

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GEOMETRİK (ÇARPIMSAL) SAYISAL ANALİZDE BAĞ (SPLINE) ARA
DEĞER BULMA YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS

Muhanmet Emin GÜRBULAK

TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GEOMETRİK (ÇARPIMSAL) SAYISAL ANALİZDE BAĞ (SPLINE) ARA
DEĞER BULMA YÖNTEMİ**

**SPLINE INTERPOLATION METHOD IN GEOMETRIC (MULTIPLICATIVE)
NUMERICAL ANALYSIS**

YÜKSEK LİSANS

Muhanmet Emin GÜRBULAK

**TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GEOMETRİK (ÇARPIMSAL) SAYISAL ANALİZDE BAĞ (SPLINE) ARA
DEĞER BULMA YÖNTEMİ**

**SPLINE INTERPOLATION METHOD IN GEOMETRIC (MULTIPLICATIVE)
NUMERICAL ANALYSIS**

YÜKSEK LİSANS

Muhanmet Emin GÜRBULAK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Geometrik (Çarpımsal) Sayısal Analizde Bağ (Spline) Ara Değer Bulma Yöntemi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

05/07/2023

.....
Muhanmet Emin GÜRBULAK

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında bana yol gösteren danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden desteklerini esirgemeyen aileme minnettarım.

Muhanmet Emin GÜRBULAK
GÜMÜŞHANE – 2023



ÖZET

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Newtonyen olmayan analizlerden geometrik analizin temel tanım ve kavramları verilmiştir. Daha sonra bir geometrik fonksiyonun bir noktadaki geometrik türevleri klasik türevler ile ardışık olarak hesaplanmıştır. Ayrıca bir noktadaki geometrik türevlerin Faà di Bruno formülü yardımıyla klasik türevler ile hesabı verilmiştir. Tezin asıl konusu geometrik sayısal analiz için verilen geometrik bağ ara değer bulma yöntemidir. Sırasıyla sıfırıncı derece geometrik bağ ara değerlendirme, doğrusal geometrik bağ ara değerlendirme, kübik geometrik bağ ara değerlendirme tanıtılmıştır. Ayrıca doğal kübik geometrik bağ ara değerlendirme probleminin çözümünün varlığı, tekliği ile çözüm yöntemi incelenmiştir. Son olarak kübik geometrik bağ ara değerlemenin bir uygulaması verilmiştir. Bu uygulamada verilen problemin de çözümünün varlığı, tekliği ile çözüm yöntemi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bağ ara değer bulma yöntemi, Geometrik analiz, Newtonyen olmayan analiz, Sayısal analiz

SUMMARY

In this thesis, firstly, the basic definitions and concepts of geometric analysis, which is one of the non-Newtonian analyses, are given. Then, the geometric derivatives of a geometric function at a point are calculated successively with classical derivatives. In addition, the geometrical derivatives at a point were calculated with the help of the Faà di Bruno formula with classical derivatives. The main subject of the thesis is the geometric spline interpolation method for geometric numerical analysis. Zero-order geometric spline interpolation, linear geometric spline interpolation, cubic geometric spline interpolation are introduced, respectively. In addition, the existence and uniqueness of the solution of the natural cubic geometric spline interpolation problem and the solution method are examined. Finally, an application of cubic geometric spline interpolation is given. The existence and uniqueness of the solution of the problem given in the application and the solution method are examined.

Keywords: Spline interpolation method, Geometric analysis, Non-Newtonian analysis, Numerical analysis

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	1
2. GEOMETRİK ANALİZ	4
3. BİR GEOMETRİK FONKSİYONUN BİR NOKTADA GEOMETRİK TÜREVLERİNİN KLASİK TÜREVLER İLE İFADESİ.....	7
3.1. Geometrik Türevlerin Klasik Türevler ile Ardışık Olarak Hesaplanması	8
3.2. Geometrik Türevlerin Faà di Bruno Formülü Yardımıyla Klasik Türevler ile Hesaplanması.....	11
4. GEOMETRİK BAĞ ARA DEĞER BULMA YÖNTEMİ	19
4.1. Sıfırıncı Derece Geometrik Bağ Ara Değerleme	21
4.2. Doğrusal Geometrik Bağ Ara Değerleme	22
4.3. Kübik Geometrik Bağ Ara Değerleme.....	23
4.3.1. Doğal Kübik Geometrik Bağ Ara Değerleme.....	24
4.4. Kübik Geometrik Bağ Ara Değerlemenin Bir Uygulaması	32
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	37
KAYNAKÇA.....	38
ÖZGEÇMİŞ	41

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Birinci dereceden geometrik bağ fonksiyonunun grafiği	23
--	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_{\exp}$	: Üstel reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\exp}^+$	: Üstel pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\exp}^-$	: Üstel negatif reel sayılar kümesi
$ x _*$	: Geometrik mutlak değer
$* \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	: Geometrik limit
$f^*(x)$	: Geometrik türev
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	: Geometrik dizi ($a_n \in \mathbb{R}_{\exp}$)
$\prod_{n=0}^{\infty} a_n$	: Geometrik seri ($a_n \in \mathbb{R}_{\exp}$)
$B_{n,k}(x)$	: Bell Polinomu
τ_i	: i . alt aralık
$B(x)$	: Geometrik bağ fonksiyonu
$b(x)$	: Klasik bağ fonksiyonu

1. GİRİŞ

Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in oluşturduğu analizde (Newton analizi) bir büyüklükte meydana gelen küçük değişimler (artışlar) çıkarma işlemiyle hesaplanmaktadır. Bu analizde kartezyen düzlemde bir noktada fonksiyona birinci mertebeden yaklaşım o noktada fonksiyonun grafiğine teğet olan (polinom olarak) doğrusal bir fonksiyon ile yapılır. Keşfedildiği 17. yüzyılın sonundan günümüze toplamsal türev ve integrale dayanan Newtonyen diferansiyel ve integral hesabı bilimin en önemli araçlarından biri haline gelmiştir.

Micheal Grossman ve Robert Katz, Temmuz 1967'de geometrik (çarpımsal), kuadratik (karesel) ve klasik analizi içeren bir analiz ailesini buldular. Ağustos 1970'de ise bigeometrik (çift geometrik), anageometrik (geri geometrik), bikuadratik (çift karesel), anakuadratik (geri karesel) analizi içeren sonsuz sayıda başka analizi buldular. Tüm bu analizler aynı anda bir genel teori çerçevesinde tanımlanabilir. Grossman ve Katz, klasik analiz dışında kalan analizlere "Newtonyen olmayan" sıfatını kullandılar (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1979). Grossman ve Katz'ın bulduğu Newtonyen olmayan analizlerden yoğun ilgi görenlerinden biri geometrik (çarpımsal) analizdir. Bu analizde fonksiyonun değerinde meydana gelen değişimler bölme işlemiyle ölçülür. Ayrıca bu analizde bir noktada fonksiyona 1. mertebeden yaklaşım o noktada fonksiyonun grafiğine teğet olan üstel bir fonksiyon ile yapılır.

Dick Stanley, 1999 yılında yayınlanan bir makale çalışmasında geometrik analizi çarpımsal analiz (multiplicative calculus) olarak isimlendirmiştir (Stanley, 1999). Duff Campbell, aynı yıl bu analiz ile ilgili bir çalışma yapmıştır (Campbell, 1999). Bu analiz ile ilgili bir diğer önemli çalışma Bashirov ve arkadaşlarının 2008'de yaptıkları çalışmadır (Bashirov vd., 2008). Son yıllarda yapılan çalışmaların çarpımsal analizin çeşitli bilim dallarındaki problemlerin çözümlerinde farklı bir bakış açısı getirdiği gözlemlenmiştir (Filip ve Piatecki, 2014; Córdova-Lepe, 2006; Córdova-Lepe vd., 2015; Florack ve van Assen, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Goktas vd., 2022; Göktas vd., 2022; Yalçın, 2016; Duyar ve Erdoğan, 2020; Yalçın, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2021; Güngör ve Durmaz, 2020; Bal, Yalçın ve Dedetürk, 2023)

Geometrik analizin gelişimi ile bu analize dayalı sayısal (nümerik) yöntemler de geliştirilmiştir. Aniszewska, 2007 yılında geometrik Runge-Kutta yöntemini vermiştir (Aniszewska, 2007). 2009 yılında yüksek mertebeden geometrik sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin hesaplanması amacıyla geometrik sonlu farklar

yöntemi geliştirilmiştir (Rıza vd., 2009). Yine aynı yıl, Mısırlı ve Özyapıcı'nın birlikte yaptıkları çalışmada ve Özyapıcı'nın tez çalışmasında geometrik üstel interpolasyon, geometrik Lagrange yöntemi, geometrik sonlu bölüm analizi, geometrik kuvvet-bölüm formülü, geometrik sonlu fark yöntemi, üstel fonksiyon yaklaşımı verilmiştir (Misirli ve Özyapıcı, 2009; Özyapıcı, 2009). Geometrik interpolasyon yaklaşımı ile geometrik başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri için geometrik Adams Bashforth-Moulton yöntemleri verilmiştir (Gürefe, 2009; Misirli ve Gürefe, 2011). Bu yöntemler ile ilgili pek çok başka çalışmada yapılmıştır (Gürefe, 2013; Özyapıcı vd., 2013; Kadak ve Özlük, 2015; Rıza ve Aktöre, 2015).

