

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEOMETRİK CESÀRO DİZİ UZAYLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS

Melisa TİFTİKÇİER

AĞUSTOS-2022
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEOMETRİK CESÀRO DİZİ UZAYLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

GEOMETRIC CESÀRO SEQUENCE SPACES AND SOME PROPERTIES

YÜKSEK LİSANS

Melisa TİFTİKÇİER

AĞUSTOS-2022

GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEOMETRİK CESÀRO DİZİ UZAYLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

GEOMETRIC CESÀRO SEQUENCE SPACES AND SOME PROPERTIES

YÜKSEK LİSANS

Melisa TİFTİKÇİER

Danışman: Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR

AĞUSTOS-2022

GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Geometrik Cesàro Dizi Uzayları ve Bazı Özellikleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

04/08/2022

.....
Melisa TİFTİKÇİER

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışılması sürecinde akademik bilgi ve deneyimleriyle bana ışık tutan, yol gösteren, her zaman içtenliğiyle desteklerini esirgemeyen, tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca verdikleri emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün değerli hocalarına teşekkürlerimi borç bilirim.

Hayatın her anında beni destekleyen, hep yanımda olan, bana her daim inanıp güvenen ve bugüne ulaşmamı sağlayan aileme teşekkür ederim.

Melisa TİFTİKÇİER
GÜMÜŞHANE-2022

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; konunun tarihi geçmişi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde; tez konusu ile ilgili ihtiyaç duyulacak temel tanımlar ve teoremler ele alındı. Tez konusunun işlendiği üçüncü bölüm ise iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda Cesàro dizi uzaylarının $1 \leq p < \infty$ ve $p = \infty$ olmak üzere tanımları, Newton ve Leibnitz'in üretmiş olduğu klasik analizden farklı olan geometrik kalkülüse aktarıldı ve bu tanımlanan Ces_p^G geometrik Cesàro dizi uzaylarının geometrik kalkülüse göre vektör uzayı, normlu uzay, Banach uzayı oldukları gösterildi. Bununla birlikte Cesàro dizi uzaylarının geometrik l_p^G dizi uzayı ile aralarındaki kapsama ilişkileri irdelendi ve bazı gerekli örneklendirmelere yer verildi. İkinci kısımda $Ces^G(p)$ genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzayları tanımlandı ve bu tanımlanan genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzaylarının temel özelliklerinin yanı sıra G -modüler, G -modülerin özellikleri ve Luxemburg G -norm ile ilişkisi irdelendi. Son bölümde tez konusu ile ilgili sonuç ve değerlendirmelere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Geometrik kalkülüs, Geometrik Cesàro dizi uzayları, Genelleştirilmiş Geometrik Cesàro dizi uzayları, G -modüler, Luxemburg G -norm

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the information about the historical background of the subject is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems related to the study are handled. The third chapter, which deals with the thesis topic, consists of two parts. In the first part, the definitions of Cesàro sequence spaces with $1 \leq p < \infty$ and $p = \infty$ are given in the sense of geometric calculus, which differs from the classical calculus introduced by Newton and Leibnitz, and it is shown that Ces_p^G geometric Cesàro sequence spaces are vector spaces, normed spaces, and Banach spaces in the sense of geometric calculus. In addition to, the inclusion relations between the geometric Cesàro sequence space and l_p^G geometric sequence spaces are researched and some necessary examples are given. In the second part, $Ces^G(p)$ generalized geometric Cesàro sequence spaces are defined and the basic properties of these spaces are given. Moreover, G -modular, properties of G -modular and their relationship with Luxemburg G -norm are examined. In the last chapter, conclusions and evaluations related to the thesis subject are given.

Keywords: Geometric calculus, Geometric Cesàro sequence spaces, Generalized Geometric Cesàro sequence spaces, G -modular, Luxemburg G -norm

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Klasik Kalkülüste Bazı Temel Kavramlar	4
2.2. Cesàro Dizi Uzayları	8
2.3. Geometrik Kalkülüs	11
3. GEOMETRİK CESÀRO DİZİ UZAYLARI.....	28
3.1. Ces_p^G Geometrik Cesàro Dizi Uzayları	28
3.2. $Ces^G(p)$ Geometrik Cesàro Dizi Uzayları.....	48
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	70
KAYNAKÇA.....	71
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_G$	: Geometrik reel sayılar kümesi
Ces_p	: Cesàro dizi uzayı ($1 \leq p < \infty$)
Ces_∞	: Cesàro dizi uzayı ($p = \infty$)
$Ces(p)$	: Genelleştirilmiş Cesàro dizi uzayı
Ces_p^G	: Geometrik Cesàro dizi uzayı ($1 \leq p < \infty$)
Ces_∞^G	: Geometrik Cesàro dizi uzayı ($p = \infty$)
$Ces^G(p)$	: Genelleştirilmiş Geometrik Cesàro dizi uzayı
ω	: Reel sayı dizi uzayı
ω_G	: Geometrik reel sayı dizi uzayı
l_∞	: Sınırlı dizi uzayı
l_p	: Lebesgue dizi uzayı ($1 \leq p < \infty$)
l_p^G	: Geometrik Lebesgue dizi uzayı ($1 \leq p < \infty$)
l_∞^G	: Geometrik sınırlı dizi uzayı
$\oplus$	: Geometrik toplam
$\ominus$	: Geometrik çıkarma
$\odot$	: Geometrik çarpma
$\oslash$	: Geometrik bölme
$G\Sigma$	: G -toplam
$\ \cdot\ _G$	: G -norm
$ \cdot _G$	: G -mutlak değer
$_G\lim$	: G -limit
$_G\sup$	: G -supremum
$_G\inf$	: G -infimum
A_G	: G -aritmetik ortalama
G_G	: G -geometrik ortalama
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$\leq$	: Küçük veya eşittir

$\geq$	: Büyük veya eşittir
$<_G$	: Geometrik küçüktür
$>_G$	: Geometrik büyüktür
$\leq_G$	: Geometrik küçük veya eşittir
$\geq_G$	: Geometrik büyük veya eşittir
$\subset$	: Alt küme
$\supseteq$	: Kapsar veya eşit
$\in$	: Elemanıdır



1. GİRİŞ

Dizi uzayları, ekonomiden mühendisliğe kadar geniş uygulama alanlarına sahiptir. Dizi uzayları, fonksiyon uzaylarının önemli bir örneği olup, Banach uzayları teorisinin incelenmesinde önemli bir rol oynar. Banach uzaylarının topolojik ve geometrik özellikleri, Banach uzayları teorisinin modern bir konusu haline gelmiştir. Bu sebeple son zamanlarda bazı dizi uzayları ve özellikleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmakta ve bu çalışmalar pür ve uygulamalı analizde araştırmaların odak noktası haline gelmektedir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$Ces_p = \left\{ x = (x_k) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Cesàro dizi uzayları ilk olarak 1968’de “Programma van jaarlijkse prijsvragen (Annual problem section)” adlı çalışmada tanımlanmıştır. 1970 yılında Shiue, “On the cesaro sequence space” adlı çalışmasında bu uzayları normla birlikte ilk defa tanımlamıştır ve bazı temel özelliklerini ele almıştır (Shiue, 1970a). Leibowitz (Leibowitz, 1971), Hassard ve Hussein (Hassard ve Hussein, 1973) tarafından Cesàro dizi ve fonksiyon uzaylarının bazı temel sonuçları elde edilmiştir. Bunun sonrasında Cesàro dizi uzayları, Banach uzayı konusunda çalışan bilim insanları arasında büyük bir önem kazanmıştır. Jagers, $1 \leq p < \infty$ için Ces_p uzayının dualinin izometrik tanımını vermiştir (Jagers, 1974). Benzer bir sonuç 1976’da Ng ve Lee tarafından $p = \infty$ durumu için elde edilmiştir (Ng ve Lee, 1976). Cui, Meng ve Pluciennik tarafından Ces_p dizi uzayının Banach – Saks özelliği ve (β) özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir (Cui vd., 2000). Sanhan ve Suantai $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi olmak üzere

$$Ces(p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

genelleştirilmiş Cesàro dizi uzayını tanımlamıştır (Sanhan ve Suantai, 2003). Suantai genelleştirilmiş Cesàro dizi uzaylarının üzerinde konveks modüler ve Luxemburg norm

tanımlayıp bunların arasındaki ilişkiyi irdelemiştir, sonraki çalışmasında ise bu dizi uzayının geometrik özelliklerini incelemiştir (Suantai, 2003a; 2003b).

Grossman ve Katz, 1967-1970 yılları arasında Newton ve Leibniz tarafından oluşturulan klasik kalkülüse bir alternatif olarak yeni bir kalkülüs inşa etmişlerdir (Grossman ve Katz, 1972). Klasik, geometrik, harmonik ve kuadratik kalkülüsü içeren kalkülüsün bir sonsuz ailesini tanımlamışlar ve daha sonra bu ilerleme sürecinde bigeometrik, biharmonik ve bikuadratik kalkülüsü oluşturmuşlardır. Klasik kalkülüsten farklı olan sınıfların tümünü içine alan bu yapıya Newtonyen olmayan kalkülüs adı verilmiştir. Newtonyen olmayan kalkülüs yerine *-kalkülüs ifadesi de kullanılmaktadır. Klasik kalkülüste kullanılan tüm kavramların, Newtonyen olmayan kalkülüs sınıfının her bir üyesi içinde karşılığı vardır. Newtonyen olmayan kalkülüs fen bilimleri, mühendislik ve matematik gibi birçok uygulama alanına sahiptir. Üzerinde çalışılan alanlardan bazıları faiz oranları; ekonomide esneklik teorisi; kanın akışkanlığı; görüntü işleme ve yapay zekayı içeren bilgisayar bilimi; biyoloji; diferansiyel denklemler; fonksiyonel analiz; olasılık teorisi şeklinde ifade edilebilir. Yapılacak çalışmaların, bu uygulama alanlarına aktarımıyla günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere farklı bakış açısı getirileceği düşünülmektedir. Newtonyen olmayan kalkülüsün en ön planda olan sınıflarından biri geometrik kalkülüstür.

James R. Megginniss tarafından yapılan çalışmada insan davranışına ve seçim yapmaya uyarlanmış olasılık teorisi oluşturmak için Newtonyen olmayan kalkülüs kullanılmıştır (Megginniss, 1980). Michael Grossmann tarafından yapılan çalışmada bigeometrik kalkülüste ölçüden bağımsız türev incelenmiştir (Grossman, 1983). Agarmirza E. Bashirov, Emine Mısırlı ve Ali Özyapıcı geometrik kalkülüs ve uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır (Bashirov vd., 2008). Cengiz Türkmen ve Feyzi Başar geometrik kalkülüste dizi uzayları üzerine çalışmıştır (Türkmen ve Başar, 2012). Diana Andrada Filip ve Cyrille Piatecki ekonomideki neoklasik (Solow-Swan) büyüme modelini yeniden doğrulamak ve analiz etmek için Newtonyen olmayan kalkülüsü kullanmışlardır. (Filip ve Piatecki, 2014). Boruah tarafından geometrik reel dizi uzayları ve bazı temel özellikleri ele alınmıştır (Boruah, 2017). Boruah ve Hazarika geometrik fark dizi uzaylarını tanımlayarak Banach uzayı olduğunu göstermiş ve duallerini incelemişlerdir (Boruah ve Hazarika, 2017).

Bu tez çalışmasında, geometrik kalkülüsteki temel kavramlar kullanılarak, Cesàro dizi uzayının tanımı geometrik kalkülüse aktarıldı ve tanımlanan geometrik Cesàro dizi uzaylarının, Geometrik kalkülüste vektör uzayı, normlu uzay, Banach uzayı oldukları gösterildi. Ayrıca, Cesàro dizi uzaylarının geometrik l_p^G dizi uzayı ile aralarındaki

kapsama ilişkileri irdelendi ve bazı gerekli örneklendirmelere yer verildi. Daha sonra, $Ces^G(p)$ genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzayları tanımlandı ve bu tanımlanan genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzaylarının temel özelliklerinin yanı sıra G -modüler, G -modülerin özellikleri ve Luxemburg G -norm ile ilişkisine yer verildi.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde diğer kısımlarda kullanılacak olan temel tanım, teoremlere yer verilmiş ve geometrik kalkülüsten kısaca bahsedilmiştir.

2.1. Klasik Kalkülüste Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ ise reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X & \cdot : \mathbb{F} \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x + y & \text{ve} & (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x \end{aligned}$$

işlemleri aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, X kümesine $+$ ve $\cdot$ işlemlerine göre $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir (Maddox, 1970).

Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için

- V1)** $x + y = y + x$
- V2)** $(x + y) + z = x + (y + z)$
- V3)** Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- V4)** Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- V5)** $1 \cdot x = x$
- V6)** $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- V7)** $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- V8)** $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$

Tanım 2.1.2. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y, X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer herhangi $x, y \in Y$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ ise Y kümesine X uzayının bir alt vektör uzayı denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olmak üzere ω bütün $x = (x_k)$ dizilerinin kümesini gösterebilirsin. α bir skaler olmak üzere

$$\begin{aligned} x + y &= (x_k) + (y_k) \\ \alpha x &= (\alpha x_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında ω bir vektör uzayıdır. Buna göre ω uzayının her alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir (G. Goes ve S. Goes, 1970).

Teorem 2.1.1. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k, y_k \geq 0$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n x_k^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n y_k^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Yeh, 2006; Maddox 1970).

Önerme 2.1.1. $p \in (0, 1)$ olsun. Eğer $x, y \geq 0$ ise

$$(x + y)^p \leq x^p + y^p$$

dir (Yeh, 2006).

Önerme 2.1.2. (Jessen's Eşitsizliği) $0 < p < q$ ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Mahto vd., 2018).

Teorem 2.1.2. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan p ve q reel sayıları verilsin. $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k, y_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Yeh, 2006; Maddox 1970).

Teorem 2.1.3. (Aritmetik ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği) $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif reel sayıları için

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.1.4. (Young Eşitsizliği) p ve q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif reel sayılar olsun. Eğer x ve y , $x, y \geq 0$ koşulunu sağlayan reel sayılar ise

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

dır (Castillo ve Raferio, 2016).

Teorem 2.1.5. (Hardy Eşitsizliği) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p < \infty$$

olsun. O halde $p > 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Hardy, 1952).

Tanım 2.1.4. X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

$$\text{N1)} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N2)} \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.5. $x = (x_k)$, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| \leq m$ olacak şekilde bir $m > 0$ reel sayısı varsa (x_k) dizisine bir sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.6. $x = (x_k)$, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için her $k > k_0$ olduğunda

$$\|x_k - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa bu $x = (x_k)$ dizisi $x \in X$ elemanına yakınsıyor denir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ veya $x_k \rightarrow x$ şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.7 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için her $k, m > k_0$ olduğunda

$$\|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayda bir elemana yakınsıyorsa, bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.9. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere l_p dizi uzayı

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$1 \leq p < \infty$ için $x = (x_k) \in l_p$ olmak üzere

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_p : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l_p üzerinde bir normdur.

Tanım 2.1.10. l_∞ dizi uzayı

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$x = (x_k) \in l_\infty \text{ olmak üzere}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_p : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l_∞ üzerinde bir normdur.

