

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ p -SAYILARI VE
KOMBİNATORİYAL YAKLAŞIM İLE UYGULAMALARI

Berke CENGİZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2023

Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Berke CENGİZ tarafından hazırlanan bu çalışma 08/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği/oy çokluğu (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatma TOYOĞLU

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bülent ÇAĞLAR

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“Genelleştirilmiş Fibonacci p -Sayıları ve Kombinatorial Yaklaşım ile Uygulamaları” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 08/05/2023

(İmza)

Berke CENGİZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ p -SAYILARI VE KOMBİNATORİYAL YAKLAŞIM İLE UYGULAMALARI

Berke CENGİZ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada yeni bir k parametresine göre bir yineleme bağıntısı ile sayılar arasındaki uzaklık tanımı kullanılarak hem Fibonacci, Jacobsthal, Narayana sayılarını hem de uzaklık durumundaki Fibonacci p -sayılarını genelleştiren Fibonacci (k, p) -sayıları tanımlanmıştır. Bu sayıların dizileri ve kombinatoriyal yorumları sunulmuştur. Bu dizilerin n -inci terimini bulmamıza olanak sağlayan açık formüller ve üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayıları için bir döşeme yaklaşımı verilmiştir. Fibonacci p -sayıları $r = 1$ den $r = p + 1$ e kadar çeşitli $1 \times r$, r -ominolar kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmış ve Fibonacci (k, p) -sayıları, p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareler ve renkli $1 \times p$, p -ominolar kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmıştır. Ayrıca bu sayıların özel alt indislerle çarpım eşitlikleri ve toplam formülleri, özelliklerinin türetilmesine olanak sağlayan döşeme yorumları ile verilmiştir.

2023, 101 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Döşeme, Fibonacci sayısı, Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Kombinatoriyal formül

ABSTRACT

MSc Thesis

GENERALIZED FIBONACCI p -NUMBERS AND THEIR APPLICATIONS WITH COMBINATORIAL APPROACH

Berke CENGİZ

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, Fibonacci (k, p) -numbers which generalize both Fibonacci, Jacobsthal, Narayana numbers and Fibonacci p -numbers in the distance sense are defined by using the definition of the distance between numbers by a recurrence relation according to a new parameter k . Sequences and combinatorial interpretations of these numbers are presented. Explicit formulas that allow us to calculate the n th term and generating functions of these sequences are obtained. Also, a tiling approach to the Fibonacci p -numbers and the Fibonacci (k, p) -numbers is given. The Fibonacci p -numbers are interpreted as the number of ways to tile a $1 \times n$ board by using various $1 \times r$, r -ominoes from $r = 1$ up to $r = p + 1$, and the Fibonacci (k, p) -numbers are interpreted as the number of ways to tile a $1 \times n$ board by using 1×1 squares and colored $1 \times p$, p -ominoes, where there are k different colors for p -ominoes. Moreover, product identities and sum formulas of these numbers with special subscripts are given by tiling interpretations that allow the derivation of their properties.

2023, 101 Pages

Keywords: Combinatorial formula, Fibonacci number, Generalized Fibonacci numbers, Tilings

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ'a, değerli öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma TOYOĞLU'na ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Bugünlere gelmemde büyük emeği olan babam Bülent CENGİZ'e ve annem Erser CENGİZ'e, her zaman yanımda olan kardeşim Barkın CENGİZ'e ve çalışmalarım boyunca bana hep destek vererek motive eden eşim Seda CENGİZ'e ve bu süreçte gülüşüyle moral bulduğum oğlum Bartu CENGİZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Berke CENGİZ

Mayıs, 2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
TABLolar LİSTESİ.....	vi
SİMGELER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	8
2.1. Genel Kavramlar	8
2.2. Fibonacci Dizileri	9
2.2.1. Fibonacci dizilerinin döşeme yorumları.....	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. k -Fibonacci Sayıları ve Özellikleri	20
3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ve Özellikleri	33
3.2.1. Fibonacci p -sayıları ve özellikleri.....	33
3.2.2. Uzaklık Fibonacci sayıları.....	47
3.3. Beş Parametre ile Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları	64
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	73
4.1. Fibonacci (k, p) -Sayıları ve Özellikleri	73
4.2. Fibonacci (k, p) -Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları	78
4.3. Fibonacci (k, p) -Sayılarının Kombinatoryal Temsilleri	81
4.4. Genelleştirilmiş Fibonacci p -Sayılarının Döşeme Yorumları.....	85
4.5. Genelleştirilmiş Fibonacci p -Sayılarının Özellikleri	92
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	97
5.1. Sonuçlar.....	97
5.2. Öneriler.....	97
KAYNAKLAR	98

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. n hücreli bir $1 \times n$ tahtası	16
Şekil 2.2. F_2, F_3, F_4 ve F_5 sayılarının döşeme yorumları	18
Şekil 3.1. $F_{2,3}^1(2,3;5)$ sayısının döşeme yorumu	69
Şekil 4.1. p_i hücreli bir $1 \times n$ tahtası	88
Şekil 4.2. $F_3(8)$ sayısının döşeme yorumu	90
Şekil 4.3. c_i hücreli bir $1 \times n$ tahtası	90



TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1. Fibonacci dizisinin bazı terimleri	10
Tablo 2.2. Lucas, Pell, Jacobsthal ve Narayana dizilerinin bazı terimi	11
Tablo 3.1. Bazı uzaklık Fibonacci sayıları.....	47
Tablo 3.2. Bazı negatif indisli uzaklık Fibonacci sayıları.....	48
Tablo 3.3. $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları.....	54
Tablo 3.4. Bazı negatif indisli $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları	55
Tablo 4.1. Fibonacci (k, p) -sayılarının özel durumları.....	74
Tablo 4.2. Fibonacci $(k, 1)$ -sayıları	76
Tablo 4.3. Fibonacci $(k, 2)$ -sayıları	76
Tablo 4.4. Fibonacci $(1, p)$ -sayıları	77
Tablo 4.5. Fibonacci $(2, p)$ -sayıları	77
Tablo 4.6. Bazı 2-ayrışım kümelere	86

SİMGELER

$\{Fd(k_1, n)\}_{n \geq 0}$	Uzaklık Fibonacci Sayı Dizileri
$\{F(k, n)\}_{n \geq 0}$	Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizileri
$\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Fibonacci Dizileri
$\{F_{k,n}(r)\}_{n \geq 0}$	Genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci Sayı Dizileri
$\{F_{k,p}(n)\}_{n \geq 0}$	(k, p) -Fibonacci Sayı Dizileri
$\{F_p(n)\}_{n \geq 0}$	Fibonacci p -Sayı Dizileri
$\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$	Fibonacci (k, p) -Sayı Dizileri
$\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$	Beş Parametre ile Genelleştirilmiş Fibonacci Dizileri
$\{F_n\}_{n \geq 0}$	Fibonacci Dizisi
$\{F_n\}_{n < 0}$	Negatif İndisli Fibonacci Dizisi
$\{F_2(k_2, n)\}_{n \geq 0}$	$(2, k)$ -Uzaklık Fibonacci Sayı Dizileri
$G_t(x)$	$\{t_n\}_{n \geq 0}$ Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Jacobsthal Dizileri
$\{J_n\}_{n \geq 0}$	Jacobsthal Dizisi
$\{J_n^{(k,c)}\}_{n \geq 0}$	(k, c) -Jacobsthal Sayı Dizileri
$\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Lucas Dizileri
$\{L_n\}_{n \geq 0}$	Lucas Dizisi
$\{N_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Narayana Dizileri
$\{N_n\}_{n \geq 0}$	Narayana Dizisi
$\{Pap(n)\}_{n \geq 0}$	Padovan p -Sayı Dizileri
$\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Pell Dizileri
$\{P_n\}_{n \geq 0}$	Pell Dizisi
$\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$	Padovan Dizisi
$\{P_p(i)\}_{n \geq 0}$	Pell (p, i) -Sayı Dizileri
$\{t_n\}_{n \geq 0}$	Homojen Lineer Yineleme Dizileri
$\{q_n\}_{n \geq 0}$	Modifiye Pell Dizisi
$\{q_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Modifiye k -Pell Dizileri

1. GİRİŞ

Cebirde farklı biçimlerde tanımlanan diziler bulunmaktadır. En çok ilgi gören diziler herhangi bir terimi kendisinden önceki terimler aracılığı ile hesaplanan yineleme (tekrarlama, indirgeme) dizileridir. Everest vd., lineer yineleme dizilerinin modern teorisini ve bunların genellemelerini detaylı bir şekilde sunmuşlardır (Everest vd., 2003). İkinci ve daha yüksek mertebeden yineleme bağıntılarıyla tanımlanan Fibonacci ve Fibonacci benzer diziler uzun yılladır cebir, fizik, kimya, biyoloji, bilgisayar biliminin yanı sıra sanatın farklı bilim dallarındaki birçok araştırmacının oldukça ilgisini çekmiştir.

Fibonacci tarafından yazılan Liber Abaci adlı eserde Edward Lucas gördüğü bir problemdeki 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını vermiştir. Bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş alanda çalışılan Fibonacci sayıları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanmıştır. Bu dizinin ikinci teriminden sonra her terimi, kendisinden önceki ikinci terimin bir önceki terime eklenmesiyle elde edilir. Yani, eklenen terimler arasındaki uzaklık 1 dir.

Fibonacci dizisi ve onun bağlantılı olduğu yüksek mertebeli diziler (tribonacci, quattranacci, k -nacci) genellikle tam sayı dizileri olarak gösterilir. Uzun yıllardır Fibonacci sayılarının ve dizilerinin genelleştirmeleri çalışılmaktadır. Fibonacci dizilerinin genelleştirilmesi çalışılırken farklı bakış açıları ortaya çıkmıştır. Bir taraftan sunulan genelleştirmeler iyi bilinen Fibonacci dizisinin başlangıç değerlerine ve terimlerinin katsayısına bağlıyken diğer taraftan ise Fibonacci dizisinin yineleme bağıntısındaki terimlerin arasındaki uzaklığa bağlı olarak sunulmuştur.

1960 ve 1961 yıllarında sunulan çalışmalarla, Fibonacci dizilerinin farklı mertebeden genelleştirmeleri sunulmuştur. Binet formülü, toplam formülleri ve birçok eşitlik verilmiştir (Miles, 1960; Horadam, 1961). Horadam 1965 yılında Fibonacci dizilerinin de genel hali olan ve Horadam dizileri olarak adlandırılan ikinci mertebeden yineleme dizilerini tanımlanmıştır (Horadam, 1965).

Fibonacci sayılarının en önemli genelleştirmesi olarak Lucas sayıları sunulmuştur. Lucas sayıları Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısı ve farklı başlangıç değerleri kullanılarak tanımlanmıştır. Hoggatt, 1969 yılında sunduğu çalışması ile Fibonacci ve Lucas sayılarını detaylı bir şekilde sunmuş ve özelliklerini incelemiştir (Hoggatt, 1969).

Fibonacci sayıları gibi yineleme bağıntılarıyla tanımlanan Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Naraya ve Naraya-Lucas gibi sayılar Fibonacci tipli ve Lucas tipli olarak incelenmiştir ve birçok farklı genelleştirmeleri sunulmuştur. Koshy literatürde bulunan Fibonacci ve Lucas dizileri ile genelleştirilmeleri üzerine sunulan hemen hemen her çalışmayı toplamış ve iki harika kitap şeklinde okuyuculara sunmuştur (Koshy, 2001; 2014).

Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısına keyfi bir tam sayı eklenerek, aynı başlangıç değerleri ile Pell ve Jacobsthal sayıları tanımlanmıştır. Narayana sayıları ise Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısındaki toplanan ardışık terimlerin arasındaki uzaklığın 1 düşünülmesi ile sunulmuştur. Bu sayıların dizilerinin özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir (Horadam 1971; 1996; Shanon ve Horadam, 1973; Stakhov, 1989; Allouche ve Johnson, 1996; Kalman ve Mena, 2003; Çağman, 2021a; 2021b).

Falcon ve Plaza Fibonacci dizisinin başlangıç değerleri ve terimlerin katsayılarını dikkate almış ve Fibonacci dizisinin yineleme bağıntısındaki terimlerin katsayı değeri için k parametresini düşünerek k -Fibonacci dizilerini, $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ yineleme bağıntısı ile sunmuştur. Ayrıca Binet formüllerini, üreteç fonksiyonları ve Pascal üçgeni kullanılarak bazı özellikleri elde edilmiştir (Falcon ve Plaza, 2007a; 2007b). Daha sonraki yıllarda bu çalışma araştırmacılar arasında Fibonacci dizisinin en ilgi gören genelleştirmesi olmuştur. Mikkawy ve Sogabe k -Fibonacci dizisinin yeni bir ailesini tanıtmıştır (Mikkawy ve Sogabe, 2010). Taşyurdu ve vd. ise bu yeni ailenin periyodu ile birçok özelliğini sunmuştur (Taşyurdu vd., 2016). Bolat ve Köse k -Fibonacci sayılarının birçok özelliğini vermişlerdir (Bolat ve Köse, 2010). Panwar ise 2021 yılında klasik Fibonacci, Pell, Jacobsthal dizileri ile k -Fibonacci dizisinin genel hali olarak genelleştirilmiş k -Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesini sunmuş ve genelleştirilmiş k -Fibonacci dizisinin ilginç özelliklerini belirterek üreteç fonksiyonunu elde etmiştir (Panwar, 2021).

Lucas, Pell, Jacobsthal ve Narayana sayılarının yineleme bağıntısındaki terimlerin katsayı değeri için keyfi parametreler düşünerek k -Fibonacci dizilerine benzer olarak k -Lucas, k -Pell, k -Jacobsthal ve k -Narayana sayıları tanımlanmış ve birçok özelliği elde edilmiştir.

Falcon 2012 yılında Lucas dizisinin yineleme bağıntısındaki terimlerin katsayısında bir k parametresini alarak k -Lucas dizisini tanımlamış ve bu sayılar için k -Lucas üçgeni, kombinatoryal formülü, üreteç fonksiyonu ve Binet formülü gibi önemli özelliklerini sunmuştur (Falcon, 2012). 2013 yılında, Pell dizisinin yineleme bağıntısındaki terimlerin katsayısında bir k parametresini alınarak tanımlanan k -Pell sayıları çalışılmıştır. Bu sayıların Binet formülü ile üreteç fonksiyonunun yanı sıra, Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi bazı önemli eşitlikleri sunulmuştur (Catarino, 2013). Ramirez ve Sirvent tarafından 2015 yılında k -Narayana dizisi üzerine sunulan çalışmada bilinen Narayana dizisi ile k -Narayana dizisi arasındaki ilişkiler ve bazı kombinatoryal özellikler incelenerek toplam formülleri matris yöntemleriyle verilmiştir (Ramirez ve Sirvent, 2015). Boussayoud vd., simetrik fonksiyonu kullanarak negatif indisli k -Fibonacci ve k -Jacobsthal sayılarını incelemişler ve birçok özelliğini sunmuşlardır (Boussayoud vd., 2018).

Taşyurdu 2019 yılında bilinen Fibonacci dizilerinin genelleştirmesi olan (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri ile ilişkili genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci-benzeri dizileri tanımlamış ve Binet formülü, toplam formülünün yanı sıra birçok özelliğini elde etmiştir (Taşyurdu, 2019).

Bilinen Fibonacci dizilerinin yineleme bağıntısında terimleri arasındaki uzaklık çeşitli parametrelere bağlı alınarak yeni genelleştirmeler sunulmuştur. Bu düşüncenin mimarı olan Stakhov 1970 li yıllarda yayınlanan eseriyle “Algoritmik ölçüm teorisi” nin temelini atmıştır. Algoritmik ölçüm teorisi, bilinen tüm sayı sistemlerini takip etmiştir. Ölçüm teorisi özellikle yeni ve bilinmeyen sayı sistemleri ile algoritmik “Fibonacci” ve “Binom” sayı sistemlerini ortaya çıkartmıştır. Bu nedenle algoritmik ölçüm teorisi, yeni sayı sistemleri için bir kaynaktır.

Stakhov bilinen Fibonacci dizilerinin yeni bir genelleştirmesi olarak Fibonacci p -sayılarını, yineleme bağıntısındaki terimleri arasındaki uzaklığı p parametresine bağı sunmuştur. Pascal üçgeninin “diagonal toplam” olarak da adlandırılan Fibonacci p -sayıları, $p \geq 0$, $n > p + 1$ tam sayılar olmak üzere $F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p + 1) = 1$ başlangıç değeri ile $F_p(n) = F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1)$ yineleme bağıntısı ile tanımlanmıştır (Stakhov, 1977). Stakhov ve Rozin Fibonacci p -sayıları için genel formüller vererek bu formüllerin Binet formüllerine benzer olduğunu göstermiştir. Ayrıca Lucas dizilerinin yineleme bağıntısında terimleri arasındaki uzaklık çeşitli parametrelere bağı alınmış ve yineleme dizilerinin yeni bir sınıfı olarak Lucas sayılarının bir genellemesi olan Lucas p -sayılarını tanımlanmıştır (Stakhov ve Rozin, 2005).

Kuhapatanakul 2016 yılında Fibonacci p -sayılarını ve Pascal üçgeninin bazı özelliklerini kullanarak Fibonacci p -sayıları için kombinatoryal formül elde etmiştir. Ayrıca Fibonacci p -sayılarının matris temsilini sunmuş ve bu matrislerin bazı özelliklerini kullanarak Fibonacci p -sayılarının özelliklerini vermiştir (Kuhapatanakul, 2016).

Fibonacci p -sayılarını elde etmek için kullanılan genelleştirme metodu birçok araştırmacıya ilham kaynağı olmuş ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ya da uzaklık durumundaki Fibonacci sayıları olarak adlandırılarak çeşitli çalışmalar literatüre kazandırılmıştır. Bilinen Pell sayıları ele alınarak Fibonacci p -sayılarına benzer şekilde, $0 \leq i \leq p$ için genelleştirilmiş Pell (p, i) -sayıları denilen Pell sayılarının bir genelleştirmesi verilmiştir (Kılıç, 2009).

2000 ve 2013 yıllarında sayılar arasındaki bilinen uzaklık kavramı, Fibonacci dizisinin yineleme bağıntısındaki terimleri arasında dikkate alınarak genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, uzaklık Fibonacci ve $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları olarak adlandırılan çalışmalar sunulmuştur. Bu sayılar bilinen Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısına benzer olarak terimlerin toplanmasıyla tanımlanmıştır. 2000 yılında sunulan genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, farklı başlangıç değerleri için yineleme bağıntısındaki toplanan terimlerden biri tam olarak $(n - 1)$ -inci Fibonacci sayısı iken diğeri özel olarak $(n - k)$ -ıncı Fibonacci sayısı alınarak tanımlanmıştır (Kwasnik ve Włoch, 2000).

2013 yılında uzaklık Fiboancci sayıları olarak adalandırılan genelleştirme, toplanan terimlerden bir tam olarak $(n - k + 1)$ -inci Fibonacci sayısı iken diğeri özel olarak $(n - k)$ -inci Fibonacci sayısı alınarak pozitif ve negatif indisli terimler için tanımlanmıştır. Bilinen Fibonacci ve Padovan sayılarını aynı anda genelleştiren bu sayılar için genel formüller ile toplam formülleri sunulmuştur. Ayrıca matris üreteçleri ve Pascal üçgeni kullanarak özellikleri elde edilmiştir (Bednarz vd., 2013). 2013 yılında $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları ise toplanan terimlerden bir tam olarak $(n - 2)$ -inci Fibonacci sayısı iken diğeri özel olarak $(n - k)$ -inci Fibonacci sayısı alınmış ve uzaklık Fibonacci sayıları ile uzaklık Lucas sayılarıyla ilişkili olarak sunulmuştur. Ayrıca negatif tam sayılar için bu sayıların farklı özellikleri ile grafiklerdeki temsilleri ve yorumları da incelenmiştir (Włoch vd., 2013).

2014 yılında k -Fibonacci dizileri için uzaklık durumu düşünülerek, yeni bir genelleştirmesi olan genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayıları ve özellikleri sunulmuştur (Falcon, 2014). 2017 yılında bilinen Padovan sayıları ele alınarak Fibonacci p -sayıları ve Pell (p, i) -sayılarına benzer şekilde Padovan p -sayıları tanımlanmış ve üreteç matrisi, Binet formülü, üstel gösterimi, kombinatoriyal yorumu ile toplam fonksiyonu gibi birçok özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sayılar m modülüne göre incelenmiş ve sonlu gruplarda uygulamaları çalışılmıştır (Deveci ve Karaduman 2017). 2019 yılında Jacobsthal dizisinin daha yüksek mertebeli bir genelleştirmesini sunulmuştur (Marques ve Trojovský, 2019). 2021 yılında ise iki parametreye bağlı olarak uzaklık durumundaki Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi, (k, p) -Fibonacci sayıları olarak sunulmuştur (Bednarz, 2021).

2022 yılında Taşyurdu sunduğu çalışmasında Fibonacci sayılarını beş parametreye bağlı uzaklık durumunda genelleştirmiştir. Bu çalışmada Fibonacci, Pell, Modifiye Pell, Jacobsthal, Narayana, Padovan, k -Fibonacci, k -Pell, Modifiye k -Pell, k -Jacobsthal sayılarını ve uzaklık durumunda sunulan Fibonacci p -sayıları, uzaklık Fibonacci sayıları, $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının genelleştirmesi olarak beş parametrelili Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının döşeme ve kombinatoriyal yorumlarını sunulmuş ve n -inci terimin hesaplanmasını sağlayan açık formüller verilmiştir. Ayrıca bu sayılar için üreteç fonksiyonları ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir (Taşyurdu, 2022).

Fibonacci sayıları ve genelleştirmeleri farklı yorumlarla da sunulmuştur. Sonsuz bir geometrik düzlemin birbirine uyumlu düzlem figürleriyle kaplanması olan döşeme yorumu ve kombinatorial temsillerle Fibonacci ve Fibonacci tipli sayıların özellikleri incelenmiştir. n -inci Fibonacci sayısı, 1×1 kareler ve 1×2 dominolar kullanılarak $1, 2, \dots, n$ olarak etiketlenmiş hücreli n uzunluğundaki bir $1 \times n$ tahtayı döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmıştır (Holden, 1975; Brigham vd., 1996-97). Benjamin ve Quinn, bu yorumları birçok Fibonacci tipli bağıntının döşeme yorumlarını sağlamak için kullanmıştır (Benjamin ve Quinn, 2002; 2003). 2022 yılında (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerine bir döşeme yaklaşımı sunulmuş ve bu döşeme yorumlarıyla toplam formülleri verilmiştir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022).