Bağ ara değer bulma yöntemi günümüzde, bilgisayar grafikleri, uydu davranış kontrolü, veri analizi, imge ve video işleme, biyomedikal sinyal işleme ve sismik analiz gibi mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılan bir ara değer bulma yöntemidir (Lee, vd., 2010).

Bağ (spline) fonksiyonları, verilen düğüm (kontrol) noktalarından oluşan koordinat konum kümeleri (veri kümesi) ile tanımlanırlar. Parçaları polinomlardan oluşan parçalı tanımlı bağ fonksiyonlarının grafiği düğüm noktaları ile belirlenir (Uğur, 2006).

Bağ fonsiyonunun grafiği çizilirken bir düğüm noktasının bir tarafından diğer tarafına geçerken düzgün bir geçiş olmalıdır. Bunu sağlamak için aşağıdaki süreklilik şartları kullanılır.

i) Sıfırıncı mertebeden süreklilik: Sadece bağlantı noktaları aynı (Doğrusal bağ aradeğerleme için).

ii) Birinci mertebeden süreklilik: Bağlantı noktalarında, her iki eğrinin türevleri eşit (İkinci dereceden bağ aradeğerleme için).

iii) İkinci mertebeden süreklilik: Bağlantı noktalarında, her iki eğrinin 1. ve 2. türevleri eşit (Kübik bağ aradeğerleme için) (Uğur, 2006).

Kübik aradeğerleme, verilen noktalar için her aralığa üçüncü dereceden bir polinom uyumlamaya dayanır. Ancak verilen herhangi iki noktadan sonsuz sayıda üçüncü dereceden polinom geçeceği için uyumlanan polinomları tek türlü belirli hale getirmek için bazı ek şartlar koymak gerekir. Aralıkları daha yüksek dereceden polinomlarla temsil etmeye çalışmak, bu şartların sayısını arttıracak ve işlemleri çok daha karmaşık hale getireceği, uyumlanan fonksiyonu da doğal değişimlerden uzaklaştıracağı için tercih edilmez (Baştürk, <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=2286>).

Mathews ve Fink, klasik sayısal analiz için yazdıkları kitapta (Mathews ve Fink, 1999) “bağ (spline) fonksiyonları için ara değer bulma” yöntemini vermişlerdir.

Bu tez çalışmasında geometrik aradeğerleme (interpolation) için bağ (spline) fonksiyonları tanıtılacaktır. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde geometrik fonksiyon, limit, süreklilik ve türevle ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Üçüncü bölümde bir geometrik fonksiyonun bir noktada geometrik türevlerinin klasik türevler ile ifadesi gösterilecektir. Önce geometrik türevlerin klasik türevler ile ardışık olarak hesabı, ikinci olarak geometrik türevlerin Faà di Bruno formülü yardımıyla klasik türevler ile hesabı verilecektir.

Dördüncü bölüm geometrik bağ ara değer bulma yöntemine ayrılacaktır. Sırasıyla sıfırıncı derece geometrik bağ ara değerleme, doğrusal geometrik bağ ara değerleme, kübik geometrik bağ ara değerleme, doğal kübik geometrik bağ ara değerleme tanıtılacaktır. Son olarak kübik geometrik bağ ara değerlemenin bir uygulaması verilecektir.

Beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

2. GEOMETRİK ANALİZ

Tanım 2.1: Üstel sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

- a) Üstel reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp} = \{e^x | x \in \mathbb{R}\}$
- b) Üstel pozitif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp}^+ = \{e^x | x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (1, \infty)$
- c) Üstel negatif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp}^- = \{e^x | x \in \mathbb{R}, x < 0\} = (0, 1)$

Tanım 2.2: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f: A \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonuna bir **geometrik fonksiyon** denir.

Bir geometrik fonksiyonunun tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi iken değer kümesi üstel reel sayılardır.

Tanım 2.3: $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ geometrik fonksiyonu $a_n \in \mathbb{R}$ sabitleri ile

$$P(x) = \exp \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}$$

biçiminde ise $P(x)$ 'e bir **geometrik polinom** denir.

Tanım 2.4: $|\cdot|_*: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}^+ \cup \{1\}$ tanımlı $|x|_* = \exp(|\ln(x)|)$ fonksiyonuna geometrik mutlak değer fonksiyonu denir.

Bu tanıma göre

$$|x|_* = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x}, & x < 1. \end{cases}$$

yazılabilir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.5: Eğer her $\varepsilon > 1$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ iken $\left| \frac{f(x)}{L} \right|_* < \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta > 0$ varsa f geometrik fonksiyonunun $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken geometrik limiti L 'dir denir ve

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.6: Eğer $* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f geometrik fonksiyonu $x = x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında geometrik süreklidir denir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.7: $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonu verilsin. $I \subseteq A$, f fonksiyonunun tanım kümesinin içinde bir açık aralık ve $x \in I$ bu aralıkta bir nokta olsun. Eğer aşağıdaki limit var ise $x \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin geometrik türevi

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}}$$

olarak tanımlanır (Bashirov vd., 2008).

Önerme 2.1: Pozitif bir f fonksiyonu herhangi bir x noktasında klasik anlamda türevlenebilir ise bu taktirde, geometrik türevlenebilirdir ve geometrik türevi

$$f^*(x) = \exp \left\{ \frac{d}{dx} (\ln \circ f)(x) \right\} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

şeklinde yazılır (Stanley, 1999).

Teorem 2.1: $f(x)$, $h(x)$ geometrik fonksiyonlar ve c_1, c_2 iki reel sayı olsun. Geometrik türev aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

a) Geometrik türev geometrik doğrusaldır:

$$[(f(x))^{c_1} \cdot (h(x))^{c_2}]^* = (f^*(x))^{c_1} \cdot (h^*(x))^{c_2}.$$

b) Sabit üstel sayıların geometrik türevi 1'e eşittir: $\forall C \in \mathbb{R}_{exp}$ için

$$(C)^* = 1.$$

c) Bölümün geometrik türevi:

$$\left[\frac{f(x)}{h(x)} \right]^* = \frac{f^*(x)}{h^*(x)}.$$

d) $a \in \mathbb{R}_{exp}$, $0 \neq n \in \mathbb{R}$ için

$$(a^{x^n})^* = a^{n \cdot x^{n-1}}.$$

Önerme 2.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türetilebilir fonksiyonu için

$$(e^{f(x)})^* = e^{f'(x)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned}(e^{f(x)})^* &= (\exp \circ f)^*(x) = \exp \left\{ \frac{d(\ln \circ \exp \circ f)}{dx}(x) \right\} = \exp \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} \\ (e^{f(x)})^* &= e^{f'(x)}.\end{aligned}$$

Tanım 2.8: Elemanları $\mathbb{R}_{exp}$ ’den seçilen bir diziye bir çarpımsal dizi denir.

Tanım 2.9: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \in \mathbb{R}_{exp} | n \in \mathbb{N}\}$ bir çarpımsal dizi olsun. Bu durumda

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = * \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^N a_n \right)$$

sonsuz çarpımına eğer sağdaki geometrik limit var ise bir çarpımsal seri denir.

Tanım 2.10: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir çarpımsal dizi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ sabit bir nokta olsun. Bu durumda terimleri $a_n^{(x-x_0)^n}$ ’ye eşit olan değişken terimli

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n}$$

çarpımsal seriye bir çarpımsal kuvvet serisi denir (Yalçın, 2021).

Tanım 2.11: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ bir geometrik fonksiyon, $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f(x)$ geometrik fonksiyonuna x_0 ’ ın en az bir $N(x_0) \subset (a, b)$ komşuluğundaki tüm noktalar için $(x \in N(x_0))$ yakınsayan aşağıdaki gibi bir çarpımsal kuvvet serisi

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{(x-x_0)^n}, (a_n \in \mathbb{R}_{exp})$$

varsa $f(x)$ geometrik fonksiyonuna x_0 noktasında geometrik analitiktir denir (Yalçın, 2021).

3. BİR GEOMETRİK FONKSİYONUN BİR NOKTADA GEOMETRİK TÜREVLERİNİN KLASİK TÜREVLER İLE İFADESİ

Bu bölümde bir geometrik fonksiyonun bir noktada geometrik türevlerinin klasik türevler ile ifadesi verilecektir. Bunun için doğal logaritmanın yüksek mertebeden türevleri kullanılacaktır.

Önerme 3.1: Doğal logaritmanın yüksek mertebeden türevleri

$$\frac{d^k}{dx^k} \ln(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

formülü ile hesaplanır.