2.2. Cesàro Dizi Uzayları

Bu kısımda öncelikle, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ces_p Cesàro dizi uzayı tanıtılmış ve bazı temel özellikleri ifade edilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş $Ces(p)$ Cesàro dizi uzayından kısaca bahsedilerek, modüler kavramına yer verilmiş, bu uzay üzerindeki modülerin özellikleri ve Luxemburg normu ile arasındaki bazı ilişkilerden bahsedilmiştir.

Tanım 2.2.1. $x = (x_k)$ reel sayı dizisi ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ces_p dizi uzayı

$$Ces_p = \left\{ x = (x_k) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$1 \leq p < \infty \text{ olmak üzere } Ces_p \text{ uzayı}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır (Shiue, 1969).

Tanım 2.2.2. $x = (x_k)$ reel sayı dizisi ve $p = \infty$ olmak üzere Ces_p dizi uzayı

$$Ces_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ces_∞ uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır (Shiue, 1969).

Teorem 2.2.1. $p > 1$ için $l_p \subset Ces_p$ dir (Shiue, 1969).

Tanım 2.2.3. X , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa modüler adını alır:

- i) $\varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- ii) $|\alpha| = 1$ koşulunu sağlayan her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\varrho(\alpha x) = \varrho(x)$
- iii) $\alpha + \beta = 1$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$\varrho(\alpha x + \beta y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$$

Ayrıca, ϱ modülleri

- iv) $\alpha + \beta = 1$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$\varrho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \varrho(x) + \beta \varrho(y)$$

şartını sağlıyorsa konveks modüler olarak adlandırılır (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.4. X , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve ϱ , X uzayı üzerinde bir modüler olsun. Bu takdirde

$$X_\varrho = \{x \in X : \varrho(\lambda \cdot x) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0^+\}$$

şeklinde tanımlanan X_ϱ uzayına, modüler uzay denir (Orlicz, 1992).

Teorem 2.2.2. X , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve ϱ bir konveks modüler ise

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho \left(\frac{x}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X_ϱ üzerinde bir norm tanımlar ve bu norm, Luxemburg normu olarak adlandırılır (Orlicz, 1992).

Tanım 2.2.5. $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi olsun.

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^{p_n}$$

olmak üzere $Ces(p)$ dizi uzayı

$$Ces(p) = \{x = (x_k) \in \omega : \sigma(x) < \infty\}$$

yani

$$Ces(p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Sanhan, 2000).

Teorem 2.2.3. σ , $Ces(p)$ uzayı üzerinde konveks modülerdir (Suantai, 2003).

Önerme 2.2.1. $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi ve $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ olsun. $Ces(p)$ uzayı üzerinde tanımlı σ modüleri aşağıdaki

özellikleri sağlar:

- (i) $0 < c < 1$ ise $c^M \sigma \left(\frac{x}{c} \right) \leq \sigma(x)$ ve $\sigma(cx) \leq c\sigma(x)$
- (ii) $c > 1$ ise $\sigma(x) \leq c^M \sigma \left(\frac{x}{c} \right)$
- (iii) $c \geq 1$ ise $\sigma(x) \leq c\sigma(x) \leq \sigma(cx)$

(Suantai, 2003).

Teorem 2.2.4. $Ces(p)$ dizi uzayı

$$\begin{aligned}\|x\| &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sigma \left(\frac{x}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\lambda} \right)^{p_n} \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

Luxemburg normu ile bir normlu uzaydır (Sanhan, 2000).

Önerme 2.2.2. Her $x \in Ces(p)$ için,

- (i) $\|x\| < 1$ ise $\sigma(x) \leq \|x\|$
- (ii) $\|x\| > 1$ ise $\sigma(x) \geq \|x\|$
- (iii) $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \sigma(x) = 1$
- (iv) $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \sigma(x) < 1$
- (v) $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \sigma(x) > 1$

dir (Suantai, 2003).

Önerme 2.2.3. Her $x \in Ces(p)$ ve $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ olsun.

- (i) $0 < c < 1$ ve $\|x\| > c$ ise, bu takdirde $\sigma(x) > c^M$ dir.
- (ii) $c \geq 1$ ve $\|x\| < c$ ise, bu takdirde $\sigma(x) < c^M$ dir (Sanhan, 2000).

Önerme 2.2.4. $x = (x_k)$, $Ces(p)$ uzayında bir dizi olsun.

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 1$ ise $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x_k) = 1$ dir.
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x_k) = 0$ ise $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 0$ dır (Suantai, 2003).

Teorem 2.2.5. $Ces(p)$ uzayı Luxemburg normu ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Geometrik Kalkülüs

Bu kısımda, çalışmada kullanılacak olan Geometrik kalkülüs tanıtılıp bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi de $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi olan birebir fonksiyona üreteç denir. I özdeşlik fonksiyonu, $\exp$ fonksiyonu üreteç fonksiyonuna örnek gösterilebilir.

Görüntü kümesi A olan bir α üretici göz önüne alınsın. Bu üreteç $t, z \in A$ olmak üzere aşağıda verilen işlemler ve sıralama bağıntısıyla birlikte α -aritmetik olarak adlandırılır.

α -toplama	$t \dot{+} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(z)\}$
α -çıkarma	$t \dot{-} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(z)\}$
α -çarpma	$t \dot{\times} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \times \alpha^{-1}(z)\}$
α -bölme ($z \neq \dot{0} = \alpha(0)$)	$t \dot{/} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \div \alpha^{-1}(z)\}$
α -sıralama	$t \dot{<} z \Leftrightarrow \alpha^{-1}(t) < \alpha^{-1}(z)$

α üretici özdeşlik fonksiyonu olarak seçilirse, her $t \in A$ için $\alpha(t) = t$ olur, bu da $\alpha^{-1}(t) = t$ olması anlamına gelir. Böylece,

α -toplama	$t \dot{+} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(z)\} = \alpha\{t + z\}$ $= t + z$	klasik toplama
α -çıkarma	$t \dot{-} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(z)\} = \alpha\{t - z\}$ $= t - z$	klasik çıkarma
α -çarpma	$t \dot{\times} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \times \alpha^{-1}(z)\} = \alpha\{t \times z\}$ $= t \times z$	klasik çarpma
α -bölme($z \neq 0$)	$t \dot{/} z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \div \alpha^{-1}(z)\} = \alpha\{t \div z\}$ $= t \div z$	klasik bölme

şeklinde yazılır ve α -aritmetik, klasik aritmetiğe indirgenmiş olur.

α üretici exp fonksiyonu olarak seçilirse, her $t \in A$ için $\alpha(t) = e^t$ olur, bu ise $\alpha^{-1}(t) = \ln t$ olması anlamına gelir. Buradan,

α -toplama	$t \oplus z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t + \ln z\}}$ $= t \cdot z$	geometrik toplama
α -çıkarma	$t \ominus z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t - \ln z\}}$ $= t \div z$	geometrik çıkarma
α -çarpma	$t \odot z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \times \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t \times \ln z\}}$ $= t^{\ln z} = z^{\ln t}$	geometrik çarpma
α -bölme($z \neq 1$)	$\frac{t}{z} = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \div \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t \div \ln z\}}$	geometrik bölme

$$= t^{\frac{1}{\ln z}}$$

α -sıralama

$$t <_G z \Leftrightarrow \ln t < \ln z$$

geometrik sıralama

şeklinde yazılır ve α -aritmetik, geometrik aritmetiğe indirgenmiş olur (Grossman ve Katz, 1972; Boruah, 2017).

Tanım 2.3.2. $\exp$ fonksiyonu ile üretilen aritmetiğe geometrik aritmetik denir.

Tanım 2.3.3. $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine geometrik aritmetikteki reel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}_G$ (veya $\mathbb{R}(G)$) ile gösterilir. Geometrik pozitif reel sayılar ve negatif reel sayılar sırasıyla

$$\mathbb{R}_G^+ = \{x \in \mathbb{R}_G : x >_G 1\} \text{ ve } \mathbb{R}_G^- = \{x \in \mathbb{R}_G : x <_G 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Boruah, 2017; Boruah ve Hazarika, 2018).

Geometrik sıfır sayısı $e^0 = 1$ ve geometrik bir sayısı $e^1 = e$ dir. G -tamsayılar, 1 sayısından ardışık olarak e sayısının G -toplamasıyla ve 1 sayısından ardışık olarak e sayısının G -çıkarmasıyla elde edilir. O halde G -tamsayılar

$$\dots, e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, \dots$$

şeklindedir. Her bir n tamsayısı G -aritmetiğine göre e^n ile gösterilir. Eğer e^n bir G -pozitif tamsayı ise

$$e^n = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{n \text{ tane}}$$

dir (Grossman ve Katz, 1972).

Sonuç 2.3.1. $\mathbb{R}_G$ üzerinde tanımlanan

$$\oplus : \mathbb{R}_G \times \mathbb{R}_G \rightarrow \mathbb{R}_G,$$

$$(t, z) \rightarrow t \oplus z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) + \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t + \ln z\}} = t \cdot z$$

toplama işlemi ve

$$\odot : \mathbb{R}_G \times \mathbb{R}_G \rightarrow \mathbb{R}_G,$$

$$(t, z) \rightarrow t \odot z = \alpha\{\alpha^{-1}(t) \times \alpha^{-1}(z)\} = e^{\{\ln t \times \ln z\}} = t^{\ln z}$$

çarpma işlemine göre $(\mathbb{R}_G, \oplus, \odot)$ bir cisimdir (Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.3.4. $A \subset \mathbb{R}_G$ kümesindeki her $t <_G z$ sayısı için $t \leq_G x \leq_G z$ koşulunu sağlayan $x \in A$ geometrik sayıların kümesi G -aralık olarak adlandırılır ve bu G -aralığı $z \ominus t$, G -uzunluğa sahiptir.

Önerme 2.3.1. $x, y, z, t \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

- i) $x \leq_G y$ ise $x \oplus z \leq_G y \oplus z$ ve $x \ominus z \leq_G y \ominus z$,
- ii) $x \leq_G y$ ve $z \leq_G t$ ise $x \oplus z \leq_G y \oplus t$ ve $x \ominus z \leq_G y \ominus t$,
- iii) $x \leq_G y$ ve $1 \leq_G z$ ise $x \odot z \leq_G y \odot z$ ve $\frac{x}{z} G \leq_G \frac{y}{z} G$,
- iv) $1 <_G x, y$ ve $x \leq_G y$ ise $\frac{e}{y} G \leq_G \frac{e}{x} G$,
- v) $x \leq_G y$ ise $1 \ominus y \leq_G 1 \ominus x$

(Erdoğan, 2016; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.3.5. $x \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere x sayısının geometrik karesi

$$x^{2G} = x \odot x = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2} = x^{\ln x}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} x^{3G} &= x \odot x \odot x = (e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^3} \\ &= (x^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{4G} &= x \odot x \odot x \odot x = \left((e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} = e^{(\ln x)^4} \\ &= \left((x^{\ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} = x^{\ln^3 x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{pG} &= x \odot x \odot x \odot \dots \odot x = \left(\left(\left((e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} \right)^{\dots} \right)^{\ln x} = e^{(\ln x)^n} \\ &= \left(\left(\left((x^{\ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} \right)^{\dots} \right)^{\ln x} = x^{\ln^{p-1} x} \end{aligned}$$

yazılır (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.3.6. $x \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere x sayısının geometrik karekökü $\sqrt{x}^G$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{x}^G = e^{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde tanımlanır.

$x \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere x sayısının geometrik p . kökü

$$\sqrt[p]{x}^G = e^{(\ln x)^{\frac{1}{p}}}$$

şeklinde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.3.7. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_G$ sayısının geometrik mutlak değeri

$$|x|_G = \begin{cases} x, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

veya

$$e^{|y|} = |e^y|_G = \begin{cases} e^y, & e^y > e^0 = 1 \\ 1, & e^y = e^0 \\ e^{-y}, & e^y < e^0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$\sqrt{x^{2G}} = |x|_G = e^{|\ln x|}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Önerme 2.3.2. $x, y, z, t \in \mathbb{R}_G$, $p \in \mathbb{N}$ ve $y, t \neq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:

- i) $\frac{x}{y}G \oplus \frac{z}{t}G = \frac{(x \odot t) \oplus (y \odot z)}{y \odot t}G,$
- ii) $\frac{x}{y}G \ominus \frac{z}{t}G = \frac{(x \odot t) \ominus (y \odot z)}{y \odot t}G,$
- iii) $\frac{x}{y}G \odot \frac{z}{t}G = \frac{x \odot z}{y \odot t}G,$
- iv) $z \neq 1$ olmak üzere $\frac{\frac{x}{y}G}{\frac{z}{t}G} = \frac{x}{y}G \odot \frac{t}{z}G = \frac{x \odot t}{y \odot z}G,$

- v) $\left(\frac{x}{y}G\right)^{p_G} = \frac{x^{p_G}}{y^{p_G}}G,$
vi) $(x \odot z)^{p_G} = x^{p_G} \odot y^{p_G},$

Önerme 2.3.3. (Üçgen Eşitsizliği) $x, y \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere

$$|x \oplus y|_G \leq_G |x|_G \oplus |y|_G$$

eşitsizliği gerçekleşir (Çakmak ve Başar, 2012a).

Önerme 2.3.4. $x, y \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere

- i) $|x \ominus y|_G \geq_G |x|_G \ominus |y|_G$
ii) $|x \odot y|_G = |x|_G \odot |y|_G$
iii) $|x \oslash y|_G = |x|_G \oslash |y|_G$

ifadeleri gerçekleşir (Boruah, 2017).

Tanım 2.3.8. (G -Aritmetik Ortalama) $x_1, x_2, \dots, x_n$ geometrik pozitif reel sayı olsun. G -aritmetik ortalama her $k \in \mathbb{N}$ için x_k sayılarının G -toplamının e^n değerine G -oranıdır ve A_G ile gösterilir. Buna göre

$$A_G = \frac{(x_1 \oplus \dots \oplus x_n)}{e^n} G = G \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{e^n} G = G \sum_{k=1}^n e^{\left[\frac{\ln x_k}{n}\right]} = e^{\left[\frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)}{n}\right]}$$

olur (Kadak, 2011).

Tanım 2.3.9. (G -Geometrik Ortalama) $x_1, x_2, \dots, x_n$ geometrik pozitif reel sayılar olsun. G -geometrik ortalama her $k \in \mathbb{N}$ için x_k sayılarının G -çarpımlarının G -kökleridir ve G_G ile gösterilir. Buna göre

$$G_G = \left(G \prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}G} = e^{\left\{\left(\prod_{k=1}^n \ln x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right\}} = e^{\left\{(\ln(x_1) \ln(x_2) \dots \ln(x_n))^{\frac{1}{n}}\right\}}$$

şeklinde ifade edilir (Kadak, 2011).

