sonuç verilecektir:

Teorem 3.2.13. S sınıfının yıldızlılık yarıçapı

$$\ln \frac{1+r}{1-r} = \frac{\pi}{2}$$

denkleminin kökü olan,

$$R_{S^*} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{e^{\pi/2} + 1} = \tanh \frac{\pi}{4} \approx 0.65579$$

sayısıdır [16].

Aşağıdaki kavramlar M. S. Robertson tarafından 1936 yılında tanıtılmıştır.

Tanım 3.2.14. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu $\forall z \in D$ için,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$$

koşulunu gerçekliyorsa, f ’ye “ α -mertebeli yıldızlı fonksiyon” adı verilir. α - mertebeli yıldızlı fonksiyonlar sınıfını göstermek için $S^*(\alpha)$ sembolü kullanılır [17].

Tanım 3.2.15. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu D ’deki tüm z ’ler için,

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq \alpha$$

koşulunu gerçekliyors, f fonksiyonu “ α – mertebeli konveks fonksiyon” olarak adlandırılır. α – mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir [17].

Açıkça görülüyor ki $\alpha \leq 1$ olmalıdır, aksi halde $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri boş kümedir. Bununla birlikte, eğer $\alpha = 1$ ise, bu kümelerde tek bir fonksiyon vardır: $f(z) = z$. Eğer $\alpha < 0$ ise, bu kümelerden herhangi birindeki bir fonksiyon ünivalent olmayabilir. Çoğunlukla $0 \leq \alpha \leq 1$ doğal koşulu uygulanır.

Alexander teoremine benzer bir teorem, bu yeni sınıfları ilişkilendirir. $f(z)$ ve $F(z)$, S sınıfına ait fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$f(z) \in C(\alpha) \Leftrightarrow F(z) \equiv zf'(z) \in S^*(\alpha).$$

Tanım 3.2.16. f , D ’de analitik olsun. D üzerinde,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, \quad z \in D \quad (3.10)$$

şartını sağlayan konveks bir g fonksiyonu mevcut ise, f ’ye, D bölgesinde “konvekse yakın fonksiyon” adı verilir [18].

g , D ’de yıldızlı bir fonksiyon ise, (3.10) koşulu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0, \quad z \in D$$

şartı ile değiştirilebilir.

Yukarıda geometrik olarak tanımlanan konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı S^* sınıfını kapsar.

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon koşullarını gerçekleyen konvekse yakın fonksiyonların sınıfını göstermek için K sembolü kullanılır. Tanım 3.2.16’da geçen

f fonksiyonlarının ünivalent olması koşulu yoktur. Bundan başka, g fonksiyonunun da normalize edilmiş olması gerekmez.

K sınıfının analitik gösterimi,

$$K = \left\{ f : f \in A, \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > 0, \quad z \in D, g \in C \right\}$$

şeklindedir.

Konveks olan her fonksiyon konvekse-yakındır. Ayrıca, yıldızıl olan her fonksiyon da konvekse-yakındır. Gerçekten de, her $f \in S^*$ bazı $g \in C$ 'ler için $f(z) = zg'(z)$ formuna sahiptir ve buradan

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olur. Konveks, yıldızıl, konvekse yakın ve ünivalent fonksiyon sınıfları arasındaki kapsama bağıntısı aşağıda verilmiştir:

$$C \subset S^* \subset K \subset S.$$

Örneğin,

$$f(z) = \frac{z - z^2/2}{(1-z)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right)$$

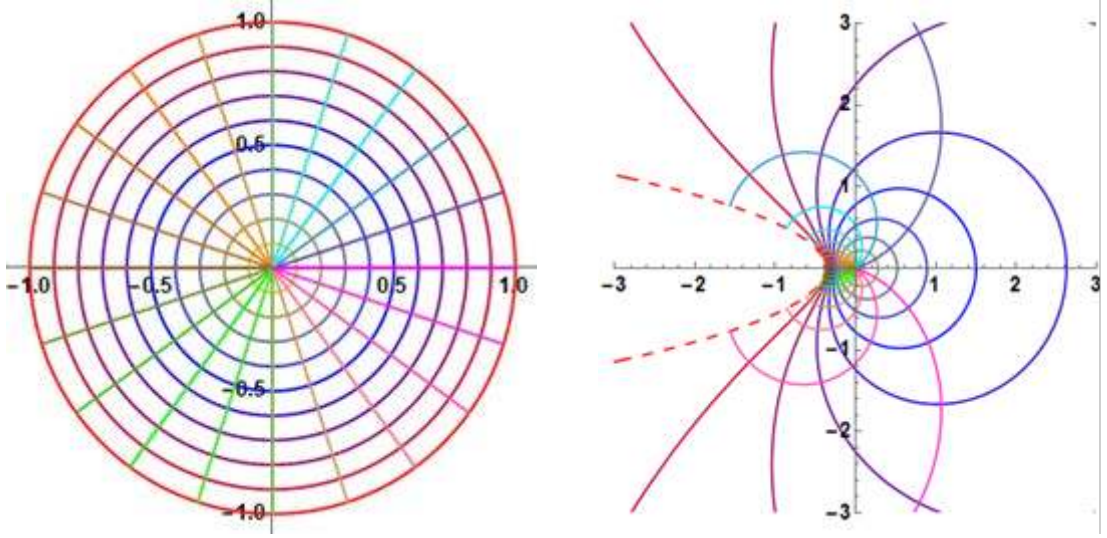
konvekse yakın bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, $g(z) = \frac{z}{1-z}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere,

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] > 0$$

koşulunu sağlar. Ancak bununla birlikte

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{(1-z)(2-z)} \right]$$

olup, $z = \frac{7}{10} + \frac{7}{10}i$ sayısı için pozitif olmadığından bu fonksiyon yıldızıl değildir.



Şekil 3.14 $f(z) = \frac{z - z^2/2}{(1 - z)^2}$ altında D birim diskinin görüntüsü

1955 yılında Reade K sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için Bieberbach tahmininin sağlandığını kanıtlamıştır.

Teorem 3.2.17. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Eğer f konvekse yakınsa,

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, \dots$$

olur. $n \geq 2$ için $|a_n| = n$ eşitliği f , Koebe'nin bir rotasyonu olduğunda geçerlidir [19].

Konvekse yakın fonksiyonlarla ilgili temel sonuçlardan biri Kaplan'a ait geometrik bir karakterizasyondur.

Teorem 3.2.18. (Kaplan Teoremi) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon şartlarını gerçekleyen, D üzerinde analitik ve yerel ünivalent bir f fonksiyonu verilsin. Her $r \in (0, 1)$ ve $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ koşulunu sağlayan her θ_1, θ_2 reel sayı çifti için, $z = re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] d\theta > -\pi$$

eşitsizliğinin sağlanması f 'nin konvekse-yakın olması için gerekli ve yeterlidir [18].

Goodman tarafından çalışılan, S sınıfına ait düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıflar aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.19. Eğer $f \in S^*$ ise ve D 'de bulunan ve ς merkezi de yine D 'de olan her dairesel γ yayı için $f(\gamma)$ yayı $f(\varsigma)$ noktasına göre yıldızıl oluyorsa, f fonksiyonuna D 'de “*düzgün yıldızıl fonksiyon*” adı verilir. Düzgün yıldızıl fonksiyonlar sınıfı UST ile gösterilir [20].

Tanım 3.2.20. Eğer $f(z)$, C 'de ise ve D 'de bulunan ve ς merkezi de D 'de olan her dairesel γ yayı için $f(\gamma)$ yayı konveks bir yay ise f fonksiyonuna D 'de “*düzgün konveks fonksiyon*” adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı UCV sembolü ile gösterilir [21].

Düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyon sınıflarının analitik tanımları Ronning tarafından verilmiştir [22].

Tanım 3.2.21. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu D birim diskinde analitik olsun.

$$(i) \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z) - f(\varsigma)}{(z - \varsigma)f'(z)} \right\} \geq 0, (z, \varsigma) \in D \times D$$

olması, $f \in UST$ olması için gerekli ve yeterlidir.

$$(ii) \operatorname{Re} \left\{ 1 + (z - \varsigma) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0, (z, \varsigma) \in D \times D$$

olması, $f \in UCV$ olması için gerekli ve yeterlidir.

Bu tanımlarda $\varsigma = 0$ olarak alınırsa, konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları elde edilir.

Düzgün konveks ve düzgün yıldızıl fonksiyon sınıfları ile ilgili zorluklardan biri, karakterizasyonlarının iki değişken cinsinden verilmesidir. Ma ve Minda [23] ve

Ronning [24] birbirlerinden bağımsız olarak düzgün konveks fonksiyonlar sınıfının sadece bir değişken cinsinden bir karakterizasyonunu vermenin mümkün olduğunu keşfetmiştir.

$$\textbf{Teorem 3.2.22.} \quad \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}, \quad z \in U \quad (3.11)$$

olması, $f \in UCV$ olması için gerekli ve yeterlidir.

Parabolik yıldızlı fonksiyonların S_p sınıfının analitik tanımı aşağıda verilmiştir:

$$\textbf{Tanım 3.2.23.} \quad \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}, \quad z \in U \quad (3.12)$$

olması, $f \in S_p$ olması için gerekli ve yeterlidir.

(3.11) ve (3.12) ifadeleri karşılaştırıldığında şu sonuca ulaşılır:

$$f \in UCV \Leftrightarrow zf' \in S_p.$$

Dolayısıyla, düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı ile parabolik yıldızlı fonksiyonlar sınıfı arasında Alexander teoremi anlamında bir ilişki vardır.

S_p sınıfının tanımından, $z \in D$ olmak üzere, $f \in S_p$ ise, $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ değerlerinin

görüntüsünün $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ civarında simetrik bir parabol tarafından kapsandığı görülür.

Böylece $S_p \subset S_{1/2}^*$ kesin kapsaması vardır.

Kanas ve Wisniowska [25] tarafından çalışılan k – *uniform* konveks (k – düzgün konveks) fonksiyonlar sınıfı, düzgün konveks fonksiyonlar sınıfının genelleştirmesidir.