İspat: $k = 1$ için

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

eşitlik geçerlidir.

$k = n$ için

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

geçerli olduğunu kabul edelim.

$k = n + 1$ için eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^n}{dx^n} \ln(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right]$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln(x) = \frac{d}{dx} [(-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}] = (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) x^{-(n+1)}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Böylelikle matematiksel tümevarımla ispat biter.

3.1. Geometrik Türevlerin Klasik Türevler ile Ardışık Olarak Hesaplanması

Tanım 3.1: f geometrik analitik bir geometrik fonksiyon ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Üstel reel sayılardan reel sayılara $R_m: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$R_m(x) = \frac{\frac{d^m}{dx^m} f(x)}{f(x)} = \frac{f^{(m)}(x)}{f(x)}$$

ile tanımlansın.

Önerme 3.2: f geometrik analitik bir geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{d}{dx} R_m(x) = (R_{m+1} - R_m \cdot R_1)(x).$$

İspat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_m(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(m)}(x)}{f(x)} \right) = \frac{f^{(m+1)}(x) \cdot f(x) - f^{(m)}(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} \\ &= \frac{f^{(m+1)}(x)}{f(x)} - \frac{f^{(m)}(x)}{f(x)} \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= (R_{m+1} - R_m \cdot R_1)(x). \end{aligned}$$

■

Önerme 3.3: f geometrik analitik bir geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda bu geometrik fonksiyonun logaritmasının ilk birkaç mertebeden türevleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $(\ln f)'(x) = R_1(x),$

ii) $(\ln f)''(x) = (R_2 - R_1^2)(x),$

iii) $(\ln f)'''(x) = (R_3 - 3R_2R_1 + 2R_1^3)(x),$

iv) $(\ln f)^{(4)}(x) = (R_4 - 4R_3R_1 - 3R_2^2 + 12R_2R_1^2 - 6R_1^4)(x),$

$$v) (\ln f)^{(5)}(x) = (R_5 - 5R_4R_1 - 10R_3R_2 + 20R_3R_1^2 + 30R_2^2R_1 - 60R_2R_1^3 + 24R_1^5)(x).$$

İspat:

i)

$$(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = R_1(x).$$

ii)

$$\begin{aligned} (\ln f)''(x) &= \frac{d}{dx} [(\ln f)'(x)] = \frac{d}{dx} R_1(x) \\ (\ln f)''(x) &= (R_2 - R_1^2)(x). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} (\ln f)'''(x) &= \frac{d}{dx} [(\ln f)''(x)] = \frac{d}{dx} (R_2 - R_1^2)(x) \\ &= (R_2' - 2R_1R_1')(x) \\ &= [(R_3 - R_2R_1) - 2R_1(R_2 - R_1^2)](x) \\ (\ln f)'''(x) &= (R_3 - 3R_2R_1 + 2R_1^3)(x). \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} (\ln f)^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx} [(\ln f)'''(x)] = \frac{d}{dx} (R_3 - 3R_2R_1 + 2R_1^3)(x) \\ &= (R_3' - 3R_2'R_1 - 3R_2R_1' + 6R_1^2R_1')(x) \\ &= [(R_4 - R_3 \cdot R_1) - 3(R_3 - R_2R_1)R_1 - 3R_2(R_2 - R_1^2) \\ &\quad + 6R_1^2(R_2 - R_1^2)](x) \\ (\ln f)^{(4)}(x) &= (R_4 - 4R_3R_1 - 3R_2^2 + 12R_2R_1^2 - 6R_1^4)(x). \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} (\ln f)^{(5)}(x) &= \frac{d}{dx} [(\ln f)^{(4)}(x)] \\ &= \frac{d}{dx} (R_4 - 4R_3R_1 - 3R_2^2 + 12R_2R_1^2 - 6R_1^4)(x) \\ &= [R_4' - 4R_3'R_1 - 4R_3R_1' - 6R_2R_2' + 12R_2'R_1^2 + 24R_2R_1R_1' \\ &\quad - 24R_1^3R_1'](x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(R_5 - R_4 \cdot R_1) - 4(R_4 - R_3 \cdot R_1)R_1 - 4R_3(R_2 - R_1^2) \\
&\quad - 6R_2(R_3 - R_2 \cdot R_1) + 12(R_3 - R_2 \cdot R_1)R_1^2 + 24R_2R_1(R_2 - R_1^2) \\
&\quad - 24R_1^3(R_2 - R_1^2)](x) \\
(\ln f)^{(5)}(x) &= (R_5 - 5R_4R_1 - 10R_3R_2 + 20R_3R_1^2 + 30R_2^2R_1 - 60R_2R_1^3 \\
&\quad + 24R_1^5)(x).
\end{aligned}$$

Teorem 3.1: f geometrik analitik bir geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda bu geometrik fonksiyonun $x = x_0$ noktasında ilk birkaç mertebeden geometrik türevleri aynı noktadaki klasik türevleri ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\text{i) } f^*(x_0) = \exp\left\{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right\},$$

$$\text{ii) } f^{**}(x_0) = \exp\left\{\frac{f''(x_0)}{f(x_0)} - \frac{[f'(x_0)]^2}{f^2(x_0)}\right\},$$

$$\text{iii) } f^{***}(x_0) = \exp\left\{\frac{f'''(x_0)}{f(x_0)} - 3\frac{f''(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)} + 2\frac{[f'(x_0)]^3}{f^3(x_0)}\right\},$$

$$\text{iv) } f^{*(4)}(x_0) = \exp\left\{\frac{f^{(4)}(x_0)}{f(x_0)} - 4\frac{f'''(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)} - 3\frac{[f''(x_0)]^2}{f^2(x_0)} + 12\frac{f''(x_0)[f'(x_0)]^2}{f^3(x_0)} - 6\frac{[f'(x_0)]^4}{f^4(x_0)}\right\},$$

$$\text{v) } f^{*(5)}(x_0) = \exp\left\{\frac{f^{(5)}(x_0)}{f(x_0)} - 5\frac{f^{(4)}(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)} - 10\frac{f'''(x_0)f''(x_0)}{f^2(x_0)} + 20\frac{f'''(x_0)[f'(x_0)]^2}{f^3(x_0)} + 30\frac{[f''(x_0)]^2f'(x_0)}{f^3(x_0)} - 60\frac{f''(x_0)[f'(x_0)]^3}{f^4(x_0)} + 24\frac{[f'(x_0)]^5}{f^5(x_0)}\right\}.$$

İspat:

i) Önerme 3.3 (i) deki eşitliğin her iki tarafının e tabanında üssü alınır

$$(\ln f)'(x) = R_1(x)$$

$$e^{(\ln f)'(x)} = \exp\{R_1(x)\}$$

$$f^*(x) = \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

yazılır. Burada $x = x_0$ alınır

$$f^*(x_0) = \exp\left\{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right\}$$

istenilen eşitlik elde edilir.

Diğer maddelerin ispatı da benzer şekilde yapılır.

■

Örnek 3.1: f , geometrik analitik olan geometrik fonksiyonu için $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 1$, $f'''(1) = -1$ olarak veriliyor. Buna göre $f^{***}(1) = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f^{***}(1) &= \exp \left\{ \frac{f'''(1)}{f(1)} - 3 \frac{f''(1)f'(1)}{f^2(1)} + 2 \frac{[f'(1)]^3}{f^3(1)} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{-1}{2} - 3 \frac{1 \cdot 3}{2^2} + 2 \frac{3^3}{2^3} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + \frac{27}{4} \right\} \\ f^{***}(1) &= e^4. \end{aligned}$$

3.2. Geometrik Türevlerin Faà di Bruno Formülü Yardımıyla Klasik Türevler ile Hesaplanması

Tanım 3.2: $k, n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k \leq n$ olsun. $I_{n,k}$ indeks kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$I_{n,k} = \{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k+1}) \in \mathbb{N}^{n-k+1} \mid \sum_{j=1}^{n-k+1} \mu_j = k, \sum_{j=1}^{n-k+1} (j \cdot \mu_j) = n \}$$

Örnek 3.2: $I_{4,2}$ indeks kümesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$n = 4, k = 2$ olduğundan indeks kümemizin elemanları $n - k + 1 = 3$ boyutlu $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ vektörlerinden oluşur. $I_{4,2}$ indeks kümesine ait her bir vektörün bileşenler toplamı $k = 2$ 'ye eşit ve bileşenler ile sıralarının çarpımlarının toplamı $n = 4$ 'e eşit olmalıdır.

$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2$	$1\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 = 4$	$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$
$1 + 0 + 1 = 2$	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4$	$\mu = (1, 0, 1)$
$0 + 2 + 0 = 2$	$1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$	$\mu = (0, 2, 0)$

Böylelikle $I_{4,2} = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$ olarak bulunur.