Tanım 2.3.10. Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $x \leq_G b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}_G$ elemanı varsa X kümesi G -üstten sınırlı ve b sayısına da X kümesinin bir G -üst sınırı denir. (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.11. Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $x \geq_G a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}_G$ elemanı varsa X kümesi G -alttan sınırlı ve a sayısına da X kümesinin bir G -alt sınırı denir. (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.12. Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesi verilsin. Her $x \in X$ için $m \leq_G x$ olacak şekilde bir $m \in X$ elemanı varsa m elemanına X kümesinin G -minimal elemanı denir ve kısaca $m = {}_G\min\{x: x \in X\} = {}_G\min X$ şeklinde yazılır (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.13. Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesi verilsin. Her $x \in X$ için $x \leq_G M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa M elemanına X kümesinin G -maksimal elemanı denir ve kısaca $M = {}_G\max\{x: x \in X\} = {}_G\max X$ şeklinde yazılır (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.14. Verilen bir G -üstten sınırlı $X \subset \mathbb{R}_G$ kümesi için $A = \{b : b, X \text{ kümesinin bir } G\text{-üst sınırı}\}$ olsun. A kümesinin G -minimal elemanına X kümesinin G -supremumu denir ve ${}_G\sup X$ ile gösterilir (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.15. Verilen bir G -alttan sınırlı $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesi için $A = \{b : b, X \text{ kümesinin bir } G\text{-alt sınırı}\}$ olsun. A kümesinin G -maksimal elemanına X kümesinin G -infimumu denir ve ${}_G\inf X$ ile gösterilir (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.16. Boş olmayan ve G -üstten sınırlı her $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesinin bir tek G -supremumu vardır (Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.17. Boş olmayan ve G -alttan sınırlı her $X \subset \mathbb{R}_G$ alt kümesinin bir tek G -infimumu vardır (Erdoğan, 2016).

Teorem 2.3.1. (Geometrik supremum özelliği) Boş olmayan ve G -üstten sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}_G$ kümesi verildiğinde $c = {}_G\sup A$ olması için gerekli ve yeterli koşul

- (1) c sayısının A kümesi için bir G -üst sınır olması ve
- (2) Her $\varepsilon > 1$ sayısı için $a_\varepsilon >_G c \ominus \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ sayısının bulunmasıdır (Erdoğan, 2016).

Teorem 2.3.2. (Geometrik infimum özelliği) Boş olmayan ve G -alttan sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}_G$ kümesi verildiğinde $c = {}_G\inf A$ olması için gerekli ve yeterli koşul

- i) c sayısının A kümesi için bir G -alt sınır olması ve
- ii) Her $\varepsilon > 1$ sayısı için $b_\varepsilon <_G c \oplus \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $b_\varepsilon \in A$ sayısının

bulunmasıdır (Erdoğan, 2016).

Teorem 2.3.3. (Geometrik Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k, y_k \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere

$$\left(G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \leq_G \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \oplus \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Gurefe vd., 2016).

İspat. $1 \leq p < \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k, y_k \in \mathbb{R}_G$ olsun. $x_k = e^{a_k}, y_k = e^{b_k}$ şeklinde alınırsa, o halde

$$\begin{aligned} \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} &= e^{(\ln G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G})^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |x_k \cdot y_k|^{p^{p-1} |x_k \cdot y_k|} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |e^{a_k} \cdot e^{b_k}|^{p^{p-1} |e^{a_k} \cdot e^{b_k}|} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |e^{a_k + b_k}|^{p^{p-1} |e^{a_k + b_k}|} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} (e^{|a_k + b_k|})^{|a_k + b_k|^{p-1}} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k + b_k|^p} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\ln e^{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p} \right]^{1/p}} \\ &= e^{\left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right]^{1/p}} \\ &\leq e^{(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p)^{1/p}} \\ &= e^{(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p}} e^{(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p)^{1/p}} \\ &= e^{(\ln \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p}} e^{(\ln \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p)^{1/p}} \\ &= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k|^p} \right)^{1/p}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|b_k|^p} \right)^{1/p}} \\ &= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k|^{p^{p-1} |a_k|}} \right)^{1/p}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|b_k|^{p^{p-1} |b_k|}} \right)^{1/p}} \\ &= \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \oplus \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.3.5. $0 < p < 1$ olsun. $x, y \geq_G 1$ koşulunu sağlayan her $x, y \in \mathbb{R}_G$ için

$$(x \oplus y)^{p_G} \leq_G x^{p_G} \oplus y^{p_G}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Sağır ve Eyüpoğlu, 2022).

İspat.

$0 < p < 1$ olsun ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = e^a, y = e^b$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}_G$ verilsin. O halde Önerme 2.1.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^{p_G} &= (x \cdot y)^{\ln^{p-1} x \cdot y} \\ &= (e^a \cdot e^b)^{\ln^{p-1} e^a \cdot e^b} \\ &= (e^{a+b})^{\ln^{p-1} e^{a+b}} \\ &= e^{(a+b) \ln^{p-1} e^{a+b}} = e^{(a+b)^p} \\ &\leq e^{a^p + b^p} = e^{a^p} \cdot e^{b^p} \\ &= e^{a \cdot a^{p-1}} \cdot e^{b \cdot b^{p-1}} \\ &= e^{a(\ln e^a)^{p-1}} \cdot e^{b(\ln e^b)^{p-1}} \\ &= e^{a \ln^{p-1} e^a} \cdot e^{b \ln^{p-1} e^b} \\ &= x^{\ln^{p-1} x} \cdot y^{\ln^{p-1} y} \\ &= x^{p_G} \cdot y^{p_G} \\ &= x^{p_G} \oplus y^{p_G} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.3.6. $x = (x_k)$, $\mathbb{R}_G$ uzayında bir dizi olsun. $0 < p < q$ olmak üzere

$$\left(G \sum_{k=1}^n |x_k|_G^{q_G} \right)^{(1/q)_G} \leq_G \left(G \sum_{k=1}^n |x_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

eşitsizliği vardır (Sanjay vd., 2018).

İspat.

$$u = \left(G \sum_{k=1}^n |x_k|_G^{q_G} \right)^{(1/q)_G}$$

olsun. Bu denklem klasik aritmetiğe dönüştürülürse,

$$\ln u = \left(\sum_{k=1}^n |\ln x_k|^q \right)^{(1/q)}$$

bulunur. Önerme 2.1.2 kullanılırsa

$$\ln u \leq \left(\sum_{k=1}^n |\ln x_k|^p \right)^{(1/p)}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik geometrik aritmetiğe dönüştürüldüğünde,

$$u \leq \left(G \sum_{k=1}^n |x_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.18. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{R}_G$ cismi verilsin. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_G$ için

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X & \cdot : \mathbb{R}_G \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x + y = x \oplus y & \text{ve} & (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x = (\alpha \odot x) \end{aligned}$$

işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine $\mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir Geometrik vektör uzayı (G -vektör uzayı) denir.

V1) $x \oplus y = y \oplus x$

V2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

V3) Her bir $x \in X$ için $x \oplus \theta_G = x$ olacak şekilde bir $\theta_G \in X$ vardır.

V4) Her bir $x \in X$ için $x \oplus (\theta_G \ominus x) = \theta_G$ olacak şekilde bir $\theta_G \ominus x \in X$ vardır.

V5) $e \odot x = x$

V6) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$

$$\mathbf{V7)} (\alpha \oplus \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$$

$$\mathbf{V8)} \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \odot \beta) \odot x.$$

Tanım 2.3.19. $\mathbb{R}_G$ terimli tüm dizilerin kümesi $\omega_G = \{x = x_k \mid x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_G\}$ ile gösterilir. $\alpha = \exp$ olduğundan $\omega_G = \{e^k, k \in \mathbb{N}\}$ şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.4. $x = (x_k), y = (y_k) \in \omega_G, \lambda \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} + : \omega_G \times \omega_G &\rightarrow \omega_G & \cdot : \mathbb{R}_G \times \omega_G &\rightarrow \omega_G \\ (x, y) &\rightarrow x + y = x_k \oplus y_k & \text{ve} & (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x = (\lambda \odot x_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan cebirsel toplama $+$ ve skalerle çarpma $\cdot$ işlemleriyle birlikte ω_G kümesi $\mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur.

İspat. $x = (x_k), y = (y_k), z = (z_k) \in \omega_G$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_G$ olsun.

$$\mathbf{V1)} \quad x + y = (x_k \oplus y_k) = (y_k \oplus x_k) = y + x$$

$$\mathbf{V2)} \quad (x + y) + z = (x_k \oplus y_k) \oplus z_k = x_k \oplus (y_k \oplus z_k) = x + (y + z)$$

$$\mathbf{V3)} \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } 0_k = 1 \text{ olsun.}$$

$$x + 0 = (x_k \oplus 0_k) = (x_k) = x$$

bulunur.

$$\mathbf{V4)} \quad \text{Her } x \in \omega_G \text{ için } -x = (0_k \ominus x_k) \in \omega_G \text{ alınır}$$

$$x + (-x) = (x_k \oplus (0_k \ominus x_k)) = ((x_k \oplus 0_k) \ominus x_k) = (x_k \ominus x_k) = 0_k = 1$$

bulunur.

$$\mathbf{V5)} \quad e \cdot x = (e \odot x_k) = (x_k) = x$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V6)} \quad \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \odot (x_k \oplus y_k) = (\lambda \odot (x_k \oplus y_k)) \\ &= (\lambda \odot x_k \oplus \lambda \odot y_k) = (\lambda \odot x_k) + (\lambda \odot y_k) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V7)} \quad (\lambda \oplus \mu) \cdot x &= ((\lambda \oplus \mu) \odot x_k) = ((\lambda \odot x_k) \oplus (\mu \odot x_k)) \\ &= (\lambda \odot x_k) + (\mu \odot x_k) = \lambda x + \mu x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V8)} \quad \lambda(\mu x) &= \lambda(\mu \odot x_k) = (\lambda \odot (\mu \odot x_k)) = ((\lambda \odot \mu) \odot x_k) \\ &= ((\lambda \mu) \odot x_k) = (\lambda \mu)x \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.3.20. $X, \mathbb{R}_G$ cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|_G : X \rightarrow \mathbb{R}_G$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_G$ için

$$(GN1) \quad \|x\|_G = 0_G = 1 \Leftrightarrow x = \theta_G$$

$$(GN2) \quad \|\lambda \odot x\|_G = |\lambda|_G \odot \|x\|_G$$

$$(GN3) \quad \|x \oplus y\|_G \leq_G \|x\|_G \oplus \|y\|_G$$

koşulları sağlanıyor ise $\|\cdot\|_G$ fonksiyonuna X üzerinde bir G -norm, $(X, \|\cdot\|_G)$ ikilisine de G -normlu uzay denir (Çakmak ve Başar, 2012b).

Tanım 2.3.21. $x = (x_k)$, $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\|_G \leq m$ olacak şekilde bir $m > 1$ geometrik reel sayısı varsa (x_k) dizisine bir G -sınırlı dizi denir.

Tanım 2.3.22. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere l_p^G dizi uzayı

$$\begin{aligned} l_p^G &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_G : G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} <_G \infty \right\} \\ &= \left\{ x = (e^{x_k}) : x_k \in \mathbb{R}, e^{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p} < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$1 \leq p < \infty$ ve $x = (x_k) \in l_p^G$ olmak üzere,

$$\|x\|_{G_p} = \left(G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{G_p} : l_p^G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l_p^G uzayı üzerinde bir G -normdur.

Tanım 2.3.23. l_{∞}^G dizi uzayı

$$\begin{aligned} l_{\infty}^G &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_G : G \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|_G <_G \infty \right\} \\ &= \left\{ x = (e^{x_k}) : x_k \in \mathbb{R}, e^{\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|} < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$$x = (x_k) \in l_\infty^G \text{ olmak üzere}$$

$$\|x\|_{G_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|_G$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{G_\infty}: l_\infty^G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l_∞^G üzerinde bir G -normdur.

Tanım 2.3.24. (Geometrik Yakınsak Dizi) $(X, \|\cdot\|_G)$ bir G -normlu uzay ve $x = (x_k) \in X$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $k > k_0$ olduğunda

$$\|x_k \ominus x\|_G <_G \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi x noktasına G -yakınsaktır denir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ veya $k \rightarrow \infty$ için $x_k \xrightarrow{G} x$ şeklinde gösterilir (Çakmak ve Başar, 2012b).

Teorem 2.3.5. $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında, G -yakınsak bir dizinin G -limiti tektir.

İspat. $k \rightarrow \infty$ iken $x_k \xrightarrow{G} x$ ve $x_k \xrightarrow{G} y$ olsun. O halde

$$1 \leq_G \|x \ominus y\|_G \leq_G \|x \ominus x_k\|_G \oplus \|x_k \ominus y\|_G$$

olup $k \rightarrow \infty$ iken G -limit alınırsa,

$$\|x \ominus y\|_G = 1$$

elde edilir. Buradan $x = y$ olup G -limiti tektir.

Teorem 2.3.6. $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında, G -yakınsak bir dizi G -sınırlıdır.

İspat. $x = (x_k)$, $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında, G -yakınsak bir dizi ve $x_k \xrightarrow{G} x$ olsun.

Her $\varepsilon >_G 1$ sayısına karşılık her $k > k_\varepsilon$ olduğunda

$$\|x_k \ominus x\|_G <_G \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak $\varepsilon = e$ alınırsa, her $k > k_0$ için

$$\|x_k\|_G \ominus \|x\|_G \leq_G \|x_k \ominus x\|_G <_G e$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k > k_0$ için

$$\|x_k\|_G <_G e \oplus \|x\|_G$$

olur. $a = {}_G\text{maks} \{ \|x_1\|_G, \|x_2\|_G, \dots, \|x_{k_0}\|_G, e \oplus \|x\|_G \}$ denilirse her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_k\|_G <_G a$$

olup buradan (x_k) , G -sınırlıdır.

Not 2.3.1. G -sınırlı bir dizinin G -yakınsak olması gerekmez. Örneğin, $x_k = e^{(-1)^k}$

G -sınırlı geometrik reel sayı dizisi göz önüne alınsın. $k \rightarrow \infty$ iken $x_k \xrightarrow{G} a$ olsun. Özel olarak $\varepsilon = e$ sayısı için her $k > m$ olduğunda

$$|x_k \ominus a|_G <_G e$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $k > m$ için

$$\exp\{|\ln x_k - \ln a|\} <_G e$$

$$|\ln x_k - \ln a| < \ln e$$

$$\ln a - \ln e < \ln x_k < \ln e + \ln a$$

$$\ln \frac{a}{e} < \ln x_k < \ln e \cdot a$$

$$\frac{a}{e} < x_k < e \cdot a$$

$$\frac{a}{e} < e^{(-1)^k} < e \cdot a$$

bulunur. Böylece

$$\frac{a}{e} < e^{(-1)^{2m}} < e \cdot a$$

ve

$$\frac{a}{e} < e^{(-1)^{2m-1}} < e \cdot a$$

$$\frac{a}{e} < e < e \cdot a$$

ve

$$\frac{a}{e} < e^{-1} < e \cdot a$$

$$\frac{a}{e^2} < 1 < a$$

ve

$$a < 1 < e^2 \cdot a$$

$$1 < a$$

ve

$$a < 1$$

olup ikisi aynı anda sağlanamayacağından kabul yanlıştır. O halde $x = (x_k)$ dizisi G -yakınsak değildir (Boruah, 2017).

Teorem 2.3.7. $\mathbb{R}_G$ kümesinde (x_k) ve (y_k) G -yakınsak dizileri ile bir $c \in \mathbb{R}_G$ sayısı verilsin. Eğer ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ve ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i) ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} (c \odot x_k) = c \odot x$
- ii) ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \oplus y_k) = {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \oplus {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x \oplus y$
- iii) ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \odot y_k) = {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \odot {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x \odot y$
- iv) $x \neq 1$ ise her $k > k_0$ için $|x_k|_G >_G \frac{|x|_G}{e^2} G$ olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$v) \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } y_k \neq 1 \text{ ve } y \neq 1 \text{ ise } {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{x_k}{y_k} G \right) = \frac{{}_G\lim_{k \rightarrow \infty} x_k}{{}_G\lim_{k \rightarrow \infty} y_k} G = \frac{x}{y} G$$

$$vi) \quad {}_G\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|_G = |x|_G$$

(Erdoğan, 2016; Boruah, 2017).