Tanım 3.2.24. $0 \leq k < \infty$ olmak üzere, $|\zeta| \leq k$ için D birim diskinde kapsanan ve merkezi ζ olan $\forall \gamma$ dairesel yayının görüntüsü konveks oluyorsa, (3.2) ile tanımlanan

f fonksiyonu D 'de " k -düzgün konveks (k -uniform konveks) fonksiyon" olarak adlandırılır. k -düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı $k-UCV$ ile gösterilir. Burada $k=1$ alınırsa UCV sınıfı, $k=0$ alınırsa C sınıfı elde edilir. Sembolik olarak bu durum, $1-UCV = UCV$ ve $0-UCV = C$ dir.

Yine Kanas ve Wisniowska [26] tarafından verilen k -yıldızıl fonksiyonlar sınıfı da, düzgün yıldızıl fonksiyonlar sınıfının genelleştirmesidir.

Tanım 3.2.25. $f \in S$ olsun. $0 \leq k < \infty$ için,

$$f(z) = zg'(z)$$

eşitliğini sağlayan bir $g \in k-UCV$ fonksiyonu varsa, f 'ye " k -yıldızıl fonksiyon" adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı $k-ST$ sembolüyle gösterilir. Burada $k=0$ için, S^* sınıfı bulunur.

k -düzgün konveks fonksiyon ve k -yıldızıl fonksiyon sınıfları için,

$$f \in k-UCV \Leftrightarrow zf' \in k-ST$$

şeklindeki Alexander bağıntısı geçerlidir [26].

Aşağıda tanımı verilen Hadamard çarpımının geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yeri vardır.

Tanım 3.2.26. $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ Taylor seri açılımları ile

verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları için Hadamard çarpımı,

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (f_2 * f_1)(z)$$

biçimindedir. Buradaki "*" sembolü ile Hadamard çarpımı gösterilmektedir [3].

Analitik fonksiyonların bazı özellikleri Hadamard çarpımı altında korunabilmektedir. Bu özelliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

(i) $f_1 \in K$ ve $f_2 \in C \Rightarrow f_1 * f_2 \in C$

$$(ii) f_1, f_2 \in K \Rightarrow f_1 * f_2 \in K$$

$$(iii) f_1 \in K \text{ ve } f_2 \in S^* \Rightarrow f_1 * f_2 \in S^*.$$

3.3 Bazı Özel Fonksiyonlar

Özel fonksiyonlar, matematik analiz, fonksiyonel analiz, fizik veya öteki alanlardaki önemleri nedeniyle az ya da çok yerleşik isimlere ve gösterimlere sahip bazı özel matematiksel fonksiyonlardır. Bununla birlikte, genel bir resmi tanım yoktur, ancak matematiksel fonksiyonlar listesi genellikle özel olarak kabul edilen fonksiyonları genellikle özel olarak kabul edilen fonksiyonları içerir. Temel fonksiyonlar, özellikle trigonometrik fonksiyonlar da "özel fonksiyon" olarak kabul edilirler. Tez çalışmasında kullanılan ve tezin konusunu oluşturan bazı özel fonksiyonlar bu bölümde tanıtılmıştır.

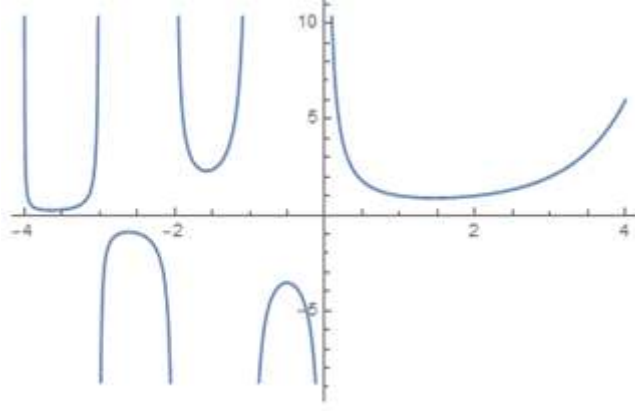
3.3.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ tüm özel fonksiyonlar içinde en çok kullanılanıdır. Genellikle ilk olarak ele alınır çünkü diğer gelişmiş matematiksel fonksiyonların hemen hemen her integral veya seri gösteriminde görülür. Tanım olarak integral formülü verilir:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \text{ Re}(z) > 0. \quad (3.13)$$

(3.13) eşitliği sadece $\mathbb{C}$ 'nin sağ yarı düzleminde geçerli olmasına rağmen, $\Gamma(z)$ için kullanılan gösterimlerden en yaygın olanıdır.

Sol yarı düzleme analitik devam farklı şekillerde yapılabilir. $\Gamma(z)$ 'nin analitiklik bölgesi analitik devamla, $D_r = \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ olur.



Şekil 3.15 $\Gamma(x)$ fonksiyonunun grafiği

(3.13)'e kısmi integrasyon uygulandığında, $\text{Re}(z) > 0$ için $\Gamma(z)$ fonksiyonu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3.14)$$

denklemini sağlar. Bu işlem yinelenerek, n doğal sayısı için,

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)\Gamma(z) \quad (3.15)$$

denklemine ulaşılır. (3.14) ve (3.15) yineleme formülleri herhangi bir $z \in D_\Gamma$ için genişletilebilir. Özel olarak, $\Gamma(1) = 1$ olduğundan, negatif olmayan tamsayı değerleri için,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. $\Gamma(z)$ kullanılarak,

$$z! = \Gamma(z+1)$$

şeklindeki kompleks faktöriyel fonksiyonu tanımlanabilir.

n negatif olmayan bir tamsayı ve $(z)_0 = 1$ olmak üzere, $(z)_n$ ile gösterilen Pochhammer sembolü,

$$(z)_n := z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

olarak tanımlanır. Bu sembol,

$$(z)_{-n} := z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gösterimi ile negatif tamsayılara genişletilebilir.

3.3.2. Bessel Fonksiyonu

Bessel fonksiyonları matematiğin birçok dalında vazgeçilmezdir. Bu nedenle, özelliklerini farklı açılardan incelemek önemlidir. Son zamanlarda, Bessel fonksiyonları üzerine, geometrik fonksiyon teorisi ve fonksiyonel eşitsizlikler açısından yoğun bir ilgi vardır. Bessel fonksiyonları adını astronom F.W. Bessel'den (1784-1846) almıştır, ancak D. Bernoulli 1732'de Bessel fonksiyonları kavramını ilk ortaya atan kişi olarak kabul edilir. Bernoulli bir ucundan asılı salınım yapan bir zincir problemine bir çözüm olarak sıfıncı dereceden Bessel fonksiyonunu kullanmıştır [27]. 1764 yılında L. Euler, tamsayı mertebeli Bessel fonksiyonlarını, gerilmiş bir zarın titreşimlerinin analizinde kullanmıştır [28]. Bessel, bu fonksiyonlara adını veren matematikçi olmasına rağmen, 1817'ye kadar bu fonksiyonları bir astronom olarak çalışmalarına dahil etmemiştir. Bessel, Kepler'e ait olan karşılıklı çekim altında hareket eden üç cismin hareketi ile ilgili bir problem üzerine çalışırken bu fonksiyonu sistematik olarak incelemiştir [29].

p , keyfi gerçel veya kompleks değerler alabilen bir parametre ve z kompleks bir değişken olmak üzere, Bessel denklemi olarak adlandırılan,

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = 0 \quad (3.16)$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi ele alalım. p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılan $J_p(z)$ fonksiyonu, (3.16) denkleminin özel bir çözümü olarak tanımlanır. Bu fonksiyon, tüm $z \in \mathbb{C}$ 'ler için,

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$$

formundadır.

Modifiye edilmiş Bessel diferansiyel denklemi olarak adlandırılan,

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + p^2)w(z) = 0, \quad (3.17)$$

Bessel denkleminde sadece w katsayısı bakımından farklı olan ve matematiksel fizik problemlerinde sıkça karşılaşılan bir denklemdir. (3.17) denkleminin özel bir çözümü,

modifiye edilmiş p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$I_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

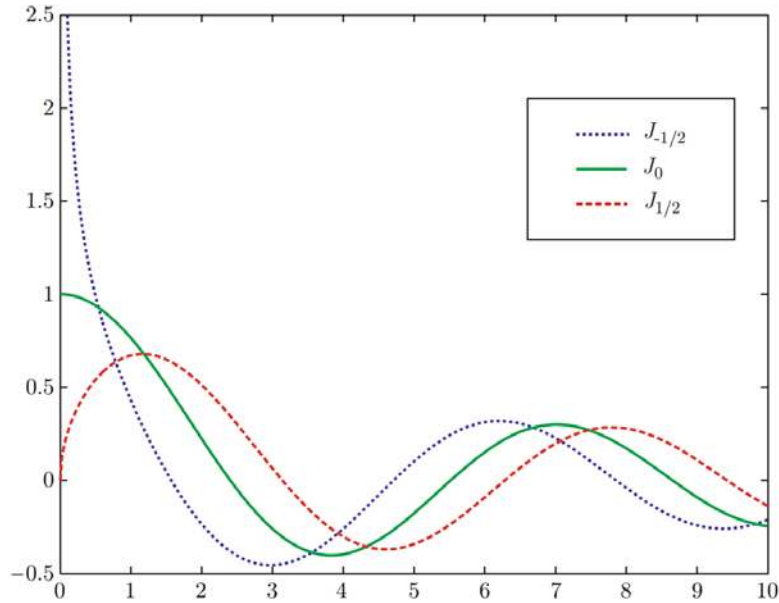
Burada özellikle birinci tür Bessel fonksiyonlarının kosinüs ve sinüs gibi trigonometrik fonksiyonlarla ilgili bazı temel fonksiyonlara indirgenebilir olduğuna dikkat etmek de önemlidir. Daha açık bir ifadeyle, bazı özel p değerleri için,