Örnek 3.3: Aşağıda bazı $I_{n,k}$ indeks kümesi örnekleri verilmiştir.

i)

$$I_{1,1} = \{\mu = (\mu_1) \in \mathbb{N} \mid \mu_1 = 1, 1 \cdot \mu_1 = 1\} = \{(1)\}.$$

ii)

$$I_{2,1} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \mu_1 + \mu_2 = 1, 1\mu_1 + 2\mu_2 = 2\} = \{(0,1)\},$$

$$I_{2,2} = \{\mu = (\mu_1) \in \mathbb{N} \mid \mu_1 = 2, 1 \cdot \mu_1 = 2\} = \{(2)\}.$$

iii)

$$I_{3,1} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{N}^3 \mid \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, 1\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 = 3\},$$

$$I_{3,1} = \{(0,0,1)\},$$

$$I_{3,2} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \mu_1 + \mu_2 = 2, 1\mu_1 + 2\mu_2 = 3\} = \{(1,1)\},$$

$$I_{3,3} = \{\mu = (\mu_1) \in \mathbb{N} \mid \mu_1 = 3, 1 \cdot \mu_1 = 3\} = \{(3)\}.$$

iv)

$$I_{4,1} = \{(0,0,0,1)\},$$

$$I_{4,2} = \{(1,0,1), (0,2,0)\},$$

$$I_{4,3} = \{(2,1)\},$$

$$I_{4,4} = \{(4)\}.$$

Önerme 3.4: $I_{n,k}$ indeks kümeleri için aşağıdaki özellikler verilebilir.

i) $I_{n,n} = \{(n)\},$

ii) $n \geq 2$ için $I_{n,n-1} = \{(n-2,1)\},$

iii) $I_{n,1} = \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = (0,0, \dots, 0,1)\}.$

İspat:

i) $I_{n,n} = \{\mu = (\mu_1) \in \mathbb{N} \mid \mu_1 = n, 1 \cdot \mu_1 = n\} = \{(n)\}.$

ii) $n \geq 2$ için

$$I_{n,n-1} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \mu_1 + \mu_2 = n-1, 1\mu_1 + 2\mu_2 = n\}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & n-1 \\ 1\mu_1 + 2\mu_2 & = & n \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_1 = n-2, \mu_2 = 1$$

$$I_{n,n-1} = \{(n-2,1)\}.$$

iii)

$$I_{n,1} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \sum_{j=1}^n j \cdot \mu_j = n\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1 \\ 1\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + n\mu_n = n \end{array} \right) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = 0, \mu_n = 1$$

$$I_{n,1} = \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = (0, 0, \dots, 0, 1)\}.$$

Tanım 3.3: $k, n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k \leq n$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k+1})$ için

$$\mathcal{B}_{n,k}(x) = n! \sum_{\mu \in I_{n,k}} \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right]$$

polinomu Bell polinomu olarak adlandırılır.

Örnek 3.4: Aşağıda Bell polinomları için birkaç örnek vardır.

i)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{4,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 4! \sum_{\mu \in I_{4,1}} \prod_{j=1}^4 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\ &= 4! \sum_{\mu=(0,0,0,1)} \prod_{j=1}^4 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\ &= 4! \frac{1}{1!} \left(\frac{x_4}{4!} \right)^1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{4,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4,$$

ii)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{4,2}(x_1, x_2, x_3) &= 4! \sum_{\mu \in I_{4,2}} \prod_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\ &= 4! \sum_{\mu=(1,0,1),(0,2,0)} \prod_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\ &= 4! \left[\frac{1}{1!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^1 \frac{1}{1!} \left(\frac{x_3}{3!} \right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x_2}{2!} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{4,2}(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_3 + 3x_2^2,$$

iii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{4,3}(x_1, x_2) &= 4! \sum_{\mu \in I_{4,3}} \prod_{j=1}^2 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\
&= 4! \sum_{\mu=(2,1)} \prod_{j=1}^2 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\
&= 4! \left[\frac{1}{2!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^2 \frac{1}{1!} \left(\frac{x_2}{2!} \right)^1 \right] \\
\mathcal{B}_{4,3}(x_1, x_2) &= 6x_1^2 x_2,
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{4,4}(x_1) &= 4! \sum_{\mu \in I_{4,4}} \prod_{j=1}^1 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\
&= 4! \sum_{\mu=(4)} \prod_{j=1}^1 \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{x_j}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \\
&= 4! \left[\frac{1}{4!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^4 \right] \\
\mathcal{B}_{4,4}(x_1) &= x_1^4.
\end{aligned}$$

Aşağıdaki önermede, bir geometrik fonksiyonun logaritmasının yüksek mertebeden türevlerinin hesabı, bu fonksiyonun türevleri bilindiğinde Faà di Bruno formülü yardımıyla verilecektir. Faà di Bruno formülü, bileşke fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerini hesaplamak için kullanılır ve şu şekilde ifade edilebilir: g, f ve $g \circ f$, n . mertebeye kadar türevlenebilir fonksiyonları için

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu \in I_{n,k}} \left\{ \frac{n!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_{n-k+1}!} g^{(k)}(f(x)) \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right\}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k+1})$.

Önerme 3.5: f geometrik analitik bir geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda bu geometrik fonksiyonun logaritmasının yüksek mertebeden türevleri $n \geq 1$ ve $\rho_{n-k+1}(x) = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_{n-k+1}(x))$, $1 \leq k \leq n$ için

$$(\ln \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x))]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Faà di Bruno formülünden $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k+1})$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$(\ln \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu \in I_{n,k}} \left\{ \frac{n!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_{n-k+1}!} \cdot \ln^{(k)}(f(x)) \right. \\ \left. \cdot \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right\}.$$

Bu eşitlikten

$$(\ln \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu \in I_{n,k}} \left\{ \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n-k+1} \mu_j!} \cdot \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(f(x))^k} \right. \\ \left. \cdot \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right\}$$

olduğu görülür. Burada $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k+1}) \in I_{n,k}$ indeks kümesine ait olduğundan

$$k = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-k+1}, \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} \mu_j = k \right)$$

eşittir. Bu sayede

$$(f(x))^k = (f(x))^{\sum_{j=1}^{n-k+1} \mu_j} = \prod_{j=1}^{n-k+1} (f(x))^{\mu_j}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\ln \circ f)^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\mu \in I_{n,k}} \left\{ \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n-k+1} \mu_j!} \cdot \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\prod_{j=1}^{n-k+1} (f(x))^{\mu_j}} \right. \\
&\quad \cdot \left. \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada bazı düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}
(\ln \circ f)^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1}(k-1)! \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\sum_{\mu \in I_{n,k}} \left(n! \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \frac{1}{(f(x))^{\mu_j}} \left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1}(k-1)! \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\sum_{\mu \in I_{n,k}} \left(n! \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^{\mu_j} \left(\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot \left[\sum_{\mu \in I_{n,k}} \left(n! \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{f^{(j)}(x)}{j! f(x)} \right)^{\mu_j} \right] \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1}(k-1)! \left[\sum_{\mu \in I_{n,k}} \left(n! \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(x)}{f(x)} \right)^{\mu_j} \right] \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{k-1}(k-1)! \left[\sum_{\mu \in I_{n,k}} \left(n! \prod_{j=1}^{n-k+1} \left[\frac{1}{\mu_j!} \left(\frac{R_j(x)}{j!} \right)^{\mu_j} \right] \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \{ (-1)^{k-1}(k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(R_1(x), R_2(x), \dots, R_{n-k+1}(x)) \} \\
(\ln \circ f)^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1}(k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x))]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat biter. ■

Teorem 3.2: $f(x)$ geometrik analitik bir geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda bu geometrik fonksiyonun $x = x_0$ noktasında ilk birkaç mertebeden geometrik türevleri Faà di Bruno formülü yardımıyla aynı noktadaki klasik türevleri ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$f^{*(n)}(x_0) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x_0))] \right\}$$

Burada $n \geq 1$ ve $\rho_{n-k+1}(x) = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_{n-k+1}(x))$, $1 \leq k \leq n$ ile tanımlı vektör değerli fonksiyondur.

İspat:

Önerme 3.5'deki eşitliğin her iki tarafının e tabanında üssü alınırsa

$$\begin{aligned} (\ln \circ f)^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x))] \\ e^{(\ln \circ f)^{(n)}(x)} &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x))] \right\} \\ f^{*(n)}(x) &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x))] \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Burada $x = x_0$ alınırsa

$$f^{*(n)}(x_0) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{n,k}(\rho_{n-k+1}(x_0))] \right\}$$

istenilen eşitlik elde edilir.