Tanım 2.3.25. (Geometrik Cauchy Dizisi) $(X, \|\cdot\|_G)$ bir G -normlu uzay ve $x = (x_k) \in X$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $k, m > k_0$ olduğunda

$$\|x_k \ominus x_m\|_G <_G \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine bir G -Cauchy dizisi denir (Çakmak ve Başar, 2012b).

Teorem 2.3.8. $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında, her G -yakınsak dizi bir G -Cauchy dizisidir.

İspat. $x = (x_k)$, $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında bir G -yakınsak dizi ve $x_k \xrightarrow{G} x$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $k > k_0$ olduğunda

$$\|x_k \ominus x\|_G <_G \frac{\varepsilon}{e^2} G$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde her $k, m > k_0$ için

$$\begin{aligned} \|x_k \ominus x_m\|_G &\leq_G \|x_k \ominus x\|_G \oplus \|x \ominus x_m\|_G \\ &<_G \frac{\varepsilon}{e^2} G \oplus \frac{\varepsilon}{e^2} G \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x = (x_k)$ bir G -Cauchy dizisidir.

Tanım 2.3.26. $(X, \|\cdot\|_G)$ G -normlu uzayında her G -Cauchy dizisi bu uzayda bir elemana G -yakınsıyor ise bu uzaya tam G -normlu uzay veya G -Banach uzayı denir.

Teorem 2.3.9. $(\mathbb{R}_G, |\cdot|_G)$ uzayı bir G -Banach uzayıdır.

İspat. $(\mathbb{R}_G, |\cdot|_G)$, G -normlu uzayında herhangi bir $x = (x_k)$ G -Cauchy dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $k, m > k_0$ olduğunda

$$|x_k \ominus x_m|_G <_G \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k, m > k_0$ için

$$|\ln x_k - \ln x_m| < \ln \varepsilon$$

olur. Bu ise $(\ln x_k)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $\ln x_k \rightarrow a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Dolayısıyla her $k > k_1$ için

$$|\ln x_k - a| < \ln \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $a \in \mathbb{R}$ olduğundan $e^a \in \mathbb{R}_G$ olur. Buradan her $\varepsilon >_G 1$ sayısı ve her $k > k_1$ için

$$\begin{aligned} |x_k \ominus e^a|_G &= \exp\{|\ln x_k - \ln e^a|\} \\ &= \exp\{|\ln x_k - a|\} \\ &<_G \exp(\ln \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ${}_G \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = e^a$ olduğunu gösterir. O halde $(\mathbb{R}_G, |\cdot|_G)$ uzayı bir G -Banach uzayıdır.

Teorem 2.3.10. $\mathbb{R}_G$ kümesinde geometrik yakınsak (x_k) dizisi verilsin ve ${}_G \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ olsun. (x_k) dizisinin her (x_{k_n}) alt dizisi de x elemanına G -yakınsar.

Tanım 2.3.27. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k) \in \omega_G$ olmak üzere bir x_k geometrik reel sayı dizisi verildiğinde

$$\begin{aligned}
x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k \oplus \dots &= G \sum_{k=1}^{\infty} x_k \\
&= e^{[\ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_k) + \dots]} \\
&= e^{[\ln x_1 + \ln x_2 + \dots]} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} x_k
\end{aligned}$$

sonsuz G -toplamına geometrik reel sayı serisi veya G -seri denir. Burada x_k sayılarına G -serinin terimleri denir.

Tanım 2.3.28. $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bir geometrik seri olmak üzere, genel terimi $S_n = G \sum_{k=1}^n x_k$ olan (S_n) dizisine $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin G -kısmi toplamlar dizisi denir. Yine $S_n = G \sum_{k=1}^n x_k$ G -toplamına ise geometrik serinin geometrik n . kısmi toplamı denir (Duyar ve Erdoğan, 2016).

Tanım 2.3.29. $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin (S_n) kısmi toplamlar dizisi G -yakınsaksa, bu serinin G -yakınsak olduğu söylenir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ise $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$ yazılır. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limiti yoksa veya $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ ise $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin ıraksak olduğu söylenir.

$G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi ve $i \geq 2$ doğal sayısı verildiğinde $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k = G \sum_{k=1}^{i-1} x_k \oplus G \sum_{k=i}^{\infty} x_k$ olur. Böylece $G \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $G \sum_{k=i}^{\infty} x_k$ serisinin yakınsak olmasıdır. Yani baştan sonlu tane terimin çıkarılması veya eklenmesi serinin karakterini değiştirmez (Duyar ve Erdoğan, 2016).

Tanım 3.2.30. $I, \mathbb{R}_G$ üzerinde bir aralık olmak üzere $\lambda \in [1, e]$ için,

$$f(\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y) \leq_G \lambda \odot f(x) \oplus (e \ominus \lambda) \odot f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna G -konveks fonksiyon denir (Güngör, 2020).

3. GEOMETRİK CESÀRO DİZİ UZAYLARI

Tezin orijinal kısmını oluşturan bu bölümde geometrik kalkülüse göre bazı Cesàro dizi uzayları tanımlanmış ve tanımlanan bu uzayların temel özellikleri incelenmiştir.

3.1. Ces_p^G Geometrik Cesàro Dizi Uzayları

Bu kısımda geometrik kalkülüste, Ces_p^G dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca p reel sayısının durumuna göre Ces_p^G uzayları arasında kapsamalar ve l_p^G geometrik Lebesgue dizi uzayları ile aralarındaki ilişki irdelenmiştir.

Tanım 3.1.1. $x = (x_k)$ geometrik reel sayı dizisi ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ces_p^G dizi uzayı

$$Ces_p^G = \left\{ x = (x_k) \in \omega_G : \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} <_G \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2. $x = (x_k)$ geometrik reel sayı dizisi olsun. Ces_{∞}^G dizi uzayı

$$Ces_{\infty}^G = \left\{ x = (x_k) \in \omega_G : G \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G <_G \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.1. $p \in [1, \infty)$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}_G$ için

$$|a \oplus b|_G^{p_G} \leq_G (e^2)^{p_G} \odot (|a|_G^{p_G} \oplus |b|_G^{p_G})$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. a ve b geometrik reel sayıları verilsin. Bu durumda

$$|a \oplus b|_G \leq_G |a|_G \oplus |b|_G \leq_G e^2 \odot G \max\{|a|_G, |b|_G\}$$

olur. Her iki tarafın p_G . kuvveti alınır

$$\begin{aligned} |a \oplus b|_G^{p_G} &\leq_G (e^2)^{p_G} \odot ({}_G \text{maks}\{|a|_G, |b|_G\})^{p_G} \\ &= (e^2)^{p_G} \odot {}_G \text{maks}\{|a|_G^{p_G}, |b|_G^{p_G}\} \\ &\leq_G (e^2)^{p_G} \odot (|a|_G^{p_G} + |b|_G^{p_G}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.1.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ces_p^G ve Ces_∞^G uzayları, geometrik aritmetiğin

$\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre ω_G uzayının birer alt vektör uzaylarıdır.

İspat. Herhangi $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in Ces_p^G$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_G$ verilsin. Üçgen eşitsizliği ve Önerme 3.1.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &{}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \right)^{p_G} \\ &\leq_G {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus |y_k|_G \right)^{p_G} \\ &\leq_G {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \\ &\leq_G {}_G \sum_{n=1}^{\infty} (e^2)^{p_G} \odot \left[\left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \right] \\ &= (e^2)^{p_G} \odot \left[{}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \oplus {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Ces_p^G uzayının tanımı gereğince ${}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} <_G \infty$ ve ${}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} <_G \infty$ olacağından,

$${}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \right)^{p_G} <_G \infty$$

olup $x \oplus y \in Ces_p^G$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda \odot x_k|_G \right)^{p_G} &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda|_G \odot |x_k|_G \right)^{p_G} \\
&= |\lambda|_G^{p_G} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G}
\end{aligned}$$

yazılır. Ces_p^G uzayının tanımı gereğince $G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} <_G \infty$ olacağından,

$$G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda \odot x_k|_G \right)^{p_G} <_G \infty$$

olup $\lambda \odot x \in Ces_p^G$ elde edilir. Bu ise Ces_p^G uzayının, ω_G uzayının alt vektör uzayı olduğunu gösterir. Benzer şekilde Ces_{∞}^G uzayının ω_G uzayının alt vektör uzayı olduğu gösterilir.

Sonuç 3.1.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ces_p^G ve Ces_{∞}^G dizi uzayları, $\mathbb{R}_G$ cismi üzerinde birer vektör uzayıdır.

Teorem 3.1.2. $1 \leq p < \infty$ ve $x = (x_k) \in Ces_p^G$ olmak üzere, Ces_p^G uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|x\|_p^G = \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G}$$

G -normuna göre bir G -normlu uzayıdır.

İspat. Herhangi $x = (x_k), y = (y_k) \in Ces_p^G$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_G$ verilsin.

$$(\mathbf{GN1}) \quad \|x\|_p^G = 1 \Leftrightarrow \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} = 1$$

$$\Leftrightarrow G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow G \sum_{k=1}^n |x_k|_G = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow |x_k|_G = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x_k = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

olur. Bu ise $\|x\|_p^G = 1$ dir ancak ve ancak $x = 1$ olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned} \text{(GN2)} \quad \|\lambda \odot x\|_p^G &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda \odot x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\ &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda|_G \odot |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\ &= |\lambda|_G \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\ &= |\lambda|_G \odot \|x\|_p^G \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise $\|\lambda \odot x\|_p^G = |\lambda|_G \odot \|x\|_p^G$ olduğunu ispatlar.

(GN3) Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x \oplus y\|_p^G &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\ &\leq_G \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \end{aligned}$$

bulunur. Burada geometrik kalkülüse göre Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G}$$

$$\leq_G \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \oplus \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G}$$

olur. Böylece

$$\|x \oplus y\|_p^G \leq_G \|x\|_p^G \oplus \|y\|_p^G$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3. Ces_{∞}^G uzayı, üzerinde tanımlanan

$$\|x\|_{\infty}^G = {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G$$

G -normuna göre bir G -normlu uzaydır.

İspat. Herhangi $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in Ces_{\infty}^G$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_G$ verilsin.

$$(GN1) \quad \|x\|_{\infty}^G = 1 \Leftrightarrow {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow G \sum_{k=1}^n |x_k|_G = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow |x_k|_G = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x_k = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

olur. Bu ise $\|x\|_{\infty}^G = 0_G = 1$ dir ancak ve ancak $x = 0_G = 1$ olduğunu gösterir.

$$(GN2) \quad \|\lambda \odot x\|_{\infty}^G = {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda \odot x_k|_G$$

$$= {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\lambda|_G \odot |x_k|_G$$

$$= |\lambda|_G \odot \left({}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)$$

$$= |\lambda|_G \odot \|x\|_G^G$$

yazılır. Bu ise $\|\lambda \odot x\|_G^G = |\lambda|_G \odot \|x\|_G^G$ olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned} \text{(GN3)} \quad \|x \oplus y\|_G^G &= {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \\ &\leq {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n (|x_k|_G \oplus |y_k|_G) \\ &\leq {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus {}_G\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|x \oplus y\|_G^G \leq \|x\|_G^G \oplus \|y\|_G^G$$

bulunur.

Teorem 3.1.4. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ces_p^G uzayı $\|\cdot\|_p^G, G$ -normu ile bir G -Banach uzayıdır.

İspat. $x^r = (x_k^{(r)}) = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_k^r, \dots)$ olmak üzere (x^r) dizisi, Ces_p^G uzayında bir G -Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $r, m > r_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\|x^{(r)} \ominus x^{(m)}\|_p^G \\ &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} <_G \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (1) ifadesinden her $N \in \mathbb{N}$ için,

$$G \sum_{n=1}^N \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G \right)^{p_G} <_G \varepsilon^{p_G}$$

olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $r, m > r_0$ için,

$$\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G <_G \varepsilon \quad (2)$$

yazılır.

$$\rho(x^{(r)})_n = \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (2) ifadesinden

$$\begin{aligned} \left| \rho(x^{(r)})_n - \rho(x^{(m)})_n \right|_G &= \left| \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)} \ominus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(m)} \right|_G \\ &= \left| \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n (x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}) \right|_G \\ &\leq_G \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G \\ &<_G \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve her $r, m > r_0$ için,

$$\left| \rho(x^{(r)})_n - \rho(x^{(m)})_n \right|_G <_G \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $\rho(x^{(r)})_n$ dizisi $\mathbb{R}_G$ uzayında bir G -Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}_G$ tam olduğundan $\rho(x^{(r)})_n$ dizisi G -yakınsaktır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x^{(r)})_n \xrightarrow{G} b_n$ olacak şekilde bir $b_n \in \mathbb{R}_G$ vardır. Dolayısıyla

$${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)} = b_n$$

şeklinde yazılır. Her $k \in \mathbb{N}$ için ${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} x_k^{(r)}$ limiti mevcuttur ve bu limit $b_0 = 1$ olmak üzere

$$e^k \odot b_k \ominus (e^k \ominus e) \odot b_{k-1}$$

ifadesine eşittir. $x = (x_k)$ dizisi

$$(x_k) = e^k \odot b_k \ominus (e^k \ominus e) \odot b_{k-1}$$

şeklinde tanımlanırsa, her $k \in \mathbb{N}$ için

$${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} x_k^{(r)} = x_k$$

olur. (1) ifadesinde r sabit tutulur ve $m \rightarrow \infty$ için G -limit alınır ve her $r > r_0$ için

$$\|x^{(r)} \ominus x\|_p^G <_G \varepsilon$$

elde edilir. Buradan (x^r) dizisinin Ces_p^G uzayında x noktasına yakınsadığı görülür. Ayrıca $x^{(r)} \ominus x \in Ces_p^G$ olduğundan $x = x^{(r)} \ominus (x^{(r)} \ominus x) \in Ces_p^G$ bulunur. Böylece Ces_p^G Banach uzayıdır.

Teorem 3.1.5. Ces_∞^G uzayı $\|\cdot\|_\infty^G$, G -normu ile bir G -Banach uzayıdır.