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

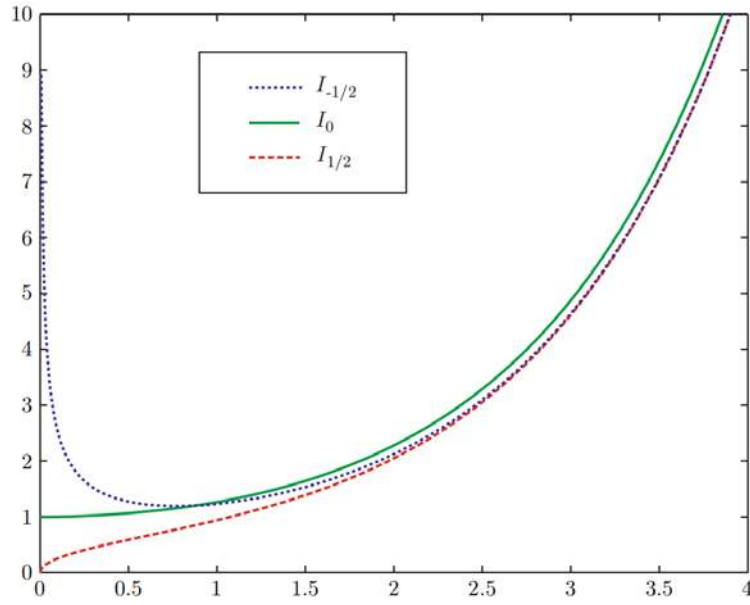
fonksiyonları elde edilir. Birinci türden modifiye edilmiş Bessel fonksiyonları ise özellikle hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile ilişkilidir. Bazı özel p değerleri için:

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z, \quad I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad I_{3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sinh z}{z} - \cosh z \right)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.16 $J_{-1/2}$, J_0 ve $J_{1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 3.17 $I_{-1/2}$, I_0 ve $I_{1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri

Bessel fonksiyonları, birçok farklı bakış açısından birçok kişi tarafından çalışılan özel fonksiyonlar arasındadır. Ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik gibi geometrik özellikler altmışlı yıllarda Brown [30-31] tarafından ve ayrıca Kreyszig ve Todd [32] tarafından çalışılmıştır. Bununla birlikte, yıldızlılık yarıçapını ve konvekslik yarıçapını belirlemek veya normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonunun yıldızlı, konveks, konvekse yakın olabilmesi için en uygun parametresini bulmak gibi, Bessel fonksiyonları ile ilgili birçok önemli sorun ayrıntılı olarak çalışılmamıştır ya da tamamen çözülememiştir.

Birinci tür genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik, konvekse yakınlık gibi geometrik özellikleri çeşitli yöntemler kullanılarak Baricz tarafından incelenmiştir. Baricz tarafından elde edilen bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

$$w_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma\left(p+n+\frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona p mertebeden genelleştirilmiş birinci tür Bessel fonksiyonu denir [33]. Bu fonksiyonda $c = 1$ ve $b = 1$ alınır, w_p fonksiyonunun J_p fonksiyonuna indirgendiği açıktır. $c = -1$ ve $b = 1$ için ise I_p fonksiyonu elde edilir. Oran testine göre, w_p serisinin yakınsama yarıçapı sonsuzdur, böylece w_p tüm $b, c, p, z \in \mathbb{C}$ değerleri için yakınsaktır.

b, p, c kompleks sabitler ve $\kappa = p + (b + 1) / 2 \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere,

$$u_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (3.19)$$

funksiyonuna p mertebeden genelleştirilmiş normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonu adı verilir [33].

Teorem 3.3.1. Eğer b, p, c reel sabitler ve $\kappa \geq |c|/4 + 1$ ise, tüm $z \in D$ değerleri için $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ olur. Ayrıca eğer $\kappa \geq |c|/4$ ve $c \neq 0$ ise, u_p , D birim diskinde ünivalenttir [34].

Teorem 3.3.2. $c \neq 0$ olmak üzere, $b, c, p \in \mathbb{R}$ olsun. (3.18) ve (3.19) ile tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir [34]:

- (i) Eğer $\kappa \geq |c|/4 + 1/2$ ise, u_p fonksiyonu konvektir.
- (ii) Eğer $\kappa \geq |c|/4 + 3/2$ ise, zu_p fonksiyonu yıldızlıdır.
- (iii) Eğer $\kappa \geq |c|/2 + 1$ ise, $zu_p \in S^*(1/2)$ dir.
- (iv) Eğer $\kappa \geq |c|/2 + 1$ ise, $z^{1-p}w_p$ fonksiyonu yıldızlıdır.

Teorem 3.3.3. Eğer $c < 0$ ve $b, p \in \mathbb{R}$ ise, (3.19) ile tanımlanan u_p aşağıdaki özelliklere sahiptir [33]:

- (i) Eğer $\kappa \geq -c/2$ ise, o zaman $z \rightarrow zu_p(z)$, $-\log(1-z)$ 'ye göre konvekse yakındır ve sonuç olarak D 'de ünivalenttir.

(ii) Eğer $\kappa \geq -3c/4$ ise, o zaman $z \rightarrow zu_p(z^2)$, $\frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve sonuç olarak D' 'de ünivalenttir.

3.3.3. Wright Fonksiyonu

$\lambda > -1$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ için, $\Phi_{\lambda, \mu}(z)$, $z \in \mathbb{C}$ ile gösterilen Wright fonksiyonu, adını İngiliz matematikçi E. Maitland Wright'tan almıştır. Bu fonksiyon 1933-1940 yılları arasında Wright tarafından tanıtılmış ve incelenmiştir [35]. Şunu belirtmeliyiz ki, aslında Wright bölümlerin asimptotik teorisi üzerine yaptığı araştırmalarla bağlantılı olarak $\lambda \geq 0$ ile sınırlandırılmış böyle bir fonksiyonu ele almıştır. Ancak daha sonra, 1940 yılında $-1 < \lambda < 0$ 'a kadar genişletmiştir.

Wright fonksiyonu tüm kompleks düzlemde yakınsak olan bir kuvvet serisi ile tanımlanmıştır [35]:

$$\Phi_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.18)$$

$\frac{1}{\Gamma(\mu)}$ sabit çarpanı ile Wright fonksiyonu üstel fonksiyona indirgendiği ve $\mu = -n$, $n = 0, 1, \dots$ iken sıfıra özdeş olacağı için, $\lambda = 0$ durumu aşıkardır. Genel olarak, Wright fonksiyonunun $\lambda > -1$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ ($\lambda = 0$ ise $\mu \neq -n$, $n = 0, 1, \dots$) için,

$$\rho = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \sigma = (1+\lambda) |\lambda|^{\lambda/(1+\lambda)}$$

ile verilen sonlu ρ mertebeli ve σ tipli bir tam fonksiyon olduğu kanıtlanmıştır. Eğer $\lambda \geq 0$ ise Wright fonksiyonu üstel fonksiyondur.

$\lambda = 1$ ve $\mu = \nu + 1$ alınırsa, Wright fonksiyonunun önceki bölümde verdiğimiz J_ν ve I_ν Bessel fonksiyonları ile ilişkisini görmek kolaydır. Bu ilişki,

$$\left(\frac{z}{2} \right)^\nu \Phi_{1, \nu+1} \left(\mp \frac{z^2}{4} \right) = \begin{cases} J_\nu(z) \\ I_\nu(z) \end{cases}$$

veya

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi_{1,\nu+1}\left(-\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ilişki nedeniyle bazı yazarlar Wright fonksiyonunu genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu olarak adlandırır ve

$$J_\nu^{(\lambda)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\lambda n + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad J_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z)$$

gösterimini kullanır.

Wright fonksiyonunun tanımından kolayca türetililecek olan aşağıdaki gösterimleri vermek faydalı olacaktır:

$$\lambda z \Phi_{\lambda,\lambda+\mu}(z) = \Phi_{\lambda,\mu-1}(z) + (1-\mu)\Phi_{\lambda,\mu}(z),$$

$$\frac{d}{dz} \Phi_{\lambda,\mu}(z) = \Phi_{\lambda,\lambda+\mu}(z).$$

Wright fonksiyonunun Bessel fonksiyonu ile ilişkili olan geometrik özellikleri 2014 yılında Prajapat tarafından incelenmiştir [36]. Wright tarafından tanımlanan $\Phi_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonu A sınıfında olmadığından bu çalışmada öncelikle bu fonksiyon,

$$\phi_{\lambda,\mu}(z) = \Gamma(\mu) z \Phi_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu) z^{n+1}}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)} \quad (\lambda > -1, \mu > 0, z \in D)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda,\mu}(z) &= \Gamma(\lambda + \mu) \left[\Phi_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \mu) z^{n+1}}{(n+1)! \Gamma(\lambda n + \lambda + \mu)} \quad (\lambda > -1, \lambda + \mu > 0, z \in D) \end{aligned}$$

biçiminde iki ayrı şekilde normalize edilmiştir. Daha sonra normalize edilmiş $\phi_{\lambda,\mu}$ ve

$\varphi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonları ile, $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\phi_{\lambda,\mu}(z)}{z}$ fonksiyonu için ünivalentlik, yıldızlılık,

konvekslik ve konvekse yakınlık kriterleri araştırılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 3.3.4.

- (i) $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq 1 + \sqrt{3}$ ise $\phi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu D birim diskinde yıldızlıdır.
- (ii) $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu \geq 1 + \sqrt{3}$ ise $\varphi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu D birim diskinde konvektir.
- (iii) $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu \geq 1 + \sqrt{3}$ ise, $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu D birim diskinde konvektir.

Teorem 3.3.5. Eğer

- (i) $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ise $\phi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır.
- (ii) $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq 1 + \sqrt{3}$ ise $\phi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde konvektir.
- (iii) $\lambda \geq 1$ ve μ^* , $\mu^2 - \sqrt{5}\mu - \sqrt{5} = 0$ denkleminin pozitif kökü olmak üzere $\mu > \mu^*$ ise $\phi_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu D birim diskinde yıldızlıdır.

Teorem 3.3.6. J_ν normalize edilmiş Bessel fonksiyonu olmak üzere, eğer $\lambda \geq 1$ ve $\nu \geq 1 + 2\sqrt{2}$ ise, $\phi_{\lambda,\nu+1}$ fonksiyonu D birim diskinde J_ν fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

2018 yılında, Din , Raza, Yagmur ve Malik tarafından yapılan bir çalışmada, $\phi_{\lambda,\mu}$ ve $\varphi_{\lambda,\mu}$, Wright fonksiyonunun iki farklı normalizasyonu olmak üzere, bu fonksiyonların ve bu fonksiyonların Alexander dönüşümlerinin kısmi toplamaları bulunmuş ve bu kısmi toplamalar için alt sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca yine aynı çalışmada Wright fonksiyonunun her iki normalizasyonu için yıldızlılık yarıçapları tartışılmıştır [37].