Sunulan bu tezde bilinen Fibonacci, Jacobsthal ve Narayana sayıları ile uzaklık kavramıyla verilen Fibonacci p -sayılarının genel hali olarak Fibonacci (k, p) -sayıları tanımlanmıştır. Bu sayıların dizileri oluşturulmuş ve üreteç fonksiyonları sunulmuştur. n -inci Fibonacci (k, p) -sayıları için kombinatorial ve döşeme yaklaşımları verilmiş ve genel formülleri elde edilmiştir. Bu yaklaşımlar kullanılarak Fibonacci (k, p) -sayıları için toplam formülleri verilmiştir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022b; 2023). Ayrıca iyi bilinen Fibonacci ve Narayana sayılarının uzaklık durumunda genelleştirmesi olan Fibonacci p -sayılarının döşeme yorumları sunulmuştur. Fibonacci p -sayıları ile $r = 1$ den $r = p + 1$ e kadar çeşitli $1 \times r$, r -ominolar kullanarak bir $1 \times n$ tahtayı döşemek için farklı yolların sayısı verilmiştir. Bu sayıları için çarpım eşitlikleri ve toplam formülleri, döşeme yorumları ile elde edilmiştir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022a; 2022c). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verilmiştir.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak Fibonacci dizisinin genelleştirmesi olan k -Fibonacci sayıları sunulmuştur. Bu dizilerin yineleme bağıntıları göz önüne alınarak Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve Catalan, Cassini, ve d'Ocagne eşitlikleri gibi önemli eşitlikler verilmiştir. Daha sonra Fibonacci dizisinin uzaklık durumunda genelleştirmeleri olan Fibonacci p -sayıları, uzaklık Fibonacci sayıları, $(2, k)$ -uzaklıkla Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayıları ve beş parametre ile genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının tanımları, genel formülleri, matris temsilleri ve özellikleri verilmiştir. Tam sayılar kümesi kullanarak bu sayılar için özel küme ayrışımı ile ilişkili döşeme yorumları verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde bu çalışmada elde edilen sonuçlar verilmiştir. İlk olarak bilinen Fibonacci, Jacobsthal ve Narayana sayıları ile uzaklık kavramıyla verilen Fibonacci p -sayılarının genel hali olarak Fibonacci (k, p) -sayıları tanımlanmıştır. Fibonacci (k, p) -sayılarının dizileri oluşturulmuş ve özellikleri verilmiştir. Bu dizilerin üreteç fonksiyonları ve kombinatoryal yaklaşımla n -inci terimini hesaplamaya olanak sağlayan genel formülleri elde edilmiştir. Daha sonra tam sayılar kümesi kullanarak özel küme ayrışımı ile ilişkili olarak Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayıları için döşeme yorumları sunulmuştur. Fibonacci p -sayıları $r = 1$ den $r = p + 1$ e kadar çeşitli $1 \times r$, r -ominolar kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmış ve Fibonacci (k, p) -sayıları, p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareler ve renkli $1 \times p$, p -ominolar kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmıştır. Bu yorumlar kullanılarak bu sayılar için çarpım eşitliklerinin yanı sıra bazı temel özdeşlikler ve toplam formülleri verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamızın ana unsurunu oluşturan tanımlar ve dizilere dair temel bilgiler verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1: Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan fonksiyonlara dizi denir (Kadioğlu ve Kamali, 2003).

Bir diziyi tanımlamanın en etkili yollardan biri yineleme bağıntılarının kullanılmasıdır. Yineleme bağıntıları, dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlere bağlı olarak ifade edilmesiyle oluşan bağıntılardır.

Tanım 2.2: Her $n \geq r$ için $k_0 \neq 0$ olacak şekilde k_i ($0 \leq i \leq r-1$) katsayılar ve $t_0, t_1, \dots, t_{r-1}$ başlangıç değerleri için r -inci mertebeden homojen lineer yineleme dizisi

$$t_n = k_{r-1}t_{n-1} + k_{r-2}t_{n-2} + \dots + k_1t_{n-r+1} + k_0t_{n-r} \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. (2.1) eşitliğine ise r -inci mertebeden homojen lineer yineleme bağıntı denir ve $\{t_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Everest vd., 2003).

(2.1) yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{t_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik polinomu ve denklemi $t_n = x^r$ yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilir.

Tanım 2.3: (2.1) yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{t_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik polinomu

$$p(x) = x^r - k_{r-1}x^{r-1} - k_{r-2}x^{r-2} - \dots - k_1x - k_0$$

şeklinde tanımlanır (Everest vd., 2003).

Tanım 2.4: (2.1) yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{t_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik denklemi

$$p(x) = x^r - k_{r-1}x^{r-1} - k_{r-2}x^{r-2} - \dots - k_1x - k_0 = 0$$

olarak tanımlanır (Everest vd., 2003).

Tanım 2.5: $p(x)$ polinomunun kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $\alpha_i \neq \alpha_j$ ise, $t_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_r \alpha_r^n$ olacak şekilde $A_1, A_2, \dots, A_r$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç değerleri için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $A_1, A_2, \dots, A_r$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve t_n arasındaki eşitliğe yineleme bağıntısının çözümü denir (Everest vd., 2003).

Lineer homojen yineleme bağıntılarını çözmek için en önemli yöntemlerden biri üreteç fonksiyonlarını kullanmaktır.

Tanım 2.6: Bir $\{t_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan

$$G(x) = t_0 x^0 + t_1 x^1 + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i$$

serisine $\{t_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.2 de verilen r -inci mertebeden homojen lineer yineleme dizisinin $\{t_n\}_{n \geq 0}$ literatürde çok ilgi gören özel durumu $r = 2$ için t_0 ve t_1 başlangıç değerleri olmak üzere

$$t_n = k_1 t_{n-1} + k_0 t_{n-2} \quad (2.2)$$

bağıntısı ile tanımlanan ikinci mertebeden lineer yineleme dizileri olmuştur. Şimdi en önemli ikinci mertebeden lineer yineleme dizisi olan Fibonacci dizisi ve özellikleri sunulacaktır.

2.2. Fibonacci Dizileri

Orta çağın ileri gelen İtalyan matematikçilerinden ve Fibonacci ismi ile tanınan Leonarda Pisa'nın eserlerinin içinde en ünlü olanı 1202 yılında yazdığı Liber Abaci adlı eseridir. 19. yüzyıl sayı teorisyenlerinden Edvard Lucas, bu eserinde bir problemdeki $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ dizisine Fibonacci dizisi, bu dizinin terimlerine ise Fibonacci sayıları ismini vermiştir. Tanım 2.2 de özel olarak $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ başlangıç değerleri için (2.2) yineleme bağıntısında $k_0 = k_1 = 1$ alınarak Fibonacci dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.7: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değeri olmak üzere n -inci Fibonacci sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (2.3)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Horadam, 1961).

F_n , n -inci Fibonacci sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere negatif indisli Fibonacci sayıları

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}, \quad n < 0$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n < 0}$ dizisinin elemanlarıdır.

Tablo 2.1. Fibonacci dizisinin bazı terimleri

n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
F_n	...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	...

Fibonacci dizisi gibi bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş alanda çalışılan Lucas $\{L_n\}_{n \geq 0}$, Pell $\{P_n\}_{n \geq 0}$, Jacobsthal $\{J_n\}_{n \geq 0}$ ve Narayana $\{N_n\}_{n \geq 0}$ dizileri Tanım 2.2 nin özel durumları olarak aşağıdaki gibi tanımlanır. (2.2) yineleme bağıntısı ile verilen, $\{t_n\}_{n \geq 0}$ yineleme dizisinde

- i. $k_0 = k_1 = 1$ için $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Lucas dizisi

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$
- ii. $k_1 = 2$, $k_0 = 1$ için $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Pell dizisi

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$
- iii. $k_1 = 1$, $k_0 = 2$ için $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Jacobsthal dizisi

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$
- iv. $k_2 = 1$, $k_1 = 0$, $k_0 = 1$ için $N_0 = 0$, $N_1 = 1$, $N_2 = 1$ başlangıç değerleri ile Narayana dizisi $N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$

yineleme bağıntıları ile tanımlanır.

Tablo 2.2. Lucas, Pell, Jacobsthal ve Narayana dizilerinin bazı terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	...
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	...
N_n	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	...

Yineleme dizileri yineleme bağıntıları kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Bir dizinin n -inci terimini elde etmek için yineleme bağıntısı kullanılırsa kendisinden önce ilk $n - 1$ terimin bilinmesi gerekmektedir. Ancak dizinin keyfi bir terimini bulmak için kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde Binet formülü kullanılabilir. Bu formül dizinin yineleme bağıntısının çözülmesi ile elde edilir. Özel olarak (2.3) bağıntısında $F_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

olur. Özel olarak $n = 2$ için $x^2 - x - 1 = 0$ elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri σ ve ρ olarak alınırsa

$$\sigma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu kökler arasında

$$\sigma + \rho = 1$$

$$\sigma\rho = -1$$

$$\sigma - \rho = \sqrt{5}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan Fibonacci dizisinin n -inci terimi için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.8: $n \geq 0$ için $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri, $\sigma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\rho = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n -inci Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho}$$

şeklindedir (Horadam, 1961).

İspat: Tanım 2.5 ten A_1, A_2 sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tam sayısı için n -inci Fibonacci sayısının genel formu

$$F_n = A_1\sigma^n + A_2\rho^n \quad (2.4)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0, 1$ için

$$F_0 = 0 = A_1 + A_2$$

$$F_1 = 1 = A_1\sigma + A_2\rho$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A_1 = \frac{1}{\sigma - \rho} \quad \text{ve} \quad A_2 = -\frac{1}{\sigma - \rho}$$

olarak bulunur. Bulunan A_1 ve A_2 değerleri (2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa n -inci Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Benzer şekilde Lucas $\{L_n\}_{n \geq 0}$, Pell $\{P_n\}_{n \geq 0}$, Jacobsthal $\{J_n\}_{n \geq 0}$ ve Narayana $\{N_n\}_{n \geq 0}$ dizilerinin n -inci termleri için Binet formülleri ve karakteristik denklemleri sırasıyla

- $L_n = \sigma^n + \rho^n$; $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri, σ ve ρ
- $P_n = \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho}$; $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri, σ ve ρ
- $J_n = \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho}$; $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri, σ ve ρ
- $N_n = \frac{\sigma^{n+1}}{(\sigma - \rho)(\sigma - \gamma)} + \frac{\rho^{n+1}}{(\rho - \sigma)(\rho - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \sigma)(\gamma - \rho)}$; $x^3 - x^2 - 1 = 0$ denkleminin kökleri σ, ρ ve γ

şeklinde elde edilir (Koshy, 2001; 2014 ve Horadam, 1971).

Şimdi Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu verilecektir. n -inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere $\{F_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \quad (2.5)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.9: Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (Carlitz, 1962).

İspat: (2.5) eşitliğinden Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + F_2 x^2 + \dots + F_n x^n + \dots$$

dir.

Buradan Tanım 2.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_F(x) - x &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} x^n + F_{n-2} x^n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x G_F(x) + x^2 G_F(x)
\end{aligned}$$

olup Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$G_F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Benzer şekilde sırasıyla Lucas $\{L_n\}_{n \geq 0}$, Pell $\{P_n\}_{n \geq 0}$, Jacobsthal $\{J_n\}_{n \geq 0}$ ve Narayana $\{N_n\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$\text{i. } G_L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

$$\text{ii. } G_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

$$\text{iii. } G_J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

$$\text{iv. } G_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n x^n = \frac{x}{1-x-x^3}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi Fibonacci dizisinin n -inci terimini elde etmek için kullanılan diğer bir genel formül olan kombinatoryal formül verilecektir.

Teorem 2.10: $n \geq 0$ tam sayısı için n -inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \quad (2.6)$$

dir (Kuhapatanakul, 2016).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $n \geq 0$ tam sayı olsun. $n = 0$ ve $n = 1$ için Tanım 2.7 den

$$F_1 = \sum_{i=0}^0 \binom{n-i}{i} = 1$$

$$F_2 = \sum_{i=0}^0 \binom{n-i}{i} = 1$$

dir. (2.6) eşitliği n için doğru olsun ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Tanım 2.7 ve tümevarım hipotezinden

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \binom{n-1-i}{i}$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n-(i+1)}{i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \binom{n-(i+1)}{i}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1} \binom{n - (i+1) + 1}{i+1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-i}{i}
\end{aligned}$$

olup istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremin ispatında $a < b \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$, $a < 0 \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$ ve $\binom{a}{0} = 1$ dikkate alınmıştır.

2.2.1. Fibonacci dizilerinin döşeme yorumları

Belirli bir şekil veya döşemenin üst üste binmeyen ötelemeleriyle kaplanan düzlemi döşemenin geleneksel yöntemlerinden biri, uyumlu geometrik şekiller kullanmaktır. Fibonacci dizileri kullanılarak çeşitli kareler ve düzlemler döşenmiş ve elde edilen desenlerle Fibonacci sayılarının ilginç cebirsel özellikleri gösterilmiştir.

n hücreli n uzunluğundaki bir tahta $1 \times n$ ile gösterilmek üzere, Fibonacci sayıları için döşeme yorumu 1×1 karesi ve 1×2 dominosu kullanılarak Şekil 2.1 ile verilen bir $1 \times n$ tahtasını döşemenin yollarının sayısını nasıl bulacağımızı gösterir.

1×1	1×1	...	1×1
--------------	--------------	-----	--------------

Şekil 2.1. n hücreli bir $1 \times n$ tahtası

$n \geq 1$ için $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını F_{n+1} temsil etsin. 1 uzunluğundaki tahta sadece 1×1 tahtası kullanılarak tek bir şekilde döşendiğinden $F_2 = 1$ olup

$$\boxed{1 \times 1}$$

şeklinde döşenir. 2 uzunluğundaki tahta iki tane 1×1 veya 1×2 kareleri kullanılarak döşendiğinden $F_3 = 2$ olup

$$\boxed{1 \times 1} \quad \boxed{1 \times 1}$$

$$\boxed{1 \times 2}$$

şeklinde döşenir. $n \geq 3$ için döşemenin bir 1×1 kare ile bittiği $F_{n+1-1} = F_n$ yol ve bir 1×2 karesi ile bittiği durumlarda $F_{n+1-2} = F_{n-1}$ yolu olduğunu görülür. Böylece Tanım 2.7 de verilen Fibonacci dizisinin yineleme bağıntısı $n \geq 1$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olarak elde edilir.

Teorem 2.11: 1×1 kareler ve 1×2 dominolar kullanılarak $1 \times n$ uzunluğundaki bir tahtayı döşemenin F_{n+1} farklı yolu vardır.

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. n uzunluğundaki bir $1 \times n$ tahtanın döşemelerinin sayısı c_n olsun. $F_{n+1} = c_n$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $n = 1$ için 1×1 tahtası kullanılarak tek bir şekilde döşendiğinden $F_2 = 1$ ve 2 uzunluğundaki tahta iki tane 1×1 karesi veya 1×2 dominosu kullanılarak döşendiğinden $F_3 = 2$ dir. Keyfi n tam sayısı için $F_{n+1} = c_n$ olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için $F_{n+2} = c_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz. $1 \times (n+1)$ tahtası için tüm döşemeler ya 1×1 karesi yada 1×2 dominosu ile başlar. Bir 1×1 kare ile başlarsa kalan $(n+1) - 1$ hücreyi döşemelerin sayısı c_n dir. Bir 1×2 dominosu ile başlarsa kalan $(n+1) - 2$ hücreyi döşemelerin sayısı c_{n-1} dir. Toplam döşeme sayısı bu iki ayrı durumun toplamı olup tümevarım hipotezinden

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

$$= F_{n+1} + F_n$$

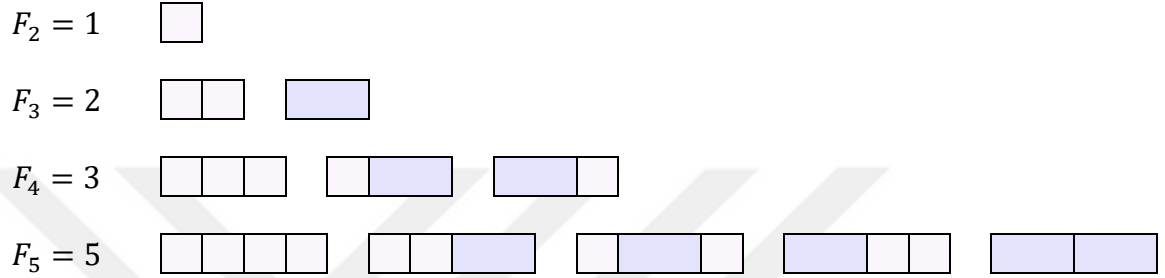
$$= F_{n+2}$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Örnek 2.12: 1×1 karesi ve 1×2 dominosu sırasıyla



olsun. Bu 1×1 kareleri ve 1×2 dominoları kullanarak, 1×1 , 1×2 , 1×3 ve 1×4 tahtalarını döşemenin farklı yollarının sayısı Şekil 2.2 de gösterildiği gibi sırasıyla, F_2, F_3, F_4 ve F_5 sayılarına eşittir.



Şekil 2.2. F_2, F_3, F_4 ve F_5 sayılarının döşeme yorumları

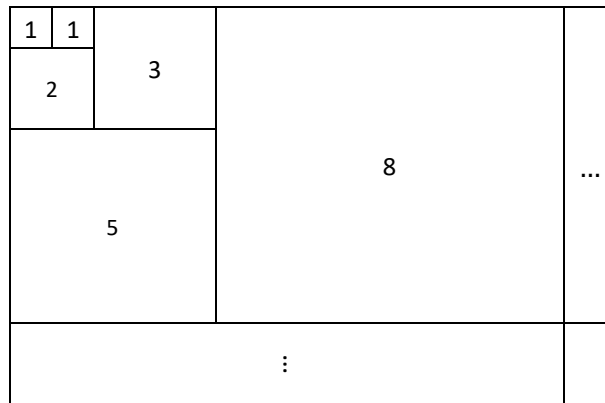
Bu yorum kullanarak Fibonacci dizileri için birçok iyi bilinen eşitlik tekrar ifade edilmiş ve geometrik olarak ispatlanmıştır. Bunlardan bazıları $F_{n+1} = f_n$ olacak şekilde aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 2.13: Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

dir.

İspat: Fibonacci sayıları karelerin alanları olarak alınırsa aşağıdaki şekil elde edilir.



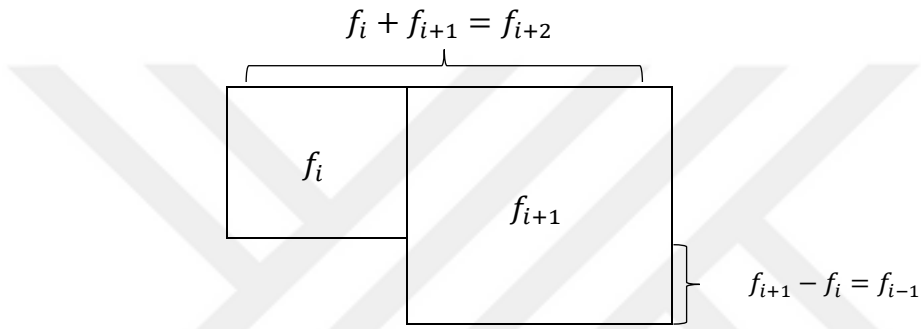
Bu kareler toplanırrsa yukarıdaki dikdörtgenin alanı $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 + f_6^2$ veya düzenlenerek $f_6(f_5 + f_6) = f_6f_7$ olarak bulunur. n -inci Fibonacci sayısının karelerinin toplamı için genel durum kolaylıkla görülür.

Teorem 2.14: Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı

$$f_i^2 + f_{i+1}^2 = f_{2i+1}$$

dir.

İspat: Fibonacci sayılarının karelerini alanlar olarak alırsak aşağıdaki şekil elde edilir.



Bu alan $f_{i-1}f_{i+1} + f_if_{i+2}$ olarak gösterilebilir. Fibonacci dizisinin $f_{i-1}f_j + f_if_{j+1} = f_{i+j}$ özelliğinden $f_{i+(i+1)} = f_{2i+1}$ elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

İkinci ve daha yüksek mertebeden yineleme bağıntılarıyla tanımlanan sayı dizileri, bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş bir alanda incelenmektedir. Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden ve iyi bilinen Fibonacci sayılarının genelleştirilmiş hali olan k -Fibonacci sayılarının tanımı verilmiş ve özellikleri sunulmuştur. Bu sayılar için Binet formülü, üreteç fonksiyonu ile Cassini, Catalan, d'Ocagne eşitliği gibi önemli eşitliklerinin yanı sıra toplam fonksiyonları ve birçok özelliği verilmiştir. Daha sonra sayılar arasındaki uzaklık kavramının yineleme bağıntılarında kullanılması ile tanımlanan Fibonacci p -sayıları, uzaklık Fibonacci sayıları, $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının tanımları sunulmuştur. Bu sayıların dizileri oluşturulmuş ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca dizilerin n -inci teriminin hesaplanmasını sağlayan kombinatorial formüller ve üreteç fonksiyonları verilmiştir.

3.1. k -Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Literatürde çok ilgi gören ve ikinci mertebeden yineleme bağıntılarıyla tanımlanan Fibonacci sayılarının genelleştirmeleri uzun yıllardır çalışılmaktadır. k -Fibonacci sayıları bilinen Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısında keyfi bir k parametresi kullanılmasıyla tanımlanmış ve en önemli genelleştirmelerden biri olmuştur.

Tanım 3.1: k herhangi bir tam sayı olmak üzere $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile n -inci k -Fibonacci sayısı

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1} \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye de k -Fibonacci dizisi denir ve $\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Falcon ve Angela, 2007a).

Tanım 3.1 kullanılarak k -Fibonacci dizisi

$$\{F_{k,n}\}_{n \geq 0} = \{0, 1, k, k^2 + 1, k^3 + 2k, k^4 + 3k^2 + 1, k^5 + 4k^3 + 3k, \dots\}$$

şeklinde elde edilir.

k -Fibonacci dizilerinin yineleme bağıntısına benzer bağıntılarla k -Lucas $\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Pell $\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Jacobsthal $\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$ ve k -Narayana $\{N_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizileri sırasıyla

i. $L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$ başlangıç değerleri ve

$$L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}$$

ii. $P_{k,0} = 0, P_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ve

$$P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}$$

iii. $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ve

$$J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}$$

iv. $N_{k,0} = 0, N_{k,1} = 1, N_{k,2} = k$ başlangıç değerleri ve

$$N_{k,n} = kN_{k,n-1} + N_{k,n-3}$$

yineleme bağıntıları ile tanımlanır (Koshy, 2001; 2014).

k -Fibonacci sayıları (3.1) eşitliği kullanılarak elde edilebilmesinin yanı sıra bilinen sayı dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci k -Fibonacci sayısı elde edilir. Bu formülü elde etmek dizinin yineleme bağıntısının çözümüne dayandığı için (3.1) eşitliğinde $F_{k,n} = r^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2} \Rightarrow r^n = kr^{n-1} + r^{n-2}$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $n = 2$ için $r^2 - kr - 1 = 0$ olur. Bu karakteristik denklemin kökleri r_1 ve r_2 olarak alınırsa

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olarak bulunur.

Ayrıca bu kökler arasında

$$r_1 + r_2 = k$$

$$r_1 r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{k^2 + 4}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan n -inci k -Fibonacci sayısı için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.2: $n \geq 0$ için $r^2 - kr - 1 = 0$ denkleminin kökleri, $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ ve $r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ olmak üzere n -inci k -Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \quad (3.2)$$

şeklindedir (Falcon ve Angela, 2007b).