İspat. $x^r = (x_k^{(r)}) = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_k^r, \dots)$ olmak üzere (x^r) dizisi, Ces_∞^G uzayında bir G -Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı için her $r, m > r_0$ olduğunda

$$\|x^{(r)} \ominus x^{(m)}\|_\infty^G = {}_G \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G <_G \varepsilon \quad (3)$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (3) ifadesinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G <_G \varepsilon \quad (4)$$

olur.

$$\rho(x^{(r)})_n = \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (4) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\left| \rho(x^{(r)})_n - \rho(x^{(m)})_n \right|_G &= \left| \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)} \ominus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(m)} \right|_G \\
&= \left| \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n (x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}) \right|_G \\
&\leq_G \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k^{(m)}|_G \\
&<_G \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \rho(x^{(r)})_n - \rho(x^{(m)})_n \right|_G <_G \varepsilon$$

yazılır. Buradan $\rho(x^{(r)})_n$ dizisi $\mathbb{R}_G$ de bir G -Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}_G$ tam olduğundan $\rho(x^{(r)})_n$ dizisi G -yakınsaktır. O halde $r \rightarrow \infty$ iken $\rho(x^{(r)})_n \xrightarrow{G} b_n$ olacak şekilde bir $b_n \in \mathbb{R}_G$ vardır. Dolayısıyla

$${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k^{(r)} = b_n$$

şeklinde yazılır. Her $k \in \mathbb{N}$ için ${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} x_k^{(r)}$ limiti mevcuttur ve bu limit $b_0 = 1$ olmak üzere

$$e^k \odot b_k \ominus (e^k \ominus e) \odot b_{k-1}$$

ifadesine eşittir. $x = (x_k)$ dizisi

$$(x_k) = e^k \odot b_k \ominus (e^k \ominus e) \odot b_{k-1}$$

şeklinde tanımlanırsa, her $k \in \mathbb{N}$ için

$${}_G \lim_{r \rightarrow \infty} x_k^{(r)} = x_k$$

olur. (3) ifadesinde r sabit tutulur ve $m \rightarrow \infty$ için G -limit alınırsa her $r > r_0$ için

$$\|x^{(r)} \ominus x\|_{\infty}^G = {}_G \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x_k|_G <_G \varepsilon \quad (5)$$

sonucuna varılır ve bu Ces_{∞}^G uzayında $x^{(r)} \xrightarrow{G} x$ olması demektir. Bu durumda (5) ifadesinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G &\leq_G \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)} \ominus x|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k^{(r)}|_G \\ &\leq_G \varepsilon \oplus \|x^{(r)}\|_{\infty}^G \end{aligned}$$

olup $x = (x_k) \in Ces_{\infty}^G$ elde edilir. Böylece Ces_{∞}^G uzayı G -Banach uzayıdır.

Önerme 3.1.2. (Geometrik Hölder Eşitsizliği) $x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbb{R}_G^+$ ve $1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan p ve q reel sayıları verilsin. O halde

$${}_G \sum_{k=1}^n (x_k \odot y_k) \leq_G \left({}_G \sum_{k=1}^n (x_k)^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \odot \left({}_G \sum_{k=1}^n (y_k)^{q_G} \right)^{(1/q)_G}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Güngör, 2020).

İspat. $x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbb{R}_G^+$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} {}_G \sum_{k=1}^n (x_k \odot y_k) &= {}_G \sum_{k=1}^n e^{\ln(x_k) \cdot \ln(y_k)} \\ &= e^{[\ln(e^{\ln(x_1) \cdot \ln(y_1)}) + \ln(e^{\ln(x_2) \cdot \ln(y_2)}) + \dots + \ln(e^{\ln(x_n) \cdot \ln(y_n)})]} \\ &= e^{[(\ln(x_1) \cdot \ln(y_1)) + (\ln(x_2) \cdot \ln(y_2)) + \dots + (\ln(x_n) \cdot \ln(y_n))]} \\ &= e^{\sum_{k=1}^n \ln(x_k) \cdot \ln(y_k)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $\ln$ fonksiyonu altındaki görüntüsü alınır ve $1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan p ve q reel sayıları için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \ln \left(G \sum_{k=1}^n (x_k \odot y_k) \right) &= \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \cdot \ln(y_k) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\ln(x_k))^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (\ln(y_k))^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (6)$$

bulunur. Böylece (6) ifadesinin her iki tarafının $\exp$ fonksiyonu altında görüntüsü alınarak,

$$\begin{aligned} G \sum_{k=1}^n (x_k \odot y_k) &\leq_G e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n (\ln(x_k))^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (\ln(y_k))^q \right)^{1/q} \right)} \\ &= e^{\left(\ln e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n (\ln(x_k))^p \right)^{1/p} \right)} \cdot \ln e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n (\ln(y_k))^q \right)^{1/q} \right)} \right)} \\ &= e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n (\ln(x_k))^p \right)^{1/p} \right) \odot e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n (\ln(y_k))^q \right)^{1/q} \right)}} \\ &= e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n \left(\ln e^{\ln(x_k)} \right)^p \right)^{1/p} \right) \odot e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n \left(\ln e^{\ln(y_k)} \right)^q \right)^{1/q} \right)}} \\ &= e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n \ln(x_k^{p_G}) \right)^{1/p} \right) \odot e^{\left(\left(\sum_{k=1}^n \ln(y_k^{q_G}) \right)^{1/q} \right)}} \\ &= e^{\left(\left(\ln \left(e^{\left(\sum_{k=1}^n \ln(x_k^{p_G}) \right)} \right) \right)^{1/p} \right) \odot e^{\left(\left(\ln \left(e^{\left(\sum_{k=1}^n \ln(y_k^{q_G}) \right)} \right) \right)^{1/q} \right)}} \\ &= e^{\left(\ln \left(G \sum_{k=1}^n (x_k^{p_G}) \right) \right)^{1/p} \odot e^{\left(\ln \left(G \sum_{k=1}^n (y_k^{q_G}) \right) \right)^{1/q}}} \\ &= \left(G \sum_{k=1}^n x_k^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \odot \left(G \sum_{k=1}^n y_k^{q_G} \right)^{(1/q)_G} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen eşitsizlik gerçekleşir.

Not 3.1.1. Geometrik Hölder eşitsizliği Ces_p^G uzayında sağlanmaz. Aşağıda buna bir örnek verilecektir.

Örnek 3.1.1. $x = (x_k) = \left(\frac{e}{e^2} G, e^0, e^0, e^0, \dots\right) = \left(\frac{e}{e^2} G, 1, 1, 1, \dots\right)$ geometrik reel sayı dizisi verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^G &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\
&= \left(\left(\frac{e}{e^2} G \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^2} G \odot \left(\frac{e}{e^2} G \oplus e^0 \right) \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^3} G \odot \left(\frac{e}{e^2} G \oplus e^0 \oplus e^0 \right) \right)^{p_G} \oplus \dots \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\
&= \left(\left(\frac{e}{e^2} G \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^4} G \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^6} G \right)^{p_G} \oplus \left(\frac{e}{e^8} G \right)^{p_G} \oplus \dots \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\
&= \left((e^{1/2})^{p_G} \oplus (e^{1/4})^{p_G} \oplus (e^{1/6})^{p_G} \oplus (e^{1/8})^{p_G} \oplus \dots \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\
&= \left(e^{(1/2)^p} \cdot e^{(1/4)^p} \cdot e^{(1/6)^p} \cdot e^{(1/8)^p} \cdot \dots \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \\
&= e^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{6}\right)^p + \left(\frac{1}{8}\right)^p \dots \right)^{\frac{1}{p}}} \\
&= e^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}}} \\
&= e^{\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \right)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $p > 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ serisi yakınsak olduğundan, $\|x\|_p^G < \infty$ olup, $x \in Ces_p^G$ olduğu görülür.

$1 < p, q < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan q reel sayısı ve

$$y = (y_k) = (e^1, e^0, e^0, \dots) = (e, 1, 1, \dots)$$

geometrik reel sayı dizisi göz önüne alınsın. Buradan;

$$\begin{aligned}
\|y\|_q^G &= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{q_G} \right)^{\left(\frac{1}{q}\right)_G} \\
&= \left(e^{q_G} \oplus (e^{1/2})^{q_G} \oplus (e^{1/3})^{q_G} \oplus \dots \right)^{\left(\frac{1}{q}\right)_G}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(e \cdot e^{(1/2)^q} \cdot e^{(1/3)^q} \cdot \dots \right)^{\left(\frac{1}{q}\right)_G} \\
&= e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^q\right)^{(1/q)}_G}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. $q = \frac{p}{p-1} > 1$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^q$ serisi yakınsak olup, buradan $y \in Ces_q^G$ bulunur. Fakat,

$$\begin{aligned}
\|x \odot y\|_1^G &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k \odot y_k|_G \right) \\
&= e^{1/2} \oplus e^{1/4} \oplus e^{1/6} \oplus \dots \\
&= e^{1/2} \cdot e^{1/4} \cdot e^{1/6} \cdot \dots \\
&= e^{(1/2)+(1/4)+(1/6)+\dots} \\
&= e^{\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)}
\end{aligned}$$

ifadesi dikkate alındığında $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksak olup, $\|x \odot y\|_1^G$ ifadesi sonlu değildir.

Bu sebeple

$$\|x \odot y\|_1^G >_G \|x\|_q^G \odot \|y\|_q^G$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu ise Ces_p^G uzayında geometrik Hölder eşitsizliğinin sağlanmadığı sonucu ortaya çıkarır.

l_p^G ve Ces_p^G dizi uzaylarının arasındaki ilişkiyi irdelemek için geometrik kalkülüste aşağıda yer alan eşitsizliklere ihtiyaç duyulmuştur.

Önerme 3.1.3. (Geometrik anlamda aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif geometrik reel sayıları için

$$\frac{x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n}{e^n} G \geq_G (x_1 \odot x_2 \odot \dots \odot x_n)^{\left(\frac{1}{n}\right)_G}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Geometrik aritmetiğin özellikleri ve klasik anlamda aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(x_1 \odot x_2 \odot \dots \odot x_n)^{\left(\frac{1}{n}\right)_G} &= \left(\left((x_1^{\ln x_2})^{\ln x_3} \right)^{\dots \ln x_n} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)_G} \\
&= \left(x_1^{\ln x_2 \cdot \ln x_3 \cdot \dots \cdot \ln x_n} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)_G} \\
&= \exp \left\{ \left([\ln x_1]^{\ln x_2 \cdot \ln x_3 \cdot \dots \cdot \ln x_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \\
&= \exp \left\{ (\ln x_1 \cdot \ln x_2 \cdot \ln x_3 \dots \ln x_n)^{\frac{1}{n}} \right\} \\
&\leq_G \exp \left\{ \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{n} \cdot \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \right\} \\
&= \exp \left\{ \ln \left((x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \right) \right\} \\
&= (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n)^{\frac{1}{\ln e^n}} \\
&= \frac{x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n}{e^n} G
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece istenen eşitsizlik gerçekleşir.

Teorem 3.1.6. (Geometrik Young Eşitsizliği) p ve q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif reel sayılar olsun. Eğer a ve b , $a, b \geq_G e$ koşulunu sağlayan geometrik reel sayılar ise

$$a \odot b \leq_G \frac{a^{p_G}}{e^p} G \oplus \frac{b^{q_G}}{e^q} G$$

dır.

İspat. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan $p = \frac{m+n}{m}$, $q = \frac{m+n}{n}$ reel sayıları ve

$$a = x^{(1/p)_G}, \quad b = y^{(1/q)_G}$$

olmak üzere a, b geometrik pozitif reel sayıları verilsin. Böylece geometrik anlamda aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\frac{a^{p_G}}{e^p} G \oplus \frac{b^{q_G}}{e^q} G &= \frac{x}{e^{\frac{m+n}{m}}} G \oplus \frac{y}{e^{\frac{m+n}{n}}} G \\
&= \frac{x \odot e^m \oplus y \odot e^n}{e^{m+n}} \\
&= \frac{\overbrace{x \oplus \cdots \oplus x}^m \oplus \overbrace{y \oplus \cdots \oplus y}^n}{e^{m+n}} \\
&\geq_G \left(\overbrace{x \odot \cdots \odot x}^{m \text{ defa}} \odot \overbrace{y \odot \cdots \odot y}^{n \text{ defa}} \right)^{\left(\frac{1}{m+n}\right)_G} \\
&= (x \odot \cdots \odot x)^{\left(\frac{1}{m+n}\right)_G} \odot (y \odot \cdots \odot y)^{\left(\frac{1}{m+n}\right)_G} \\
&= e^{\left[\ln(e^{(\ln x)^m})\right]^{\frac{1}{m+n}}} \odot e^{\left[\ln(e^{(\ln y)^n})\right]^{\frac{1}{m+n}}} \\
&= e^{((\ln x)^m)^{\frac{1}{m+n}}} \odot e^{((\ln y)^n)^{\frac{1}{m+n}}} \\
&= e^{(\ln x)^{\frac{m}{m+n}}} \odot e^{(\ln y)^{\frac{n}{m+n}}} \\
&= x^{\left(\frac{m}{m+n}\right)_G} \odot y^{\left(\frac{n}{m+n}\right)_G} \\
&= x^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} \odot y^{\left(\frac{1}{q}\right)_G} \\
&= a \odot b
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7. (Geometrik Hardy Eşitsizliği) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrik pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$${}_G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G} <_G \infty$$

olsun. O halde $p > 1$ olmak üzere

$${}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k \right)^{p_G} \leq_G \left(\frac{e^p}{e^{p-1}} G \right)^{p_G} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. $A_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ olmak üzere

$$\gamma_n = \frac{x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n}{e^n} G = \frac{A_n}{e^n} G$$

şeklinde alınsın. Buradan

$$A_n = e^n \odot \gamma_n$$

olur. Böylece

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{n-1} = e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{n-1} \oplus x_n = e^n \odot \gamma_n$$

ifadelerinden faydalanılarak

$$x_n = e^n \odot \gamma_n \ominus e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned} & \gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot x_n \\ &= \gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot (e^n \odot \gamma_n \ominus e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}) \\ &= \gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot e^n \odot \gamma_n \oplus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot e^{n-1} \odot \gamma_{n-1} \\ &= \gamma_n^{p_G} \ominus \left[\frac{e^{pn}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{p_G} \right] \oplus \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot \gamma_{n-1} \end{aligned} \quad (7)$$

eşitliği göz önüne alınsın. Geometrik Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot \gamma_{n-1} &\leq_G \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p-1}} G \odot \left(\frac{(\gamma_{n-1})^{p_G}}{e^p} G \oplus \frac{(\gamma_n^{(p-1)_G})^{q_G}}{e^q} G \right) \\ &= \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p-1} \odot e^p} G \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \oplus \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p-1} \odot e^q} G \odot \gamma_n^{p_G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{p(n-1)}}{e^{p(p-1)}} G \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \oplus \frac{e^{p(n-1)}}{e^{q(p-1)}} G \odot \gamma_n^{p_G} \\
&= \frac{e^{n-1}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \oplus e^{n-1} \odot \gamma_n^{p_G} \tag{8}
\end{aligned}$$

bulunur. (7) ve (8) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&\gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{(p-1)_G} \odot x_n \\
&\leq_G \gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^{pn}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_n^{p_G} \oplus \frac{e^{(n-1)}}{e^{p-1}} G \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \oplus e^{n-1} \odot \gamma_n^{p_G} \\
&= \frac{e^{p-1} \odot \gamma_n^{p_G} \ominus e^{p \cdot n} \odot \gamma_n^{p_G} \oplus e^{(n-1)} \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \oplus e^{n-1} \odot e^{p-1} \odot \gamma_n^{p_G}}{e^{p-1}} G \\
&= \frac{\gamma_n^{p_G} (e^{p-1} \ominus e^{pn} \oplus (e^{n-1} \odot e^{p-1})) \oplus e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}^{p_G}}{e^{p-1}} \\
&= \frac{e^{-n} \odot \gamma_n^{p_G} \oplus e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}^{p_G}}{e^{p-1}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
G \sum_{n=1}^N \gamma_n^{p_G} \ominus \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot G \sum_{n=1}^N \gamma_n^{(p-1)_G} \odot x_n &\leq_G \frac{e}{e^{p-1}} G \odot G \sum_{n=1}^N [e^{-n} \odot \gamma_n^{p_G} \oplus e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}^{p_G}] \\
&= \frac{e}{e^{p-1}} G \odot G \sum_{n=1}^N [e^{n-1} \odot \gamma_{n-1}^{p_G} \ominus e^n \odot \gamma_n^{p_G}] \\
&= \frac{e^0 \ominus e^N \odot \gamma_N^{p_G}}{e^{p-1}} G \\
&\leq_G e^0
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$G \sum_{n=1}^N \gamma_n^{p_G} \leq_G \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot G \sum_{n=1}^N \gamma_n^{(p-1)_G} \odot x_n$$

eşitsizliği bulunur. O halde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan p ve q pozitif reel sayıları için Geometrik Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} G \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_G} &\leq_G \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \left[\left(G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^{(p-1)_G})^{q_G} \right)^{(1/q)_G} \right] \\ &= \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_G} \right)^{(1/q)_G} \end{aligned}$$

yazılır. Bu takdirde

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_G} \right)^{(1-\frac{1}{q})_G} \leq_G \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

olup

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \leq_G \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

eşitsizliği elde edilir. $\gamma_n = \frac{x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n}{e^n} G$ olduğundan

$$G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n x_k \right)^{p_G} \leq_G \left(\frac{e^p}{e^{p-1}} G \right)^{p_G} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p_G}$$

yazılır ve bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.8. $p > 1$ için $l_p^G \subset Ces_p^G$ dir.