Wright fonksiyonları bölümlerin asimtotik teorisinde, Hankel tipi integral dönüşümleri teorisinde ve Mikusinski işlemsel hesabında kullanılmıştır. Son zamanlarda Wright fonksiyonları, kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde bulunmuştur. Karşılık gelen Green fonksiyonlarının Wright fonksiyonu cinsinden temsil edilebileceği bulunmuştur [38, 39]. Mainardi, Wright fonksiyonlarını kesirli difüzyon dalga denkleminin çözüme dahil etmiştir [40]. Luchko ve arkadaşları kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin ölçek varyant çözümlerini Wright fonksiyonları cinsinden elde etmişlerdir [41,42]. λ pozitif rasyonel sayısı için, Wright

fonksiyonları genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir [43]. Wright fonksiyonu, Array fonksiyonu, Whittaker fonksiyonu, tüm yardımcı fonksiyonlar ve benzeri gibi çeşitli fonksiyonları genelleştirir [43].



4. GENELLEŞTİRİLMİŞ WRIGHT-BESSEL FONKSİYONU

$\mu > 0$, $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{J}_{\nu, \lambda}^{\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\lambda + k + 1) \Gamma(\nu + \lambda + 1 + k\mu)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona genelleştirilmiş Wright-Bessel (-Lommel) fonksiyonu denir.

Bu fonksiyonda bazı özel parametre seçimleriyle, Lommel fonksiyonu, Struve fonksiyonu, Bessel fonksiyonu ve Wright fonksiyonu gibi iyi bilinen özel fonksiyonlar elde edilir. Örneğin, $\mu = 1$ için Lommel ve Struve fonksiyonlarını içerir. Eğer $\lambda = 0, \mu = 1$ olarak alınırsa,

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

şeklindeki Bessel fonksiyonu bulunur.

Özel bir fonksiyon olan genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun bazı geometrik özellikleri bu başlık altında incelenecektir. İlk olarak genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun D 'de ünivalent, yıldızıl, konveks ve konvekse yakın olması için sağlaması gereken şartlar verilecektir. Elde edilen bu sonuçlar, “*Annals of the University of Craiova*” adlı dergide yayınlanmıştır [44]. Daha sonra genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun kısmi toplamları hesaplanarak bu kısmi toplamalar için üst sınırlar belirlenecektir. Kısmi toplamalar ile ilgili elde edilen sonuçlar yayına gönderilmiş olup halen incelemededir.

4.1 Genelleştirilmiş Wright-Bessel (-Lommel) Fonksiyonunun Bazı Geometrik Özellikleri

$$\mathcal{J}_{\nu, \lambda}^{\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\lambda + k + 1) \Gamma(\nu + \lambda + 1 + k\mu)}, \quad \mu > 0, \nu, \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu $\mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(0) = 0$, $\mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu \prime}(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlamadığı için A sınıfında değildir. Bu nedenle, aşağıdaki gibi normalize edilebilir:

$$\begin{aligned} J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z) &= 2^{\nu+2\lambda} \Gamma(\nu+\lambda+1) \Gamma(\lambda+1) z^{1-\lambda-\frac{\nu}{2}} \mathcal{J}_{\nu,\lambda}^{\mu}(\sqrt{z}) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \frac{\Gamma(\lambda+1) \Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k) \Gamma(\nu+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^k. \end{aligned}$$

Normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini inceleyebilmek için Hadamard çarpımı kullanılarak elde edilen aşağıdaki modifiye edilmiş forma ihtiyaç vardır:

$$\begin{aligned} J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z) &= \frac{z}{1+z} * J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \frac{\Gamma(\lambda+1) \Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k) \Gamma(\nu+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Öncelikle genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini elde edebilmek için kullanılacak olan aşağıdaki yardımcı önermeler verilecektir:

Yardımcı Önerme 4.1.1. $f \in A$ olsun. f fonksiyonu,

$$1 \geq 2a_2 \geq \dots \geq ka_k \geq \dots \geq 0$$

veya

$$1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq ka_k \leq \dots \leq 2$$

eşitsizliğini sağlıyorsa D ’de regüler ve ünivalenttir [45].

Bu koşulları sağlayan bir f fonksiyonuna, $-\log(1-z)$ ’ye göre konvekse yakın fonksiyon denilebilir. Burada $-\log(1-z)$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.

Yardımcı Önerme 4.1.2. Bir $f \in A$ fonksiyonu verilsin. D birim diskteki tüm z değerleri için,

$$\left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna, $D_{1/2} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1/2\}$ diskinde yıldızıl ve ünivalenttir denir [46].

Yardımcı Önerme 4.1.3. Bir $f \in A$ fonksiyonu verilsin. D birim diskindeki tüm z değerleri için

$$|f'(z) - 1| < 1$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $D_{1/2}$ diskinde konvekstir denir [47].

Yardımcı Önerme 4.1.4. $f \in A$ olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki sonuçlar doğrudur [48]:

- (i) Eğer $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda $f \in S_p$ dir.
- (ii) Eğer $\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda $f \in UCV$ dir.

Teorem 4.1.5. $\nu, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + \nu \geq 0,462$ ise $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu D 'de $-\log(1-z)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakındır, dolayısıyla ünivalenttir.

İspat: (4.1) ile verilen $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunu

$$A_k = \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\nu+\lambda+1+(k-1)\mu)} \quad (k \geq 2) \text{ ve } A_1 = 1 \quad (4.2)$$

olmak üzere,

$$J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$$

şeklinde yazalım.

Teoremin hipotezleri altında her $k \geq 1$ için $A_k \geq 0$ ve

$$2A_2 = \frac{2\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4\Gamma(\lambda+2)\Gamma(v+\lambda+\mu+1)} \leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yardımcı Önerme 4.1.1 kullanılarak $J_{v,\lambda}^{\mu}(z)$ fonksiyonunun $-\log(1-z)$ 'ye göre konvekse yakın fonksiyon olduğu gösterilecektir. Bunu gösterebilmek amacıyla $\{kA_k\}$ dizisinin azalan bir pozitif reel sayı dizisi olduğunu göstermeliyiz. (4.2)'den

$$kA_k - (k+1)A_{k+1} = \frac{k\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} - \frac{(k+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^k\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(v+\lambda+1+k\mu)}$$

olup bu ifade düzenlenerek,

$$X(k) = \frac{k}{\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} - \frac{k+1}{4(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+k\mu)}$$

olmak üzere,

$$kA_k - (k+1)A_{k+1} = \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)} X(k)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\Gamma(x)$ fonksiyonunun $x_0 \approx 1.462$ için (x_0, ∞) aralığında artan olduğu bilinmektedir.

Teoremin varsayımları altında,

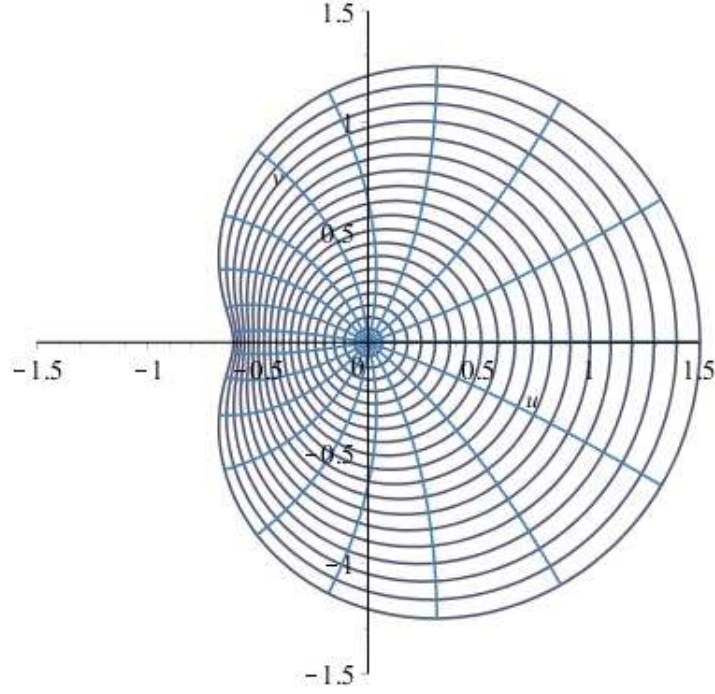
$$4k(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+k\mu) \geq (k+1)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)$$

olacaktır. Böylece,

$$kA_k - (k+1)A_{k+1} > 0$$

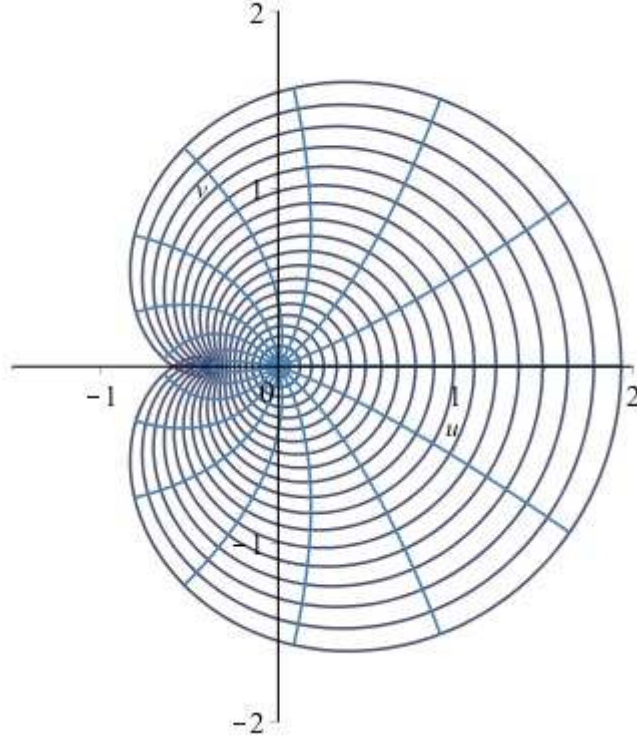
elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.6. $J_{1, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu D birim diskinde ünivalenttir. (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 $J_{1, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü

Ancak $J_{\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu D birim diskinde ünivalent değildir. (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 $J_{\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü

Teorem 4.1.7. $\nu, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + \nu \geq 0,462$ ve $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nün tam değeri olmak üzere,

$$(\lambda + 1)(\nu + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

ise $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu D 'de yıldızlıdır.