Örnek 3.5: f , geometrik analitik olan geometrik fonksiyonu için $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 3$, $f^{(4)}(0) = 4$ veriliyor. Buna göre $f^{*(4)}(0) = ?$

Çözüm:

$$f^{*(4)}(0) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^4 [(-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{B}_{4,k}(\rho_{4-k+1}(0))] \right\}$$

$$\begin{aligned}
f^{*(4)}(0) &= \exp\{\mathcal{B}_{4,1}(\rho_4(0)) - \mathcal{B}_{4,2}(\rho_3(0)) + 2!\mathcal{B}_{4,3}(\rho_2(0)) - 3!\mathcal{B}_{4,4}(\rho_1(0))\} \\
&= \exp\{(R_4 - 4R_1R_3 - 3R_2^2 + 12R_1^2R_2 - 6R_1^4)(0)\} \\
&= \exp\left\{\frac{f^{(4)}(0)}{f(0)} - 4\frac{f'''(0)f'(0)}{f^2(0)} - 3\frac{[f''(0)]^2}{f^2(0)} + 12\frac{f''(0)[f'(0)]^2}{f^3(0)} \right. \\
&\quad \left. - 6\frac{[f'(0)]^4}{f^4(0)}\right\} \\
&= \exp\{4 - 4 \cdot 6 - 6 \cdot 16\} \\
f^{*(4)}(0) &= e^{-76}.
\end{aligned}$$



4. GEOMETRİK BAĞ ARA DEĞER BULMA YÖNTEMİ

Birbirlerine belirli süreklilik koşulları ile bağlı alt aralıklarda geometrik polinom parçalarından oluşan parçalı geometrik fonksiyonlar geometrik bağ (spline) fonksiyonlarıdır. Aşağıda bu fonksiyonların tanımı verilmiştir.

Tanım 4.1: $n \geq 3$ için $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ olacak şekilde $x_1, \dots, x_n$ ayrık interpolasyon noktalarına **düğüm noktaları** denir. Bu düğüm noktaları

$$\tau_i = [x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-2,$$
$$\tau_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıkları tanımlanırsa $[x_1, x_n]$ aralığını

$$[x_1, x_n] = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{n-1}$$

biçiminde $n - 1$ adet alt aralığa böler.

Tanım 4.2: En az üç $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ düğüm noktasına sahip m . dereceden bir $B: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$

$$B(x) = B_i(x), x \in \tau_i, i = 1, \dots, n$$

geometrik fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar ise **geometrik bağ fonksiyonu** olarak adlandırılır:

- i) Her τ_i alt aralığında $B_i(x)$ geometrik polinomunun derecesi $\leq m$ dir,
- ii) $B, (x_1, x_n)$ aralığında $(m - 1)$. mertebeden geometrik sürekli türeve sahip, parçalı sürekli bir geometrik fonksiyondur, bu sebeple iç düğüm noktalarında

$$B_i^{*(j)}(x_{i+1}) = B_{i+1}^{*(j)}(x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-2, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 4.1: Eğer $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$, m . mertebeden sürekli geometrik türeve sahip bir geometrik fonksiyon ise $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\ln \circ F)(x)$, m . mertebeden sürekli türeve sahip klasik bir fonksiyondur.

İspat: Öncelikle aşağıdaki eşitliğin olduğunu not edelim:

$$f^{(m)}(x) = (\ln \circ F)^{(m)}(x) = (\ln \circ F^{*(m)})(x).$$

Keyfi $x = c \in (a, b)$ noktasında $F^{*(m)}$ geometrik türevi sürekli olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. $E = e^\varepsilon > 1$ için $x \in (c - \delta, c + \delta)$ iken

$$F^{*(m)}(x) \in \left(\frac{F^{*(m)}(c)}{E}, E \cdot F^{*(m)}(c) \right)$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır. Buradan seçilen $\varepsilon > 0$ ve $x \in (c - \delta, c + \delta)$ için

$$\begin{aligned} (\ln \circ F^{*(m)})(x) &\in \left(\ln \left(\frac{F^{*(m)}(c)}{E} \right), \ln (E \cdot F^{*(m)}(c)) \right) \\ (\ln \circ F^{*(m)})(x) &\in ((\ln \circ F^{*(m)})(c) - \ln(E), (\ln \circ F^{*(m)})(c) + \ln(E)) \\ f^{(m)}(x) &\in (f^{(m)}(c) - \varepsilon, f^{(m)}(c) + \varepsilon) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $c \in (a, b)$ keyfi seçildiğinden $f(x) = (\ln \circ F)(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında m . mertebeden sürekli türeve sahip klasik bir fonksiyon olduğu ispatlanır.

Teorem 4.2: Eğer $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, m . mertebeden sürekli klasik türeve sahip bir klasik fonksiyon ise $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$, $F(x) = (\exp \circ f)(x)$, m . mertebeden sürekli geometrik türeve sahip geometrik bir fonksiyondur.

İspat: Bir önceki teoreme benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 4.3: Eğer $B(x)$, m . derece geometrik bağ fonksiyonu ise $b(x) = (\ln \circ B)(x)$ m . derece klasik bağ fonksiyonudur.

İspat:

$B(x)$, geometrik fonksiyonu $x_1, \dots, x_n$ düğüm noktalarına sahip aşağıdaki gibi verilen m . dereceden bir keyfi geometrik bağ fonksiyonu olsun:

$$B(x) = B_i(x) = \exp \left[\sum_{j=0}^m a_{ij}(x - x_i)^j \right], \quad x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$b: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b_i: \tau_i \rightarrow \mathbb{R}$ klasik fonksiyonlarını

$$b(x) = (\ln \circ B)(x), x \in [x_1, x_n],$$

$$b_i(x) = (\ln \circ B_i)(x), x \in \tau_i, i = 1, \dots, n-1$$

olarak tanımlayalım Bu durumda

i)

$$b(x) = b_i(x) = \sum_{j=0}^m a_{ij}(x - x_i)^j, x \in \tau_i, i = 1, \dots, n-1$$

eşit olduğu görülür. Yani her τ_i alt aralığında $b_i(x)$ polinomunun derecesi $\leq m$ dir.

ii) $B, (x_0, x_n)$ aralığında $(m-1)$. mertebeden geometrik sürekli türevlere sahip bir geometrik fonksiyondur. Teorem 4.1'den $b = \ln \circ B, (x_0, x_n)$ aralığında $(m-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip bir klasik fonksiyon olduğu görülür. Ayrıca $i = 1, \dots, n-2$ ve $j = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$B_i^{*(j)}(x_{i+1}) = B_{i+1}^{*(j)}(x_{i+1})$$

$$\ln [B_i^{*(j)}(x_{i+1})] = \ln [B_{i+1}^{*(j)}(x_{i+1})]$$

$$(\ln \circ B_i^{*(j)})(x_{i+1}) = (\ln \circ B_{i+1}^{*(j)})(x_{i+1})$$

$$(\ln \circ B_i)^{(j)}(x_{i+1}) = (\ln \circ B_{i+1})^{(j)}(x_{i+1})$$

yazılabilir ve böylelikle $i = 1, \dots, n-2$ ve $j = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$b_i^{(j)}(x_{i+1}) = b_{i+1}^{(j)}(x_{i+1})$$

eşitlikleri geçerlidir.

(i) ve (ii) den $b(x)$ fonksiyonunun $[x_1, x_n]$ aralığında tanımlı m . derece bir klasik bağ fonksiyonu olduğu ispatlanmış olur.

4.1. Sıfırıncı Derece Geometrik Bağ Ara Değerleme

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ veri kümesi için sıfırıncı derece geometrik bağ ara değerleme

$$B(x) = B_i(x) = y_i, x \in \tau_i, i = 1, \dots, n-1$$

biçiminde tanımlanır.

4.2. Doğrusal Geometrik Bağ Ara Değerleme

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ veri kümesi için 1. derece geometrik bağ ara değerlendirme

$$B(x) = B_i(x) = y_i \cdot \left(\frac{y_{i+1}}{y_i}\right)^{\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}}, \quad x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

biçimindedir. Bu fonksiyonunun grafiğinde ardışık iki nokta bir üstel fonksiyon ile bağlanır. $B(x)$, fonksiyonu aşağıdaki gibi de verilebilir.

$$B(x) = B_i(x) = y_i \cdot m_i^{x-x_i}, \quad x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$m_i = \left(\frac{y_{i+1}}{y_i}\right)^{\frac{1}{x_{i+1}-x_i}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Örnek 4.1: $\{(0,1), (1,2), (2,2e), (3,4e)\}$ veri kümesi için $S(x)$, 1. dereceden geometrik bağ fonksiyonunu oluşturalım.