İspat: Tanım 2.5 ten A_1, A_2 sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tam sayısı için n -inci k -Fibonacci sayısının genel formu

$$F_{k,n} = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n \quad (3.3)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0, 1$ için

$$F_{k,0} = 0 = A_1 + A_2$$

$$F_{k,1} = 1 = A_1 r_1 + A_2 r_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} \quad \text{ve} \quad A_2 = -\frac{1}{r_1 - r_2}$$

olarak bulunur.

Bulunan A_1 ve A_2 değerleri (3.3) eşitliğinde yerine yazılırsa n -inci k -Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Benzer olarak k -Lucas $\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Pell $\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Jacobsthal $\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$ ve k -Narayana $\{N_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizilerinin n -inci terimleri için Binet formülleri ve karakteristik denklemleri sırasıyla

- $L_{k,n} = r_1^n + r_2^n$; $r^2 - kr - 1 = 0$ denkleminin kökleri, r_1 ve r_2
- $P_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$; $r^2 - kr - 2 = 0$ denkleminin kökleri, r_1 ve r_2
- $J_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$; $r^2 - 2r - k = 0$ denkleminin kökleri, r_1 ve r_2
- $N_{k,n} = \frac{r_1^{n+1}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \frac{r_2^{n+1}}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} + \frac{r_3^{n+1}}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$; $r^3 - kr^2 - 1 = 0$

denkleminin kökleri r_1, r_2 ve r_3

şeklinde elde edilir (Koshy, 2001; 2014 ve Horadam, 1971).

Aşağıdaki teorem ile n -inci k -Fibonacci sayısı için alternatif formüller verilmiştir.

Teorem 3.3: $n \geq 2$ için

$$\text{i.} \quad F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} (k^2 + 4)^i$$

$$\text{ii.} \quad F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i}$$

dir (Falcon ve Angela, 2007b).

İspat: i. (3.2) eşitliği ile verilen k -Fibonacci dizilerinin Binet formülü ve karakteristik denklemin kökleri $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ kullanılarak

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n \right)$$

elde edilir. Buradan n -inci kuvvet için

$$F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} (\sqrt{k^2+4})^{2i+1}$$

dir. Son ifade sadeleştirilirse

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} (k^2+4)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii. Tümevarım metodu kullanılabilir. $n = 2$ için

$$F_{k,2} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{1-2i} = \binom{1}{0} k^1 = k$$

olup eşitlik sağlanır. Eşitlik keyfi n tam sayısı için doğru olduğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Tümevarım hipotezinden $F_{k,n-1}$ ve $F_{k,n}$ için eşitlik doğru olup Tanım 3.1 den

$$\begin{aligned} F_{k,n+1} &= k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-i}{i} k^{n-2-2i} \\ &= k^n + k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-i}{i} k^{n-2-2i} \end{aligned}$$

elde edilir.

Son ifadede i ile $i - 1$ yer değiştirirse

$$F_{k,n+1} = k^n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i-1} k^{n-2i}$$

dir. Buradan $\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} = \binom{m+1}{i}$ olmak üzere

$$F_{k,n+1} = k^n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} k^{n-2i}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

şimdi k -Fibonacci dizileri için üreteç fonksiyonları verilecektir. n -inci k -Fibonacci sayısı $F_{k,n}$ olmak üzere, $\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$G_{F,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n \quad (3.4)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.4: k -Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$G_{F,k}(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

şeklindedir (Falcon ve Angela, 2007b).

İspat: (3.4) eşitliğinden k -Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$G_{F,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n = F_{k,0} x^0 + F_{k,1} x^1 + F_{k,2} x^2 + \dots + F_{k,n} x^n + \dots$$

dir.

Bu denklemin her iki yanını $-x$ ve $-x^2$ ile çarpılırsa

$$-xkG_{F,k}(x) = -kF_{k,0}x^1 - kF_{k,1}x^2 - kF_{k,2}x^3 - \dots - kF_{k,n}x^{n+1} - \dots$$

$$-x^2G_{F,k}(x) = -F_{k,0}x^2 - F_{k,1}x^3 - F_{k,2}x^4 - \dots - F_{k,n}x^{n+2} - \dots$$

elde edilir. Tanım 3.1 den $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - kx - x^2)G_{F,k}(x) = F_0x^0 + F_1x^1 - kF_0x^1 = x$$

olup k -Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$G_{F,k}(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

k -Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonlarına benzer şekilde, k -Lucas $\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Pell $\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Jacobsthal $\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$ ve k -Narayana $\{N_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$\text{i.} \quad G_{L,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{k,n}x^n = \frac{2-kx}{1-kx-x^2}$$

$$\text{ii.} \quad G_{P,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}x^n = \frac{x}{1-2x-kx^2}$$

$$\text{iii.} \quad G_{J,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n}x^n = \frac{x}{1-kx-2x^2}$$

$$\text{iv.} \quad G_{N,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n = \frac{x}{1-kx-x^3}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki teorem ile k -Fibonacci dizilerinin özel indisli terimleri için üreteç fonksiyonları verilmiştir.

Teorem 3.5: m, n birer tam sayı ve $F_{k,n}$, n -inci k -Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\text{i.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n+1} x^n = \frac{1}{1-kx-x^2}$$

$$\text{ii.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,mn} x^n = \frac{F_{k,m} x}{1-(r_1^m + r_2^m) + (-1)^m x^2}$$

$$\text{iii.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,mn+r} x^n = \frac{F_{k,r} - (-1)^m F_{k,r-m} x}{1-(r_1^m + r_2^m) + (-1)^m x^2}$$

$$\text{iv.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,2n} x^n = \frac{xk}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

$$\text{v.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,2n+1} x^n = \frac{(1-x)k}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

Aşağıdaki teoremlerle k -Fibonacci dizileri için Catalan eşitliği, Cassini eşitliği ve d'Ocagne eşitliği gibi önemli eşitlikler verilmiştir.

Teorem 3.6 (Catalan Eşitliği): $n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere

$$F_{k,n-r} F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} F_{k,r}^2$$

şeklindedir (Falcon ve Angela, 2007b).

İspat: k -Fibonacci dizilerinin karakteristik denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere $r_1 r_2 = -1$ dir.

Buradan (3.2) eşitliği ile verilen k -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_{k,n-r}F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 &= \left(\frac{r_1^{n-r} - r_2^{n-r}}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^{n+r} - r_2^{n+r}}{r_1 - r_2} \right) - \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right)^2 \\
&= \frac{r_1^{2n} - r_1^{n-r}r_2^{n+r} - r_1^{n+r}r_2^{n-r} + r_2^{2n} - r_1^{2n} + 2r_1^n r_2^n - r_2^{2n}}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \left(-(r_1 r_2)^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^r - (r_1 r_2)^n \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^r + 2(r_1 r_2)^n \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(r_1 - r_2)^2} \left(\frac{r_2^{2r} + r_1^{2r}}{(r_1 - r_2)^r} - 2 \right) \\
&= (-1)^{n+1-r} \frac{(r_1^r - r_2^r)^2}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= (-1)^{n+1-r} F_{k,r}^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak Teorem 3.6 da $r = 1$ alınırsa k -Fibonacci dizisi için Cassini eşitliği

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1} - F_{k,n}^2 = (-1)^n$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.7 (d'Ocagne Eşitliği): $m > n$ olmak üzere

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$$

dir (Falcon ve Angela, 2007b).

(3.2) eşitliğiyle verilen Binet formülü k -Fibonacci dizisinin ilk $n + 1$ teriminin toplamını kolay bir şekilde bulunmasını sağlar.

Teorem 3.8: k -Fibonacci dizisinin ilk $(n + 1)$ -inci teriminin toplamı

$$\sum_{i=0}^n F_{k,i} = \frac{1}{k} (F_{k,n+1} + F_{k,n} - 1)$$

dir (Falcon ve Angela, 2007b).

İspat: (3.2) eşitliği ile verilen k -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^n F_{k,i} = \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{i=0}^n (r_1^i - r_2^i)$$

yazılabilir. Ayrıca k -Fibonacci dizilerinin karakteristik denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere geometrik seri toplamından

$$\sum_{i=0}^n F_{k,i} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1^{n+1} - 1}{r_1 - 1} - \frac{r_2^{n+1} - 1}{r_2 - 1} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n F_{k,i} &= \frac{-r_1^n - r_1^{n+1} - r_2 + 1 + r_2^n + r_1 + r_2^{n+1} - 1}{(r_1 - r_2)(r_1 - 1)(r_2 - 1)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} - \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right) \\ &= \frac{1}{k} (F_{k,n+1} + F_{k,n} - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremlerle k -Fibonacci sayılarının bölünebilirlik özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.9: Ardışık iki k -Fibonacci sayısı aralarında asaldır, yani

$$(F_{k,n}, F_{k,n-1}) = 1$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: Tanım 3.1 den

$$F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$$

$$F_{k,n-1} = kF_{k,n-2} + F_{k,n-3}$$

$$\vdots$$

$$F_{k,3} = kF_{k,2} + F_{k,1}$$

$$F_{k,2} = kF_{k,1} + 0$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Ortak bölen olarak $F_{k,n-1}$ alınırsa Öklid algoritmasından $(F_{k,n}, F_{k,n-1}) = F_{k,1} = 1$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.10: n ve m birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$F_{k,m} \mid F_{k,mn}$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $n = 1$ için ifadenin doğru olduğu açıktır. Keyfi $l \geq 1$ tam sayısı için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim ve $l + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani $1 \leq i \leq l$ olacak şekilde her i tam sayısı için $F_{k,m} \mid F_{k,mi}$ olup $F_{k,m} \mid F_{k,m(l+1)}$ olduğunu göstermeliyiz. k -Fibonacci sayılarının

$$F_{k,r+s} = F_{k,r-1}F_{k,s} + F_{k,r}F_{k,s+1} \quad (3.5)$$

özellği kullanırsa

$$F_{k,m(l+1)} = F_{k,ml+m} = F_{k,ml-1}F_{k,m} + F_{k,ml}F_{k,m+1}$$

elde edilir. $F_{k,m} \mid F_{k,ml}$ olduğundan, tümevarım hipotezinden $F_{k,m} \mid F_{k,m(l+1)}$ dir. Böylece $n \geq 1$ tam sayısı için $F_{k,m} \mid F_{k,mn}$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.11: q ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$(F_{k,qn-1}, F_{k,n}) = 1$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: $d = (F_{k,qn-1}, F_{k,n})$ olsun. Buradan

$$d \mid F_{k,qn-1} \text{ ve } d \mid F_{k,n}$$

elde edilir. Teorem 3.10 dan $F_{k,n} \mid F_{k,qn}$ olduğundan, $d \mid F_{k,qn}$ dir. Böylece

$$d \mid F_{k,qn-1} \text{ ve } d \mid F_{k,qn}$$

olur. Halbuki $(F_{k,qn-1}, F_{k,n}) = 1$ olduğundan $d \mid 1$ ve dolayısıyla $d = 1$ olur.

Dolayısıyla $(F_{k,qn-1}, F_{k,n}) = 1$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.12: m, n, q, r tam sayıları için $m = qn + r$ olmak üzere

$$(F_{k,m}, F_{k,n}) = (F_{k,n}, F_{k,r})$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: m, n, q, r tam sayıları için $m = qn + r$ olmak üzere (3.5) eşitliği kullanılırsa

$$(F_{k,m}, F_{k,n}) = (F_{k,qn+r}, F_{k,n})$$

$$= (F_{k,qn-1}F_{k,r} + F_{k,qn}F_{k,r+1}, F_{k,n})$$

$$= (F_{k,qn-1}F_{k,r}, F_{k,n})$$

$$= (F_{k,r}, F_{k,n})$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.13: m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$(F_{k,m}, F_{k,n}) = F_{k,(m,n)}$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: $m \geq n$ olsun. m bölen olmak üzere aynı bölünen sayı ile Öklid algoritması uygulanırsa

$$m = q_0n + r_1 \quad 0 \leq r_1 < n$$

$$n = q_1r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$\vdots$

$$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_nr_n + 0$$

elde edilir. Teorem 3.12 ile $(F_{k,m}, F_{k,n}) = (F_{k,n}, F_{k,r_1}) = (F_{k,r_1}, F_{k,r_2}) = \dots = (F_{k,r_{n-1}}, F_{k,r_n})$ yazılabilir. Ancak Teorem 3.10 a göre $r_n \mid r_{n-1}$ yani $F_{k,r_n} \mid F_{k,r_{n-1}}$ dir. Bu nedenle $(F_{k,r_{n-1}}, F_{k,r_n}) = F_{k,r_n}$ olur. Buradan $(F_{k,m}, F_{k,n}) = F_{k,r_n}$ elde edilir. Ancak $r_n = (m, n)$ olmak şekilde Öklid algoritmasına göre $(F_{k,m}, F_{k,n}) = F_{k,(m,n)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.13 iki k -Fibonacci sayısının en büyük ortak böleninin, her zaman k -Fibonacci sayısı olduğunu gösterir.

Teorem 3.14: m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere $(m, n) = 1$ ise

$$F_{k,m}F_{k,n} \mid F_{k,mn}$$

dir (Bolat ve Köse, 2010).

İspat: Teorem 3.10 dan $F_{k,m} \mid F_{k,mn}$ ve $F_{k,n} \mid F_{k,mn}$ dir. Böylece

$$[F_{k,m}, F_{k,n}] \mid F_{k,mn}$$

olur. Ancak Teorem 3.13 ten $(F_{k,m}, F_{k,n}) = F_{k,(m,n)} = F_{k,1} = 1$ olup

$$[F_{k,m}, F_{k,n}] = F_{k,m}F_{k,n}$$

dir. Böylece $F_{k,m}F_{k,n} \mid F_{k,mn}$ elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Bu bölümde Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısındaki terimleri arasındaki uzaklık dikkate alınarak tanımlanan ve Fibonacci p -sayıları ile uzaklık Fibonacci sayıları olarak adlandırılan çeşitli genelleştirmeleri sunulmuştur. Ayrıca bu sayıların genel formülleri, toplam formülleri ve birçok özellikleri verilmiştir.

3.2.1. Fibonacci p -sayıları ve özellikleri

Tanım 3.15: $p \geq 0$, $n > p + 1$ tam sayılar olmak üzere $F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p + 1) = 1$ başlangıç değerleri ile n -inci Fibonacci p -sayısı

$$F_p(n) = F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1) \quad (3.6)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Stakhov, 1977).

Fibonacci p -sayıları (3.6) eşitliği kullanılarak elde edilebilmesinin yanı sıra bilinen dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci Fibonacci p -sayısı elde edilir. Bu formülü elde etmek, dizinin yineleme bağıntısını çözmeye dayanmaktadır. Binet formülü elde edilirken ihtiyaç duyulan, Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısının karakteristik denklemi ile $n \rightarrow \infty$ için Fibonacci p -sayılarının ardışık terimleri arasındaki $\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}$ limit değeri verilecektir. Ardışık Fibonacci p -sayılarının arasındaki oran

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = x \quad (3.7)$$

olarak ifade edilsin. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} &= \frac{F_p(n-1) + F_p(n-p-1)}{F_p(n-1)} = 1 + \frac{F_p(n-p-1)}{F_p(n-1)} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_p(n-1)F_p(n-2) \cdots F_p(n-p)}{F_p(n-2)F_p(n-3) \cdots F_p(n-p-1)}} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada $n \rightarrow \infty$ için (3.7) eşitliği kullanılarak Fibonacci p -sayıları için $(p + 1)$ -inci dereceden karakteristik denklemi

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir. $(p + 1)$ tane köke sahip olan bu denklemin kökleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}$ dir. Bu köklerden pozitif olanı genelleştirilmiş “Altın Oranlar” veya “Altın p -Oranlar” olarak adlandırılmış ve $x_1 = \tau_p$ olacak şekilde τ_p ile gösterilmiştir. Özel olarak (3.8) eşitliğinde

- $p = 0$ için denklemin pozitif kökü $x = 2$,
- $p = 1$ için denklemin pozitif kökü $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

olarak bulunur. Ayrıca (3.8) eşitliğinden Altın p -Oranlar, τ_p kuvvetleri arasında sağlanan

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \times \tau_p^{n-1}$$

eşitliği için de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}$ kökleri geçerlidir.

Aşağıdaki teoremlerle Fibonacci p -sayılarının karakteristik denkleminin köklerinin özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.16: $p > 0$ tam sayı için, $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri arasında

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_p + x_{p+1} = 1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_1x_p + x_1x_{p+1} + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \dots \\ + x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1} = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \dots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1} = 0,$$

...

$$x_1x_2x_3x_4 \dots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4 \dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4 \dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 \dots x_{p-1}x_px_{p+1} = (-1)^p.$$

bağıntıları sağlanır (Stakhov ve Rozin, 2005).

İspat: (3.8) eşitliği $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}$ olacak şekilde $(p + 1)$ tane köke sahiptir. Bu eşitlik cebirsel olarak çarpanlarına ayrılırsa

$$x^{p+1} - x^p - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_p)(x - x_{p+1}) = 0$$

yazılabilir. Buradan parantez kaldırılır ve p değerine göre iki durumda incelenir. (3.8) eşitliğinde p çift ise

$$\begin{aligned} x^{p+1} - x^p - 1 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_p)(x - x_{p+1}) \\ &= x^{p+1} - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p + x_{p+1})x^p \\ &\quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{p+1} + x_2x_3 + x_2x_4 \\ &\quad + \cdots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \cdots + x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1})x^{p-1} \\ &\quad - (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots + x_1x_px_{p+1} + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 \\ &\quad + \cdots + x_2x_px_{p+1} + \cdots + x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-2} \\ &\quad + (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \cdots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-3} \\ &\quad + \cdots + (x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} \\ &\quad + \cdots + x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1})x - x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir.

(3.8) ve (3.9) eşitliklerinden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p + x_{p+1} = 1;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{p+1} + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \cdots$$

$$+ x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1} = 0;$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \cdots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1} = 0;$$

...

$$x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} + \cdots + x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0;$$

$$x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} = 1.$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde p tek ise

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_p)(x - x_{p+1})$$

$$= x^{p+1} - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p + x_{p+1})x^p + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{p+1}$$

$$+ x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \cdots + x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1})x^{p-1}$$

$$- (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots + x_1x_px_{p+1} + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \cdots$$

$$+ x_2x_px_{p+1} + \cdots + x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-2}$$

$$+ (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \cdots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-3} + \cdots$$

$$- (x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} + \cdots + x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1})x$$

$$+ x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1}$$

$$= 0$$

$$(3.10)$$

elde edilir.

(3.8) ve (3.10) eşitliklerinden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p + x_{p+1} = 1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{p+1} + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \cdots$$

$$+ x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1} = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \cdots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1} = 0,$$

...

$$x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} + \cdots + x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{p-1}x_px_{p+1} = -1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.17: $p > 0$ ve $k = 1, 2, 3, \dots, p$ tam sayılar için $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}$ olmak üzere

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p + x_{p+1})^k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k + \cdots + x_p^k + x_{p+1}^k = 1$$

dir (Stakhov ve Rozin, 2005).

Bilinen sayı dizilerinde olduğu gibi pratik bir şekilde n -inci Fibonacci p -sayısının elde etmek için Binet formülü kullanılabilir. Şimdi Fibonacci p -sayıları için Binet formülleri verilecektir.

$p > 0$ tam sayısı için $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ başlangıç Fibonacci p -sayılarına bağlı sabitler ve $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ ise (3.8) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere Fibonacci p -sayılarının genel formu yani Binet formülü

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \cdots + k_{p+1}(x_{p+1})^n \quad (3.11)$$

şeklindedir. (3.6) yineleme bağıntısından $p > 0$ için

$$F_p(0) = F_p(-1) = F_p(-2) = \cdots = F_p(-p+1) = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir.

(3.11) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\begin{cases} F_p(0) = k_1 + k_2 + \dots + k_{p+1} = 0 \\ F_p(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{p+1}x_{p+1} = 1 \\ F_p(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^2 = 1 \\ \dots; \\ F_p(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Fibonacci p -sayılarının Binet formülü $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ katsayılarının değerlerinin elde edilmesini sağlayan (3.13) lineer denklem sisteminin çözüme bağlıdır.

Şimdi $p > 0$ tam sayısı göre Fibonacci p -sayılarının Binet formülleri verilecektir.