İspat: $p(z) = \frac{z(J_{\nu, \lambda}^{\mu})'(z)}{J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)}$, $(z \in D)$

ile tanımlanan $p(z)$ fonksiyonu ele alınsın.

$$\frac{J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)}{z} \neq 0, \quad (z \in D)$$

olduğundan $p(z)$, D 'de analitik olup $p(0)=1$ koşulunu sağlar. D 'deki her z için $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ olduğunu gösterirsek teoremi ispatlamış oluruz. Eğer $z \in D$ için $|p(z)-1| < 1$ ise $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ olduğunu göstermek kolaydır. $\lambda \geq -1/2$ için

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k)} \leq \frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nün tam değeri olmak üzere $\lambda + v \geq 0,462$ iken

$\Gamma(v + \lambda + 1 + (k-1)\mu) \geq \Gamma(v + \lambda + 1 + (k-1)\llbracket \mu \rrbracket)$ olduğundan,

$$\frac{\Gamma(v + \lambda + 1)}{\Gamma(v + \lambda + 1 + (k-1)\mu)} \leq \frac{1}{(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket(k-1)}}$$

(4.4) yazılabilir. Teoremin varsayımları altında (4.1), (4.3) ve (4.4)'ten $z \in D$ için,

$$\begin{aligned} \left| (J_{v,\lambda}^\mu)'(z) - \frac{J_{v,\lambda}^\mu(z)}{z} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{4^{k-1}} \frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} \frac{1}{(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket(k-1)}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{(4(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket})^{k-1}} \\ &= \frac{4(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket}}{(4(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1)^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_{v,\lambda}^\mu(z)}{z} \right| &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right| \\ &> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\ &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}(\lambda+1)^{k-1}} \frac{1}{(v+\lambda+1)^{(k-1)\llbracket \mu \rrbracket}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]})^{k-1}} \\
&= \frac{4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]} - 2}{4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]} - 1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.5) ve (4.6) dan,

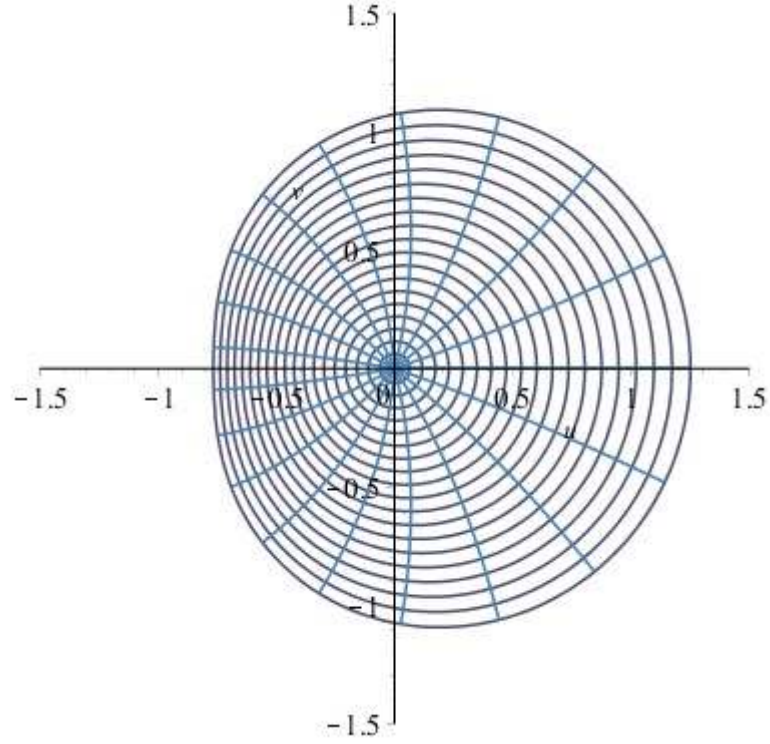
$$\begin{aligned}
|p(z) - 1| &= \left| \frac{z(J_{\nu,\lambda}^{\mu})'(z)}{J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)} - 1 \right| \\
&= \left| \frac{\frac{(J_{\nu,\lambda}^{\mu})'(z) - \frac{J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)}{z}}{z}}{\frac{J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)}{z}} \right| \\
&< \frac{4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]}}{(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]} - 1)(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]} - 2)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan eğer

$$(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]} > \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

ise $|p(z) - 1| < 1$ sonucu çıkarılır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.8. $J_{1, -\frac{1}{2}}^{\frac{14}{10}}(z)$ fonksiyonu D birim diskinde yıldızlıdır. (Şekil 4.3)



Şekil 4.3 $J_{1, -\frac{1}{2}}^{14}(z)$ fonksiyonu altında D birim diskinin görüntüsü

Teorem 4.1.9. $\nu, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + \nu \geq 0,462$ ve $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nin tam değeri olmak üzere $(\lambda + 1)(\nu + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > 2$ ise $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu D birim diskinde konvektir.

İspat $p(z)$ fonksiyonunu

$$p(z) = 1 + \frac{z(J_{\nu, \lambda}^{\mu})''(z)}{(J_{\nu, \lambda}^{\mu})'(z)}, \quad (z \in D)$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon D 'de analitiktir ve $p(0) = 1$ dir. $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ 'nin D 'de konveks olduğunu kanıtlamak için $|p(z) - 1| < 1$, $z \in D$ olduğunu göstermeliyiz.

$k \geq 1$ için $k(k-1) \leq 2^k$ olduğundan, (4.1), (4.3) ve (4.4)'ten, $z \in D$ için,

$$\left| z(J_{\nu, \lambda}^{\mu})''(z) \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\nu+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{4^{k-1}(\lambda+1)^{k-1}(v+\lambda+1)^{(k-1)\llbracket \mu \rrbracket}} \\
&\leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket})^{k-1}} \\
&= \frac{2}{2(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak bulunur. Ayrıca $k \geq 1$ için $k \leq 2^{k-1}$ olduğundan, (4.1), (4.3), (4.4)'ten ve verilen hipotezler altında,

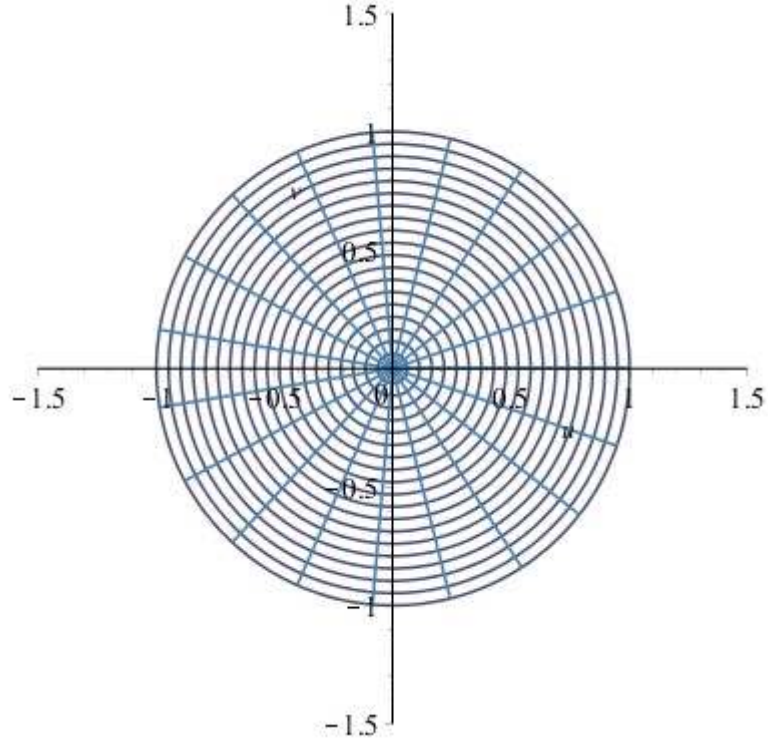
$$\begin{aligned}
| (J_{v,\lambda}^{\mu})'(z) | &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right| \\
&> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\
&\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{4^{k-1}(\lambda+1)^{k-1}(v+\lambda+1)^{(k-1)\llbracket \mu \rrbracket}} \\
&\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket})^{k-1}} \\
&= \frac{2(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 2}{2(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.7) ve (4.8)'den,

$$\left| \frac{z(J_{v,\lambda}^{\mu})''(z)}{(J_{v,\lambda}^{\mu})'(z)} \right| < \frac{1}{(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1}$$

bulunur. Bu son ifade varsayımımıza göre 1'den küçüktür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.10. $J_{1,1}^3(z)$ fonksiyonu D birim diskinde konvektir. (Şekil 4.4)



Şekil 4.4 $J_{1,1}^3(z)$ altında D birim diskinin görüntüsü

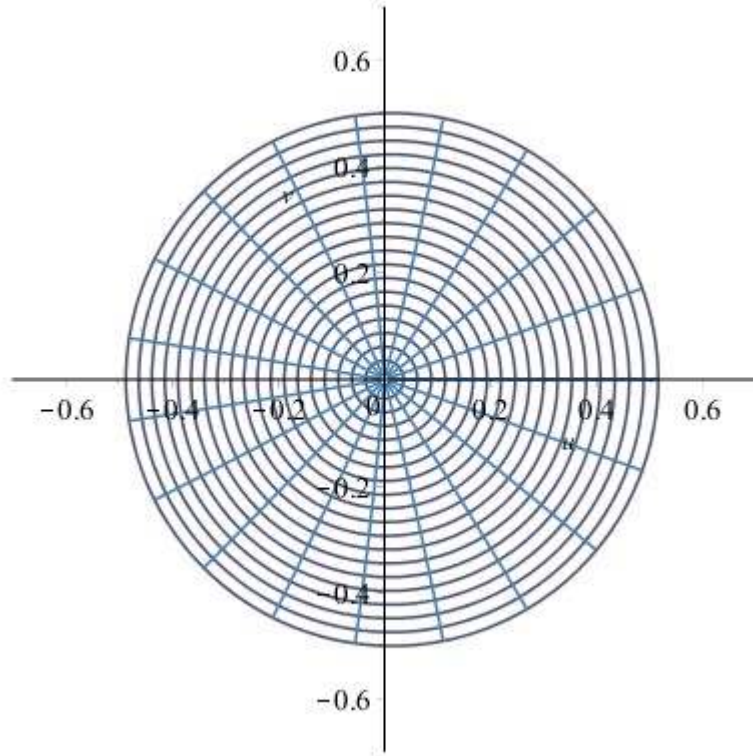
Teorem 4.1.11. $\nu, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + \nu \geq 0,462$ ise $J_{\nu,\lambda}^\mu(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde ünivalent ve yıldızlıdır.