Çözüm:

i	Veri noktası	x_i	y_i
$i = 1$	$(x_1, y_1) = (0,1)$	$x_1 = 0$	$y_1 = 1$
$i = 2$	$(x_2, y_2) = (1,2)$	$x_2 = 1$	$y_2 = 2$
$i = 3$	$(x_3, y_3) = (2,2e)$	$x_3 = 2$	$y_3 = 2e$
$i = 4$	$(x_4, y_4) = (3,4e)$	$x_4 = 3$	$y_4 = 4e$

Öncelikle m_i değerlerini hesaplayalım.

$$m_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{1}} = 2,$$

$$m_2 = \left(\frac{y_3}{y_2}\right)^{\frac{1}{x_3-x_2}} = \left(\frac{2e}{2}\right)^{\frac{1}{1}} = e,$$

$$m_3 = \left(\frac{y_4}{y_3}\right)^{\frac{1}{x_4-x_3}} = \left(\frac{4e}{2e}\right)^{\frac{1}{1}} = 2.$$

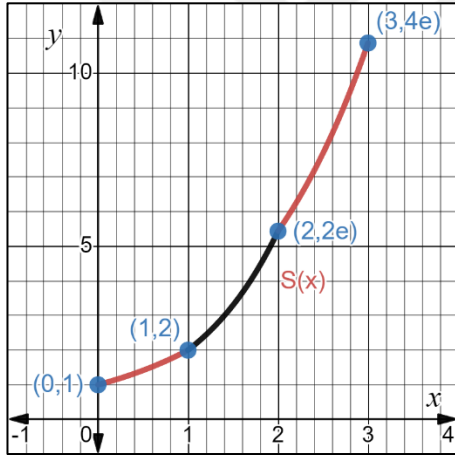
Bu değerleri kullanarak $S(x)$ 'i bulalım.

$$S(x) = \begin{cases} B_1(x) = y_1 \cdot m_1^{x-x_1}, & x \in [0,1), \\ B_2(x) = y_2 \cdot m_2^{x-x_2}, & x \in [1,2), \\ B_3(x) = y_3 \cdot m_3^{x-x_3}, & x \in [2,3] \end{cases} = \begin{cases} 2^x, & x \in [0,1), \\ 2 \cdot e^{x-1}, & x \in [1,2), \\ 2e \cdot 2^{x-2}, & x \in [2,3] \end{cases}$$

Böylelikle

$$S(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in [0,1), \\ \frac{2}{e} e^x, & x \in [1,2), \\ \frac{e}{2} 2^x, & x \in [2,3], \end{cases}$$

olarak bulunur.



Şekil 1. Birinci dereceden geometrik bağ fonksiyonunun grafiği

4.3. Kübik Geometrik Bağ Ara Değerleme

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ veri kümesi için B, B^* ve B^{**} (x_1, x_n) aralığında geometrik sürekli olacak şekilde bir $B(x)$;

$$B(x) = B_i(x) = \exp \left[\sum_{j=0}^3 a_{ij} (x - x_i)^j \right], \quad x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$B(x_i) = y_i$$

fonksiyonu aranır. Burada $B_i(x)$ 'ler kübik geometrik polinomlardır.

Burada n tane düğüm noktası, $n - 1$ adet alt aralık vardır. Her bir τ_i alt aralığında hesaplanması gereken 4 tane $(a_{ij}, j = 0,1,2,3)$ katsayı olduğu için $4(n - 1) = 4n - 4$ adet bilinmeyen vardır. Bunları hesaplamak için $4n - 4$ adet koşul yazılması gerekir:

i) İç düğüm noktalarında birbirine komşu polinom parçalarının değerleri birbirine eşit olmak zorundadır. Bu $2(n - 2) = 2n - 4$ koşul aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} B_i(x_{i+1}) &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ B_{i+1}(x_{i+1}) &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

ii) İlk ve son polinom parçaları uç noktalardan geçmek zorundadır. Bu iki koşul verir.

$$\begin{aligned} B_1(x_1) &= y_1, \\ B_{n-1}(x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

iii) İç düğüm noktalarında birinci geometrik türevler birbirine eşit olmak zorundadır. Bu $n - 2$ tane koşul verir.

$$B_i^*(x_{i+1}) = B_{i+1}^*(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

iv) İç düğüm noktalarında ikinci geometrik türevler birbirine eşit olmak zorundadır. Buradan da $n - 2$ tane koşul yazılır.

$$B_i^{**}(x_{i+1}) = B_{i+1}^{**}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

v) Toplam $4n - 6$ koşul yazıldı. Bağ fonksiyonunun tek türlü belirlenebilmesi için iki koşul daha eklenir.

4.3.1. Doğal Kübik Geometrik Bağ Ara Değerleme

Bu ara değerlemede kübik geometrik bağ ara değerleme için gereken ek iki koşul, ilk ve son düğüm noktalarında ikinci geometrik türevler bire eşit olarak verilir:

$$B^{**}(x_1) = 1,$$

$$B^{**}(x_n) = 1.$$

Teorem 4.4: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ veri kümesi için doğal kübik geometrik bağ ara değerlendirme ile bulunan geometrik bağ fonksiyonu tek türlü belirlidir.

İspat: Bu ispat yapılırken Mathews ve Fink'in yazdıkları kitabın 5.3 bölümünden yararlanılmıştır (Mathews ve Fink,1999). B, B^* ve B^{**} geometrik sürekli olan ve

$$B(x) = B_i(x) = \exp \left[\sum_{j=0}^3 a_{ij}(x - x_i)^j \right], \quad (x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1),$$

$$B(x_i) = y_i,$$

$$B^{**}(x_1) = 1,$$

$$B^{**}(x_n) = 1$$

biçiminde olan bir $B: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ geometrik bağ fonksiyonu alalım.

Şimdi $b: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ klasik fonksiyonu $b(x) = (\ln \circ B)(x)$ olarak tanımlayalım.

Ayrıca $b_i: \tau_i \rightarrow \mathbb{R}, (i = 1, \dots, n-1)$

$$b_i(x) = (\ln \circ B_i)(x) = \sum_{j=0}^3 a_{ij}(x - x_i)^j, \quad (x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1).$$

şeklinde tanımlanan klasik polinomları için

$$b(x) = b_i(x), \quad (x \in \tau_i, i = 1, \dots, n-1)$$

eşitliği vardır.

Teorem 4.3'den dolayı

$$b(x) = b_i(x) = \sum_{j=0}^3 a_{ij}(x - x_i)^j, \quad (x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1),$$

$$[b(x) = b_i(x) = a_{i3}(x - x_i)^3 + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i1}(x - x_i) + a_{i0}]$$

klasik bir 3. dereceden bağı fonksiyonudur.

$b(x)$, 3. derece klasik bağı fonksiyonu olduğundan $b''(x)$, $[x_1, x_n]$ aralığında bir doğrusal bağı fonksiyonudur. Doğrusal Lagrange formülü ile

$$b_i''(x) = b''(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + b''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

yazılabilir. $M_i = b''(x_i)$, $(i = 1, \dots, n)$ olarak tanımlayalım.

$$b_i''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, (x \in \tau_i, i = 1, \dots, n - 1).$$

İki kere integral alırsak

$$\begin{aligned} \int b_i''(x) dx &= \int \left(M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) dx \\ b_i'(x) &= \frac{M_i}{2} \frac{(x - x_{i+1})^2}{x_i - x_{i+1}} + \frac{M_{i+1}}{2} \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i} + c_{i,1} \\ \int b_i'(x) dx &= \int \left(\frac{M_i}{2} \frac{(x - x_{i+1})^2}{x_i - x_{i+1}} + \frac{M_{i+1}}{2} \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i} + c_{i,1} \right) dx \\ b_i(x) &= \left(\frac{M_i}{6} \frac{(x - x_{i+1})^3}{x_i - x_{i+1}} + \frac{M_{i+1}}{6} \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} \right) + c_{i,1}x + c_{i,2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $c_{i,1}$ ve $c_{i,2}$ integral sabitleridir. Şimdi

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{c_{i,1}x_i + c_{i,2}}{x_{i+1} - x_i}, (i = 1, \dots, n - 1), \\ q_i &= \frac{c_{i,1}x_{i+1} + c_{i,2}}{x_{i+1} - x_i}, (i = 1, \dots, n - 1) \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$c_{i,1}x + c_{i,2} = p_i(x_{i+1} - x) + q_i(x - x_i)$$

eşit olduğu görülür. Ayrıca $h_i = x_{i+1} - x_i$ denirse

$$b_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + q_i(x - x_i)$$

yazılabilir. $b_i(x_i) = y_i$ eşitliğinden

$$y_i = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x_i - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x_i) + q_i(x_i - x_i)$$

$$y_i = \frac{M_i}{6h_i}h_i^3 + p_i h_i$$

$$y_i = \frac{M_i}{6}h_i^2 + p_i h_i,$$

$$p_i = \frac{y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}}{h_i}$$

$$p_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}$$

elde edilir. Ayrıca $b_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ eşitliğinden

$$y_{i+1} = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_{i+1})^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x_{i+1}) + q_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$y_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{6h_i}h_i^3 + q_i h_i$$

$$y_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{6}h_i^2 + q_i h_i,$$

$$q_i = \frac{y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}}{h_i}$$

$$q_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i}{6}$$

elde edilir. Bulunan p_i, q_i değerlerini $b_i(x)$ fonksiyonunda yerlerine yazalım.

$$b_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + q_i(x - x_i)$$

$$b_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i}{6}\right)(x - x_i).$$

Öncelikle

$$b'_i(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \frac{y_i}{h_i} + \frac{M_i h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i}{6} \\ b'_i(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

olduğunu not edelim ve $d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ olarak tanımlayalım. $b'_i(x)$ ve $b'_{i+1}(x)$

$$b'_i(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}, \\ b'_{i+1}(x) = -\frac{M_{i+1}}{2h_{i+1}}(x_{i+2} - x)^2 + \frac{M_{i+2}}{2h_{i+1}}(x - x_{i+1})^2 + d_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} \\ - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2}$$

olarak hesaplanır.