- $p = 1$ olsun. Fibonacci 1-sayılarının yani bilinen Fibonacci sayıları için Teorem 2.8 ile Binet formülü elde edilir.
- $p = 2$ olsun. Fibonacci 2-sayılarının Binet formülü (3.6) yineleme bağıntısı, (3.8) karakteristik denklemi ve (3.12) başlangıç değerlerinden

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3) \quad (3.14)$$

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = 1 \quad (3.15)$$

$$x^3 = x^2 + 1 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin üç kökü olup x_1 reel ve x_2, x_3 karmaşık kökler olmak üzere

$$h = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}} \quad (3.17)$$

için

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3} = 1.4655712319 \dots \\ x_2 &= -\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0.233 \dots - (0.793 \dots)i \\ x_3 &= -\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0.233 \dots + (0.793 \dots)i \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(3.16) eşitliğinin reel kökü olan x_1 irrasyonel bir sayı olup altın 2-oran, τ_2 ye eşit olduğu görülür. (3.17) ile verilen h değeri de irrasyoneldir. Bu nedenle, x_2 ve x_3 kökleri, reel kısımları irrasyonel olan karmaşık sayılardır. (3.11) eşitliğinden Fibonacci 2-sayılarının Binet formülü

$$F_2(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n \quad (3.18)$$

olur. (3.15) ve (3.18) eşitlikleri kullanılarak $F_2(0) = 0$, $F_2(1) = F_2(2) = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} F_2(0) = k_1 + k_2 + k_3 \\ F_2(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \\ F_2(2) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 \end{cases} \quad (3.19)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.19) denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \\ k_2 &= \frac{(-(h+2) + i\sqrt{3}(h-2))h}{(h^3+8)} \\ k_3 &= \frac{(-(h+2) - i\sqrt{3}(h-2))h}{(h^3+8)} \end{aligned}$$

katsayıları bulunur. (3.17) ile verilen h irrasyonel olduğundan k_1 katsayısı irrasyonel bir sayıdır. Dolayısıyla k_2 ve k_3 katsayıları, reel kısımları irrasyonel olan karmaşık eşlenik sayılardır. k_1 , k_2 ve k_3 katsayıları kullanarak Fibonacci 2-sayıları için Binet formülü

$$\begin{aligned} F_2(n) &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3} \right)^n \\ &+ \frac{(-(h+2) + i\sqrt{3}(h-2))h}{(h^3+8)} \left(-\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right)^n \\ &+ \frac{(-(h+2) - i\sqrt{3}(h-2))h}{(h^3+8)} \left(-\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right)^n \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

• $p = 3$ olsun. Fibonacci 3-sayılarının Binet formülü (3.6) yineleme bağıntısı, (3.8) karakteristik denklemi ve (3.12) başlangıç değerlerinden

$$F_3(n) = F_3(n-1) + F_3(n-3) \quad (3.20)$$

$$F_3(0) = 0, F_3(1) = F_3(2) = F_3(3) = 1 \quad (3.21)$$

$$x^4 = x^3 + 1 \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) eşitliğinin dört kökü olup x_1, x_2 reel kök ve x_3, x_4 karmaşık eşlenik köktür. (3.22) eşitliğinin kökleri irrasyonel karmaşık sayı olduğundan yaklaşık değerleri

$$x_1 = 1.38 \dots$$

$$x_2 = -0.819 \dots$$

$$x_3 = 0.219 \dots + i0.914 \dots$$

$$x_4 = 0.219 \dots - i0.914 \dots$$

şeklinde elde edilir. (3.23) eşitliğinin x_1 kökü altın 3-oran, τ_3 e eşit olduğu görülür. (3.11) eşitliğinden Fibonacci 3-sayılarının Binet formülü

$$F_3(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n + k_4(x_4)^n \quad (3.23)$$

olur. (3.21) ve (3.23) eşitlikleri kullanılarak $F_3(0) = 0, F_3(1) = F_3(2) = F_3(3) = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} F_3(0) = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \\ F_3(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 \\ F_3(2) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 + k_4x_4^2 \\ F_3(3) = k_1x_1^3 + k_2x_2^3 + k_3x_3^3 + k_4x_4^3 \end{cases} \quad (3.24)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.24) denklem sisteminin çözümünden

$$k_1 = 0.3969 \dots$$

$$k_2 = -0.1592 \dots$$

$$k_3 = -0.1188 \dots - i0.2045 \dots$$

$$k_4 = -0.1188 \dots + i0.2045 \dots$$

katsayıları bulunur.

k_1, k_2, k_3 ve k_4 katsayıları kullanarak Fibonacci 3-sayıları için Binet formülü

$$\begin{aligned} F_3(n) = & (0.3969)(1.38)^n - 0.1592(-0.819)^n \\ & + (-0.1188 - i0.2045)(0.219 + i0.914)^n \\ & + (-0.1188 + i0.2045)(0.219 - i0.914)^n \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

• $p = 4$ olsun. Fibonacci 4-sayılarının Binet formülü (3.6) yineleme bağıntısı, (3.8) karakteristik denklemi ve (3.12) başlangıç değerlerinden

$$F_4(n) = F_4(n-1) + F_4(n-4) \quad (3.25)$$

$$F_4(0) = 0, F_4(1) = F_4(2) = F_4(3) = F_4(4) = 1 \quad (3.26)$$

$$x^5 = x^4 + 1 \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinin 5 kökü olup altın 4-oran, τ_4 e eşit olan reel kök x_1 , diğer dört kök ise iki çift karmaşık eşlenik kökler x_2, x_3 ve x_4, x_5 olmak üzere

$$h = \sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}$$

için

$$x_1 = \frac{h}{6} + \frac{2}{h} = 1.3247 \dots$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0.5 - i0.866 \dots$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0.5 + i0.866 \dots$$

$$x_4 = -\frac{h}{12} - \frac{1}{h} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right) = -0.6623 \dots - i0.5623 \dots$$

$$x_5 = -\frac{h}{12} - \frac{1}{h} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right) = -0.6623 \dots + i0.5623 \dots$$

şeklinde elde edilir.

(3.11) eşitliğinden Fibonacci 4-sayılarının Binet formülü

$$F_4(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n + k_4(x_4)^n + k_5(x_5)^n \quad (3.28)$$

olur. (3.26) ve (3.28) eşitlikleri kullanılarak $F_4(0) = 0$, $F_4(1) = F_4(2) = F_4(3) = F_4(4) = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} F_4(0) = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \\ F_4(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + k_5x_5 \\ F_4(2) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 + k_4x_4^2 + k_5x_5^2 \\ F_4(3) = k_1x_1^3 + k_2x_2^3 + k_3x_3^3 + k_4x_4^3 + k_5x_5^3 \\ F_4(4) = k_1x_1^4 + k_2x_2^4 + k_3x_3^4 + k_4x_4^4 + k_5x_5^4 \end{cases} \quad (3.29)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.29) denklem sisteminin çözümünden

$$k_1 = 0.38095 \dots$$

$$k_2 = -0.07133 \dots + i0.2063 \dots$$

$$k_3 = -0.07133 \dots - i0.2063 \dots$$

$$k_4 = -0.1191 \dots + i0.04577 \dots$$

$$k_5 = -0.1191 \dots - i0.04577 \dots$$

katsayıları bulunur. k_1 , k_2 , k_3 , k_4 ve k_5 katsayıları ve x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ve x_5 kökleri (3.29) eşitliğinde kullanılarak Fibonacci 4-sayıları için Binet formülü yaklaşık olarak bulunur.

Benzer şekilde edilerek genel durum olarak Fibonacci p -sayılarının Binet formülünü (3.11) eşitliği ile elde edilir. (3.11) eşitliğindeki katsayılar ve (3.13) lineer denklem sisteminin çözümü ile elde edilir. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.18: $p > 0$ bir tam sayı olsun. (3.8) karakteristik denkleminin kökleri $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ ve (3.13) lineer denklem sisteminin çözümdeki katsayılar $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ olmak üzere $F_p(n)$, n -inci Fibonacci p -sayısı

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Stakhov ve Rozin, 2005).

İspat: $n = 0, 1, 2, \dots, p$ için (3.13) lineer denklem sistemine göre Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısı için başlangıç değerleri belirlenmektedir. (3.11) eşitliğinden $F_p(p+1)$, Fibonacci p -sayısı tekrar

$$F_p(p+1) = k_1(x_1)^{p+1} + k_2(x_2)^{p+1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p+1} \quad (3.30)$$

şeklinde tekrar yazılır. (3.8) eşitliğinin kökleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}$ olmak üzere $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ için

$$x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k \times x_k^{n-1}$$

denkleminde (3.30) eşitliği

$$F_p(p+1) = [k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p] + [k_1(x_1)^0 + k_2(x_2)^0 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^0] \quad (3.31)$$

şeklinde elde edilir. (3.13) lineer denklem sisteminden

$$F_p(p+1) = F_p(p) + F_p(0) \quad (3.32)$$

dır. Yani (3.6) yineleme bağıntısı $F_p(p+1)$ Fibonacci p -sayısı $F_p(p+1)$ için doğrudur. Ayrıca, $F_p(p+2), F_p(p+3), \dots, F_p(n), \dots$ Fibonacci p -sayıları için (3.11) eşitliği ve $x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k \times x_k^{n-1}$ denklemi kullanılarak (3.11) eşitliğinin tüm pozitif değerleri için sağlandığı kolay bir şekilde gösterilir. Dolayısıyla $n = -1, -2, -3, \dots$ negatif değerleri için (3.11) eşitliğin doğru olduğu gösterilmelidir. $n = -1$ için

$$F_p(-1) = k_1(x_1)^{-1} + k_2(x_2)^{-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{-1} \quad (3.33)$$

dir. $x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k \times x_k^{n-1}$ denkleminde

$$x_k^{n-p-1} = x_k^n - x_k^{n-1} \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.34) eşitliğinde $n = p$ alınırsa

$$x_k^{-1} = x_k^p - x_k^{p-1} \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.35) eşitliği kullanılarak, (3.33) eşitliği için

$$\begin{aligned} F_p(-1) &= [k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \cdots + k_{p+1}(x_{p+1})^p] \\ &\quad - [k_1(x_1)^{p-1} + k_2(x_2)^{p-1} + \cdots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p-1}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

dir. Dolayısıyla

$$F_p(-1) = F_p(p) - F_p(p-1) = 0$$

dir. Yani (3.36) eşitliği $F_p(-1) = 0$, Fibonacci p -sayısını verir. Ayrıca (3.34) eşitliği ve $n = -2, -3, -4, \dots$ negatif değerleri için (3.11) eşitliğinin doğru olduğu düşünülerek tüm n değerleri için (3.11) eşitliğinin doğru olduğu sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Fibonacci p -sayılarının üreteç matrisleri sunulacaktır. $(p+1) \times (p+1)$ matrisi

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

olmak üzere Q_p matrisinin n -inci kuvveti

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

şeklindedir (Stakhov, 2006).

(3.37) eşitliği ile verilen Q_p matrisine benzer olarak Fibonacci p -sayılarının farklı üreteç matrisleri de sunulmuştur. Bu matrislerin elde edilmesini sağlayan yardımcı lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.19: $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ iki tam sayı olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^{k-1} F_p(np - p + i) = F_p(np + k) - F_p(np + 1) \quad (3.39)$$

dir (Kuhapatanakul, 2016).

İspat: Tanım 3.15 den

$$\begin{aligned} F_p(np + 1) + \sum_{i=1}^{k-1} F_p(np - p + i) &= F_p(np + 2) + \sum_{i=2}^{k-1} F_p(np - p + i) \\ &= F_p(np + 3) + \sum_{i=3}^{k-1} F_p(np - p + i) \\ &\vdots \\ &= F_p(np + k - 1) + F_p(np - p + k - 1) \\ &= F_p(np + k) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.19 da $n = 1$ alınırsa Fibonacci p -sayılarının toplam formülü

$$\sum_{i=1}^{k-1} F_p(i) = F_p(1) + F_p(2) + F_p(3) + \cdots + F_p(k - 1) = F_p(p + k) - 1$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.20: $(p + 1) \times (p + 1)$ tipindeki H_p matrisi

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

olmak üzere $n \geq 1$ için

$$H_p^n = \begin{bmatrix} F_p(np + 1) & F_p(np) & \cdots & F_p(np - p + 1) \\ F_p(np - p + 1) & F_p(np - p) & \cdots & F_p(np - 2p + 1) \\ F_p(np - p + 2) & F_p(np - p + 1) & \cdots & F_p(np - 2p + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(np) & F_p(np - 1) & \cdots & F_p(np - p) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

dir (Kuhapatanakul, 2016).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $n = 1$ için (3.41) eşitliğinin sağlandığı açıktır. $n > 1$ için (3.41) eşitliğinin keyfi bir n tam sayısı için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. (3.40) eşitliği ve matris çarpımının özelliklerinden $H_p^{k+1} = H_p^k H_p$ yazılabilir. (3.39) eşitliği ve tümevarım hipotezi kullanılarak (3.41) eşitliğinin keyfi $n + 1$ için doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.21: p bir doğal sayı ve m, n iki pozitif tam sayı olmak üzere

$$F_p(mp + np) - F_p(mp)F_p(np + 1) = \sum_{i=1}^p F_p(mp - i)F_p(np - p + i)$$

dir (Kuhapatanakul, 2016).

İspat: (3.41) eşitliği ve matris çarpımının özelliklerinden $H_p^{m+n} = H_p^m H_p^n$ kullanılarak ispat tamamlanabilir.

Tanım 3.15 ile verilen Fibonacci p -sayıları, genelleştirilmiş veya uzaklık Fibonacci sayıları olarak adlandırılan birçok yineleme dizisinin keşfine yol açmıştır. Şimdi bu diziler verilecektir.

3.2.2. Uzaklık Fibonacci sayıları

İkinci mertebeden yineleme bağıntılarıyla tanımlanan Fibonacci sayılarının uzaklık kavramıyla genelleştirmeleri olan uzaklık Fibonacci sayıları ve bunun özel bir durumu $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Bu sayılar Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısındaki terimleri arasındaki 1 olan uzaklığın çeşitli parametrelere bağlı alınarak sunulan önemli genelleştirmeleridir.

Tanım 3.22: $k_1 \geq 2$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $0 \leq n \leq k_1 - 1$ için $Fd(k_1, n) = 1$ başlangıç değerleri ile n -inci uzaklık Fibonacci sayısı, $Fd(k_1, n)$

$$Fd(k_1, n) = Fd(k_1, n - k_1 + 1) + Fd(k_1, n - k_1), \quad n \geq k$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanır (Bednarsz vd., 2013).

Bazı k değerleri için Tanım 3.22 den elde edilen uzaklık Fibonacci sayıları Tablo 3.1 ile verilmiştir.

Tablo 3.1. Bazı uzaklık Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$Fd(2, n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...
$Fd(3, n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	...
$Fd(4, n)$	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12	...
$Fd(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	7	...
$Fd(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	4	4	4	...
$Fd(7, n)$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	4	...
$Fd(8, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	...

Tanım 3.22 de

- $k_1 = 2$ alınırsa F_n , n -inci Fibonacci sayısı olmak üzere $Fd(2, n) = F_{n+1}$
- $k_1 = 3$ alınırsa $\mathcal{P}_n$, n -inci Padovan sayısı olmak üzere $Fd(3, n) = \mathcal{P}_n$

bağıntıları elde edilir.

Uzaklık Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısı, negatif indisli uzaklık Fibonacci sayıları için genişletilebilir. Bu sayıları hesaplanmasını sağlayan tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.23: $k_1 \geq 2$, $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $0 \leq n \leq k_1 - 1$ için $Fd(k_1, n) = 1$ başlangıç değerleri ile negatif indisli n -inci uzaklık Fibonacci sayısı, $Fd(k_1, -n)$

$$Fd(k_1, -n) = Fd(k_1, -n + k_1) - Fd(k_1, -n + 1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Bednarz vd., 2013).

Bazı k_1 değerleri için Tanım 3.23 ten elde edilen negatif indisli uzaklık Fibonacci sayıları Tablo 3.2 ile verilmiştir.

Tablo 3.2. Bazı negatif indisli uzaklık Fibonacci sayıları

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$Fd(2, n)$	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1
$Fd(3, n)$	2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1	1
$Fd(4, n)$	6	-4	3	-2	2	-1	1	0	1	0	1	1
$Fd(5, n)$	-2	2	-1	1	0	0	1	0	1	0	1	1

Uzaklık Fibonacci sayıları ile ilişkili olarak matris temsilleri elde edilmiştir. Şimdi bu matrisler temsilleri sunulacaktır.

$1 \leq i \leq k_1$ için q_{i1} bileşeni uzaklık Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısındaki $Fd(k_1, n - i)$ katsayısına eşit olmak üzere $j \geq 2$ için

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1 \\ 0, & j \neq i + 1 \end{cases}$$

olacak şekilde $Q_{k_1} = [q_{ij}]_{k_1 \times k_1}$ olsun.

Buradan sırasıyla $k_1 = 2, 3, 4, \dots, k_1$ için

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Q_{k_1} matrisi uzaklık Fibonacci sayıları için üreteç matrisi olarak adlandırılır ve k_1 -inci mertebeden A_{k_1} matrisi

$$A_{k_1} = \begin{bmatrix} Fd(k_1, 2k_1 - 2) & Fd(k_1, 2k_1 - 3) & \dots & Fd(k_1, k_1) & Fd(k_1, k_1 - 1) \\ Fd(k_1, 2k_1 - 3) & Fd(k_1, 2k_1 - 4) & \dots & Fd(k_1, k_1 - 1) & Fd(k_1, k_1 - 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Fd(k_1, k_1) & Fd(k_1, k_1 - 1) & \dots & Fd(k_1, 2) & Fd(k_1, 1) \\ Fd(k_1, k_1 - 1) & Fd(k_1, k_1 - 2) & \dots & Fd(k_1, 1) & Fd(k_1, 0) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Buradan $k_1 \geq 2, n \geq 1$ tam sayıları için

$$A_{k_1} Q_{k_1}^n = \begin{bmatrix} Fd(k_1, n + 2k_1 - 2) & \dots & Fd(k_1, n + k_1) & Fd(k_1, n + k_1 - 1) \\ Fd(k_1, n + 2k_1 - 3) & \dots & Fd(k_1, n + k_1 - 1) & Fd(k_1, n + k_1 - 2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Fd(k_1, n + k_1) & \dots & Fd(k_1, n + 2) & Fd(k_1, n + 1) \\ Fd(k_1, n + k_1 - 1) & \dots & Fd(k_1, n + 1) & Fd(k_1, n + 0) \end{bmatrix}$$

dir (Bednarz vd., 2013).

Teorem 3.24: $k_1 \geq 2$ tam sayı olmak üzere uzaklık Fibonacci sayı dizilerinin, $\{Fd(k_1, n)\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$fd(k_1, n)(x) = \frac{\sum_{n=0}^{k_1-2} x^n}{1 - x^{k_1-1} - x^{k_1}}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: $fd(k_1, n)(x)$, $\{Fd(k_1, n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları olsun. Tanım 3.22 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& fd(k_1, n)(x) - x^{k_1-1} fd(k_1, n)(x) - x^{k_1} fd(k_1, n)(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n) x^{n+k_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n) x^{n+k_1} \\
&= \sum_{n=0}^{k_1-1} Fd(k_1, n) x^n + \sum_{n=k_1}^{\infty} Fd(k_1, n) x^n - x^{k_1-1} \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} Fd(k_1, n) x^{n+k_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n) x^{n+k_1} \\
&= \sum_{n=0}^{k_1-1} Fd(k_1, n) x^n - x^{k_1-1} \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n+k_1) x^{n+k_1} - \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n+1) x^{n+k_1} - \sum_{n=0}^{\infty} Fd(k_1, n) x^{n+k_1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{k_1-2} x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\{Fd(k_1, n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$fd(k_1, n)(x) = \frac{\sum_{n=0}^{k_1-2} x^n}{1 - x^{k_1-1} - x^{k_1}}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi uzaklık Fibonacci sayılarının, n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin özel ailelerinin sayısının hesabında kullanılabilen bir küme yorumu verilecektir.

$k_1 \geq 2$ ve $n \geq k_1 - 1$ birer tam sayı ve $X = \{1, 2, \dots, n\}$, n elemanlı bir küme olsun. X kümesinin ardışık tam sayıları içeren ve

- i. $t \in T$ için $|\mathcal{Y}_t| \in \{k - 1, k\}$,
- ii. $t, s \in T$ ve $t \neq s$ için $\mathcal{Y}_t \cap \mathcal{Y}_s = \emptyset$,
- iii. $0 \leq |X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathcal{Y}_t| \leq k - 2$,
- iv. Her bir $m \in X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathcal{Y}_t$ için ya $m = n$ ya da $m + 1 \in X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathcal{Y}_t$

koşulları sağlayan kümeler ailesi $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_t; t \in T\}$ olsun. Böyle bir $\mathcal{Y}$ ailesi, X kümesinin bir yarı k_1 -parçalanışı olarak adlandırılır. $X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathcal{Y}_t = \emptyset$ ise X kümesinin bir yarı k_1 -parçalanışının k_1 ve $k_1 - 1$ mertebeli alt kümelerinden oluşur. Özel olarak $k_1 = 2$ için her bir yarı 2-parçalanışı, bir ya da iki elemandan oluşan X kümesinin parçalanışdır.

Teorem 3.25: $k_1 \geq 2$ ve $n \geq k_1 - 1$ birer tam sayı olmak üzere X kümesinin tüm yarı k_1 -parçalanışlarının sayısı $Fd(k_1, n)$ sayısına eşittir (Bednarsz vd., 2013).

İspat: $k \geq 2$, $n \geq k - 1$ olacak şekilde birer tam sayı ve $X = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. X kümesinin tüm yarı k_1 -parçalanışlarının sayısı $q(k_1, n)$ ile gösterilsin. $n = k_1 - 1$ için $\{\{1, 2, \dots, k_1 - 1\}\}$ olacak şekilde X kümesinin yalnızca bir tane yarı k_1 -parçalanışı elde edilir. Buradan $q(k_1, k_1 - 1) = 1 = Fd(k_1, k_1 - 1)$ olduğu görülür. $n \geq k_1$ için $q(k_1, n) = Fd(k_1, n)$ eşitliğinin keyfi n için doğru olduğunu kabul edelim ve $q(k_1, n + 1) = Fd(k_1, n + 1)$ olduğunu gösterelim. $X = \{1, 2, \dots, n + 1\}$ kümesinin $\{1, 2, \dots, k_1 - 1\} \in \mathcal{Y}$ olacak şekilde tüm yarı k_1 -parçalanışlarının sayısı $q_{k_1-1}(k_1, n + 1)$ ve benzer düşünceyle $\{1, 2, \dots, k_1\} \in \mathcal{Y}$ olacak şekilde tüm yarı k_1 -parçalanışlarının sayısı $q_{k_1}(k_1, n + 1)$ olarak gösterilsin. Böylece

$$q(k_1, n + 1) = q_{k_1-1}(k_1, n + 1) + q_{k_1}(k_1, n + 1)$$

olduğu görülür. Ayrıca $|X \setminus \{1, 2, \dots, k_1 - 1\}| = n + 1 - (k_1 - 1)$ olduğundan $q_{k_1-1}(k_1, n + 1) = q(k_1, n + 1 - (k_1 - 1))$ ve $|X \setminus \{1, 2, \dots, k_1\}| = n + 1 - k_1$ olduğundan $q_{k_1}(k_1, n + 1) = q(k_1, n + 1 - k_1)$ yazılabilir.

Buradan Tanım 3.22 ve tümevarım hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 q(k_1, n+1) &= q(k_1, n-k_1+2) + q(k_1, n-k_1+1) \\
 &= Fd(k_1, n-k_1+2) + Fd(k_1, n-k_1+1) \\
 &= Fd(k_1, n+1)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uzaklık Fibonacci sayı dizilerinin terimleri, yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilebileceği gibi bilinen dizilerde olduğu gibi genel formüller kullanılarak da elde edilir. Bu formüllerle herhangi bir uzaklık Fibonacci sayısını hesaplamak için kendisinden önceki terimlerin hesaplamasına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Aşağıdaki teoremler n -inci uzaklık Fibonacci sayısını doğrudan hesaplanmasına olanak sağlamaktadır.

Teorem 3.26: $n \geq 2$ ve $k_1 \geq 2$ birer tam sayı olmak üzere

$$Fd(k_1, n) = \sum_{t=\lfloor \frac{n}{k_1} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{k_1-1} \rfloor} \sum_{i=tk_1-n}^{(t+1)k_1-n-2} \binom{t}{i}$$

dir (Bednarz vd., 2013).

Teorem 3.26 dan n -inci uzaklık Fibonacci sayısını doğrudan hesaplanmasını sağlayan diğer bir formül elde edilir.

Teorem 3.27: $n \geq 2$ ve $k_1 \geq 2$ birer tam sayı olmak üzere

$$Fd(k_1, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k_1} \rfloor} \binom{j + \lfloor \frac{n-jk_1}{k_1-1} \rfloor}{j}$$

dir (Bednarz vd., 2013).

İspat: $X = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $n \leq k_1 - 1$ için $\left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor = 0$ olduğundan

$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor} \binom{j + \left\lfloor \frac{n-jk_1}{k_1-1} \right\rfloor}{j} = 1 = Fd(k_1, n)$ elde edilir. $n \geq k_1$ olsun. O halde Teorem 3.25 e

göre X kümesinin tüm yarı k_1 -parçalanışlarının sayısı $Fd(k_1, n)$ dir. $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{k_1-1} \right\rfloor$ ve

$0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor$ olmak üzere X kümesinin her bir yarı k_1 -parçalanışı, $k_1 - 1$ mertebeli i

kümeden ve k_1 mertebeli j kümeden oluşmaktadır. Ayrıca sabit j tam sayısı için

$i = \left\lfloor \frac{n-jk_1}{k_1-1} \right\rfloor$ elde edilir. Böylece k_1 elemanlı j kümeleri ile oluşturulan X in tüm yarı

k_1 -parçalanışlarının sayısı $\binom{j+i}{j}$ olmak üzere $\binom{j+i}{j} = \binom{j + \left\lfloor \frac{n-jk_1}{k_1-1} \right\rfloor}{j}$ elde edilir. Buradan

$$Fd(k_1, n) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor} \binom{j + \left\lfloor \frac{n-jk_1}{k_1-1} \right\rfloor}{j}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi uzaklık Fibonacci sayılarının özel bir durumu olan $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları ve özellikleri sunulacaktır.