İspat Teoremin hipotezleri altında, (4.1), (4.3), (4.4)'ten,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{J_{\nu,\lambda}^\mu(z)}{z} - 1 \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\nu+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right| \\
 &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}(\lambda+1)^{k-1}(\nu+\lambda+1)^{(k-1)\llbracket \mu \rrbracket}} \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket})^{(k-1)}} \\
 &= \frac{1}{4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yardımcı önerme 4.1.2'ye göre eğer bu son ifade 1'den küçükse veya eşdeğer olarak $(\lambda + 1)(\nu + \lambda + 1)^{[\mu]} > \frac{1}{2}$ ise, $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır. Bu ise teoremin varsayımına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.12. $J_{2, \frac{1}{3}}^1(z)$ fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır. (Şekil 4.5)



Şekil 4.5 $J_{2, \frac{1}{3}}^1(z)$ altında $D_{1/2}$ diskinin görüntüsü

Teorem 4.1.13. $\nu, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + \nu \geq 0,462$ ve $[\mu]$, μ 'nün tam değeri olmak üzere $(\lambda + 1)(\nu + \lambda + 1)^{[\mu]} > \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ ise, $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde konvektir.

İspat Teoremin hipotezleri altında, (4.1), (4.3), (4.4)'ten,

$$\left| (J_{\nu, \lambda}^{\mu})'(z) - 1 \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \Gamma(\lambda + 1) \Gamma(\nu + \lambda + 1)}{4^{k-1} \Gamma(\lambda + k) \Gamma(\nu + \lambda + 1 + (k-1)\mu)} z^{k-1} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{4^{k-1}(\lambda+1)^{k-1}(\nu+\lambda+1)^{(k-1)\llbracket \mu \rrbracket}} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket})^{(k-1)}} \\
&= \frac{8(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1}{(4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yardımcı önerme 4.1.3'e göre, eğer

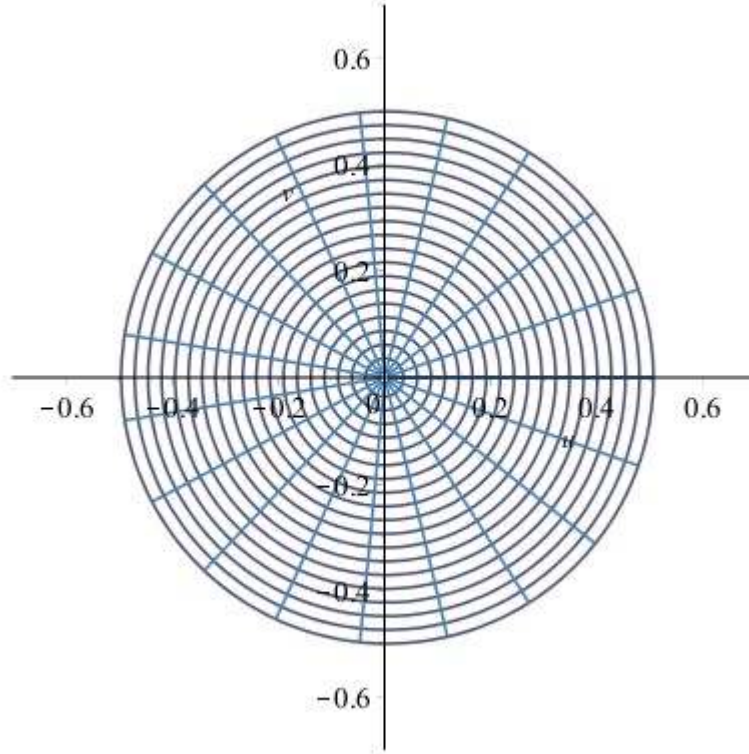
$$8(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1 < (4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1)^2$$

koşulu sağlanırsa, $J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde konvektir. Son eşitsizlik,

$$(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$$

olması durumunda geçerlidir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.14. $J_{2,1}^1(z)$ fonksiyonu $D_{1/2}$ diskinde konvektir. (Şekil 4.6)



Şekil 4.6 $J_{2,1}^1(z)$ fonksiyonu altında $D_{1/2}$ diskinin görüntüsü

Teorem 4.1.15. $v, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + v \geq 0,462$ ve $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nün tam değeri olmak üzere $(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > \frac{1}{8}(5 + \sqrt{17})$ ise, $J_{v,\lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu S_p sınıfındadır.

İspat $p(z) = \frac{z(J_{v,\lambda}^{\mu})'(z)}{J_{v,\lambda}^{\mu}(z)}$, ($z \in D$)

şeklinde tanımlanan $p(z)$ fonksiyonu ele alınsın. Yardımcı Önerme 4.1.4'ün (i) maddesinden,

$$|p(z) - 1| < \frac{1}{2}$$

olduğunu göstermeliyiz. (4.5) ve (4.6)'dan,

$$\begin{aligned} |p(z) - 1| &= \left| \frac{z(J_{v,\lambda}^{\mu})'(z)}{J_{v,\lambda}^{\mu}(z)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{(J_{v,\lambda}^{\mu})'(z) - \frac{J_{v,\lambda}^{\mu}(z)}{z}}{\frac{J_{v,\lambda}^{\mu}(z)}{z}} \right| \\ &< \frac{4(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket}}{(4(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 1)(4(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} - 2)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadenin $\frac{1}{2}$ 'den küçük olması, $(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > \frac{1}{8}(5 + \sqrt{17})$ olması durumunda sağlanır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.16. $J_{\frac{1}{2},1}^1(z)$ fonksiyonu S_p sınıfındadır.

Teorem 4.1.17. $v, \mu > 0$ ve $\lambda \geq -1/2$ olsun. Eğer $\lambda + v \geq 0,462$ ve $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nün tam değeri olmak üzere $(\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket} > 3$ ise, $J_{v,\lambda}^{\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu UCV sınıfındadır.

İspat Yardımcı Önerme 4.1.4'ün (ii) maddesinden,

$$\left| \frac{z(J_{v,\lambda}^\mu)''(z)}{(J_{v,\lambda}^\mu)'(z)} \right| < \frac{1}{2}$$

olduğunu göstermeliyiz. (4.7) ve (4.8)'den,

$$\left| \frac{z(J_{v,\lambda}^\mu)''(z)}{(J_{v,\lambda}^\mu)'(z)} \right| < \frac{1}{(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{[\mu]} - 1}$$

bulunur. Bu son ifadenin $\frac{1}{2}$ 'den küçük olması, $(\lambda+1)(v+\lambda+1)^{[\mu]} > 3$ olması durumunda sağlanır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.1.18. $J_{2,2}^2(z)$ fonksiyonu *UCV* sınıfındadır.

4.2 Genelleştirilmiş Wright-Bessel Fonksiyonlarının Kısmi Toplamları

Bu bölümde Genelleştirilmiş Wright-Bessel Fonksiyonlarının Kısmi Toplamları hesaplanarak bu kısmi toplamlar için üst sınırlar belirlenecektir.

f fonksiyonu verildiğinde, $\Lambda[f]: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Lambda[f](z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^k \quad (4.9)$$

ile tanımlanan dönüşüme bu fonksiyonun Alexander dönüşümü denir [14].

Bu bölümde fonksiyonun türevlerini de kullanacağımız için alt ve üst indislerde oluşabilecek karışıklıkları önlemek amacıyla $J_{v,\lambda}^\mu(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu için $J_{v,\lambda,\mu}$ gösterimi kullanılacaktır. Ayrıca

$v, \mu > 0$, $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ ve $z \in D$ olarak kabul edilecektir.

Buradaki amacımız ise,

$$(J_{v,\lambda,\mu})_n(z) = z + \sum_{k=2}^n a_k z^k,$$

$J_{v,\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun n . kısmi toplamlar dizisi ve $\Lambda(J_{v,\lambda,\mu})$, $J_{v,\lambda,\mu}$ fonksiyonunun Alexander dönüşümü olmak üzere,

$$\Re \left\{ \frac{J_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)} \right\}, \quad \Re \left\{ \frac{(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)}{J_{v,\lambda,\mu}(z)} \right\}, \quad \Re \left\{ \frac{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)} \right\}, \quad \Re \left\{ \frac{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}{J'_{v,\lambda,\mu}(z)} \right\},$$

$$\Re \left\{ \frac{\Lambda(J_{v,\lambda,\mu})(z)}{(\Lambda(J_{v,\lambda,\mu}))_n(z)} \right\} \text{ ve } \Re \left\{ \frac{(\Lambda(J_{v,\lambda,\mu}))_n(z)}{\Lambda(J_{v,\lambda,\mu})(z)} \right\}$$

için üst sınırlar bulmaktır.

Bu bölümdeki teoremleri ispatlamak için öncelikle aşağıdaki yardımcı önermeyi vermek gerekir.