Bu aşamada düğüm noktalarında birinci mertebeden geometrik türevlerin geometrik süreklilik şartı ($b'_i(x_{i+1}) = b'_{i+1}(x_{i+1})$) kullanılarak M_i katsayıları için fark denklemleri yazılacaktır. İlk olarak $b'_i(x_{i+1})$ ifadesini hesaplayalım:

$$b'_i(x_{i+1}) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} \\ b'_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^2}{2h_i}M_{i+1} + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} \\ b'_i(x_{i+1}) = d_i + \frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i}{3}M_{i+1}.$$

İkinci olarak $b'_{i+1}(x_{i+1})$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
b'_{i+1}(x_{i+1}) &= -\frac{M_{i+1}}{2h_{i+1}}(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + \frac{M_{i+2}}{2h_{i+1}}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + d_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} \\
&\quad - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} \\
b'_{i+1}(x_{i+1}) &= -\frac{h_{i+1}^2}{2h_{i+1}}M_{i+1} + d_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} \\
b'_{i+1}(x_{i+1}) &= d_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{3}M_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2}.
\end{aligned}$$

Üçüncü olarak bulduğumuz bu iki ifadenin eşitliğini $b'_i(x_{i+1}) = b'_{i+1}(x_{i+1})$ kullanalım.

$$\begin{aligned}
b'_i(x_{i+1}) &= b'_{i+1}(x_{i+1}) \\
d_i + \frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i}{3}M_{i+1} &= d_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{3}M_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} \\
\frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} &= d_{i+1} - d_i
\end{aligned}$$

ve böylece $i = 1, \dots, n-2$ için aşağıdaki fark denklemleri elde edilir:

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = 6(d_{i+1} - d_i).$$

Ayrıca $B^{**}(x_1) = 1$, $B^{**}(x_n) = 1$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
B^{**}(x_1) &= 1 \\
(\ln \circ B^{**})(x_1) &= \ln(1) \\
(\ln \circ B^{**})'(x_1) &= 0 \\
b''(x_1) &= 0 \\
M_1 &= 0
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
B^{**}(x_n) &= 1 \\
(\ln \circ B^{**})(x_n) &= \ln(1) \\
(\ln \circ B^{**})'(x_n) &= 0 \\
b''(x_n) &= 0 \\
M_n &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $i = 1, \dots, n - 2$

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = 6(d_{i+1} - d_i)$$

fark denklemleri $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ bilinmeyenleri için aşağıdaki matris denklemi olarak yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6(d_2 - d_1) \\ \vdots \\ 6(d_{n-1} - d_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bu matris denkleminin katsayılar matrisi tam anlamıyla köşegen baskın matris olduğundan çözümü var ve tektir. M_i 'ler bulunduktan sonra

$$b_i(x) = a_{i3}(x - x_i)^3 + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i1}(x - x_i) + a_{i0}$$

polinomunun $a_{ij}, j = 0, \dots, 3$ katsayıları aşağıdaki dört maddede olduğu biçimde hesaplanır.

i) $a_{i0} = \ln(y_i)$ eşitliği vardır, çünkü

$$B_i(x_i) = y_i$$

$$(\ln \circ B_i)(x_i) = \ln(y_i)$$

$$b_i(x_i) = \ln(y_i)$$

$$a_{i3}(x_i - x_i)^3 + a_{i2}(x_i - x_i)^2 + a_{i1}(x_i - x_i) + a_{i0} = \ln(y_i)$$

$$a_{i0} = \ln(y_i).$$

ii) $a_{i1} = d_i - \frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$ eşitliği vardır, çünkü

$$b'_i(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

$$b'_i(x_i) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x_i - x_i)^2 + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

$$b'_i(x_i) = -\frac{h_i}{2}M_i + d_i + \frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

$$b'_i(x_i) = d_i - \frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

ve

$$b'_i(x) = 3a_{i3}(x - x_i)^2 + 2a_{i2}(x - x_i) + a_{i1}$$

$$b'_i(x_i) = 3a_{i3}(x_i - x_i)^2 + 2a_{i2}(x_i - x_i) + a_{i1}$$

$$b'_i(x_i) = a_{i1}$$

olduğundan

$$a_{i1} = d_i - \frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1}.$$

iii) $a_{i2} = \frac{1}{2}M_i$ eşitliği vardır, çünkü

$$b''(x_i) = M_i$$

$$b'_i(x_i) = M_i$$

ve

$$b''_i(x) = 6a_{i3}(x - x_i) + 2a_{i2}$$

$$b''_i(x_i) = 6a_{i3}(x_i - x_i) + 2a_{i2}$$

$$b''_i(x_i) = 2a_{i2}$$

olduğundan

$$2a_{i2} = M_i$$

$$a_{i2} = \frac{1}{2}M_i.$$

iv) $a_{i3} = \frac{1}{6h_i} (M_{i+1} - M_i)$ eşitliği vardır, çünkü

$$b_i''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$b_i''(x) = -M_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$b_i'''(x) = -\frac{1}{h_i} M_i + \frac{1}{h_i} M_{i+1}$$

$$b_i'''(x) = \frac{1}{h_i} (M_{i+1} - M_i)$$

$$b_i'''(x_i) = \frac{1}{h_i} (M_{i+1} - M_i)$$

ve

$$b_i'''(x) = 6a_{i3}$$

$$b_i'''(x_i) = 6a_{i3}$$

olduğundan

$$6a_{i3} = \frac{1}{h_i} (M_{i+1} - M_i)$$

$$a_{i3} = \frac{1}{6h_i} (M_{i+1} - M_i).$$

Son olarak bulunan a_{ij} ($i = 1, \dots, n-1, j = 0, 1, 2, 3$) katsayıları

$$B(x) = B_i(x) = \exp \left[\sum_{j=0}^3 a_{ij} (x - x_i)^j \right], \quad (x \in \tau_i, \quad i = 1, \dots, n-1)$$

yerine yazılır.

4.4. Kübik Geometrik Bağ Ara Değerlemenin Bir Uygulaması

Bu uygulamada kübik geometrik bağ ara değerlendirme için gereken ek iki koşul $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ için

$$B'(x_1) = v_1,$$

$$B''(x_1) = v_2$$

biçiminde alınacaktır. Bu ara değer problemi için öncelikle bununla ilgili başlangıç noktasında kendisi ve ilk 2 mertebeden geometrik türeviyle ilgili şartları içeren bir kübik geometrik polinomun bulunması probleminin çözümü incelenecektir.

Teorem 4.5: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. a_0, a_1, a_2, a_3 bilinmeyen reel sabitleri ile tanımlanan $P: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$,

$$P(x) = \exp\{a_3(x - \alpha)^3 + a_2(x - \alpha)^2 + a_1(x - \alpha) + a_0\}$$

kübik geometrik polinomu için $y_1, y_2, \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{R}_{exp}$ verilen üstel reel sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} P(\alpha) = y_1, P(\beta) = y_2, \\ P^*(\alpha) = \Gamma_1, \\ P^{**}(\alpha) = \Gamma_2, \end{cases}$$

şartları ele alınsın. Buna göre $P(x)$ geometrik polinomu

$$\begin{cases} a_0 = \ln(y_1), \\ a_1 = \ln(\Gamma_1), \\ a_2 = \frac{1}{2} \ln(\Gamma_2), \\ a_3 = -\frac{1}{2(\beta - \alpha)} \ln(\Gamma_2) - \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \ln(\Gamma_1) + \frac{1}{(\beta - \alpha)^3} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \end{cases}$$

katsayıları ile mevcut ve tek türlü belirlidir.