İspat. $x = (x_k) \in l_p^G$ olsun. Bu takdirde l_p^G uzayının tanımından

$$G \sum_{n=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} <_G \infty$$

olur. Geometrik Hardy eşitsizliğinden

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \leq_G \frac{e^p}{e^{p-1}} G \odot \left(G \sum_{n=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G} \right)^{(1/p)_G} <_G \infty$$

olacağından $x = (x_k) \in Ces_p^G$ elde edilir. Bu ise istenen kapsamayı verir.

Not 3.1.2. $p = 1$ için Teorem 3.1.8. gerçekleşmez yani $l_1^G \not\subset Ces_1^G$ dir. Bu kapsamının gerçekleşmediğine dair örneğe aşağıda yer verilmiştir.

Örnek 3.1.2. $x = (e^1, e^0, e^0, \dots) = (e, 1, 1, \dots)$ geometrik reel sayı dizisi göz önüne alınırsa,

$$G \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G = e$$

yani $\|x\|_1 <_G \infty$ olduğu görülür. Böylece $x \in l_1^G$ dir. Fakat

$$\begin{aligned} \|x\|_1^G &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right) \\ &= G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{e^n} G \\ &= e^{\frac{1}{1}} \oplus e^{\frac{1}{2}} \oplus e^{\frac{1}{3}} \oplus \dots \\ &= e^{\frac{1}{1}}, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, \dots \\ &= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

ifadesi dikkate alınırsa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{e^n} G$ ıraksaktır. Böylece $x \notin Ces_1^G$ olduğu görülür. Bu ise $l_1^G \not\subset Ces_1^G$ olduğunu gösterir.

Aşağıdaki verilen örnek ile l_{∞}^G uzayının, Ces_{∞}^G uzayının kesin alt uzayı olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3.1.3. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} e^n, & k = n^2 \\ e^0 = 1, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x \notin l_{\infty}^G$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $n^2 < N < (n+1)^2$

için

$$\begin{aligned}
1 &\leq_G y_N \\
&= \frac{e}{e^N} G \odot G \sum_{k=1}^N x_k \\
&= \frac{e}{e^N} G \odot G \sum_{k=1}^{n^2} x_k \\
&<_G \frac{e}{e^{n^2}} G \odot G \sum_{k=1}^{n^2} x_k \\
&= y_{n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
y_{n^2} &= \frac{e}{e^{n^2}} G \odot G \sum_{k=1}^{n^2} x_k \\
&= \frac{e}{e^{n^2}} G \odot G \sum_{k=1}^n e^k \\
&= \frac{e}{e^{n^2}} G \odot e^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \left(e^{\frac{1}{\ln e^{n^2}}} \right)^{\ln \left(e^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)} \\
&= \left(e^{\frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= e^{\frac{n+1}{2n}} \\
&\leq_G e
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $y \in l_\infty^G$ olduğunu gösterir. Böylece $x = (x_k)$ dizisi Ces_∞^G uzayına aittir.

Teorem 3.1.9. $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere $Ces_p^G \subset Ces_q^G$ kapsaması gerçekleşir.

İspat. $x = (x_k) \in Ces_p^G$ olsun. Bu takdirde Ces_p^G uzayının tanımından,

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p} \right)_G} <_G \infty$$

yazılır. Eğer

$$\rho_n(x) = \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G$$

şeklinde alınırsa Önerme 2.3.6 dan

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n(x))^{q_G} \right)^{\left(\frac{1}{q}\right)_G} \leq_G \left(G \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n(x))^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G}$$

bulunur. Böylece

$$\left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{q_G} \right)^{\left(\frac{1}{q}\right)_G} \leq_G \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)_G} <_G \infty$$

olup $x = (x_k) \in Ces_q^G$ olduğu görülür. Bu ise istenen kapsamayı verir.

3.2. $Ces^G(p)$ Geometrik Cesàro Dizi Uzayları

Bu kısımda geometrik kalkülüste, $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi olmak üzere $Ces^G(p)$ genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların temel özellikleri irdelenecektir. Ayrıca, $Ces^G(p)$ genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzayı üzerindeki G -modüler, G -modülerin özellikleri ve Luxemburg G -norm ile ilişkisi verilecektir.

İlk olarak geometrik kalkülüste ihtiyaç duyulan, modüler ve Luxemburg norm başta olmak üzere bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.2.2. X , $\mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\varrho : X \rightarrow [1, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa G -modüler adını alır:

- (i) $\varrho(x) = 1 \Leftrightarrow x = \theta_G$
- (ii) $|x|_G = e$ koşulunu sağlayan her $\alpha \in \mathbb{R}_G$ için $\varrho(\alpha \odot x) = \varrho(x)$
- (iii) $\alpha \oplus \beta = e$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq_G 1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\varrho(\alpha \odot x \oplus \beta \odot y) \leq_G \varrho(x) \oplus \varrho(y).$$

Ayrıca, ϱ G -modülleri

(iv) $\alpha \oplus \beta = e$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq_G 1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\varrho(\alpha \odot x \oplus \beta \odot y) \leq_G \alpha \odot \varrho(x) \oplus \beta \odot \varrho(y)$$

şartını sağlıyorsa G -konveks modüller olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.3. $X, \mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve ϱ, X uzayı üzerinde bir G -modüller olsun. Bu takdirde

$$X_\varrho = \left\{ x \in X : \varrho(e^\lambda \odot x) \xrightarrow{G} 1, e^\lambda \rightarrow 1^+ \right\}$$

şeklinde tanımlanan X_ϱ uzayına, G -modüller uzay denir.

Teorem 3.2.1. $X, \mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve ϱ bir G -konveks modüller ise

$$\|x\|_G = \inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \varrho\left(\frac{x}{e^\lambda} G\right) \leq_G e \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X_ϱ üzerinde bir G -norm tanımlanır ve bu G -norm, Luxemburg G -normu olarak adlandırılır.

İspat. (GN1) $x = \theta_G$ olsun. Bu durumda $\varrho\left(\frac{\theta_G}{e^\lambda} G\right) = 1$ olup, bu eşitlik her e^λ pozitif geometrik sayısı için sağlanacağından bu e^λ sayılarının oluşturduğu kümenin infimumu 1 yani $\|x\|_G = 1$ olur.

Tersine, $\|x\|_G = 1$ olsun. Ayrıca ϱ G -konveks modüller olduğundan $1 \leq_G \alpha \leq_G e$ koşulunu sağlayan her $\alpha \in \mathbb{R}_G$ için

$$\begin{aligned} \varrho(\alpha \odot x) &= \varrho(\alpha \odot x \oplus (e \ominus \alpha) \odot \theta_G) \\ &\leq_G \alpha \odot \varrho(x) \oplus (e \ominus \alpha) \odot \varrho(\theta_G) \\ &= \alpha \odot \varrho(x) \end{aligned}$$

yani,

$$\varrho(\alpha \odot x) \leq_G \alpha \odot \varrho(x)$$

dır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\varrho(x) = \varrho\left(e^n \odot \frac{1}{e^n} G \odot x\right) \leq_G \frac{1}{e^n} G \odot \varrho(e^n \odot x) = \frac{1}{e^n} G \odot \varrho\left(\frac{x}{\frac{1}{e^n} G}\right)$$

yazılır. Buradan $\varrho(x) = 1$ bulunur. Bu ise $x = \theta_G$ olduğunu gösterir.

(GN2) Herhangi bir $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}_G$ verilsin. $\alpha = 1$ ise $\|\alpha \odot x\|_G = |\alpha|_G \odot \|x\|_G$ olduğu açıktır.

$\alpha \in \mathbb{R}_G - \{1\}$ olsun. $\|\cdot\|_G$ fonksiyonu tanımı gereğince

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G &= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \varrho\left(\frac{\frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G}{e^\lambda} G\right) \leq_G e \right\} \\ &= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \varrho\left(\frac{x}{\frac{e^\lambda \odot |\alpha|_G}{\alpha} G} G\right) \leq_G e \right\} \end{aligned}$$

yazılır.

$\alpha >_G 1$ ise, bu takdirde $e^{\lambda_1} = \frac{e^\lambda \odot |\alpha|_G}{\alpha} G$ şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G &= {}_G\inf \left\{ \frac{e^{\lambda_1} \odot \alpha}{|\alpha|_G} G >_G 1 : \varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_1} G}\right) \leq_G e \right\} \\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|_G} G \odot {}_G\inf \left\{ e^{\lambda_1} >_G 1 : \varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_1} G}\right) \leq_G e \right\} \\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|_G} G \odot \|x\|_G \\ &= \|x\|_G \end{aligned} \tag{9}$$

bulunur.

$\alpha <_G 1$ ise, bu takdirde $e^{\lambda_2} = \frac{e^\lambda \odot |\alpha|_G}{1 \ominus \alpha} G$ şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G &= {}_G\inf \left\{ \frac{e^{\lambda_2} \odot (1 \ominus \alpha)}{|\alpha|_G} G >_G 1 : \varrho\left(\frac{(1 \ominus e) \odot x}{e^{\lambda_2} G}\right) \leq_G e \right\} \\ &= \frac{1 \ominus \alpha}{|\alpha|_G} G \odot {}_G\inf \left\{ e^{\lambda_2} >_G 1 : \varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_2} G}\right) \leq_G e \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 \ominus \alpha}{|\alpha|_G} \odot \|x\|_G \\
&= \|x\|_G
\end{aligned} \tag{10}$$

bulunur. Böylece (9) ve (10) ifadelerinden her $\alpha \in \mathbb{R}_G - \{1\}$ için

$$\left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G = \|x\|_G \tag{11}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G = {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \varrho \left(\frac{\alpha \odot x}{e^\lambda \odot |\alpha|_G} G \right) \leq_G e \right\}$$

olduğundan $e^{\lambda'} = e^\lambda \odot |\alpha|_G$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G &= {}_G\inf \left\{ \frac{e^{\lambda'}}{|\alpha|_G} G \odot \alpha >_G 1 : \varrho \left(\frac{\alpha \odot x}{e^{\lambda'}} G \right) \leq_G e \right\} \\
&= \frac{1}{|\alpha|_G} G \odot {}_G\inf \left\{ e^{\lambda'} >_G 1 : \varrho \left(\frac{\alpha \odot x}{e^{\lambda'}} G \right) \leq_G e \right\} \\
&= \frac{1}{|\alpha|_G} G \odot \|\alpha \odot x\|_G
\end{aligned}$$

yani

$$\left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G = \frac{1}{|\alpha|_G} G \odot \|\alpha \odot x\|_G \tag{12}$$

bulunur. (11) ve (12) ifadelerinden

$$\|x\|_G = \left\| \frac{\alpha \odot x}{|\alpha|_G} G \right\|_G = \frac{1}{|\alpha|_G} G \odot \|\alpha \odot x\|_G$$

olup, her $\alpha \in \mathbb{R}_G - \{1\}$ için

$$\|\alpha \odot x\|_G = |\alpha|_G \odot \|x\|_G$$

elde edilir.

(GN3) Herhangi $x, y \in X$ verilsin. Bu takdirde $\varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_1}}G\right) \leq_G e$, $\varrho\left(\frac{y}{e^{\lambda_2}}G\right) \leq_G e$ ve $\varrho\left(\frac{x \oplus y}{e^{\lambda_3}}G\right) \leq_G e$ eşitsizliklerini sağlayan e^{λ_1} , e^{λ_2} ve e^{λ_3} pozitif geometrik reel sayılarının oluşturduğu kümeler sırasıyla A , B ve C ile adlandırılın.

$$D = \{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2} : e^{\lambda_1} \in A \wedge e^{\lambda_2} \in B\}$$

şeklinde tanımlanırsa $D \subset C$ olur. Çünkü keyfi $e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}$ alınır, ϱ , G -konveks modüler olduğundan

$$\begin{aligned} \varrho\left(\frac{x \oplus y}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G\right) &= \varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \oplus \frac{y}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G\right) \\ &= \varrho\left(\frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \odot \frac{x}{e^{\lambda_1}}G \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \odot \frac{y}{e^{\lambda_2}}G\right) \\ &\leq_G \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \odot \varrho\left(\frac{x}{e^{\lambda_1}}G\right) \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \odot \varrho\left(\frac{y}{e^{\lambda_2}}G\right) \\ &\leq_G \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}}G \\ &= e \end{aligned}$$

bulunur. $D \subset C$ olduğundan ${}_G\inf C \leq_G {}_G\inf D = {}_G\inf A \oplus {}_G\inf B$ bulunur. O halde

$$\|x \oplus y\|_G \leq_G \|x\|_G \oplus \|y\|_G$$

elde edilir.

Tanım 3.2.4. $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi olsun.

$$\sigma(x) = {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G}$$

olmak üzere $Ces^G(p)$ dizi uzayı

$$Ces^G(p) = \{x = (x_k) \in \omega_G : \sigma(x) <_G \infty\}$$

yani

$$Ces^G(p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega_G : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} <_G \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.2. $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi olmak üzere $Ces^G(p)$ dizi uzayı, geometrik aritmetiğin $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre ω_G uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat. $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in Ces^G(p)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_G$ verilsin. $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \frac{p_n}{M}$ olarak alınırsa $\alpha_n \leq 1$ olur. Böylece Önerme 2.3.5 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sigma(x \oplus y) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k \oplus y_k|_G \right)^{(M\alpha_n)_G} \\ &\leq_G G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(M\alpha_n)_G} \\ &\leq_G G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(\alpha_n)_G} \oplus \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(\alpha_n)_G} \right)^{M_G} \end{aligned}$$

bulunur. $M \geq 1$ olduğundan Önerme 3.1.1 göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} \sigma(x \oplus y) &\leq_G G \sum_{n=1}^{\infty} (e^2)^{M_G} \odot \left[\left(\left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(\alpha_n)_G} \right)^{M_G} \oplus \left(\left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(\alpha_n)_G} \right)^{M_G} \right] \\ &= (e^2)^{M_G} \odot \left[G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \oplus G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \right] \\ &= (e^2)^{M_G} \odot [\sigma(x) \oplus \sigma(y)] \end{aligned}$$

yazılır. $Ces^G(p)$ uzayının tanımı gereğince $\sigma(x) <_G \infty$ ve $\sigma(y) <_G \infty$ olacağından,

$$\sigma(x \oplus y) <_G \infty$$

olup $x \oplus y \in Ces^G(p)$ elde edilir.