Tanım 3.28: $k_2 \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $i = 0, 1, \dots, k_2 - 1$ için $F_2(k_2, i) = 1$ başlangıç değerleri ile n -inci $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısı, $F_2(k_2, n)$

$$F_2(k_2, n) = F_2(k_2, n-2) + F_2(k_2, n-k_2), \quad n \geq k_2$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanır (Włoch vd., 2013).

Bazı k_2 değerleri için Tanım 3.28 den elde edilen $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları Tablo 3.3 ile verilmiştir.

Tablo 3.3. $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$F_2(1, n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...
$F_2(2, n)$	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32	64	64	128	...
$F_2(3, n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	...
$F_2(4, n)$	1	1	1	1	2	2	3	3	5	5	8	8	13	13	21	...
$F_2(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	...
$F_2(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	9	...
$F_2(7, n)$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	...
$F_2(8, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	...

Tanım 3.28 de

- $k_2 = 1$ alınırsa F_n , n -inci Fibonacci sayısı olmak üzere $F_2(1, n) = F_{n+1}$
- $k_2 = 3$ alınırsa $\mathcal{P}_n$, n -inci Padovan sayısı olmak üzere $F_2(3, n) = \mathcal{P}_n$

bağıntıları elde edilir.

$(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısı negatif indisli $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları için genişletilebilir. Bu sayıları hesaplanmasını sağlayan tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.29: $k_2 \geq 1$, $k_2 \neq 2$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $F_2(k_2, 0) = F_2(k_2, 1) = 1$ başlangıç değerleri ile negatif indisli n -inci $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısı, $F_2(k_2, -n)$

$$F_2(k_2, -n) = F_2(k_2, k_2 - n) - F_2(k_2, k_2 - 2 - n)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Włoch vd., 2013).

Bazı k_2 değerleri için Tanım 3.29 dan elde edilen negatif indisli $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları Tablo 3.4 ile verilmiştir.

Tablo 3.4. Bazı negatif indisli $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$F_2(3, n)$	2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1	1
$F_2(4, n)$	-3	-3	2	2	-1	-1	1	1	0	0	1	1
$F_2(5, n)$	2	1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	1	1
$F_2(6, n)$	-1	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1

$(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayılarının da matrislerin temsilleri sunulmuştur. $1 \leq i \leq k_2$ için q_{i1} bileşeni $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci yineleme bağıntısındaki $F_2(k_2, n - i)$ katsayısına eşit olmak üzere $j \geq 2$ için

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1 \\ 0, & j \neq i + 1 \end{cases}$$

olacak şekilde $Q_{k_2} = [q_{ij}]_{k_2 \times k_2}$ olsun. Buradan sırasıyla $k_2 = 2, 3, 4, \dots, k_2$ için

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, Q_{k_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Q_{k_2} matrisi $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları için üreteç matrisi olarak adlandırılır ve k_2 -ıncı mertebeden A_{k_2} matrisi

$$A_{k_2} = \begin{bmatrix} F_2(k_2, 2k_2 - 2) & F_2(k_2, 2k_2 - 3) & \dots & F_2(k_2, k_2) & F_2(k_2, k_2 - 1) \\ F_2(k_2, 2k_2 - 3) & F_2(k_2, 2k_2 - 4) & \dots & F_2(k_2, k_2 - 1) & F_2(k_2, k_2 - 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_2(k_2, k_2) & F_2(k_2, k_2 - 1) & \dots & F_2(k_2, 2) & F_2(k_2, 1) \\ F_2(k_2, k_2 - 1) & F_2(k_2, k_2 - 2) & \dots & F_2(k_2, 1) & F_2(k_2, 0) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Buradan $k_2 \geq 2, n \geq 0$ tam sayıları için

$$A_{k_2} Q_{k_2}^n = \begin{bmatrix} F_2(k_2, n + 2k_2 - 2) & \dots & F_2(k_2, n + k_2) & F_2(k_2, n + k_2 - 1) \\ F_2(k_2, n + 2k_2 - 3) & \dots & F_2(k_2, n + k_2 - 1) & F_2(k_2, n + k_2 - 2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_2(k_2, n + k_2) & \dots & F_2(k_2, n + 2) & F_2(k_2, n + 1) \\ F_2(k_2, n + k_2 - 1) & \dots & F_2(k_2, n + 1) & F_2(k_2, n) \end{bmatrix}$$

dir (Bednarz vd., 2013).

Teorem 3.30: $k_2 \geq 3$ tam sayısı olsun. $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayı dizisinin, $\{F_2(k_2, n)\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$f_2(k_2, n)(x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^{k_2}}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: $f_2(k_2, n)(x)$, $\{F_2(k_2, n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları olsun. Tanım 3.28 kullanılarak

$$\begin{aligned} & f_2(k_2, n)(x) - x^2 f_2(k_2, n)(x) - x^{k_2} f_2(k_2, n)(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n) x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n) x^{n+k_2} \\ &= \sum_{n=0}^{k_2-1} F_2(k_2, n) x^n + \sum_{n=k_2}^{\infty} F_2(k_2, n) x^n - \sum_{n=0}^{k_2-3} F_2(k_2, n) x^{n+2} \\ &\quad - \sum_{n=k_2-2}^{\infty} F_2(k_2, n) x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n) x^{n+k_2} \\ &= \sum_{n=0}^{k_2-1} F_2(k_2, n) x^n - \sum_{n=0}^{k_2-3} F_2(k_2, n) x^{n+2} \\ &\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n+k_2) x^{n+k_2} - \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n+k_2-2) x^{n+k_2} - \sum_{n=0}^{\infty} F_2(k_2, n) x^{n+k_2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^1 F_2(k_2, n) x^n \\ &= 1+x \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\{F_2(k_2, n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$f_2(k_2, n)(x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^{k_2}}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayıları, n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin özel ailelerinin sayısının hesabında da kullanılabilen küme yorumu verilecektir.

$k_2 \geq 3$ ve $n \geq 2$ birer tam sayı ve $X = \{1, 2, \dots, n\}$, n elemanlı bir küme olsun. X kümesinin ardışık tam sayılar içeren ve

- i. $t \in T$ için $|\mathfrak{Y}_t| \in \{2, k_2\}$,
- ii. $|X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathfrak{Y}_t| \in \{0, 1\}$,
- iii. $m \in (X \setminus \bigcup_{t \in T} \mathfrak{Y}_t)$ ise $m = n$ dir

koşulları sağlayan kümeler ailesi $\mathfrak{Y} = \{\mathfrak{Y}_t; t \in T\}$ olsun. Böyle bir $\mathfrak{Y}$ ailesi, X kümesinin bir yarı k_2 -parçalanışı olarak adlandırılır.

Teorem 3.31: $k_2 \geq 3, n \geq 2$ birer tam sayı olmak üzere X kümesinin tüm yarı k_2 -parçalanışlarının sayısı, $F_2(k_2, n)$ sayısına eşittir (Włoch vd., 2013).

İspat: $k_2 \geq 3, n \geq 2$ olacak şekilde birer tam sayı ve $X = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. X kümesinin tüm yarı k_2 -parçalanışlarının sayısı $q_{k_2}(n)$ ile gösterilsin. $n = 2$ için $\{\{1, 2\}\}$ olacak şekilde X kümesinin yalnızca bir tane yarı k_2 -parçalanışı elde edilir. Buradan $q_{k_2}(2) = 1 = F_2(k_2, 2)$ olduğu görülür. $n \geq 3$ için $q_{k_2}(n) = F_2(k_2, n)$ eşitliğinin keyfi n için doğru olduğunu kabul edelim ve $q_{k_2}(n+1) = F_2(k_2, n+1)$ olduğunu gösterelim. $X = \{1, 2, \dots, n+1\}$ kümesinin $\{1, 2\} \in \mathfrak{Y}$ olacak şekilde tüm yarı k_2 -parçalanışlarının sayısı $q_{(k_2)_2}(n+1)$ ve benzer olarak $\{1, 2, \dots, k_2\} \in \mathfrak{Y}$ olacak şekilde tüm yarı k_2 -parçalanışlarının sayısı $q_{(k_2)_{k_2}}(n+1)$ olarak gösterilsin.

Böylece

$$q_{k_2}(n+1) = q_{(k_2)_2}(n+1) + q_{(k_2)_{k_2}}(n+1)$$

elde edilir. Ayrıca $q_{(k_2)_2}(n+1) = q_{k_2}(n-1)$ ve $q_{(k_2)_{k_2}}(n+1) = q_{k_2}(n+1-k_2)$ yazılabilir. Buradan Tanım 3.28 ve tümevarım hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned} q_{k_2}(n+1) &= q_{k_2}(n-1) + q_{k_2}(n+1-k_2) \\ &= F_2(k_2, n-1) + F_2(k_2, n+1-k_2) \\ &= F_2(k_2, n+1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayı dizilerinin terimleri yineleme bağıntısını kullanılarak elde edilebileceği gibi bilinen dizilerde olan genel formüller kullanılarak da elde edilir. Bu formüllerle herhangi bir $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısının hesaplanması için kendisinden önceki terimlerin hesaplamasına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Aşağıdaki teoremler n -inci $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısını doğrudan hesaplanmasına olanak sağlamaktadır.

Teorem 3.32: $n \geq 2$ ve $k_2 \geq 3$ birer tam sayı olmak üzere

$$F_2(k_2, n) = \sum_{t=\lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=\lfloor \frac{n-2t-1}{k_2-2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n-2t}{k_2-2} \rfloor} \binom{t}{i}$$

dir (Włoch vd., 2013).

Teorem 3.32 den n -inci $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısını doğrudan hesaplanmasını sağlayan diğer bir formül elde edilir.

Teorem 3.33: $k_2, n \geq 2$ birer tam sayı olmak üzere

$$F_2(k_2, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor} \binom{i + \lfloor \frac{n - ik_2}{2} \rfloor}{i}$$

dir (Włoch vd., 2013).

İspat: $X = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $n \leq k_2 - 1$ için $\lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor = 0$ olduğundan

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor} \binom{i + \lfloor \frac{n - ik_2}{2} \rfloor}{i} = 1$$

elde edilir. $n \geq k_2$ olsun. O halde Teorem 3.31 e göre X kümesinin tüm yarı k_2 -parçalanışlarının sayısı $F_2(k_2, n)$ dir. $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor$ ve $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ olmak üzere X kümesinin her bir yarı k_2 -parçalanışı, k_2 mertebeli i kümeden ve 2 mertebeli j kümeden oluşmaktadır. Ayrıca sabit i değeri için $j = \lfloor \frac{n - ik_2}{2} \rfloor$ elde edilir. Böylece k_2 elemanlı i kümeleri ile oluşturulan X in tüm k_2 -parçalanışlarının sayısı $\binom{i+j}{i}$ olmak üzere $\binom{i+j}{i} = \binom{i + \lfloor \frac{n - ik_2}{2} \rfloor}{i}$ elde edilir. Buradan

$$F_2(k_2, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k_2} \rfloor} \binom{i + \lfloor \frac{n - ik_2}{2} \rfloor}{i}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Uzaklık Fibonacci ve $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayılarının toplam formülleri de elde edilmiştir. Aşağıdaki teoremlerle bu sayılar için çift ve tek indisli terimlerinin toplam formüllerinin yanı sıra özel indisli terimlerinin toplam formülleri verilmiştir.

Teorem 3.34: n, k_1, k_2 birer tam sayı olsun. $n \geq 0$ olmak üzere

i. $k_1 \geq 2$ için

$$\sum_{i=0}^n F_2(k_1, 2i) = F_2(k_1, 2n + k_1) - 1$$

ii. $k_1 \geq 1$ için

$$\sum_{i=0}^n F_2(k_1, 2i + 1) = F_2(k_1, 2n + k_1 + 1) - 1$$

iii. $k_1 \geq 3$ ve $0 \leq m \leq k_1 - 3$ için

$$\sum_{i=0}^n F_2(k_1, k_1 i + m) = F_2(k_1, nk_1 + m + 2)$$

iv. $k_1 \geq 3$ ve $k_1 - 2 \leq m \leq k_1$ için

$$\sum_{i=0}^n F_2(k_1, k_1 i + m) = F_2(k_1, nk_1 + m + 2) - 1$$

v. $k_1 \geq 1$ ve $n > 2k_1 - 2$ için

$$F_2(k_1, n) = F_2(k_1, n - 2) + F_2(k_1, n - k_1 + 2) - F_2(k_1, n - 2k_1 + 2)$$

vi. $k_2 \geq 2$ için

$$\sum_{i=0}^n Fd(k_2, -k_2 i) = -Fd(k_2, -nk_2 - 1) + 1$$

vii. $k_2 \geq 2$ için

$$\sum_{i=0}^n Fd(k_2, -k_2 i + 1) = -Fd(k_2, -nk_2) + 2$$

dir (Bednarz vd., 2013; Włoch vd., 2013).

$(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayı dizilerinin aynı başlangıç değerleri için yineleme bağıntısındaki terimlerin katsayı değerinde k parametresi düşünülerek genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. k -Fibonacci sayılarının da genelleştirmesi olan bu sayılar aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 3.35: $k \geq 1, n \geq 0, r \geq 1$ birer doğal sayı olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ için $F_{k,n}(r) = 1$ ve $F_{k,1}(1) = k$ başlangıç değerleri ile n -inci genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayıları

$$F_{k,n}(r) = kF_{k,n-r}(r) + F_{k,n-2}(r), \quad n \geq r$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanır (Falcon, 2014).

Şimdi k -Fibonacci sayılarının genelleştirmesi olan ve uzaklık kavramıyla sunulan genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının oluşturduğu dizilerin n -inci terimini hesaplamak için kullanılan genel formül verilecektir.

Teorem 3.36:

i. $r = 2p$ olacak şekilde çift ise

$$F_{k,2n}(2p) = F_{k,2n+1}(2p) = \sum_{j=0}^{n/p} \binom{n - (p-1)j}{j} k^j$$

ii. $r = 2p + 1 \geq 3$ olacak şekilde tek ise

$$F_{k,2n}(2p+1) = \sum_{j=0} \binom{n - (2p-1)j}{2j} k^{2j} + \binom{n - p - (2p-1)j}{2j+1} k^{2j+1}$$

$$F_{k,2n+1}(2p+1) = \sum_{j=0} \binom{n - (2p-1)j}{2j} k^{2j} + \binom{n - (p-1) - (2p-1)j}{2j+1} k^{2j+1}$$

dir (Falcon, 2014).

Genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının ilk n teriminin, tek ve çift indisli terimlerinin toplam formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.37:

- i. $\{F_{k,n}(r)\}_{n \geq 0}$ dizisinin ilk n terimlerinin toplamı:

$$\sum_{j=0}^n F_{k,j}(r) = \frac{1}{k} (F_{k,n+r-1}(r) + F_{k,n+r}(r) - 2)$$

- ii. $\{F_{k,n}(r)\}_{n \geq 0}$ dizisinin çift indisli terimlerinin toplamı

$$\sum_{j=0}^n F_{k,2j}(r) = \frac{1}{k} (F_{k,2n+r} - 1)$$

- iii. $\{F_{k,n}(r)\}_{n \geq 0}$ dizisinin tek indisli terimlerinin toplamı

$$\sum_{j=0}^n F_{k,2j+1}(r) = \frac{1}{k} (F_{k,2n+1+r} - 1)$$

şeklindedir (Falcon, 2014).

Uzaklık Fibonacci sayılarının, $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayılarının ve genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının yineleme bağıntısına benzer bağıntılar kullanılarak bir çok genelleştirilmiş Fibonacci ve uzaklık Fibonacci tipli sayılar tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları şöyledir:

- $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere $0 \leq n \leq k$ için $F(k, n) = n + 1$ başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş Fibonacci sayıları

$$F(k, n) = F(k, n - 1) + F(k, n - k), n \geq k + 1$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Kwasnik and Włoch, 2000).

- $p \geq 1$ tam sayı olmak üzere $0 \leq i \leq p$ için $P_p^{(i)}(1) = \dots = P_p^{(i)}(i) = 0$ ve $P_p^{(i)}(i+1) = \dots = P_p^{(i)}(p+1) = 1$ başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş Pell (p, i) -sayıları

$$P_p^{(i)}(n) = 2P_p^{(i)}(n-1) + P_p^{(i)}(n-p-1), \quad n > p+1$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Kılıç, 2009).

- $p \geq 2$ tam sayı olmak üzere $Pap(1) = Pap(2) = \dots = Pap(p) = 0, Pap(p+1) = 1, Pap(p+2) = 0$ başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş Padovan p -sayıları

$$Pap(n+p+2) = Pap(n+p) + Pap(n), \quad n \geq 1$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Deveci ve Karaduman, 2017).

- $k \geq 2$ olmak üzere $J_0^{(k,c)} = J_1^{(k,c)} = \dots = J_{k-2}^{(k,c)}(n) = 0, J_{k-2}^{(k,c)}(n) = 1$ başlangıç başlangıç değerleri ile (k, c) -Jacobsthal sayıları

$$J_n^{(k,c)} = J_{n-1}^{(k,c)} + J_{n-2}^{(k,c)} + \dots + J_{n-k}^{(k,c)}, \quad n \geq k$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Marques, Trojovsky, 2019).

- $k \geq 2, n \geq 0$ birer tam sayı ve $p \geq 1$ bir rasyonel sayı olmak üzere $1 \leq n \leq k-1$ için $F_{k,p}(0) = 0$ ve $F_{k,p}(n) = p^{n-1}$ başlangıç değerleri ile (k, p) -Fibonacci sayıları

$$F_{k,p}(n) = pF_{k,p}(n-1) + (p-1)F_{k,p}(n-k+1) + F_{k,p}(n-k), \quad n \geq k$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Bednarz, 2021).

Şimdi Fibonacci, Pell, Modifiye Pell, Jacobsthal, Narayana, Padovan, k -Fibonacci, k -Pell, Modifiye k -Pell, k -Jacobsthal sayıları ve uzaklık durumunda sunulan Fibonacci p -sayıları, uzaklık Fibonacci sayıları, $(2, k)$ -uzaklık Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayılarının genelleştirmesi olarak beş parametrelili Fibonacci sayıları sunulacaktır.

3.3. Beş Parametre ile Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Tanım 3.38: $p, q, s, t \geq 1$, $q \geq p$ ve $d = q - p$ birer tam sayı olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ için $F_{s,t}^d(p, q; n) = s^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ başlangıç değerleri ile n -inci $F_{s,t}^d(p, q; n)$ sayısı

$$F_{s,t}^d(p, q; n) = s^d F_{s,t}^d(p, q; n - p) + t F_{s,t}^d(p, q; n - q), \quad n \geq q \quad (3.42)$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanır. $F_{s,t}^d(p, q; n)$ sayılarının dizileri $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Taşyurdu, 2022).

Tanım 3.38 de d, p, q, s, t parametrelerine göre $F_{s,t}^d(p, q; n)$ sayısı ile

- F_n , n -inci Fibonacci sayısı için, $F_{1,1}^1(1, 2; n) = F_{n+1}$
- $F_{k,n}$, n -inci k -Fibonacci sayısı için, $F_{k,1}^1(1, 2; n) = F_{k,n+1}$
- P_n , n -inci Pell sayısı için, $F_{2,1}^1(1, 2; n) = P_{n+1}$
- $P_{k,n}$, n -inci k -Pell sayısı için, $F_{2,k}^1(1, 2; n) = P_{k,n+1}$
- q_n , n -inci Modifiye Pell sayısı için, $F_{2,1}^1(1, 2; n) = q_n$
- $q_{k,n}$, n -inci Modifiye k -Pell sayısı için, $F_{2,k}^1(1, 2; n) = q_{k,n}$
- J_n , n -inci Jacobsthal sayısı için, $F_{1,2}^1(1, 2; n) = J_{n+1}$
- $J_{k,n}$, n -inci k -Jacobsthal sayısı için, $F_{k,2}^1(1, 2; n) = J_{k,n+1}$
- N_n , n -inci Narayana sayısı için, $F_{1,1}^2(1, 3; n) = N_{n+1}$
- $\mathcal{P}_n$, n -inci Padovan sayısı için, $F_{1,1}^1(2, 3; n) = \mathcal{P}_n$
- $F_p(n)$, n -inci Fibonacci p - sayısı için, $F_{1,1}^p(1, p + 1; n) = F_p(n + 1)$
- $Fd(k_1, n)$, n -inci uzaklık Fibonacci sayısı için, $F_{1,1}^1(k_1 - 1, k_1; n) = Fd(k_1, n)$
- $F_2(k_2, n)$, n -inci $(2, k_2)$ -uzaklık Fibonacci sayısı için, $F_{1,1}^{k_2-2}(2, k_2; n) = F_2(k_2, n)$
- $F_{k,n}(r)$, n -inci genelleştirilmiş (k, r) -Fibonacci sayısı için, $F_{1,k}^{r-2}(2, r; n) = F_{k,n}(r)$

bağıntıları elde edilir.

Şimdi $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. $f_{s,t}^d(p, q; n)(x)$, $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları olmak üzere

$$f_{s,t}^d(p, q; n)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^n$$

yazılabilir. Buradan $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.39: $d, p, q, s, t \geq 1$, $q > p$ ve $d = q - p$ tam sayılar olmak üzere $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$f_{s,t}^d(p, q; n)(x) = \frac{1 + s^{d\lfloor \frac{1}{p} \rfloor}x + \dots + s^{d\lfloor \frac{q-1}{p} \rfloor}x^{q-1} - s^d(x^p + s^{d\lfloor \frac{1}{p} \rfloor}x^{p+1} + \dots + s^{d\lfloor \frac{q-p-1}{p} \rfloor}x^{q-1})}{1 - s^d x^p - t x^q}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: $f_{s,t}^d(p, q; n)(x)$, $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları olsun. Tanım 3.38 den $n = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ için $F_{s,t}^d(p, q; n) = s^{d\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ olup

$$f_{s,t}^d(p, q; n)(x) - s^d x^p f_{s,t}^d(p, q; n)(x) - t x^q f_{s,t}^d(p, q; n)(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^n - s^d \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+p} - t \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+q}$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} F_{s,t}^d(p, q; n)x^n + \sum_{n=q}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^n - s^d \sum_{n=0}^{q-p-1} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+p}$$

$$- s^d \sum_{n=q-p}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+p} - t \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+q}$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} F_{s,t}^d(p, q; n)x^n - s^d \sum_{n=0}^{q-p-1} F_{s,t}^d(p, q; n)x^{n+p}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n+q) x^{n+q} - s^d \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n+q-p) x^{n+q} - t \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,t}^d(p, q; n) x^{n+q} \right) \\
& = 1 + s^{d \lfloor \frac{1}{p} \rfloor} x + \dots + s^{d \lfloor \frac{q-1}{p} \rfloor} x^{q-1} - s^d (x^p + s^{d \lfloor \frac{1}{p} \rfloor} x^{p+1} + \dots + s^{d \lfloor \frac{q-p-1}{p} \rfloor} x^{q-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$f_{s,t}^d(p, q; n)(x) = \frac{1 + s^{d \lfloor \frac{1}{p} \rfloor} x + \dots + s^{d \lfloor \frac{q-1}{p} \rfloor} x^{q-1} - s^d (x^p + s^{d \lfloor \frac{1}{p} \rfloor} x^{p+1} + \dots + s^{d \lfloor \frac{q-p-1}{p} \rfloor} x^{q-1})}{1 - s^d x^p - t x^q}$$

şeklinde elde edilir ve ispat tamamlanır.