Yardımcı Önerme 4.2.1. $v, \mu > 0$, $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda + v \geq 0,462$ ve $\llbracket \mu \rrbracket$, μ 'nün tam değeri olmak üzere,

$$M = (\lambda + 1)(v + \lambda + 1)^{\llbracket \mu \rrbracket}$$

olsun. Bu durumda $J_{v,\lambda,\mu} : D \rightarrow \mathbb{C}$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

- (i) $|J_{v,\lambda,\mu}(z)| \leq \frac{4M}{4M-1}, \quad (z \in D)$
- (ii) $|J'_{v,\lambda,\mu}(z)| \leq \frac{16M^2}{(4M-1)^2}, \quad (z \in D)$
- (iii) $|\Lambda[J_{v,\lambda,\mu}](z)| \leq \frac{8M-1}{8M-2}, \quad (z \in D).$

İspat

- (i) (4.3) ile (4.4) eşitsizliklerini ve $|z+w| \leq |z|+|w|$ şeklindeki iyi bilinen üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$|J_{v,\lambda,\mu}(z)| = \left| z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^k \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} \frac{1}{(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket(k-1)}} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4M} \right)^{k-1} \\
&= \frac{4M}{4M-1} \quad (z \in D)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(ii) Yine (4.3) ve (4.4) ile verilen eşitsizlikleri kullanarak, üçgen eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
|J'_{v,\lambda,\mu}(z)| &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^{k-1} \right| \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} \frac{1}{(v+\lambda+1)^{\llbracket \mu \rrbracket(k-1)}} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(4M)^{k-1}} \\
&= \frac{16M^2}{(4M-1)^2} \quad (z \in D)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(iii) $k \geq 2$ olduğunu biliyoruz. (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri ile birlikte üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
|\Lambda[J_{v,\lambda,\mu}](z)| &= \left| z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{k4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} z^k \right| \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{k4^{k-1}\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 4^{k-1}} \frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} \frac{1}{(\nu+\lambda+1)^{[\mu](k-1)}} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4M} \right)^{k-1} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4M} \right)^{k-1} \\
&= \frac{8M-1}{8M-2} \quad (z \in D)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece Yardımcı Önerme 4.2.1'in ispatı tamamlanır.

w fonksiyonu, D 'de analitik olsun. Bundan sonra, $z \in D$ için aşağıdaki iyi bilinen sonuç kullanılacaktır:

$$|w(z)| < 1, (z \in D) \text{ olması, } \Re \left\{ \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \right\} > 0 \text{ olması için gerekli ve yeterlidir.}$$

Teorem 4.2.2. $J_{\nu,\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu verilsin. $M = (\lambda+1)(\nu+\lambda+1)^{[\mu]}$ olmak üzere,

$$\Re \left\{ \frac{J_{\nu,\lambda,\mu}(z)}{(J_{\nu,\lambda,\mu})_n(z)} \right\} \geq \frac{4M-2}{4M-1} \quad (4.10)$$

ve

$$\Re \left\{ \frac{(J_{\nu,\lambda,\mu})_n(z)}{J_{\nu,\lambda,\mu}(z)} \right\} \geq \frac{4M-1}{4M} \quad (4.11)$$

şeklindedir.

İspat

$$\frac{J_{\nu,\lambda,\mu}(z)}{(J_{\nu,\lambda,\mu})_n(z)} = \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}} = 1 + \dots \quad (z \in D)$$

ve

$$\frac{(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)}{J_{v,\lambda,\mu}(z)} = \frac{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}} = 1 + \dots \quad (z \in D)$$

olduğundan, $z \rightarrow \frac{J_{v,\lambda,\mu}}{(J_{v,\lambda,\mu})_n}(z)$ ve $z \rightarrow \frac{(J_{v,\lambda,\mu})_n}{J_{v,\lambda,\mu}}(z)$ fonksiyonlarının görüntü kümeleri orijini içermez. Bunun anlamı, $(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)$ ve $J_{v,\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonlarının $z \in D$ için sıfıra eşit olmamasıdır.

Yardımcı Önerme 4.2.1'in (i) maddesinden,

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \leq \frac{4M}{4M-1}$$

veya eşdeğer olarak,

$$(4M-1) \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \leq 1$$

olur. Burada

$$a_k = \frac{1}{4^{k-1}} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k)\Gamma(v+\lambda+1+(k-1)\mu)} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} (4M-1) \left\{ \frac{J_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)} - \frac{4M-2}{4M-1} \right\} &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + (4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}} \\ &=: \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$w(z) = \frac{(4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + (4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}}$$

ve

$$|w(z)| \leq \frac{(4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k| - (4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}$$

elde edilir. Böylece,

$$2(4M-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq 2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k|$$

olması, $|w(z)| \leq 1$ olması için gerekli ve yeterli olur ki bu da,

$$\sum_{k=2}^n |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} (4M-1) |a_k| \leq 1 \quad (4.13)$$

koşulu ile eşdeğerdir.

(4.13)'ün sol tarafının üstten $(4M-1) \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|$ ile sınırlandığını göstermek yeterlidir. Bu

ise,

$$\sum_{k=2}^n (4M-2) |a_k| \geq 0$$

olması demektir.

Diğer taraftan, (4.11)'i ispatlamak için,

$$4M \left\{ \frac{(J_{v,\lambda,\mu})_n(z)}{J_{v,\lambda,\mu}(z)} - \frac{4M-1}{4M} \right\} = \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1} - 4M \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-1}}$$

$$=: \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$|w(z)| \leq \frac{4M \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k| - (4M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}$$

olarak yazılır. Bu ise $|w(z)| \leq 1$ koşulunun sağlanması için,

$$\sum_{k=2}^n |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} (4M-1) |a_k| \leq 1 \quad (4.14)$$

olması demektir. (4.14)'ün sol tarafı üstten $(4M-1) \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|$ ile sınırlı olduğundan ispat tamamlanır.

Bir sonraki teoremden türevleri içeren oranlar ele alınacaktır.

Teorem 4.2.3. $J_{v,\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu verilsin. $M = (\lambda+1)(v+\lambda+1)^{[\mu]}$ olmak üzere,

$$\Re \left\{ \frac{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)} \right\} \geq \frac{16M^2 - 16M + 2}{(4M-1)^2} \quad (4.15)$$

ve

$$\Re \left\{ \frac{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}{J'_{v,\lambda,\mu}(z)} \right\} \geq \frac{(4M-1)^2}{16M^2} \quad (4.16)$$

şeklindedir.

İspat $z \in D$ için $z \rightarrow \frac{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}$ ve $z \rightarrow \frac{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}$ fonksiyonlarının görüntü

kümelerinin orijini içermediği kolaylıkla görülebilir. Çünkü,

$$\frac{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)} = \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n k a_k z^{k-1}} = 1 + \dots \quad (z \in D)$$

ve

$$\frac{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}{J'_{v,\lambda,\mu}(z)} = \frac{1 + \sum_{k=2}^n k a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^{k-1}} = 1 + \dots \quad (z \in D)$$

şeklindedir. Bunun anlamı, $(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)$ ve $J'_{v,\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonlarının $z \in D$ için sıfıra eşit olmamasıdır.

Yardımcı Önerme 4.2.1'in (ii) maddesinden,

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \leq \frac{(4M)^2}{(4M-1)^2}$$

olduğunu görürüz ki bu da, a_k , (4.12) ile verilmiş olmak üzere,

$$\frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \leq 1$$

olması demektir. Buradan,

$$w(z) = \frac{\frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k z^{k-1}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n ka_k z^{k-1} + \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k z^{k-1}}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \left\{ \frac{J'_{v,\lambda,\mu}(z)}{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)} - \frac{16M^2 - 16M + 2}{(4M-1)^2} \right\} &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n ka_k z^{k-1} + \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n ka_k z^{k-1}} \\ &=: \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece eğer,

$$\sum_{k=2}^n k|a_k| + \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leq 1 \quad (4.17)$$

ise,

$$w(z) \leq \frac{\frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n k|a_k| - \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1$$

olur.

(4.17)'nin sol tarafı üstten $\frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|$ ile sınırlıdır, bu da

$$\left(\frac{(4M-1)^2}{8M-1} - 1 \right) \sum_{k=2}^n k|a_k| \geq 0$$

olması demektir.

Sonuç (4.16)'yı ispatlamak için,

$$|w(z)| \leq \frac{\frac{16M^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n k|a_k| - \frac{16M^2 - 16M + 2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1$$

olmak üzere,

$$\frac{16M^2}{8M-1} \left\{ \frac{(J_{v,\lambda,\mu})'_n(z)}{J'_{v,\lambda,\mu}(z)} - \frac{(4M-1)^2}{16M^2} \right\} = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

yazılır. Bu son eşitsizlik,

$$\sum_{k=2}^n k|a_k| + \frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leq 1 \quad (4.18)$$

olması demektir. (4.18)'in sol tarafı üstten $\frac{(4M-1)^2}{8M-1} \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|$ ile sınırlı olduğundan ispat tamamlanır.

Bir sonraki teoremda $J_{v,\lambda,\mu}$ fonksiyonunun Alexander dönüşümünü içeren oranları ele alınacaktır.

Teorem 4.2.4. $J_{v,\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonu verilsin. $M = (\lambda+1)(v+\lambda+1)^{[\mu]}$ ve $\Lambda[J_{v,\lambda,\mu}]$, $J_{v,\lambda,\mu}$ fonksiyonunun Alexander dönüşümü olmak üzere,

$$\Re \left\{ \frac{\Lambda[J_{v,\lambda,\mu}](z)}{\left(\Lambda[J_{v,\lambda,\mu}] \right)_n(z)} \right\} \geq \frac{8M-3}{8M-2} \quad (4.19)$$

ve

$$\Re \left\{ \frac{\left(\Lambda \left[J_{v,\lambda,\mu} \right] \right)_n (z)}{\Lambda \left[J_{v,\lambda,\mu} \right] (z)} \right\} \geq \frac{8M-2}{8M-1} \quad (4.20)$$

şeklindedir.

İspat Burada sadece (4.19)'u Teorem 4.2.2'nin ispatına benzer olarak ispatlayacağız.

(4.20)'nin ispatı, (4.11)'in ispatındakine benzer hesaplamalar kullanılarak yapılabilir.

Yardımcı Önerme 4.2.1'in (iii) maddesinden,

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \leq \frac{8M-1}{8M-2}$$

olduğunu görürüz ki bu da, a_k , (4.12) ile verilmiş olmak üzere,

$$(8M-2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \leq 1$$

olması demektir. Buradan,

$$w(z) = \frac{(8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^{k-1}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k} z^{k-1} + (8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^{k-1}}$$

ve

$$|w(z)| \leq \frac{(8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}}{2 - 2 \sum_{k=2}^n \frac{|a_k|}{k} - (8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} (8M-2) \left\{ \frac{\Lambda \left[J_{v,\lambda,\mu} \right] (z)}{\left(\Lambda \left[J_{v,\lambda,\mu} \right] \right)_n (z)} - \frac{8M-3}{8M-2} \right\} &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k} z^{k-1} + (8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k} z^{k-1}} \\ &= \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, $|w(z)| \leq 1$ koşulunun sağlanması için,

$$\sum_{k=2}^n \frac{|a_k|}{k} + (8M-2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \leq 1 \quad (4.21)$$

olmalıdır. (4.21)'in sol tarafının üstten $(8M-2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}$ ile sınırlı olduğunu yani,

$$\sum_{k=2}^n (8M-3) \frac{|a_k|}{k} \geq 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece ispat tamamlanır.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının giriş bölümü kompleks analiz, ünivalent fonksiyonlar ve özel fonksiyonların tarihsel gelişimi hakkında kısa bir bilgilendirme yapar.