İspat:

$$P(x) = \exp\{a_3(x - \alpha)^3 + a_2(x - \alpha)^2 + a_1(x - \alpha) + a_0\}$$

kübik geometrik polinomunda verilen şartlar kullanılarak katsayılar tek türlü olarak aşağıdaki gibi bulunur:

i)

$$P(\alpha) = y_1$$

$$e^{a_0} = y_1$$

$$a_0 = \ln(y_1),$$

ii)

$$P^*(\alpha) = \Gamma_1$$

$$\exp\{3a_3(x - \alpha)^2 + 2a_2(x - \alpha) + a_1\}|_{x=\alpha} = \Gamma_1$$

$$e^{a_1} = \Gamma_1$$

$$a_1 = \ln(\Gamma_1),$$

iii)

$$P^{**}(\alpha) = \Gamma_2$$

$$\exp\{6a_3(x - \alpha) + 2a_2\}|_{x=\alpha} = \Gamma_2$$

$$e^{2a_2} = \Gamma_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\ln(\Gamma_2),$$

iv)

$$P(\beta) = y_2$$

$$\exp\{a_3(\beta - \alpha)^3 + a_2(\beta - \alpha)^2 + a_1(\beta - \alpha) + a_0\} = y_2$$

$$a_3(\beta - \alpha)^3 + a_2(\beta - \alpha)^2 + a_1(\beta - \alpha) + a_0 = \ln(y_2),$$

ve buradan

$$a_3 = [-a_2(\beta - \alpha)^2 - a_1(\beta - \alpha) + \ln(y_2) - a_0]/(\beta - \alpha)^3$$

$$a_3 = -\frac{1}{\beta - \alpha}a_2 - \frac{1}{(\beta - \alpha)^2}a_1 + \frac{1}{(\beta - \alpha)^3}[\ln(y_2) - a_0]$$

$$a_3 = -\frac{1}{2(\beta - \alpha)}\ln(\Gamma_2) - \frac{1}{(\beta - \alpha)^2}\ln(\Gamma_1) + \frac{1}{(\beta - \alpha)^3}[\ln(y_2) - \ln(y_1)]$$

$$a_3 = -\frac{1}{2(\beta - \alpha)}\ln(\Gamma_2) - \frac{1}{(\beta - \alpha)^2}\ln(\Gamma_1) + \frac{1}{(\beta - \alpha)^3}\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.6: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ veri kümesi için kübik geometrik bağ ara değerlendirme ile $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ verilen sabitler olmak üzere

$$B'(x_1) = v_1,$$

$$B''(x_1) = v_2.$$

ek şartlarını sağlayan bir $B: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ geometrik bağ fonksiyonu arandığını kabul edelim. $B(x)$, geometrik bağ fonksiyonu mevcut ve tek türlü belirlidir.

İspat: Öncelikle $B_1: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$, $B_1(x) = B(x)$ biçiminde tanımlı ve

$$\begin{cases} B_1(x_1) = y_1, B_1(x_2) = y_2, \\ B_1'(x_1) = v_1, \\ B_1''(x_1) = v_2, \end{cases}$$

şartlarını sağlayan $B_1(x)$ kübik geometrik fonksiyonu bulalım. 3. bölümde bulunan formüller kullanılarak

$$B_1^*(x_1) = \exp \left\{ \frac{B_1'(x_1)}{B_1(x_1)} \right\}$$

$$B_1^*(x_1) = \exp \left\{ \frac{v_1}{y_1} \right\}$$

ve

$$B_1^{**}(x_1) = \exp \left\{ \frac{B_1''(x_1)}{B_1(x_1)} - \left(\frac{B_1'(x_1)}{B_1(x_1)} \right)^2 \right\}$$

$$B_1^{**}(x_1) = \exp \left\{ \frac{v_2}{y_1} - \frac{v_1^2}{y_1^2} \right\}$$

$$B_1^{**}(x_1) = \exp \left\{ \frac{y_1 v_2 - v_1^2}{y_1^2} \right\}$$

hesaplanır. Teorem 4.5'den

$$\begin{cases} B_1(x_1) = y_1, B_1(x_2) = y_2, \\ B_1^*(x_1) = \exp\left\{\frac{v_1}{y_1}\right\}, \\ B_1^{**}(x_1) = \exp\left\{\frac{y_1 v_2 - v_1^2}{y_1^2}\right\} \end{cases}$$

şartlarını sağlayan $B_1(x)$ kübik geometrik polinomu tek türlü olarak belirlenir.

İkinci olarak $B_2: [x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}, B_2(x) = B(x)$ biçiminde tanımlı ve

$$\begin{cases} B_2(x_2) = y_2, B_2(x_3) = y_3, \\ B_2^*(x_2) = B_1^*(x_2), \\ B_2^{**}(x_2) = B_1^{**}(x_2) \end{cases}$$

şartlarını sağlayan $B_2(x)$ kübik geometrik polinomu bir önceki teoremden tek türlü olarak belirlenir.

Bu işlem ardışık olarak $i = 3, \dots, n-1$ için $B_i: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}, B_i(x) = B(x), 3 \leq i \leq n-1$ biçiminde tanımlı ve

$$\begin{cases} B_i(x_i) = y_i, B_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \\ B_i^*(x_i) = B_{i-1}^*(x_i), \\ B_i^{**}(x_i) = B_{i-1}^{**}(x_i) \end{cases}$$

şartlarını sağlayan $B_i(x)$ kübik geometrik polinomları Teorem 4.5'den tek türlü olarak belirlenir. $B: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ geometrik bağ fonksiyonunun

$$B(x) = B_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n-1$$

eşitliğinden varlığı ve tek türlü belirli olacağı açıktır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, geometrik analizin temel tanım ve kavramları verilmiştir. Daha sonra bir geometrik fonksiyonun bir noktadaki geometrik türevleri klasik türevler ile ardışık olarak hesaplanmıştır. Ayrıca bir noktadaki geometrik türevlerin Faà di Bruno formülü yardımıyla klasik türevler ile hesabı verilmiştir. Asıl olarak geometrik sayısal analiz için geometrik bağ ara değer bulma yöntemi verilmiştir. Sırasıyla, sıfırıncı derece geometrik bağ ara değerlendirme, doğrusal geometrik bağ ara değerlendirme, kübik geometrik bağ ara değerlendirme tanıtılmıştır. Ayrıca doğal kübik geometrik bağ ara değerlendirme probleminin çözümünün var ve tek olduğu gösterilmiş ve çözüm yöntemi verilmiştir. Son olarak kübik geometrik bağ ara değerlemenin bir uygulaması verilmiştir. Bu uygulamada verilen problemin çözümünün var ve tek olduğu gösterilmiş ve çözüm yöntemi incelenmiştir.



KAYNAKÇA

- Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge-Kutta method. *Nonlinear Dynamics*, 50:265-272.
- Bal A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative integral equations via the multiplicative power series method. *Politeknik Dergisi*, 26 (1) , 311-320.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of mathematical analysis and applications*, 337(1), 36-48.
- Baştürk, Ö. Spline İnterpolasyonu [PDF belgesi]. 23 Şubat 2023 tarihinde <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=2286> adresinden erişildi.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.
- Çakmak, A. F., ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Duyar, B. S. ve Erdogan, F. (2020). On non-Newtonian power series and its applications. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 294-303.
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth. hal-00945781f.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Goktas, S., Yilmaz, E. ve Yar, A. C. (2022). Multiplicative derivative and its basic properties on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4), 2097-2109.
- Göktaş, S., Kemaloğlu, H. ve Yilmaz, E. (2022). Multiplicative conformable fractional Dirac system. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(3), 973-990.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press.
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.

- Güngör, N. ve Durmaz, H. (2020). Multiplicative Volterra integral equations and the relationship between multiplicative differential equations. *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(2), 9-25.
- Gürefe, Y. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (252639).*
- Gürefe, Y. (2013). *Multiplikatif diferansiyel denklemler ve uygulamaları üzerine. Doktora tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (342659).*
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2015). Hindawi.
- Lee, M. H., Shyu, K. K., Lee, P. L., Huang, C. M. ve Chiu, Y. J. (2010). Hardware implementation of EMD using DSP and FPGA for online signal processing. *Industrial Electronics, IEEE Trans.* 58 (6), 2473–2481.
- Mathews, J. H. ve Fink, K. D. (1999). *Numerical methods using MATLAB*. Prentice Hall.
- Misirli, E. ve Ozyapici, A. (2009). Exponential approximations on multiplicative calculus. In *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 12(2), 227-236.
- Misirli, E. ve Gürefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.
- Özyapıcı, A. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Doktora tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (256828).*
- Özyapıcı, A., Riza, M., Bilgehan, B. ve Bashirov, A.E. (2013). On multiplicative and Volterra minimization methods. *Numerical Algorithms*, pages 1–14.
- Riza, M., Özyapıcı, A. ve Misirli, E. (2009). Multiplicative finite difference methods. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67(4), 745-754.
- Riza, M. ve Aktöre, H. (2015). The Runge–Kutta method in geometric multiplicative calculus. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 18:539–554.
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Uğur, A. (2006). Bezier Eğrileri ve Yüzeyleri [PowerPoint sunumu]. 10 Şubat 2023 tarihinde http://yzgrafik.ege.edu.tr/~ugur/07_08_Spring/BG/Curves.ppt adresinden erişildi.
- Yalçın, N. (2016). *Çarpımsal Türev ve Çarpımsal Lineer Diferansiyel Denklemler, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Erzurum.*
- Yalçın, N. (2021). The solutions of multiplicative Hermite differential equation and multiplicative Hermite polynomials. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 70(1), 9-21.

Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *Aims Mathematics*, 6(4), 3393-3409.



ÖZGEÇMİŞ

İlkokul ve Ortaokulu, Ardahan Merkez’de Tekel 75. Yıl Yatılı İlköğretim Bölge Okulunda, Lise eğitimini ise Ardahan Anadolu Lisesinde tamamladı. 2014-2018 yılları arasında Gümüşhane Üniversitesi Matematik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünü tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans programına yerleşti.