$F_{s,t}^d(p, q; n)$ sayıları döşeme, kombinatoryal ve küme ayrıştırma yorumları gibi farklı yorumlarla ifade edilmiştir. İlk olarak bu sayıları için n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin özel ailelerinin sayısının hesabında da kullanılabilen bir küme yorumu verilecektir.

$d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayı ve $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ n elemanlı bir küme olsun. $n \geq p$ ve $q > p$ için X_n kümesinin ardışık tam sayılar içeren ve

- i. $i \in I$ için $|M_i| = p$ veya $|M_i| = q$
- ii. $|M_i| = p$ ise s^d farklı renkten biri olabilir
- iii. $|M_i| = q$ ise t farklı renkten biri olabilir
- iv. $i \neq j, i, j \in I$ için $M_i \cap M_j = \emptyset$
- v. $n - p + 1 \leq |\cup_{i \in I} M_i| \leq n$
- vi. $r \notin M_i$ ise $i \in I$ için ya $r = n$ ya da $r + 1 \notin M_i$

koşulları sağlayan kümeler ailesi $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ olsun. her bir $\mathcal{M}$ ailesi s^d ve t renkleri ile n elemanlı tam sayılar kümesinin bir renk ayrışımıdır ve X_n kümesinin (s, t) -ayrışımı olarak adlandırılır.

$\mathcal{M}^{p,q}(n)$, X_n kümesinin tüm (s, t) -ayrışımının sayısı olsun. Yukarıdaki koşullara göre $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{M}$ veya $\{1, 2, \dots, q\} \in \mathcal{M}$ dir. $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{M}$ olacak şekilde X_n kümesinin (s, t) -ayrışımının sayısı $\mathcal{M}^p(n)$ ve $\{1, 2, \dots, q\} \in \mathcal{M}$ olacak şekilde X_n kümesinin (s, t) -ayrışımının sayısı $\mathcal{M}^q(n)$ ile gösterilsin. Toplama ilkesine göre bu iki durumdan

$$\mathcal{M}^{p,q}(n) = \mathcal{M}^p(n) + \mathcal{M}^q(n) \quad (3.43)$$

yazılır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.40: $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayısı olmak üzere $n \geq p$ ve $q > p$ için

$$\mathcal{M}^{p,q}(n) = F_{s,t}^d(p, q; n)$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $d, p, q, s, t \geq 1$, $n \geq p$ ve $q > p$ birer tam sayı ve $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $n < q$ ise $F_{s,t}^d(p, q; n) = s^{d \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ elde edilir. $p \leq n < q$ ise s^d farklı renk seçeneğiyle $i \in I$ için $|M_i| = p$ olduğundan $\mathcal{M}^{p,q}(n) = F_{s,t}^d(p, q; n)$ dir. $n \geq q$ için $\mathcal{M}^{p,q}(n) = F_{s,t}^d(p, q; n)$ eşitliğinin keyfi n için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için $\mathcal{M}^{p,q}(n + 1) = F_{s,t}^d(p, q; n + 1)$ olduğunu gösterelim. $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $X_{n+1-p} = \{p + 1, p + 2, \dots, n + 1\}$ kümesinin alt küme ailelerinin her birine s^d farklı renk seçeneğiyle $\{1, 2, \dots, p\}$ eklenirse X_{n+1} kümesi için $s^d \mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - p) = \mathcal{M}^p(n + 1)$ olur. $\{1, 2, \dots, q\} \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $X_{n+1-q} = \{q + 1, q + 2, \dots, n + 1\}$ kümesinin alt küme ailelerinin her birine t farklı renk seçeneğiyle $\{1, 2, \dots, q\}$ eklenirse X_{n+1} kümesi için $t \mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - q) = \mathcal{M}^q(n + 1)$ olur. Diğer taraftan tümevarımın hipotezinden $\mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - p) = F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - p)$ ve $\mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - q) = F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - q)$ elde edilir. Buradan (3.42) ve (3.43) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{p,q}(n + 1) &= \mathcal{M}^p(n + 1) + \mathcal{M}^q(n + 1) \\ &= s^d \mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - p) + t \mathcal{M}^{p,q}(n + 1 - q) \\ &= s^d F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - p) + t F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - q) \\ &= F_{s,t}^d(p, q; n + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Kümelerdeki bu ayrışım yorumu, $F_{s,t}^d(p, q, n)$ sayılarının döşeme yorumlarıyla ifade edilmesini sağlar. Şimdi $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin n -inci terimi için döşeme yaklaşımı sunulacaktır.

$F_{s,t}^d(p, q, n)$ sayısını temsil etmesi için $(1, n)$ -dikdörtgen veya n -dikdörtgen olarak adlandırılan n uzunluğunda bir tahtayı düşünelim. $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayı olmak üzere bu n -dikdörtgenlerini döşemek için s^d farklı renk seçeneğiyle p -dikdörtgenleri ve t farklı renk seçeneğiyle q -dikdörtgenleri kullanılır. Hücreleri yerleştirirken en soldan başlanır ve $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ için bir r -dikdörtgeninin sonda kaldığı görülür. Ayrıca döşeme ya bir p -dikdörtgeni ile başlar ve bir n -dikdörtgenini döşemenin ayrık yollarının sayısı s^d farklı renk seçeneğiyle $s^d F_{s,t}^d(p, q; n-p)$ ya da döşeme ya bir q -dikdörtgeni ile başlar ve bir n -dikdörtgenini döşemenin ayrık yollarının sayısı t farklı renk seçeneğiyle $t F_{s,t}^d(p, q; n-q)$ olur. Böylece Tanım 3.38 de verilen $F_{s,t}^d(p, q; n) = s^d F_{s,t}^d(p, q; n-p) + t F_{s,t}^d(p, q; n-q)$ yineleme bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.41: $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayı ve $q > p$, $n \geq p$ için p -dikdörtgenleri için s^d farklı renk ve q -dikdörtgenleri için t farklı renk olmak üzere $F_{s,t}^d(p, q; n)$ sayısı renkli p -dikdörtgenleri ve renkli q -dikdörtgenleri kullanılarak bir n -dikdörtgenini döşemenin farklı yollarının sayısıdır (Taşyurdu, 2022).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayı olsun. $q > p$, $n \geq p$ için s^d farklı renkli p -dikdörtgenleri ve t farklı renkli q -dikdörtgenleri kullanarak bir n -dikdörtgenini döşemenin farklı yollarının sayısı $(p, q)_n$ gösterilsin. İspatı tamamlamak için $(p, q)_n = F_{s,t}^d(p, q, n)$ olduğunu göstermelidir. $p \leq n < q$ ise döşemelerdeki tüm hücreler p olur ve döşeme sayısının tam olarak $s^{d \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ yol ile elde edilir. Böylece $p \leq n < q$ için $(p, q)_n = s^{d \lfloor \frac{n}{p} \rfloor} = F_{p,q}^d(p, q; n)$ dir. $n \geq q$ için $(p, q)_n = F_{s,t}^d(p, q, n)$ eşitliğinin keyfi n için doğru olduğunu kabul edelim ve $(p, q)_{n+1} = F_{s,t}^d(p, q, n+1)$ olduğunu gösterelim. Bundan sonra ilk hücreye göre iki seçenek vardır. $(n+1)$ -dikdörtgeni için p -dikdörtgeni ile başlayan döşemelerin sayısı $(p)_{n+1}$ ve q -dikdörtgeni ile başlayan döşemelerin sayısı $(q)_{n+1}$ ile gösterilsin.

Toplama ilkesine göre bu iki durumdan $(p, q)_{n+1} = (p)_{n+1} + (q)_{n+1}$ olur. İlk hücre p -dikdörtgeni veya q -dikdörtgeni ise sırasıyla $n + 1 - p$ veya $n + 1 - q$ uzunluklarında bir döşeme elde etmek için ilk hücre kaldırılır. Bu ise sırasıyla bir p -dikdörtgeni veya q -dikdörtgeni birinci hücreye göre bir $(n + 1 - p)$ -dikdörtgeni veya bir $(n + 1 - q)$ -dikdörtgenini döşemenin ayrık yollarının sayısı ile aynıdır. Buradan $s^d(p, q)_{n+1-p} = (p)_{n+1}$ veya $t(p, q)_{n+1-q} = (q)_{n+1}$ elde edilir. Ayrıca tümevarımın hipotezinden $(p, q)_{(n+1-p)} = F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - p)$ ve $(p, q)_{(n+1-q)} = F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - q)$ olur. Buradan (3.42) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(p, q)_{n+1} &= (p)_{n+1} + (q)_{n+1} \\
&= s^d(p, q)_{(n+1-p)} + t(p, q)_{(n+1-q)} \\
&= s^d F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - p) + t F_{s,t}^d(p, q; n + 1 - q) \\
&= F_{s,t}^d(p, q; n + 1)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 3.42: Teorem 3.41 de $d = 1, p = 2, q = 3, s = 2, t = 3$ alınırsa 2 farklı renk seçeneğiyle renkli 2-dikdörtgeni ve 3 farklı renk seçeneğiyle renkli 3-dikdörtgeni kullanarak bir 5-dikdörtgeni döşemenin 16 farklı yolu bulunur. Tüm döşemeler Şekil 3.1 de verilmiştir. Renksiz 1-dikdörtgenin her zaman sonda kaldığına dikkat edilmelidir. Böylece $F_{2,3}^1(2,3; 5) = 16$ olduğu görülür.



Şekil 3.1. $F_{2,3}^1(2,3; 5)$ sayısının döşeme yorumu

Döşeme yorumundan $\{F_{p,q}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin n -inci teriminin hesaplanmasını sağlayan açık formüller elde edilir. $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayı ve $n \geq p$, $q > p$ olsun. p -dikdörtgenleri için s^d farklı renk ve q -dikdörtgenleri için t farklı renk olmak üzere $\mathcal{Y} = \{(m_1, m_2, \dots, m_i, r) \mid i \in I \text{ ve } 0 \leq r \leq p - 1\}$ kümesi

- i. $\in I$ için $m_i \in \{p, q\}$,
- ii. $n - p + 1 \leq \sum_{i \in I} m_i \leq n$,
- iii. Sıralı birleştirmenin son bileşeni daima $r \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ dir

koşulları sağlayan bir n -dikdörtgeninin sıralı bileşenlerinin kümesi olsun. $\mathcal{Y}$ kümesinin her elemanı n -dikdörtgenin bir bileşenidir ve $(m_1, m_2, \dots, m_i)$, r hariç m -sırası olarak adlandırılır. n -dikdörtgeni için tüm m -sıralarının sayısı $\mathcal{Y}_{p,q}(n)$ olsun. Yukarıdaki koşullara göre $m_1 = p$ veya $m_1 = q$ dur. $m_1 = p$ olacak şekilde tüm m -sıralarının sayısı $\mathcal{Y}_p(n)$ ve $m_1 = q$ olacak şekilde tüm m -sıralarının sayısı $\mathcal{Y}_q(n)$ ile gösterilsin. Toplama ilkesine göre bu iki durumdan

$$\mathcal{Y}_{p,q}(n) = \mathcal{Y}_p(n) + \mathcal{Y}_q(n) \quad (3.44)$$

olur. İlk hücre p veya q ise sırasıyla bir $(n - p)$ -dikdörtgenini veya bir $(n - q)$ -dikdörtgenini elde etmek için ilk bileşen kaldırılır. Bu ise sırasıyla bir p veya bir q birinci bileşene göre bir $(n - p)$ -dikdörtgen veya bir $(n - q)$ -dikdörtgen için tüm m -sıralarının sayısı ile aynıdır. Buradan $s^d \mathcal{Y}_{p,q}(n - p) = \mathcal{Y}_p(n)$ veya $t \mathcal{Y}_{p,q}(n - q) = \mathcal{Y}_q(n)$ elde edilir. Böylece (3.42) ve (3.44) eşitliklerinde verilen $\mathcal{Y}_{p,q}(n)$ ve $F_{s,t}^d(p, q; n)$ aynı yineleme bağıntısına ve başlangıç değerlerine sahiptir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.43: $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayısı olmak üzere $q > p$ ve $n \geq p$ için

$$\mathcal{Y}_{p,q}(n) = F_{s,t}^d(p, q; n)$$

dir (Taşyurdu, 2022).

Şimdi $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin n -inci teriminin doğrudan hesaplanmasını sağlayan başka bir genel formül sunulacaktır.

Teorem 3.44: $d, p, q, s, t \geq 1$ birer tam sayısı olmak üzere $q \geq p$ ve $n \geq 0$ için

$$F_{s,t}^d(p, q; n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} s^{d \lfloor \frac{n-jq}{p} \rfloor} t^j \binom{j + \lfloor \frac{n-jq}{p} \rfloor}{j}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: $d, p, q, s, t \geq 1$, $q \geq p$ ve $n \geq 0$ birer tam sayısı olsun. Teorem 3.43 ten için p bileşenleri için s^d farklı renk ve q bileşenleri için t farklı renk olmak üzere $\mathcal{Y}$ kümesinin tüm m -sıralarının sayısı $F_{s,t}^d(p, q; n)$ dir. $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ ve $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$ olmak üzere p bileşeninin i kez ve q bileşeninin j kez olsun. Böylece $\mathcal{Y}$ kümesindeki $i + j$ bileşenlerinden oluşan tüm m -sıralarında j kez bulunan q bileşeninin seçim yollarının sayısı $F_{p,q}^d(p, q; n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} s^{di} t^j \binom{i+j}{j}$ olur. Tanım 3.38 kullanarak $n \leq q - 1$ için $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor = 0$ ve dolayısıyla $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} s^{di} t^j \binom{i+j}{j} = s^{di}$ elde edilir. $n \geq q$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $ip + jq \leq n$ olduğundan sabit bir j için $i \leq \lfloor \frac{n-jq}{p} \rfloor$ şeklinde elde edilir ve $F_{s,t}^d(p, q; n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} s^{di} t^j \binom{i+j}{j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} s^{d \lfloor \frac{n-jq}{p} \rfloor} t^j \binom{j + \lfloor \frac{n-jq}{p} \rfloor}{j}$ bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.45: $d, k, p, q, s, t \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $n \leq kp$ için

$$F_{s,t}^d(p, q; n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} s^{d(k-i)} t^i F_{s,t}^d(p, q; n - (k-i)p - iq)$$

dir (Taşyurdu, 2022).

İspat: (3.42) eşitliği ve tümevarım metodu kullanılarak ispat doğrudan tamamlanabilir.

Aşağıdaki teoremlerle $\{F_{s,t}^d(p, q; n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin tek ve çift terimlerinin toplamı ile özel indisli ilk n terimin toplamı verilmiştir.

Teorem 3.46: $d, p, q, s, t \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $p \leq q$ için

$$F_{s,t}^d(p, q; n + q) = s^{d \lfloor \frac{n+q}{p} \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-p+1}{p} \rfloor} s^{di} t F_{s,t}^d(p, q; n - ip)$$

dir (Taşyurdu, 2022).

Teorem 3.47: $d, p, q, s, t \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $p \leq q$ ve $0 \leq r < p$ için

$$\text{i.} \quad F_{s,t}^d(p, q; np + q) = s^{dn+d \lfloor \frac{q}{p} \rfloor} + \sum_{i=0}^n s^{d(n-i)} t F_{s,t}^d(p, q; ip)$$

$$\text{ii.} \quad F_{s,t}^d(p, q; np + q + r) = s^{dn+d \lfloor \frac{q+r}{p} \rfloor} + \sum_{i=0}^n s^{d(n-i)} t F_{s,t}^d(p, q; ip + r)$$

dir (Taşyurdu, 2022).

Teorem 3.48: $d, k, p, q, s, t \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $p \leq q$ ve $n + p = qk + r$, $0 \leq r < q$ için

$$F_{s,t}^d(p, q; n + p) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-q+1}{q} \rfloor} s^d t^i F_{s,t}^d(p, q; n - iq), & r \geq p \\ t^{\lfloor \frac{n+p}{q} \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-q+1}{q} \rfloor} s^d t^i F_{s,t}^d(p, q; n - iq), & r < p \end{cases}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

Teorem 3.49: $d, k, p, q, s, t \geq 1$ ve $n \geq 0$ birer tam sayı olmak üzere $p \leq q$ ve $nq + p = qk + r$, $0 \leq r < q$ için

$$\text{i.} \quad F_{s,t}^d(p, q; nq + p) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n s^d t^{n-i} F_{s,t}^d(p, q; iq), & r \geq p \\ t^{n+\lfloor \frac{p}{q} \rfloor} + \sum_{i=0}^n s^d t^{n-i} F_{s,t}^d(p, q; iq), & r < p \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad F_{s,t}^d(p, q; nq + p + r) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n s^d t^{n-i} F_{s,t}^d(p, q; iq + r), & 2r \geq p \\ t^{n+\lfloor \frac{p+r}{q} \rfloor} + \sum_{i=0}^n s^d t^{n-i} F_{s,t}^d(p, q; iq + r), & 2r < p \end{cases}$$

dir (Taşyurdu, 2022).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde sayılar arasındaki uzaklık tanımı, yeni bir k parametresiyle yineleme bağıntısında kullanılarak hem Fibonacci, Jacobsthal, Narayana sayılarının hem de uzaklık durumundaki Fibonacci p -sayılarının genelleştirmesi olarak Fibonacci (k, p) -sayıları tanımlanmış ve dizileri oluşturulmuştur. Bu diziler için üreteç fonksiyonları elde edilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Fibonacci (k, p) -sayılarının kombinatoriyal temsilleri elde edilmiştir.

Tam sayılar kümesi kullanarak Fibonacci p -sayısı ve Fibonacci (k, p) -sayıları için çeşitli yorumlar verilmiştir. Bu sayılar ilk olarak küme ayrışım sayıları ile temsil edilmiştir. Bunun için küme ayrışımı ile ilişkili olarak $(n + 1)$ -inci Fibonacci p -sayısı ve n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı sunulmuştur. Daha sonra Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayıları döşeme yorumları sunulmuştur. 1×1 kareler ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominolar kullanarak n -inci Fibonacci p -sayısının bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını ve p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareler ve renkli $1 \times p$, p -ominolar kullanarak n -inci Fibonacci (k, p) -sayısının bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısına eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu yorumlar kullanarak Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayılarının özellikleri, çarpım eşitlikleri ve toplam formülleri sunulmuştur.

4.1. Fibonacci (k, p) -Sayıları ve Özellikleri

Tanım 4.1: $k, p \geq 1$ tam sayılar ve $n = 0, 1, \dots, p - 1$ için $F_p^{(k)}(n) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $F_p^{(k)}(n)$ ile gösterilen n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı

$$F_p^{(k)}(n) = F_p^{(k)}(n - 1) + kF_p^{(k)}(n - p), n \geq p \quad (4.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır ve bu sayıların oluşturduğu dizi $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ şeklinde gösterilir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

Tanım 4.1 de $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için Fibonacci (k, p) -sayılarının özel durumları sırasıyla

- $\{F_1^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1 + k, 1 + 2k + k^2, 1 + 3k + 3k^2 + k^3, 1 + 4k + 6k^2 + 4k^3 + k^4, \dots\}$
- $\{F_2^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k + k^2, 1 + 4k + 3k^2, 1 + 5k + 6k^2 + k^3, \dots\}$
- $\{F_3^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k, 1 + 4k + k^2, 1 + 5k + 3k^2, \dots\}$
- $\{F_4^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1, 1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k, 1 + 4k, 1 + 5k + k^2, 1 + 6k + 3k^2, \dots\}$
- $\{F_5^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k, 1 + 4k, 1 + 5k, 1 + 6k + k^2, \dots\}$
- $\{F_6^{(k)}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k, 1 + 4k, 1 + 5k, 1 + 6k, \dots\}$

şeklindedir.

Tanım 4.1 literatürde yineleme bağıntılarıyla tanımlanan birçok Fibonacci tipli sayının genel halidir. Tanım 4.1 de verilen k ve p parametrelerine göre elde edilen Fibonacci (k, p) -sayılarının özel durumları Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1. Fibonacci (k, p) -sayılarının özel durumları

k	p	Sembol	n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı
1	2	$F_2^{(1)}(n) = F_{n+1}$	F_n , n -inci Fibonacci sayısı
1	$p + 1$	$F_{p+1}^{(1)}(n) = F_p(n + 1)$	$F_p(n)$, n -inci Fibonacci p -sayısı
2	2	$F_2^{(2)}(n) = J_{n+1}$	J_n , n -inci Jacobsthal sayısı
1	3	$F_3^{(1)}(n) = N_{n+1}$	N_n , n -inci Narayana sayısı

k ve p parametrelerinin bazı özel değerleri için $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizileri tam sayı dizilerinin çevrimiçi ansiklopedisinde (OEIS) dizinlenmiştir (Sloane, 2006). Örneğin

- $\{F_1^{(1)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A000079 olarak

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots\}$$

- $\{F_2^{(1)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A000045 olarak

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots\}$$

- $\{F_6^{(1)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A005708 olarak

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 16, 21, \dots\}$$

- $\{F_2^{(2)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A001045 olarak

$$\{1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, \dots\}$$

- $\{F_2^{(4)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A006131 olarak

$$\{1, 1, 5, 9, 29, 65, 181, 441, 1165, \dots\}$$

- $\{F_2^{(8)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisi A015443 olarak

$$\{1, 1, 9, 17, 89, 225, 937, 2737, 10233, \dots\}$$

şeklinde verilmiştir.