İkinci bölüm, ayrıntılı olarak verilen kompleks analizin temel tanım ve kavramlarından oluşur.

Üçüncü bölüm olan ünivalent fonksiyonlar bölümünde, daha çok bizim çalışmamızla ilgili olan fonksiyonlar üzerine yoğunlaşmıştır. İlk olarak ünivalent fonksiyonlar tanıtılmış, bu fonksiyonlarla ilgili olan konveks, yıldızlı, konvekse yakın gibi önemli alt sınıflar ve bu sınıfların özellikleri ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Yine bu bölümde Gamma fonksiyonu, Bessel fonksiyonu, Wright fonksiyonu ve tez çalışmamızın konusu olan genelleştirilmiş Wright Bessel (-Lommel) fonksiyonunun tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Wright Bessel (-Lommel) fonksiyonu ele alınarak öncelikle bu fonksiyon normalize edilmiştir. Daha sonra normalize edilmiş genelleştirilmiş Wright Bessel fonksiyonunun birim diskte yıldızlı, konveks, konvekse yakın fonksiyon sınıflarına ait olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Yine bu fonksiyonun $D_{1/2}$ diskinde yıldızlı ve konveks olma koşulları incelenmiş, ardından S_p sınıfına ait olma koşulu bulunmuştur. Ayrıca bu bölümde genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun kısmi toplamları incelenmiş ve bu kısmi toplamalar için üst sınırlar belirlenmiştir.

Literatürde genelleştirilmiş Wright-Bessel fonksiyonunun geometrik özellikleri ve kısmi toplamları hakkında herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle elde edilen sonuçların literatüre katkı sağladığı ve bu alanda çalışan araştırmacılara yol göstereceği açıktır. Elde edilen sonuçların bir kısmı “*Annals of the University of Craiova*” dergisinde yayınlanmıştır [44]. Bir kısmı ise yayına gönderilmiş olup halen incelemededir.

KAYNAKLAR

- [1] A. W. Goodman, *Univalent Functions Vols. I and II*, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.
- [2] R. P. Agarwal, K. Perera and S. Pinelas, *An Introduction to Complex Analysis*. Springer, Boston, MA, 2011.
- [3] P. L. Duren, “Univalent Functions.” *Grundlehren der Math. Wissenschaften 259*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [4] L. Bieberbach, “Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* pp. 940–955, 1916.
- [5] P. Koebe, “Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.” *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, pp: 191-210. 1907.
- [6] L. De Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture.” *Acta Math*, 154, pp 137–152, 1985.
- [7] C. Carathéodory, “Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.” *Math. Ann.*, 64, pp. 95-115, 1907.
- [8] K. Noshiro, “On the theory of schlicht functions.” *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.* 2, pp. 129-155, 1934-1935.
- [9] S. E. Warschawski, “On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping.” *Trans. Amer. Math. Soc.* 38: pp. 310-340, 1935.
- [10] I. Graham and G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*. Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [11] S. Ponussamy ve H. Silverman, *Complex Variables with Applications*. Birkhauser, Boston, 2006.

- [12] E. Study, *Konforme Abbildung Einfache-Zusammenhangender Bereiche*. B. G. Teubner, Leipzig/Berlin, 1913.
- [13] R. Nevanlinna, “Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten.” *Översikt av Finska Vetenskaps, Societetens Förhandlingar*, No. 6 63, pp. 1-21, 1920-1921.
- [14] J. W. Alexander, “Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions.” *Ann. of Math.*, 17: pp. 12-22, 1915.
- [15] C. Loewner, “Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden.” *Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig*. 69: pp. 89-106, 1917.
- [16] H. Grunsky, “Zwei Bemerkungen zur konformen.” *Abbildung, Jber. Deutsch. Math. Verein*. 43: pp. 140-143, 1934.
- [17] M. S. Robertson, “On the theory of univalent functions.” *Ann. of Math.* 37: pp. 374–408, 1936.
- [18] W. Kaplan, “Close-to-convex schlicht functions.” *Michigan Math. J.* 1: pp. 169-185, 1952.
- [19] M. O. Reade, “On close-to-convex univalent functions.” *Mich. Math. J.* 3: pp. 59-62, 1955-56.
- [20] A.W. Goodman, “On Uniformly Starlike Functions.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 155: pp. 364-370, 1991a.
- [21] A.W. Goodman, “On Uniformly Convex Functions.” *Annales Polonici Mathematici* LVI.1, 1991b.
- [22] F. Ronning, “A Survey on Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions.” *Ann. Polon. Math.* Vol. XLVII. 13 (A) pp. 123-124, 1993.
- [23] W. Ma and D. Minda, “Uniformly convex functions.” *Ann. Polon. Math.* 57 (2), pp. 165-175, 1992.

- [24] F. Ronning, "Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions." *Proc. Am. Math. Soc.*, pp. 118, 189-196, 1993.
- [25] S. Kanas and A. Wisniowska, "Conic regions and k -uniform convexity." *J. Comput. and Math* 105: pp. 327–336, 1999.
- [26] S. Kanas and A. Wisniowska, "Conic domains and starlike functions." *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 45 (4): pp. 647–657, 2000.
- [27] D. Bernoulli, "Demonstrationes theorematum suorum de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae." *Comm. Acad. Sci. Petr.* 7: pp. 162–173, 1740.
- [28] L. Euler, "De motu vibratorum tympanorum." *Comm. Acad. Sci. Petr.* 10: pp. 243–260; *Opera Omnia II*, vol. 10, pp. 344–358, 1759.
- [29] F. W. Bessel, "Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen aus der Bewegung der Sonne entsteht." *Berliner Abh.*, pp. 1–52, 1824.
- [30] R. K. Brown, "Univalence of Bessel functions." *Proc. Am. Math. Soc.* 11(2), pp. 278–283, 1960.
- [31] R. K. Brown, "Univalence of normalized solutions of $W''(z) + p(z)W(z) = 0$ " *Int. J. Math. Math. Sci.* 5, pp. 459–483, 1982.
- [32] E. Kreyszig, J. Todd, "The radius of univalence of Bessel functions." *Ill. J. Math.* 4, pp. 143–149, 1960.
- [33] A. Baricz, "Geometric properties of generalized Bessel functions." *Publ. Math. Debrecen* 73, pp. 155–178, 2008.
- [34] A. Baricz, "Applications of the admissible functions method for some differential equations." *Pure Math. Appl.* 13(4), pp. 433–440, 2002.
- [35] E. M. Wright, "On the coefficients of power series having exponential singularities." *J. London Math. Soc.* 8, pp. 71-79, 1933.

- [36] J. K. Prajapat, "Certain geometric properties of the Wright function." *Integral Transforms Spec. Funct.* 26, pp. 203–212, 2015.
- [37] M. U Din, M. Raza, N. Yagmur and S. N. Malik, "On Partial Sums of Wright Functions." *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, Vol. 80, Iss. 2, 2018.
- [38] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San Diego: Academic press, 1999.
- [39] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach: New York, 1993.
- [40] F. Mainardi, *Fractional Calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics*, Springer Verlag Wien, Austria, 1971.
- [41] E. Buckwar, Y. Luchko, "Invariance of a partial differential equation of fractional order under the lie group of scaling transformations." *J. Math. Anal. Appl.* 227, pp. 81-97, 1998.
- [42] Y. Luchko, R. Gorenflo, "Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order." *Fract. Calc. Appl. Anal.* 1, pp. 63-78, 1998.
- [43] R. Gorenflo, Y. Luchko and F. Mainardi, "Analytic properties and applications of Wright functions." *Frac. Cal. App. Anal.* 2, 4, pp. 383-414, 1999.
- [44] G. Akın and S. S. Eker, "Geometric Properties of the Generalized Wright-Bessel Functions." *Annals of the University of Craiova*, Volume 50(2), pp. 383–393, 2023.
- [45] S. Ozaki, "On the theory of multivalent functions." *Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku*, Section A, 2(40), pp. 167-188, 1935.
- [46] TH. MacGregor, "The radius of univalence of certain analytic functions II." *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14, pp. 521-524, 1963.
- [47] TH. MacGregor, "A class of univalent functions." *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, pp. 311-317, 1964.
- [48] V. Ravichandran, *On uniformly convex functions*. *Ganita*, 53, pp. 117-124, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

AKIN, Gülfem

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2017
Tezsiz Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2007
Lisans	İnönü Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü	2005
Lise	Diyarbakır İmam Hatip Lisesi	2001

İş Denevimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2008-2013	Diyarbakır Çınar Lisesi	Öğretmen
2013-2016	Diyarbakır Çınar Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen
2016-	Diyarbakır Kayapınar Ahmedî Hani Anadolu Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce (Yökdil 60)

Yayınlar

1. G.Akın and S.Sümer Eker; Coefficient Estimates For a Certain Class Of analytic And Bi-Univalent Functions Defined By Fractional Derivative, Comptes Rendus Mathematique, Volume 352, Issue 12, December 2014, Pages 1005– 1010, <https://doi.org/10.1016/j.crma.2014.09.022>.
2. G.Akın, S. Sümer Eker, Geometric Properties of the Generalized Wright-Bessel Functions, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series Vol 50 (2), 2023, <https://doi.org/10.52846/ami.v50i2.1720>.
3. G. Akın, S. Sümer Eker, Partial Sums of the Generalized Wright-Bessel Functions, incelemede.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Gülfem AKIN		
Öğrenci No	17804601		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Genelleştirilmiş Wright-Bessel Fonksiyonunun Geometrik Özellikleri		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	102		
Raporlama Tarihi	02/02/2024		
Benzerlik Oranı (%)	% 24		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 102 sayfalık kısmına ilişkin, 02/02/2024 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☒Diğer (Herşey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Gülfem AKIN

Tarih: 02/02/2024

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

İmza:

Tarih: 02/02/2024

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: 02/02/2024