$L = {}_G \text{maks}\{e, |\lambda|_G^{M_G}\}$ olarak alınır,

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda \odot x) &= {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |\lambda \odot x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &= {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |\lambda|_G \odot |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &\leq {}_G |\lambda|_G^{(p_n)_G} \odot {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \\ &\leq {}_G L \odot {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \end{aligned}$$

bulunur. $Ces^G(p)$ uzayının tanımı gereğince $\sigma(x) <_G \infty$ olacağından,

$$\sigma(\lambda \odot x) <_G \infty$$

olup $\lambda \odot x \in Ces^G(p)$ elde edilir. Bu ise $Ces^G(p)$ uzayının, ω_G uzayının alt vektör uzayı olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.1. $Ces^G(p)$ dizi uzayı, $\mathbb{R}_G$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Şimdi, σ fonksiyonunun $Ces^G(p)$ uzayı üzerinde G -konveks modüler olduğunu göstermek için kullanılacak gerekli önermeye yer verilecektir.

Önerme 3.2.1. $p_n \geq 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $f: \mathbb{R}_G \rightarrow \mathbb{R}_G$, $t \rightarrow |t|_G^{(p_n)_G}$ fonksiyonu G -konveks fonksiyondur.

İspat. $\lambda \in [1, e]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y) &= |\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y|_G^{(p_n)_G} \\ &= \left| x^{\ln \lambda} \cdot y^{\ln(e^{1-\ln \lambda})} \right|_G^{(p_n)_G} \\ &= [\exp\{|\ln(x^{\ln \lambda} \cdot y^{(1-\ln \lambda)})|\}]^{(p_n)_G} \\ &= (\exp\{|\ln \lambda \cdot \ln x + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln y|\})^{(p_n)_G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{\left(\ln\left(e^{|\ln \lambda \cdot \ln x + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln y|}\right)\right)^{p_n}\right\} \\
&= \exp\{|\ln \lambda \cdot \ln x + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln y|^{p_n}\} \quad (13)
\end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. $\lambda \in [1, e]$ olduğundan $\ln \lambda \in [0, 1]$ olup klasik kalkülüste $t \rightarrow |t|^{p_n}$ fonksiyonunun konveksliğinden faydalanılarak

$$|\ln \lambda \cdot \ln x + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln y|^{p_n} \leq \ln \lambda \cdot |\ln x|^{p_n} + (1 - \ln \lambda) \cdot |\ln y|^{p_n} \quad (14)$$

bulunur. Böylece (13) ve (14) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
f(\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y) &\leq_G \exp\{\ln \lambda \cdot |\ln x|^{p_n} + (1 - \ln \lambda) \cdot |\ln y|^{p_n}\} \\
&= \exp\{\ln \lambda \cdot \ln e^{|\ln x|^{p_n}} + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln e^{|\ln y|^{p_n}}\} \\
&= \exp\{\ln \lambda \cdot \ln e^{|\ln x|_G^{p_n}} + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln e^{|\ln y|_G^{p_n}}\} \\
&= \exp\{\ln \lambda \cdot \ln |x|_G^{(p_n)_G} + (1 - \ln \lambda) \cdot \ln |y|_G^{(p_n)_G}\} \\
&= \exp\left\{\ln \left\{e^{\ln \lambda \cdot \ln |x|_G^{(p_n)_G}}\right\} + \ln \left\{e^{\ln e \cdot (\ln e - \ln \lambda) \cdot \ln |y|_G^{(p_n)_G}}\right\}\right\} \\
&= \lambda \odot |x|_G^{(p_n)_G} \oplus (e \ominus \lambda) \odot |y|_G^{(p_n)_G}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. $\sigma, Ces^G(p)$ uzayı üzerinde G -konveks modülerdir.

İspat. $x, y \in Ces^G(p)$ verilsin.

(i) $\sigma(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1,$

(ii) $|\alpha|_G = e$ koşulunu sağlayan her $\alpha \in \mathbb{R}_G$ için,

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha \odot x) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\alpha \odot x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|_G^{(p_n)_G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= \sigma(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\sigma(\alpha \odot x) = \sigma(x)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_G$ ve $\alpha, \beta \geq_G 1$ için $\alpha \oplus \beta = e$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $t \rightarrow |t|_G^{(p_n)_G}$ geometrik konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha \odot x \oplus \beta \odot y) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |\alpha \odot x_k \oplus \beta \odot y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &\leq_G G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot \alpha \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot \beta \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right) \oplus \beta \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right) \right)^{(p_n)_G} \\ &\leq_G G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \oplus \beta \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \right) \\ &= \alpha \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \oplus \beta \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |y_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\ &= \alpha \odot \sigma(x) \oplus \beta \odot \sigma(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece σ , $Ces^G(p)$ uzayı üzerinde G -konveks modülerdir.

Önerme 3.2.2. $p = (p_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ koşulunu sağlayan sınırlı pozitif reel sayıların dizisi ve $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ olsun. $Ces^G(p)$ uzayı üzerinde tanımlı σ , G -modüleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $1 <_G a <_G e$ ise $a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a} G\right) \leq_G \sigma(x)$ ve $\sigma(a \odot x) \leq_G a \odot \sigma(x)$
- (ii) $a >_G e$ ise $\sigma(x) \leq_G a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a} G\right)$
- (iii) $a \geq_G e$ ise $\sigma(x) \leq_G a \odot \sigma(x) \leq_G \sigma(a \odot x)$.

İspat.

- (i) $1 <_G a <_G e$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{a \odot x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} |a|_G^{(p_n)G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} a^{(p_n)G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G} \\
&\geq_G G \sum_{n=1}^{\infty} a^{M_G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= a^{M_G} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a} G\right)
\end{aligned}$$

yazılır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{(p_n)G} \leq_G a$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sigma(a \odot x) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |a \odot x_k|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} a^{(p_n)G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)G} \\
&\leq_G a \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= a \odot \sigma(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $a >_G e$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} a^{(p_n)G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)G}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq_G a^{M_G} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{a} G \right|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= a^{M_G} \odot \sigma \left(\frac{x}{a} G \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $a \geq_G e$ olsun. Bu durumda σ , G -konveks modüler olduğundan

$$\sigma(x) \leq_G a \odot \sigma(x)$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sigma(a \odot x) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |a \odot x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} |a|_G^{(p_n)_G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= G \sum_{n=1}^{\infty} a^{(p_n)_G} \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&\geq_G a \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{(p_n)_G} \\
&= a \odot \sigma(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\sigma(x) \leq_G a \odot \sigma(x) \leq_G \sigma(a \odot x)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.4. $Ces^G(p)$ dizi uzayı

$$\begin{aligned}
\|x\|_G &= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \sigma \left(\frac{x}{e^\lambda} G \right) \leq_G e \right\} \\
&= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e \right\}
\end{aligned}$$

Luxemburg G -normu ile bir G -normlu uzaydır.

İspat.

(GN1) $x = 1$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k|_G = 1$ olup $G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} = 1$ eşitliği her e^λ pozitif geometrik sayısı için sağlanacağından bu e^λ sayılarının oluşturduğu kümenin infimumu 1 yani $\|x\|_G = 1$ olur.

Tersine, $\|x\|_G = 1$ olsun. Ayrıca $1 \leq_G \alpha \leq_G e$ koşulunu sağlayan her $\alpha \in \mathbb{R}_G$ için $\sigma(\alpha \odot x) \leq_G \alpha \odot \sigma(x)$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{e^m \odot \frac{1}{e^m} G \odot |x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} \\ &\leq_G \frac{1}{e^m} G \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{e^m \odot |x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} \\ &= \frac{1}{e^m} G \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{\frac{e^\lambda}{e^m} G} G \right)^{(p_n)_G} \end{aligned}$$

olup buradan $\sigma(x) = G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} = 1$ bulunur. Bu ise $x = 1$ olduğunu gösterir.

(GN2) Herhangi bir $x \in Ces^G(p)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}_G$ verilsin. $\alpha = 1$ ise $\|\alpha \odot x\|_G = |\alpha|_G \odot \|x\|_G$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha \in \mathbb{R}_G - \{1\}$ ise

$$\begin{aligned} \|\alpha \odot x\|_G &= \inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|\alpha \odot x_k|_G}{e^\lambda} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e \right\} \\ &= \inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{\frac{e^\lambda}{|\alpha|_G}} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e \right\} \end{aligned}$$

yazılır. $e^\lambda = e^{\lambda'} \odot |\alpha|_G$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
\|\alpha \odot x\|_G &= {}_G\inf \left\{ e^{\lambda'} \odot |\alpha|_G >_G 1 : {}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda'}} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e \right\} \\
&= |\alpha|_G \odot {}_G\inf \left\{ e^{\lambda'} >_G 1 : {}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda'}} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e \right\} \\
&= |\alpha|_G \odot \|x\|_G
\end{aligned}$$

elde edilir.

(GN3) Herhangi $x, y \in X$ verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
{}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1}} G \right)^{(p_n)_G} &\leq_G e, \\
{}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} &\leq_G e
\end{aligned}$$

ve

$${}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k \oplus y_k|_G}{e^{\lambda_3}} G \right)^{(p_n)_G} \leq_G e$$

eşitsizliklerini sağlayan e^{λ_1} , e^{λ_2} ve e^{λ_3} pozitif geometrik reel sayılarının oluşturduğu kümeler sırasıyla A , B ve C ile adlandırılınsın. $D = \{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2} : e^{\lambda_1} \in A \wedge e^{\lambda_2} \in B\}$ şeklinde tanımlanırsa $D \subset C$ olur. Çünkü keyfi $e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&{}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k \oplus y_k|_G}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} \\
&\leq_G {}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \oplus \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} \\
&= {}_G\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \odot \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1}} G \oplus \frac{e}{e^n} G \right. \\
&\quad \left. \odot G \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \odot \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \odot \frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1}} G \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \odot \frac{e}{e^n} G \right. \\
&\quad \left. \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} \\
&\leq {}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1}} G \right)^{(p_n)_G} \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \right. \\
&\quad \left. \odot \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} \right] \\
&= \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|_G}{e^{\lambda_1}} G \right)^{(p_n)_G} \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \\
&\quad \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|_G}{e^{\lambda_2}} G \right)^{(p_n)_G} \\
&\leq {}_G \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G \oplus \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1} \oplus e^{\lambda_2}} G = e
\end{aligned}$$

olur. $D \subset C$ olduğundan ${}_G \inf C \leq {}_G \inf D = {}_G \inf A \oplus {}_G \inf B$ bulunur. O halde

$$\|x \oplus y\|_G \leq {}_G \|x\|_G \oplus {}_G \|y\|_G$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p \geq 1$ ise $Ces^G(p)$ uzayı, Ces_p^G geometrik Cesàro dizi uzayını verir. Ayrıca, $Ces^G(p)$ uzayı üzerindeki Luxemburg G -normu, Ces_p^G uzayının üzerindeki olağan norma indirgenmiş olur yani

$$\|x\|_G = \|x\|_p^G = \left({}_G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{(1/p)_G}$$

dır.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\|x\|_G &= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{e^\lambda} \right|_G \right)^{p_G} \leq_G e \right\} \\
&= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \frac{1}{(e^\lambda)^{p_G}} G \odot G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \leq_G e \right\} \\
&= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \leq_G e \odot (e^\lambda)^{p_G} \right\} \\
&= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \leq_G ((e^\lambda)^{p_G})^{(1/p)_G} \right\} \\
&= {}_G\inf \left\{ e^\lambda >_G 1 : \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \leq_G e^\lambda \right\} \\
&= \left(G \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^n} G \odot G \sum_{k=1}^n |x_k|_G \right)^{p_G} \right)^{(1/p)_G} \\
&= \|x\|_p^G
\end{aligned}$$

elde edilir.

$Ces^G(p)$ uzayı üzerindeki σ , G -modülleri ile Luxemburg G -normu arasındaki ilişkiyi ifade eden önermeler verilecektir.

Önerme 3.2.3. Her $x \in Ces^G(p)$ için,

- (i) $\|x\|_G <_G e$ ise $\sigma(x) \leq_G \|x\|_G$
- (ii) $\|x\|_G >_G e$ ise $\sigma(x) \geq_G \|x\|_G$
- (iii) $\|x\|_G = e \Leftrightarrow \sigma(x) = e$
- (iv) $\|x\|_G <_G e \Leftrightarrow \sigma(x) <_G e$
- (v) $\|x\|_G >_G e \Leftrightarrow \sigma(x) >_G e$

dir.

İspat.

- (i) $1 <_G \varepsilon <_G e \ominus \|x\|_G$ olacak şekilde bir ε geometrik reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$\|x\|_G \oplus \varepsilon <_G e$$

yazılır. $\| \cdot \|_G$ tanımını gereği,

$$\|x\|_G \oplus \varepsilon >_G e^\lambda \text{ ve } \sigma\left(\frac{x}{e^\lambda} G\right) \leq_G e$$

olacak şekilde bir $e^\lambda >_G 1$ sayısı vardır. Önerme 3.2.2 (i) ve (iii) şıklarından,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\leq_G \sigma\left(\frac{(\|x\|_G \oplus \varepsilon)}{e^\lambda} G \odot x\right) \\ &= \sigma\left((\|x\|_G \oplus \varepsilon) \odot \frac{x}{e^\lambda} G\right) \\ &\leq_G (\|x\|_G \oplus \varepsilon) \odot \sigma\left(\frac{x}{e^\lambda} G\right) \\ &\leq_G e \odot (\|x\|_G \oplus \varepsilon) \\ &= \|x\|_G \oplus \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon \in (1, e \ominus \|x\|_G)$ için $\sigma(x) \leq_G \|x\|_G \oplus \varepsilon$ bulunur.

$$A = \{\|x\|_G \oplus \varepsilon : 1 <_G \varepsilon <_G e \ominus \|x\|_G\}$$

olarak alınırsa $\|x\|_G = \inf A$ olur. $\sigma(x)$, A kümesinin bir G -alt sınırı olduğundan

$$\sigma(x) \leq_G \|x\|_G$$

olduğu görülür.

(ii) $1 <_G \varepsilon <_G \frac{\|x\|_G \ominus e}{\|x\|_G} G$ olacak şekilde bir $\varepsilon >_G 1$ sayısı seçilsin. Bu durumda

$$\|x\|_G >_G \|x\|_G \odot (e \ominus \varepsilon) >_G e$$

eşitsizliği yazılır. Böylece $\| \cdot \|_G$, G -normunun tanımından ve Önerme 3.2.2 (i) şikkından,

$$\begin{aligned} e &<_G \sigma\left(\frac{x}{(e \ominus \varepsilon) \odot \|x\|_G} G\right) \\ &\leq_G \frac{e}{(e \ominus \varepsilon) \odot \|x\|_G} G \odot \sigma(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $\varepsilon \in \left(1, \frac{\|x\|_G \ominus e}{\|x\|_G}\right)$ için $(e \ominus \varepsilon) \odot \|x\|_G <_G \sigma(x)$ yazılır.

$$A = \left\{ (e \ominus \varepsilon) \odot \|x\|_G : 0_G = 1 <_G \varepsilon <_G \frac{\|x\|_G \ominus e}{\|x\|_G} \right\}$$

şeklinde alınırsa,

$$\|x\|_G = \sup A$$

olur. $\sigma(x)$, A kümesinin bir G -üst sınırı olduğundan, $\|x\|_G \leq_G \sigma(x)$ olduğu görülür.