Daha genel olarak Tanım 4.1 de $p = 1, 2$ için Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Tablo 4.2. Fibonacci $(k, 1)$ -sayıları

$F_p^{(k)}(n)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1^{(1)}(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$F_1^{(2)}(n)$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
$F_1^{(3)}(n)$	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
$F_1^{(4)}(n)$	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
$F_1^{(5)}(n)$	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
$F_1^{(6)}(n)$	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
$F_1^{(7)}(n)$	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
$F_1^{(8)}(n)$	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
$F_1^{(9)}(n)$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
$F_1^{(10)}(n)$	1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881

Tablo 4.3. Fibonacci $(k, 2)$ -sayıları

$F_p^{(k)}(n)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_2^{(1)}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$F_2^{(2)}(n)$	1	1	3	5	11	21	43	85	171
$F_2^{(3)}(n)$	1	1	4	7	19	40	97	217	508
$F_2^{(4)}(n)$	1	1	5	9	29	65	181	441	1165
$F_2^{(5)}(n)$	1	1	6	11	41	96	301	781	2286
$F_2^{(6)}(n)$	1	1	7	13	55	133	463	1261	4039
$F_2^{(7)}(n)$	1	1	8	15	71	176	673	1905	6616
$F_2^{(8)}(n)$	1	1	9	17	89	225	937	2737	10233
$F_2^{(9)}(n)$	1	1	10	19	109	280	1261	3781	15130
$F_2^{(10)}(n)$	1	1	11	21	131	341	1651	5061	21571

Benzer olarak Tanım 4.1 de $k = 1,2$ için Tablo 4.4 ve Tablo 4.5 aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Tablo 4.4. Fibonacci $(1, p)$ -sayıları

$F_p^{(k)}(n)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1^{(1)}(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$F_2^{(1)}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$F_3^{(1)}(n)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13
$F_4^{(1)}(n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7
$F_5^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	2	3	4	5
$F_6^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	1	2	3	4
$F_7^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	2	3
$F_8^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2
$F_9^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$F_{10}^{(1)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tablo 4.5. Fibonacci $(2, p)$ -sayıları

$F_p^{(k)}(n)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1^{(2)}(n)$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
$F_2^{(2)}(n)$	1	1	3	5	11	21	43	85	171
$F_3^{(2)}(n)$	1	1	1	3	5	7	13	23	37
$F_4^{(2)}(n)$	1	1	1	1	3	5	7	9	15
$F_5^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	3	5	7	9
$F_6^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	1	3	5	7
$F_7^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	3	5
$F_8^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	3
$F_9^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$F_{10}^{(2)}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.2. Fibonacci (k, p) -Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu $G_p^{(k)}(x)$ olmak üzere

$$G_p^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^n \quad (4.2)$$

yazılabilir. Buradan $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile sunulmuştur.

Teorem 4.2: $k, p \geq 1$ tam sayılar olmak üzere Fibonacci (k, p) -sayı dizileri için üreteç fonksiyonları

$$G_p^{(k)}(x) = \frac{1}{1 - x - kx^p}$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: (4.2) eşitliği kullanılarak $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$\begin{aligned} G_p^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^n \\ &= F_p^{(k)}(0) + F_p^{(k)}(1)x^1 + F_p^{(k)}(2)x^2 + \dots + F_p^{(k)}(n)x^n + \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} G_p^{(k)}(x) - xG_p^{(k)}(x) - kx^p G_p^{(k)}(x) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^{n+1} - k \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^{n+p} \end{aligned}$$

yazılabilir.

(4.1) yineleme bağıntısı ve $n = 0, 1, 2, \dots, p-1$ için $F_p^{(k)}(n) = 1$ başlangıç değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(1 - x - kx^p) G_p^{(k)}(x) &= \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} F_p^{(k)}(n) x^n + \sum_{n=p}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^n - \sum_{n=0}^{p-2} F_p^{(k)}(n) x^{n+1} \\
&\quad - \sum_{n=p-1}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^{n+1} - k \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^{n+p} \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} F_p^{(k)}(n) x^n - \sum_{n=0}^{p-2} F_p^{(k)}(n) x^{n+1} \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n+p) x^{n+p} - \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n+p-1) x^{n+p} - k \sum_{n=0}^{\infty} F_p^{(k)}(n) x^{n+p} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} x^n - \sum_{n=0}^{p-2} x^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_p^{(k)}(n+p) - F_p^{(k)}(n+p-1) - k F_p^{(k)}(n) \right) x^{n+p} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - x - kx^p) G_p^{(k)}(x) = 1$$

olup $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$G_p^{(k)}(x) = \frac{1}{1 - x - kx^p}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tablo 4.1 verilen k ve p değerleri Teorem 4.2 de kullanılırsa $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin özel durumları için üreteç fonksiyonları elde edilir. Bu durum aşağıdaki sonuç ile verilmiştir.

Sonuç 4.3: n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı $F_p^{(k)}(n)$ olmak üzere

- $k = 1$ ve $p = 2$ için $F_2^{(1)}(n) = F_{n+1}$ olmak üzere Fibonacci dizilerinin, $\{F_{n+1}\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$G_2^{(1)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

- $k = 1$ ve $p = p + 1$ için $F_{p+1}^{(1)}(n) = F_p(n + 1)$ olmak üzere Fibonacci p -sayı dizilerinin, $\{F_p(n + 1)\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$G_{p+1}^{(1)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^{p+1}}$$

- $k = 2$ ve $p = 2$ için $F_2^{(2)}(n) = J_{n+1}$ olmak üzere Jacobsthal dizilerinin, $\{J_{n+1}\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$G_2^{(2)}(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

- $k = 1$ ve $p = 3$ için $F_3^{(1)}(n) = N_{n+1}$ olmak üzere Narayana dizilerinin, $\{N_{n+1}\}_{n \geq 0}$ üreteç fonksiyonu

$$G_3^{(1)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

4.3. Fibonacci (k, p) -Sayılarının Kombinatoryal Temsilleri

Bu bölümde Fibonacci (k, p) -sayıları için kombinatoryal formüller sunulmuştur. Fibonacci (k, p) -sayıları, (4.1) yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen birçok formül kullanılarak da elde edilebilir. Bu formüller, yineleme bağıntılarıyla tanımlanan sayılardan keyfi bir n -inci sayıyı bulmak için kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunmasına olanak sağlar. Örneğin, 100. Fibonacci (k, p) -sayısını hesaplamak için yineleme bağıntı kullanılırsa, kendisinden önceki ilk 99 terimi hesaplamak gerekmektedir. Ancak dizinin yineleme bağıntısı yerine genel formüller kullanılırsa bu dizinin 100. terimi için ilk 99 terimi hesaplamaya ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu formüllerden biri de kombinatoryal hesaba dayanmaktadır. Aşağıdaki teorem ile n -inci genelleştirilmiş Fibonacci (k, p) -sayısını veren genel formül verilmiştir.

Teorem 4.4: $k, p \geq 1$ ve $n \geq 0$ tam sayıları için

$$F_p^{(k)}(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \binom{n - i(p-1)}{i} k^i \quad (4.3)$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $k, p \geq 1$ ve $n \geq 0$ tam sayılar olsun. $n < p$ için $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor = 0$ olmak üzere Tanım 4.1 den

$$F_p^{(k)}(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \binom{n - i(p-1)}{i} k^i = 1$$

dir. $n \geq p$ ve (4.3) eşitliği n için doğru olsun. Bu durumda $n + 1$ için doğru olduğu gösterilmelidir.

Tanım 4.1 ve tümevarım hipotezinden

$$F_p^{(k)}(n+1) = F_p^{(k)}(n) + kF_p^{(k)}(n+1-p)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \binom{n-i(p-1)}{i} k^i + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1-p}{p} \rfloor} \binom{n+1-p-i(p-1)}{i} k^{i+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \binom{n-i(p-1)}{i} k^i + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor - 1} \binom{n+1-p-i(p-1)}{i} k^{i+1} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \binom{n-(i+1)(p-1)}{i+1} k^{i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor - 1} \binom{n-(i+1)(p-1)}{i} k^{i+1} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor - 1} \binom{n-(i+1)(p-1)+1}{i+1} k^{i+1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor} \binom{n+1-i(p-1)}{i} k^i \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor} \binom{n+1-i(p-1)}{i} k^i
\end{aligned}$$

olup istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 ün ispatında $a < b \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$, $a < 0 \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$ ve $\binom{a}{0} = 1$ dikkate alınmıştır. Aşağıdaki örnek ile bu teorem için birkaç uygulama verilmiştir.

Örnek 4.5:

- i. $\{F_2^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin 6-ncı terimi Tanım 4.1 den $F_2^{(k)}(6) = 1 + 5k + 6k^2 + k^3$ dir. Ayrıca $p = 2$ için (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_2^{(k)}(6) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{6}{2} \rfloor} \binom{6-i(2-1)}{i} k^i \\ &= \binom{6}{0} k^0 + \binom{5}{1} k^1 + \binom{4}{2} k^2 + \binom{3}{3} k^3 \\ &= 1 + 5k + 6k^2 + k^3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- ii. $\{F_5^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin 9-uncu terimini Tanım 4.1 den $F_5^{(k)}(9) = 1 + 5k$ dir. Ayrıca $p = 5$ için (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_5^{(k)}(9) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{9}{5} \rfloor} \binom{9-i(5-1)}{i} k^i \\ &= \binom{9}{0} k^0 + \binom{5}{1} k^1 \\ &= 1 + 5k \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- iii. $\{F_6^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizisinin 12-inci terimi Tanım 4.1 den $F_6^{(k)}(12) = 1 + 7k + k^2$ dir. Ayrıca $p = 6$ için (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_6^{(k)}(12) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{12}{6} \rfloor} \binom{12-i(6-1)}{i} k^i \\ &= \binom{12}{0} k^0 + \binom{7}{1} k^1 + \binom{2}{2} k^2 \\ &= 1 + 7k + k^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tablo 4.1 verilen k ve p değerleri Teorem 4.4 te kullanılırsa $\{F_p^{(k)}(n)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin özel durumları için kombinatorial formüller elde edilir. Bu durum aşığıdaki sonuç ile verilmiştir.

Sonuç 4.6: n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı $F_p^{(k)}(n)$ olmak üzere

- $k = 1$ ve $p = 2$ için $F_2^{(1)}(n) = F_{n+1}$ olmak üzere $(n + 1)$ -inci Fibonacci sayısı

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}$$

- $k = 1$ ve $p = p + 1$ için $F_{p+1}^{(1)}(n) = F_p(n + 1)$ olmak üzere $(n + 1)$ -inci Fibonacci p -sayısı

$$F_p(n + 1) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-ip}{i}$$

- $k = 2$ ve $p = 2$ için $F_2^{(2)}(n) = J_{n+1}$ olmak üzere $(n + 1)$ -inci Jacobsthal sayısı

$$J_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} 2^i$$

- $k = 1$ ve $p = 3$ için $F_3^{(1)}(n) = N_{n+1}$ olmak üzere $(n + 1)$ -inci Narayana sayısı

$$N_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2i}{i}$$

dir (Taşıyurdu ve Cengiz, 2023)

4.4. Genelleştirilmiş Fibonacci p -Sayılarının Döşeme Yorumları

Bu bölümde tam sayılar kümesi kullanarak Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayıları için döşeme yorumları sunulmuştur. Özel küme ayrışımı ile ilişkili olarak $(n + 1)$ -inci Fibonacci p -sayısı olan $F_p(n + 1)$ ve n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı olan $F_p^{(k)}(n)$ döşeme yaklaşımı verilmiştir. Bunun için önce bu sayılar, küme ayrışım sayıları ile temsil edilmiştir.

İlk olarak Fibonacci p -sayılarını ele alalım. n elemanlı tam sayılar kümesi $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ve bu kümenin alt kümeleri 1 ve $p + 1$ elemanlı kümeler olsun. $n \geq 1$ ve $p \geq 0$ tam sayıları için X kümesinin $p + 1$ elemanlı alt kümeleri ardışık tam sayılar içermek üzere

- i. $i \in I$ için $|T_i| = \{1, p + 1\}$,
- ii. $i \neq j, i, j \in I$ için $T_i \cap T_j = \emptyset$,
- iii. $|\bigcup_{i \in I} T_i| = n$

şartlarını sağlayan alt kümelerinin ailesi $\mathcal{T} = \{T_i : i \in I\}$ olsun. Burada her bir $\mathcal{T}$ ailesine X kümesinin bir p -ayrışımı denir.

Teorem 4.7: $n \geq 1$ ve $p \geq 0$ tam sayıları için X kümesinin bütün p -ayrışımının sayısı $F_p(n + 1)$ e eşittir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022c).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $n \geq 1, p \geq 0$ tam sayılar ve $X = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. X kümesinin tüm p -ayrışımının sayısı $c_p(n)$ ile gösterilsin. $n \leq p + 1$ için $F_p(n) = 1$ olup $\mathcal{T}$ ailesi sadece bir elemanlı alt kümelerden oluşacak şekilde bir p -ayrışımından elde edilir. Bu durumda $c_p(n) = 1 = F_p(n + 1)$ olur. $n > p + 1$ olacak şekilde keyfi n tam sayısı için $c_p(n) = F_p(n + 1)$ olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için $c_p(n + 1) = F_p(n + 2)$ olduğunu göstermeliyiz. $\{1\} \in \mathcal{T}$ olacak şekilde X kümesinin bütün p -ayrışımının sayısı $c_{p,1}(n + 1)$ ve $\{1, 2, \dots, p + 1\} \in \mathcal{T}$ olacak şekilde X kümesinin bütün p -ayrışımının sayısı $c_{p,p+1}(n + 1)$ ile gösterilsin. Dolayısıyla $c_p(n + 1) = c_{p,1}(n + 1) + c_{p,p+1}(n + 1)$ olur.

$\{1\} \in \mathcal{T}$ ise $\{2, 3, \dots, n+1\}$ kümesinin bütün p -ayrışımalarının sayısı $c_p(n+1-1) = c_{p,1}(n+1)$ ve $\{1, 2, \dots, p+1\} \in \mathcal{T}$ ise $\{p+2, p+3, \dots, n+1\}$ kümesinin bütün p -ayrışımalarının sayısı $c_p(n+1-p-1) = c_{p,p+1}(n+1)$ olur.

Tümevarım hipotezi ve Tanım 3.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned} c_p(n+1) &= c_{p,1}(n+1) + c_{p,p+1}(n+1) \\ &= c_p(n) + c_p(n-p) \\ &= F_p(n+1) + F_p(n-p+1) \\ &= F_p(n+2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.8: $n \geq 0$ tam sayısı olmak üzere $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin ardışık tam sayı içeren bütün p -ayrışımalarının sayısı $c_2(n)$ ile gösterilsin. $n = 0$ için $X = \emptyset$ olarak tanımlansın. Teorem 4.7 den $p = 2$ için bütün 2-ayrışimleri Tablo 4.6 da verilmiştir.

Tablo 4.6. Bazı 2-ayrışımli kümeler

n	X kümesinin bütün 2-ayrışimleri	$c_2(n)$
0	$\emptyset$	1
1	$\{1\}$	1
2	$\{\{1\}, \{2\}\}$	1
3	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}$	2
4	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$	3
5	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}, \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$	4

↑

$F_2(n+1)$

Şimdi Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısında bir k parametresi dikkate alınarak tanımlanan Fibonacci (k, p) -sayıları için küme ayrışım sayısı ile ilişkisi sunulacaktır. Buradaki k parametresi Fibonacci p -sayıları için tanımlanan $\mathcal{T}$ ailesinin p -ayrışımalarına uygulanabilir. O halde $k, p \geq 1$ birer tam sayı olmak üzere n elemanlı tam sayılar kümesi $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve bu kümenin alt kümeleri 1 ve p elemanlı kümeler olsun.

$k, p \geq 1$ tam sayıları için S_n kümesinin k farklı renkli p elemanlı alt kümeleri ardışık tam sayılar içermek üzere

- i. $i \in I$ için $|A_i| = 1$ veya $|A_i| = p$,
- ii. $|A_i| = p$ ise k farklı renkten biri olabilir,
- iii. $i \neq j, i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- iv. $|\bigcup_{i \in I} A_i| = n$

şartlarını sağlayan alt kümelerinin ailesi $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ olsun. Burada her bir $\mathcal{A}$ ailesi n elemanlı tam sayılar kümesinin bir renk ayrışımıdır ve S_n kümesinin bir (k, p) -ayrışımı olarak adlandırılır.

Teorem 4.9: $k, n \geq 1$ ve $p > 1$ tam sayıları için S_n kümesinin bütün (k, p) -ayrışımının sayısı $F_p^{(k)}(n)$ e eşittir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $k, n \geq 1$ ve $p > 1$ tam sayı ve $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. S_n kümesinin tüm (k, p) -ayrışmalarının sayısı $s(k, p)_n$ ile gösterilsin. İspatı tamamlamak için $s(k, p)_n = F_p^{(k)}(n)$ olduğunu göstermeliyiz. $n < p$ için $\mathcal{A}$ ailesi, $i \in I$ için her bir alt kümesi $|A_i| = 1$ olacak şekilde tam olarak tek bir şekilde elde edilir ve S_n in böyle 1 ailesi vardır ve $s(k, p)_n = 1 = F_p^{(k)}(n)$ olur. $n \geq p$ için ya $\{1\} \in \mathcal{A}$ ya da $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{A}$ olur. Keyfi bir n tam sayısı için $s(k, p)_n = F_p^{(k)}(n)$ olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için $s(k, p)_{n+1} = F_p^{(k)}(n+1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\{1\} \in \mathcal{A}$ olacak şekilde S_{n+1} kümesinin tüm (k, p) -ayrışmalarının sayısı $s_1(k, p)_{n+1}$ ve $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{A}$ olacak şekilde S_{n+1} kümesinin tüm (k, p) -ayrışmalarının sayısı $s_p(k, p)_{n+1}$ ile gösterilsin. Dolayısıyla toplama ilkesi gereğince $s(k, p)_{n+1} = s_1(k, p)_{n+1} + s_p(k, p)_{n+1}$ olur. $\{1\} \in \mathcal{A}$ için $S_{n+1-1} = \{2, 3, \dots, n+1\}$ kümesinin tüm (k, p) -ayrışmalarının sayısı $s(k, p)_{n+1-1}$ dir. S_{n+1-1} kümesinin alt küme ailelerinin her birine $\{1\}$ eklenirse $s(k, p)_{n+1-1} = s_1(k, p)_{n+1}$ elde edilir. $\{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{A}$ için $S_{n+1-p} = \{p+1, p+2, \dots, n+1\}$ kümesinin tüm (k, p) ayrışmalarının sayısı $s(k, p)_{n+1-p}$ dir. S_{n+1-p} kümesinin alt küme ailelerinin her birine k farklı renk seçeneğiyle $\{1, 2, \dots, p\}$ eklenirse $ks(k, p)_{n+1-p} = s_p(k, p)_{n+1}$ elde edilir.

Tümevarım hipotezi ve Tanım 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s(k, p)_{n+1} &= s_1(k, p)_{n+1} + s_p(k, p)_{n+1} \\
&= s(k, p)_n + ks(k, p)_{n+1-p} \\
&= F_p^{(k)}(n) + kF_p^{(k)}(n+1-p) \\
&= F_p^{(k)}(n+1)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Küme ayrışımalarının bu yorumu başka bir yaklaşım olan döşeme yorumu ile n -inci Fibonacci p -sayısının ve n -inci Fibonacci (k, p) -sayısının sunulmasını sağlar.

İlk olarak Fibonacci p -sayıları ele alalım. n uzunluğundaki bir tahta $1 \times n$ ile gösterilsin. Buradan $(n+1)$ -inci Fibonacci p -sayısı için döşeme yorumu 1×1 kareleri ve $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominoları kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısının nasıl bulunacağını gösterir. n uzunluğundaki $1 \times n$ tahtası

i. $i \in I$ için $p_i = \{1, p+1\}$

ii. $\sum_{i \in I} p_i = n$

şartlarını sağlamak üzere görsel yorumu Şekil 4.1 ile verilmiştir.

$1 \times p_1$	$1 \times p_2$	$\dots$	$1 \times p_i$
----------------	----------------	---------	----------------

Şekil 4.1. p_i hücreli bir $1 \times n$ tahtası

$n \geq 1$ için $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını $F_p(n+1)$ temsil etsin. $n \leq p+1$ için $F_p(n) = 1$ olup tek bir şekilde döşeme yapılır ve $F_p(p+1) = 1$ elde edilir. $n > p+1$ için döşemenin bir 1×1 kare ile bittiği $F_p(n+1-1) = F_p(n)$ yol ve bir $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -omino ile bittiği $F_p(n+1-p-1) = F_p(n-p)$ yol vardır. Böylece Tanım 3.15 te verilen Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısı, $F_p(n+1) = F_p(n) + F_p(n-p)$ elde edilir.

Teorem 4.10: $n \geq 1$, $p \geq 0$ tam sayıları için 1×1 kareleri ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominoları kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasının döşemenin farklı yollarının sayısı $F_p(n + 1)$ e eşittir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022c).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $n \geq 1$, $p \geq 0$ tam sayılar olsun. 1×1 kareleri ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominoları kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasını döşemenin farklı yollarının sayısı $s(n)$ ile gösterilsin. $n \leq p + 1$ için $F_p(n) = 1$ olup 1×1 kareler tam olarak tek bir şekilde döşenebilir. Dolayısıyla $s(n) = 1 = F_p(n + 1)$ olur. $n > p + 1$ olacak şekilde keyfi n tam sayısı için $s(n) = F_p(n + 1)$ olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için $s(n + 1) = F_p(n + 2)$ olduğunu göstermeliyiz. Tüm döşemelerdeki ilk döşeme ya 1×1 karesi ya da $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominosudur. 1×1 karesi döşemelerde ilk kare ise $1 \times (n + 1 - 1)$ tahtasını döşemenin farklı yollarının sayısı $s(n + 1 - 1) = s(n)$ ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominosu döşemelerde ilk kare ise $1 \times (n + 1 - p - 1)$ tahtasını döşemenin farklı yollarının sayısı $s(n + 1 - p - 1) = s(n - p)$ olur. Böylece toplama ilkesine göre $s(n + 1) = s(n) + s(n - p)$ dir. Ayrıca tümevarım hipotezinden $s(n) = F_p(n + 1)$ ve $s(n - p) = F_p(n - p + 1)$ elde edilir. Buradan Tanım 3.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned} s(n + 1) &= s(n) + s(n - p) \\ &= F_p(n + 1) + F_p(n - p + 1) \\ &= F_p(n + 2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.11: Teorem 4.10 dan $p = 3$ için 1×1 kareleri ve 1×4 , 4-ominoları kullanarak bir 1×7 tahtasının döşemenin 5 farklı yolu elde edilir. Yani $F_3(8) = 5$ dir. Döşemelerde tüm hücrelerin 1×1 karesi olduğu bir durum vardır. Diğer tüm durumlarda 1×4 , 4-ominosu sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ya da dördüncü hücredir. Tüm döşemeler Şekil 4.2 de verilmiştir.

1 × 4			1 × 1	1 × 1	1 × 1	
1 × 1	1 × 4			1 × 1	1 × 1	
1 × 1	1 × 1	1 × 4			1 × 1	
1 × 1	1 × 1	1 × 1	1 × 4			
1 × 1	1 × 1	1 × 1	1 × 1	1 × 1	1 × 1	1 × 1

Şekil 4.2. $F_3(8)$ sayısının döşeme yorumu

Şimdi Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısında bir k parametresi dikkate alınarak tanımlanan Fibonacci (k, p) -sayıları için döşeme yorumu sunulacaktır. Buradaki k parametresi Fibonacci p -sayıları için tanımlanan döşeme yorumundaki dominoları etkiler. O halde n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı için döşeme yorumu sunulabilir. $k \geq 1$ ve $p > 1$ tam sayılar olmak üzere n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı için döşeme yorumu 1×1 kareleri ve k farklı renkli $1 \times p$, p -ominoları kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısının nasıl bulunacağını gösterir. n uzunluğundaki $1 \times n$ tahtası

- i. $i \in I$ için $c_i \in \{1, p\}$,
- ii. $c_i = p$ ise k farklı renkten biri olabilir,
- iii. $\sum_{i \in I} c_i = n$

şartlarını sağlamak üzere en soldan yerleştirmeye başlanılarak Şekil 4.3 ile verilen görsel yorumu elde edilir.

$1 \times c_1$	$1 \times c_2$	$\dots$	$1 \times c_i$
----------------	----------------	---------	----------------

Şekil 4.3. c_i hücreli bir $1 \times n$ tahtası

$n \geq 1$ için $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını $F_p^{(k)}(n)$ temsil etsin. Buradan döşeme yorumuyla n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.12: $k, n \geq 1, p > 1$ tam sayılar ve p -ominolar için k farklı renk olmak üzere n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı 1×1 kareler ve renkli $1 \times p, p$ -ominoları ile bir $1 \times n$ tahtasını döşeme farklı yollarının sayısıdır (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispat tamamlanabilir. $k, n \geq 1, p > 1$ tam sayılar olsun. p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareleri ve renkli $1 \times p, p$ -ominoları kullanılarak bir $1 \times n$ tahtasının döşemenin farklı yollarının sayısı $(k, p)_n$ ile gösterilsin. İspatı tamamlamak için $(k, p)_n = F_p^{(k)}(n)$ olduğunu göstermeliyiz. $n < p$ ise döşemelerdeki tüm hücreler 1×1 karesidir ve döşeme tam olarak bir şekilde edilir. Böylece $(k, p)_n = 1 = F_p^{(k)}(n)$ olur. $n \geq p$ ise döşemelerdeki ilk hücre ya 1×1 karesi ya da $1 \times p, p$ -ominosudur. Buna göre keyfi n tam sayısı için $(k, p)_n = F_p^{(k)}(n)$ olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu yani $(k, p)_{n+1} = F_p^{(k)}(n + 1)$ olduğunu gösterelim. İlk hücre 1×1 karesi ise $1 \times (n + 1 - 1)$ tahtasını döşemenin $(k, p)_{n+1-1}$ yolu ve ilk hücre $1 \times p, p$ -ominosu ise k farklı renk seçeneği ile $1 \times (n + 1 - p)$ tahtasını döşemenin $k(k, p)_{n+1-p}$ yolu vardır. Böylece toplama ilkesine göre $(k, p)_{n+1} = (k, p)_n + k(k, p)_{n+1-p}$ elde edilir. Ayrıca tümevarım hipotezinden $(k, p)_n = F_p^{(k)}(n)$ ve $(k, p)_{n+1-p} = F_p^{(k)}(n + 1 - p)$ dir. Tanım 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (k, p)_{n+1} &= (k, p)_n + k(k, p)_{n+1-p} \\ &= F_p^{(k)}(n) + kF_p^{(k)}(n + 1 - p) \\ &= F_p^{(k)}(n + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.5. Genelleştirilmiş Fibonacci p -Sayılarının Özellikleri

Bu bölümde döşeme yorumları kullanılarak Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci (k, p) -sayıları için çarpım eşitlikleri ve toplam formülleri verilmiştir. Ayrıca bu sayıların bazı özellikleri incelenmiştir.

Teorem 4.13: $k, p \geq 1$ ve $n \geq 2p - 1$ tam sayılar olsun. n -inci Fibonacci (k, p) -sayısı $F_p^{(k)}(n)$ olmak üzere

$$F_p^{(k)}(n) = (k - 1)F_p^{(k)}(n - p) + F_p^{(k)}(n - 1) + F_p^{(k)}(n - p + 1) - kF_p^{(k)}(n - 2p + 1)$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: (4.1) ile verilen yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (k - 1)F_p^{(k)}(n - p) + F_p^{(k)}(n - 1) + F_p^{(k)}(n - p + 1) - kF_p^{(k)}(n - 2p + 1) \\ &= kF_p^{(k)}(n - p) - F_p^{(k)}(n - p) + F_p^{(k)}(n - 1) + F_p^{(k)}(n - p + 1) - kF_p^{(k)}(n - 2p + 1) \\ &= F_p^{(k)}(n) + 0 \\ &= F_p^{(k)}(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.14: $p \geq 0$ ve $n \geq 1$ tam sayıları için

$$\sum_{i=0}^n F_p(n + 1 - i) + 1 = F_p(n + p + 2)$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022c).

İspat: Teorem 4.10 dan 1×1 kareler ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominolar kullanılarak bir $1 \times (n + p + 1)$ tahtasının döşemenin farklı yollarının sayısı $F_p(n + p + 2)$ ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sağ tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sol tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times (n + p + 1)$ tahtasını düşünelim. Tüm hücrelerin 1×1 kare olduğu döşemelerin sayısı 1 dir.

Diğer tüm döşemeler en az bir $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominosu içerir. $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominosu içeren döşemeler, ilk $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -omino konumuna göre soldan sayılarak hesaplanabilir. İlk hücre $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominosu ise $1 \times n$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $F_p(n+1)$ olur. Diğer döşemelerde $1 \leq i \leq n$ için $(i+1)$ -inci ve $(i+p+1)$ -inci hücrelerini kapsayan $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominosundan önce i kez 1×1 karesi vardır ve bu şekilde elde edilen döşemelerin sayısı $F_p(n+1-i)$ olur. Tüm durumların toplamı istenen sonuç olup $\sum_{i=0}^n F_p(n+1-i) + 1 = F_p(n+p+2)$ olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.15: $p \geq 0$ ve $k \geq 1$ tam sayılar olsun. $0 \leq r < p+1$ olmak üzere $n+1 = (p+1)k + r$ için

$$F_p(n+2) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor} F_p(n+1-i(p+1)) & , \quad r \geq 1 \\ \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor} F_p(n+1-i(p+1)) + 1 & , \quad r = 0 \end{cases}$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022c).

İspat: Teorem 4.10 dan 1×1 kareler ve $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominolar kullanılarak bir $1 \times (n+1)$ tahtasının döşemenin farklı yollarının sayısı $F_p(n+2)$ e eşittir. Böylece bu eşitliğin sol tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sağ tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times (n+1)$ tahtasını düşünelim. $r \geq 1$ ise bütün döşemelerde en az bir tane 1×1 karesi bulunur. 1×1 karesini içeren döşemeler, ilk 1×1 karenin konumuna göre soldan sayılarak hesaplanabilir. İlk kare 1×1 karesi ise $1 \times n$ tahtasını döşemenin bütün sayısı $F_p(n+1)$ olur. Diğer döşemelerde $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor$ için $(i(p+1)+1)$ -inci hücreyi kapsayan 1×1 karesinden önce i kez $1 \times (p+1)$, $(p+1)$ -ominosu vardır ve bu şekilde elde edilen döşemelerin sayısı $F_p(n+1-i(p+1))$ olur. Tüm durumların toplamı istenen sonuç olup $\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-p}{p+1} \right\rfloor} F_p(n+1-i(p+1)) = F_p(n+2)$ bulunur.

Diğer taraftan $r = 0$ ise tüm hücrelerin $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominosu olduğu tam olarak bir tane daha döşeme vardır ve $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor} F_p(n + 1 - i(p + 1)) + 1 = F_p(n + 2)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

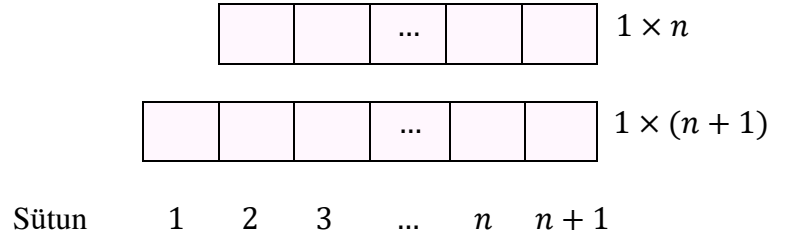
Teorem 4.16: $p \geq 0$ ve $k \geq 1$ tam sayılar olmak üzere

$$F_p(n + 1)F_p(n + 2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor} F_p(n + 1 - i(p + 1))^2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2p}{p+1} \rfloor} F_p(n - i(p + 1))F_p(n + 2 - (i + 1)(p + 1))$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2022c).

İspat: Teorem 4.10 dan 1×1 kareler ve $1 \times (p + 1)$, $(p + 1)$ -ominolar kullanılarak $1 \times n$ ve $1 \times (n + 1)$ tahtalarını döşemenin farklı yollarının sayısı sırasıyla $F_p(n + 1)$ ve $F_p(n + 2)$ e eşittir. Aşağıdaki şekilde gibi bu iki tahta birbirlerinden bağımsız olarak döşemelerin sayısı $F_p(n + 1)F_p(n + 2)$ olur. Böylece bu eşitliğin sol tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sağ tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır.



$1 \times n$ ve $1 \times (n + 1)$ tahtalarının sütunları şekilde gibi numaralandırılsın. 1×1 karesini içeren döşemeler, ilk 1×1 karesinin konumuna göre soldan sayılarak hesaplanabilir. İlk kare ya ilk kez üst döşemede ya da ilk kez alt döşemede görülür. Herhangi bir döşeme için bir 1×1 kare içeren en küçük numaralı sütun c olsun. Buna göre $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2p}{1+p} \rfloor$ için 1×1 karesi üst döşemede $c = 2 + i(p + 1)$ konumunda görülür. Bu durumda döşemelerin sayısı $F_p(n - i(p + 1))F_p(n + 2 - (i + 1)(p + 1))$ olur. Diğer taraftan $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-p}{p+1} \rfloor$ için 1×1 karesi alt döşemede $c = 1 + i(p + 1)$ konumunda görülür.

Bu durumda döşemelerin sayısı $F_p(n+1-i(p+1))^2$ olur. Tüm durumların toplamı istenen sonuç olup $F_p(n+1)F_p(n+2) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-p}{1+p} \rfloor} F_p(n+1-i(p+1))^2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2p}{1+p} \rfloor} F_p(n-i(p+1))F_p(n+2-(i+1)(p+1))$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremlerle Fibonacci p -sayılarının yineleme bağıntısında bir k parametresi dikkate alınarak tanımlanan Fibonacci (k, p) -sayılarının toplam formülleri ve bazı özellikleri verilmiştir.

Teorem 4.17: $k, p \geq 1$ ve $n \geq 0$ tam sayılar olmak üzere

$$F_p^{(k)}(n+p) = \sum_{i=0}^n kF_p^{(k)}(i) + 1$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: Teorem 4.12 den p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareler ve renkli $1 \times p$, p -ominolar kullanılarak $1 \times (n+p)$ tahtalarını döşemenin farklı yollarının sayısı $F_p^{(k)}(n+p)$ ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sol tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sağ tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. $1 \times (n+p)$ tahtasını düşünelim ve hücreleri en soldaki hücreden başlayarak yerleştirelim. Tüm hücrelerin 1×1 kare olduğu döşemelerin sayısı 1 dir. Diğer tüm döşemeler en az bir $1 \times p$, p -ominosu içerir. $1 \times p$, p -ominosu içeren döşemeler, ilk $1 \times p$, p -omino konumuna göre soldan sayılarak hesaplanabilir. k farklı renk ile renkli $1 \times p$, p -ominosu ilk kez birinci hücrede görünüyorsa $1 \times (n+p-p)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $kF_p^{(k)}(n)$ ve ilk kez ikinci hücrede görünüyorsa $1 \times (n+p-p-1)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $kF_p^{(k)}(n-1)$ olur. Benzer olarak k farklı renk ile renkli $1 \times p$, p -ominosu ilk kez son hücrede görünüyorsa kendisinden önce n kez 1×1 karesi vardır ve $1 \times (n+p-p-n)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $kF_p^{(k)}(0)$ olur. Tüm durumların toplamı istenen sonuç olup $\sum_{i=0}^n kF_p^{(k)}(i) + 1 = F_p^{(k)}(n+p)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.18: $k, p \geq 1$ ve $n \geq 0$ tam sayılar olmak üzere $0 \leq r \leq p - 1$ için

$$F_p^{(k)}(np + r + 1) = \begin{cases} k^{n+1} + \sum_{i=0}^n k^{n-i} F_p^{(k)}(ip + r), & r = p - 1 \\ \sum_{i=0}^n k^{n-i} F_p^{(k)}(ip + r), & r < p - 1 \end{cases}$$

dir (Taşyurdu ve Cengiz, 2023).

İspat: Teorem 4.12 den, p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 kareler ve renkli $1 \times p$, p -ominolar kullanarak $1 \times (np + r + 1)$ tahtasını döşemenin farklı yollarının sayısı $F_p^{(k)}(np + r + 1)$ e eşittir. Böylece bu eşitliğin sol tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sağ tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. $1 \times (np + r + 1)$ tahtasını düşünelim ve hücreleri en soldaki hücreden başlayarak yerleştirelim. $r < p - 1$ ise bütün döşemelerde en az bir tane 1×1 karesi bulunur. 1×1 karesini içeren döşemeler, ilk 1×1 karenin konumuna göre soldan sayılarak hesaplanabilir. p -ominolar için k farklı renk olmak üzere 1×1 karesi ilk kez birinci hücrede görünüyorsa $1 \times (np + r + 1 - 1)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $kF_p^{(k)}(np + r)$ ve ilk kez ikinci hücrede görünüyorsa $1 \times (np + r + 1 - 1 - p)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $kF_p^{(k)}((n - 1)p + r)$ olur. p -ominolar için k farklı renk olmak üzere benzer olarak 1×1 karesi ilk kez son hücrede görünüyorsa kendisinden önce i kez $1 \times p$, p -ominosu vardır ve $1 \times (np + r + 1 - 1 - ip)$ tahtasını döşemenin bütün yollarının sayısı $k^i F_p^{(k)}(p(n - i) + r)$ olur. Tüm durumların toplamı istenen sonuç olup $\sum_{i=0}^n k^{n-i} F_p^{(k)}(ip + r) = F_p^{(k)}(np + r + 1)$ elde edilir. Diğer taraftan $r = p - 1$ ise tüm hücrelerin $1 \times p$, p -ominosu olduğu tam olarak k^{n+1} tane daha döşeme vardır ve $\sum_{i=0}^n k^{n-i} F_p^{(k)}(ip + r) + k^{n+1} = F_p^{(k)}(np + r + 1)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada yineleme bağıntılarıyla tanımlanan Fibonacci, Jacobsthal ve Narayana sayıları ile uzaklık kavramıyla verilen Fibonacci p -sayılarının genel hali olarak genelleştirilmiş (k, p) -Fibonacci sayıları tanımlanmış ve dizileri oluşturulmuştur. Bu dizilerin üreteç fonksiyonları ve kombinatoryal yaklaşım ile n -inci teriminin hesaplanmasına olanak sağlayan genel formüller elde edilmiştir. Fibonacci p -sayısı ve Fibonacci (k, p) -sayıları kullanılarak çeşitli düzlemler döşenmiş ve elde edilen desenler bu sayılarının ilginç cebirsel özelliklerini göstermek için kullanılmıştır.

(k, p) -Fibonacci sayılarının tanımlanması ve bu sayıların dizilerinin oluşturulması ile sayı dizileri için elde edilebilecek tüm özellikler incelenmiş ve sayı dizilerinin yeni bir sınıfı kazandırılmıştır. Böylece, daha önce sunulan sayılar arasındaki ilişkiler incelenerek önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bir dizinin herhangi bir terimini elde etmek için yineleme bağıntılarının yanı sıra farklı formüller sunulmuştur. Literatüre Fibonacci sayılarının yeni bir sınıfı kazandırılmış ve bunun özel bir türü olan yeni tanımlar elde edilerek bilime katkı sağlaması amaçlanmıştır. Bu çalışmada elde edilecek tüm sonuçlar hem farklı bilim alanında uygulanabilirliği hem de aynı alanda çalışan diğer araştırmacılara yol göstericiliği açısından literatürde önemli bir yere sahip olması temenni edilmiştir.

5.2. Öneriler

Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara öneriler olarak, sayılar arasındaki uzaklık tanımı ile yineleme bağıntıları kullanılarak sunulan diğer uzaklık Fibonacci sayıları ve Lucas p -sayıları için bu çalışmada sunulan yöntem uygulamalar ile sayı dizileri için yeni genelleştirmeler tanımlanabileceğini ve bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların araştırılabileceğini ifade edebiliriz.

KAYNAKLAR

- Allouche, J. P. and Johnson, T. (1996) “Narayana’s cows and delayed morphisms”, *In: Articles of 3rd Computer Music Conference JIM96*, France.
- Bednarz, U., Wloch, A. and Wołowiec-Musiał, M. (2013) “Distance Fibonacci numbers, their interpretations and matrix generators”, *Commentationes Mathematicae*, 53(1), 35-46.
- Bednarz, N. (2021) “On (k, p) -Fibonacci numbers”, *Mathematics*, 9 (727), 13.
- Benjamin, A.T. and Quinn, J. J. (2002) “The Fibonacci numbers exposed more discretely”, *Mathematics Magazine*, 33, 182–192.
- Benjamin, A.T. and Quinn, J. J. (2003) “Proofs that really count: The art of combinatorial proof.”, *Mathematical Association of America*.
- Bolat, C. and Köse, H. (2010) “On the properties of k -Fibonacci numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(22), 1097-1105.
- Boussayoud, A., Boughaba, S. and Kerada, M. (2018) “Generating functions k -Fibonacci and k -Jacobsthal numbers at negative indices”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6(2), 195-202.
- Brigham, R. C., Caron, R. M., Chinn, P. Z. and Grimaldi, R. P. (1996-97) “A tiling scheme for the Fibonacci numbers”, *Journal of Recreational Mathematics*, 28(1), 10-17.
- Çağman, A. (2021a) “An approach to pillai’s problem with the Pell sequence and the powers of 3”, *Miskolc Mathematical Notes*, 22(2), 599-610.
- Çağman, A. (2021b) “Repdigits as product of Fibonacci and Pell numbers”, *Turkish Journal of Science*, 6(1), 31-35.
- Carlitz, L. (1962) “Generating functions for powers of certain sequences of numbers”, *Duke Mathematical Journal*, (29), 521-537.
- Catarino, P. (2013) “On some identities and generating functions for k -Pell numbers”, *International Journal of Mathematical Analysis*, 7(38), 1877-1884.
- Deveci, O., Karaduman, E. (2017) “On the Padovan p -numbers”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(4), 579-592.
- El-Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) “A new family of k -Fibonacci numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 4456-4461.
- Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. and Ward, T. (2003) “Recurrence sequences”, *American Mathematical Society*, USA, 323.

- Falcon, S. and Plaza, A. (2007a) “On the Fibonacci k -numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5), 1615-1624.
- Falcon, S. and Plaza, A. (2007b) “The k -Fibonacci sequence and the Pascal 2 -triangle”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(1), 38-49.
- Falcon, S. (2012) “On the Lucas triangle and its relationship with the k -Lucas numbers”, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2(3), 425-434.
- Falcon, S. (2014) “Generalized (k, r) -Fibonacci numbers”, *General Mathematics Notes*, 25(2), 148-158.
- Hoggatt, V. (1969) “Fibonacci and Lucas Numbers”, *Houghton Mifflin*, Boston, MA, USA.
- Holden, H. L. (1975) “Fibonacci tiles”, *Fibonacci Quarterly*, 13(1), 45-49.
- Horadam, A. F. (1961) “A generalized Fibonacci sequence”, *American Mathematical Monthly*, 68(5), 455-459.
- Horadam, A.F. (1965) “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.
- Horadam, A. F. (1971) “Pell identities”, *The Fibonacci Quarterly*, 9(3), 245-263.
- Horadam, A. F. (1996) “Jacobsthal representation numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 34, 40-54.
- Kadioğlu, E. and Kamali, M. (2003) “Genel Matematik”, *Bakanlar Matbaacılık*, Erzurum, 1-491.
- Kalman, D. and Mena, R. (2003) “The Fibonacci numbers-exposed”, *Mathematics Magazine*, 6, 167-81.
- Kuhapatanakul, K. (2016) “The Fibonacci p -numbers and Pascal’s triangle”, *Cogent Mathematics*, 3, 1-7.
- Kılıç, E. (2009) “The generalized Pell (p, i) -numbers and their Binet formulas, combinatorial representations sums”, *Chaos Solitons Fractals*, 40, 2047-2063.
- Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, *Wiley*, New York, NY, USA, 1-641.
- Koshy, T. (2014) “Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications”, *Springer*, New York, NY, USA, 1-431.
- Kwasnik, M. and Włoch, I. (2000) “The total number of generalized stable sets and kernels of graphs”, *Ars Combinatoria*, 55, 139-146.

- Marques, D. and Trojovsky, P. (2019) “On characteristic polynomial of higher order generalized Jacobsthal numbers”, *Advances in Difference Equations*, 392, 9p.
- Miles, E.P. (1960) “Generalized Fibonacci numbers and associated matrices”, *The American Mathematical Monthly*, 67(8), 745-752.
- Panwar, Y. K. (2021) “A note on the generalized k -Fibonacci sequence”, *MTU Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2(2), 29-39.
- Ramirez, J. S. and Sirvent, V. F. (2015) “A note on the k -Narayana sequence”, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 45, 91-105.
- Shanon, A.G. and Horadam, A. F. (1973) “Generalized Fibonacci triples”, *The American Mathematical Monthly*, 80, 187-90.
- Sloane, N. J. A. (2006) “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”, *The OEIS Foundation*, www.research.att.com/~njas/sequences/.
- Stakhov, A.P. (1977) “Introduction into Algorithmic Measurement Theory”, *Soviet Radio*, Moskow, Russia.
- Stakhov, A. (1989) “The Golden section in the measurement theory”, *Computers & Mathematics with Applications*, 17(46), 613-38.
- Stakhov, A. and Rozin, B. (2005) “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(5), 1162-1177.
- Stakhov, A. P. (2006) “Fibonacci matrices a generalization of the Cassini formula and a new coding theory”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 56–66.
- Włoch, I., Bednarz, U., Brod, D., Włoch, A. and Wołowicz-Musiał, M. (2013) “On a new type of distance Fibonacci numbers”, *Discrete Applied Mathematics*, 161 (16-17), 2695-2701.
- Taşyurdu, Y., Çobanoğlu, N. and Dilmen, Z. (2016) “On the a new family of k -Fibonacci numbers”, *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 9(1), 95-101.
- Taşyurdu, Y. (2019) “Generalized (p, q) -Fibonacci-like sequences and their properties”, *Journal of Mathematics Research*, 11(6), 43-52.
- Taşyurdu, Y. (2022) “Generalized Fibonacci numbers with five parameters”, *Thermal Science*, Spec. issue, 2(26), 495-505.
- Taşyurdu, Y. and Türkoğlu, Ş. N. (2022) “A tiling interpretation for (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas numbers”, *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 81-87.
- Taşyurdu, Y. and Cengiz, B. (2022a) “A tiling approach to Fibonacci p -numbers”, *8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin, 138.

- Taşıyurdu, Y. and Cengiz, B. (2022b) “On Fibonacci (k,p) -numbers and their interpretations”, *8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin, 139.
- Taşıyurdu, Y. and Cengiz, B. (2022c) “A tiling approach to Fibonacci p -numbers”, *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 177-184.
- Taşıyurdu, Y. and Cengiz, B. (2023) “On Fibonacci (k,p) -numbers and their interpretations”, *Sakarya University Journal of Science SAUJS*, 27(2), 235-246.