(iii) $\|x\|_G = e$ olsun. $\|\cdot\|_G$ ifadesinin tanımından her $\varepsilon >_G 1$ sayısı için

$$(e \oplus \varepsilon) >_G e^\lambda >_G \|x\|_G \text{ ve } \sigma\left(\frac{x}{e^\lambda} G\right) \leq_G e$$

olacak şekilde bir $e^\lambda >_G 1$ sayısı vardır. $e^\lambda >_G e$ olduğundan Önerme 3.2.2 (ii) şıkkı gereğince,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\leq_G (e^\lambda)^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{e^\lambda} G\right) \\ &\leq_G (e^\lambda)^{M_G} \\ &<_G (e \oplus \varepsilon)^{M_G} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon >_G 1$ sayısı için $(\sigma(x))^{\left(\frac{1}{M}\right)_G} <_G e \oplus \varepsilon$ olup, bu ise $\sigma(x) \leq_G e$ olduğunu gösterir. $\sigma(x) <_G e$ olduğu kabul edilirse, $\sigma(x) <_G a^{M_G} <_G e$ olacak şekilde bir $a \in (1, e)$ sayısı bulunabilir. Önerme 3.2.2 (i) den

$$\begin{aligned} a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a} G\right) &\leq_G \sigma(x) \\ \sigma\left(\frac{x}{a} G\right) &\leq_G \frac{e}{a^{M_G}} G \odot \sigma(x) <_G e \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\|x\|_G \leq_G a <_G e$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\sigma(x) = e$ olmalıdır.

Tersine $\sigma(x) = e$ olsun. $\|\cdot\|_G$, Luxemburg G -normunun tanımından, $\|x\|_G \leq_G e$ olduğu sonucuna varılır. Eğer $\|x\|_G <_G e$ ise Önermenin (i) şıkkından

$$\sigma(x) \leq_G \|x\|_G <_G e$$

elde edilir. Bu ise, $\sigma(x) = e$ varsayımı ile çelişir. Bu nedenle $\|x\|_G = e$ olmalıdır.

(iv) Eğer $\|x\|_G <_G e$ ise Önermenin (i) şikkından

$$\sigma(x) \leq_G \|x\|_G <_G e$$

bulunur.

Tersine $\sigma(x) <_G e$ olsun. Bu durumda $\|x\|_G \geq_G e$ olduğu kabul edilsin. $\|x\|_G >_G e$ ise Önermenin (ii) şikkından $\sigma(x) \geq_G \|x\|_G$ olduğundan $\sigma(x) >_G e$ ve $\|x\|_G = e$ ise Önermenin (iii) şikkından $\sigma(x) = e$ elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir, o halde varsayım yanlış olup $\|x\|_G <_G e$ olmalıdır.

(v) Eğer $\|x\|_G >_G e$ ise Önermenin (ii) şikkından,

$$\sigma(x) \geq_G \|x\|_G >_G e$$

bulunur.

Tersine $\sigma(x) >_G e$ olsun. Bu durumda $\|x\|_G \leq_G e$ olduğu kabul edilsin. $\|x\|_G = e$ ise Önermenin (iii) şikkından $\sigma(x) = e$ ve $\|x\|_G <_G e$ ise Önermenin (iv) şikkından $\sigma(x) <_G e$ elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir, o halde varsayım yanlış olup $\|x\|_G >_G e$ olmalıdır.

Önerme 3.2.4. $x \in Ces^G(p)$ ve $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ olsun.

(i) $1 <_G a <_G e$ ve $\|x\|_G >_G a$ ise, bu takdirde $\sigma(x) >_G a^{M_G}$ dir.

(ii) $a \geq_G e$ ve $\|x\|_G <_G a$ ise, bu takdirde $\sigma(x) <_G a^{M_G}$ dir.

İspat.

(i) $1 <_G a <_G e$ ve $\|x\|_G >_G a$ olsun. O zaman

$$\left\| \frac{x}{a} G \right\|_G >_G e$$

yazılır. Önerme 3.2.3 (ii) şikkı gereğince

$$\sigma\left(\frac{x}{a} G\right) \geq_G \left\| \frac{x}{a} G \right\|_G >_G e$$

bulunur. $1 <_G a <_G e$ olduğundan Önerme 3.2.2 (i) şıkkı göz önüne alınırsa,

$$\sigma(x) \geq_G a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a}G\right) >_G a^{M_G} \odot e = a^{M_G}$$

elde edilir.

(ii) $a \geq_G e$ ve $\|x\|_G <_G a$ olsun. O zaman

$$\left\|\frac{x}{a}G\right\|_G <_G e$$

olur. Önerme 3.2.3 (i) şıkkından

$$\sigma\left(\frac{x}{a}G\right) \leq_G \left\|\frac{x}{a}G\right\|_G <_G e$$

bulunur. Buradan, $a = e$ ise

$$\sigma(x) <_G e = a^{M_G}$$

olduğu açıktır. Eğer $a >_G e$ ise Önerme 3.2.2 (ii) şıkkından

$$\sigma(x) \leq_G a^{M_G} \odot \sigma\left(\frac{x}{a}G\right) <_G a^{M_G} \odot e = a^{M_G}$$

olduğu görülür. Bu ise isteneni verir.

Önerme 3.2.5. (x_k) , $Ces^G(p)$ uzayında bir dizi olsun.

(i) ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_G = e$ ise ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x_k) = e$ dir.

(ii) ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x_k) = 1$ ise ${}_G\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_G = 1$ dir.

İspat.

(i) ${}_G\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_k\|_G = e$ olsun. $\varepsilon \in (1, e)$ sayısı verilsin. Bu durumda her $k > N$ için

$$(e \ominus \varepsilon) <_G \|x_k\|_G <_G (\varepsilon \oplus e)$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $1 <_G (e \ominus \varepsilon) <_G e$ ve $(e \ominus \varepsilon) <_G \|x_k\|_G$ olduğundan Önerme 3.2.4 (i) şıkkı gereğince her $k > k_0$ için

$$\sigma(x_k) >_G (e \ominus \varepsilon)^{M_G} \quad (15)$$

bulunur. $\varepsilon \oplus e >_G e$ ve $\|x_k\|_G <_G \varepsilon \oplus e$ olduğundan Önerme 3.2.4 (ii) şıkkı gereğince her $k > k_0$ için

$$\sigma(x_k) <_G (e \oplus \varepsilon)^{M_G} \quad (16)$$

olur. (15) ve (16) ifadelerinden her $k > k_0$ için

$$\begin{aligned} (e \ominus \varepsilon)^{M_G} <_G \sigma(x_k) <_G (e \oplus \varepsilon)^{M_G} \\ (e \ominus \varepsilon) <_G (\sigma(x_k))^{(1/M)_G} <_G (e \oplus \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $k \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x_k) \xrightarrow{G} e$ olduğunu gösterir.

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_G \neq 1$ olduğu varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{k_n}\|_G >_G \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon \in (1, e)$ sayısı ve (x_k) dizisinin bir (x_{k_n}) alt dizisi vardır. Önerme 3.2.4 (i) şıkkı gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(x_{k_n}) >_G \varepsilon^{M_G}$$

olduğu görülür. Bu ise $k \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x_k) \xrightarrow{G} 1$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.5. $Ces^G(p)$ uzayı bir G -Banach uzayıdır.

İspat. $(x^{(n)}) = (x_k^{(n)})$, $Ces^G(p)$ uzayında bir G -Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon \in (1, e)$ sayısı verilsin. Bu takdirde her $n, m > n_0$ olduğunda

$$\|x^{(n)} \ominus x^{(m)}\|_G <_G \varepsilon^{M_G}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Önerme 3.2.3 (i) şıkkı gereğince her $n, m > n_0$ için,

$$\sigma(x^{(n)} \ominus x^{(m)}) <_G \|x^{(n)} \ominus x^{(m)}\|_G <_G \varepsilon^{M_G}$$

ifadesi gerçekleşir ve

$${}_G \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{e}{e^N} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} \ominus x_k^{(m)}|_G \right)^{(p_k)_G} <_G \varepsilon^{M_G}$$

elde edilir. Her $N \in \mathbb{N}$ için,

$$\left(\frac{e}{e^N} {}_G \odot {}_G \sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} \ominus x_k^{(m)}|_G \right)^{(p_k)_G} <_G \varepsilon^{M_G}$$

olur ve böylece

$${}_G \sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} \ominus x_k^{(m)}|_G <_G \varepsilon \odot e^N = \varepsilon^N$$

yazılır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ ve her $n, m > n_o$ için,

$$|x_k^{(n)} \ominus x_k^{(m)}|_G <_G \varepsilon^k$$

bulunur. Buradan $(x_k^{(n)})$ dizisi $\mathbb{R}_G$ de bir G -Cauchy dizisidir. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$x_k^{(n)} \xrightarrow{G} x_k$ olacak şekilde bir $x_k \in \mathbb{R}_G$ vardır.

$x = (x_k)$ olmak üzere $x \in Ces^G(p)$ olduğu gösterilmelidir.

$$x|_r = (x_1, x_2, \dots, x_r, 1, 1, 1, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. Her $r \in \mathbb{N}$ ve her $n, m > n_o$ için,

$$\sigma \left((x^{(n)} \ominus x^{(m)})|_r \right) <_G \varepsilon^{M_G}$$

yazılır. $m \rightarrow \infty$ için $x_k^{(m)} \xrightarrow{G} x_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, r$ olduğundan $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sigma\left((x^{(n)} \ominus x^{(m)})|_r\right) \xrightarrow{G} \sigma\left((x^{(n)} \ominus x)|_r\right)$$

dır. Böylece her $n > n_o$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $\sigma\left((x^{(n)} \ominus x)|_r\right) <_G \varepsilon^{M_G}$ olur. Buradan her $n > n_o$ için

$$\sigma(x^{(n)} \ominus x) <_G \varepsilon^{M_G}$$

bulunur. Önerme 3.2.4 (i) şikkı gereğince her $n > n_o$ için

$$\|x^{(n)} \ominus x\|_G <_G \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $n \rightarrow \infty$ için $Ces^G(p)$ uzayında $x^{(n)} \xrightarrow{G} x$ olması demektir. $x^{(n)} \ominus x \in Ces^G(p)$ ve $Ces^G(p)$ vektör uzayı olduğundan

$$x = x^{(n)} \ominus (x^{(n)} \ominus x) \in Ces^G(p)$$

yazılır. Böylece $Ces^G(p)$ uzayı G -Banach uzayıdır.

4. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada Cesàro dizi uzaylarının tanımı geometrik kalkülüse aktarıldı ve tanımlanan geometrik Cesàro dizi uzaylarının geometrik kalkülüste vektör uzayı, normlu uzay, Banach uzayı oldukları gösterildi. Cesàro dizi uzayları arasındaki kapsamalar ve bunun yanı sıra l_p^G dizi uzayı ile aralarındaki kapsama ilişkileri irdelendi. Ayrıca geometrik kalkülüste genelleştirilmiş Cesàro dizi uzayları tanımlandı ve temel özellikleri gösterildi. Modüler ve Luxemburg norm kavramları geometrik kalkülüse aktarıldı. Genelleştirilmiş geometrik Cesàro dizi uzayları üzerindeki G -modüler tanımlandı, G -modülerin özellikleri ve Luxemburg G -norm ile ilişkisi incelendi.

Cesàro dizi uzayları ve geometrik kalkülüsün matematik, fizik ve mühendislik başta olmak üzere birçok dalda önemli bir yere sahip olması nedeniyle bu çalışmanın, bahsedilen alanlarda yer alan bazı problemlerin çözümleri için kolaylık sağlayacağı ve yeni bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Bashirov, A. E., Mısırlı, Kurpınar E. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337, 36-48.
- Boruah, K. (2017). On Some Basic Properties of Geometric Real Sequences. *International Journal Mathematics Trends and Technology*, 46(2).
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2017). Application of Geometric Calculus in Numerical Analysis and Difference Sequence Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 449(2), 1265-1285.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018). *G-Calculus*. *TWMS J. Appl. Eng.* 8(1), 94-105.
- Castillo, R.E. ve Raferio, H. (2016). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*, Zurich, Switzerland: Springer International Publishing.
- Chareonsawan, P. (2001). *Some Geometric Properties of Cesàro Sequence Space, Master's Thesis*. Chiang Mai University, Thailand.
- Cui, Y. A., Meng, C. ve Pluciennik, R. (2000). Banach-Saks property and property (β) in Cesàro Sequence Space. *Southeast Asian Bull. Math.*, 24, 201–210.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012a). On Classical sequence spaces and non-Newtonian calculus. *J. Inequal. Appl. Art.*, ID 932734, 12.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012b). Some New Results On Sequence Spaces With Respect To Non-Newtonian Calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 228, 1-12.
- Duyar, C. ve Erdoğan, M. (2016). On non-Newtonian real number series. *IOSR Journal of Mathematics*, e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X, 12(6).
- Erdoğan, M. (2016). *Newtonyen Olmayan Reel Sayı Serileri ve Has Olmayan İntegraller*. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous growth. *Mathematica Aeterna*, 4(2), 101-117.
- Goes, G. ve Goes, S. (1970). Sequence of variation and sequence of fourier coefficients. 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.
- Grossman, M. (1983). *Bigeometric Calculus: A System with a Scale Free Derivative*. (First Edition), Rockport Massachussets: Archimedes Foundation.
- Grossman, M. ve Katz R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. (1. Baskı), Pigeon Cove Massachussets: Lee Press.
- Gurefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E. ve Kurdi, A. (2016). A new look at the classical sequence spaces by using multiplicative calculus. *U.P.B. Bull.*, 78(2), 9-20.

- Güngör, N. (2020). Some geometric properties of the non-Newtonian sequence spaces $l_p(N)$. *Math. Slovaca*, 70(3), 689-696.
- Hardy, G. H. (1952). *Inequalities*. London: Cambridge University Press.
- Hassard, B. D. ve Hussein, D. A. (1973). On Cesàro function spaces. *Tamkang J. Math.*, 4, 19-25.
- Jagers, A. A. (1974). A note on Cesàro sequence spaces. *Nieuw Arch. Wisk.*, (3) 22, 113-124.
- Kadak, U. (2011). *Non-Newtonian analysis and its applications. Doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Türkiye.*
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Leibowitz, G. M. (1971). A note on the Cesàro sequence spaces. *Tamkang J. Math.*, 2, 151-157.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis*. (2. Baskı), Cambridge, London and New York, NY: Cambridge University Press.
- Mahto, S. K., Manna, A. ve Srivastava, P. D. (2018). Bigeometric Cesaro difference sequence spaces and Hermite interpolation. *arXiv.org*, Cornell University, *arXiv:1810.10280*.
- Megginniss, J. R. (1980). Non-Newtonian calculus applied to probability, utility, and Bayesian Analysis. *American Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, 405-410.
- Mursaleen, M. (2003). Some geometric properties of sequence space related to l_p . *Bull. Aust. Math. Soc.*, 67(2), 343-347.
- Mursaleen, M. ve Noman, A.K. (2011). On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces l_p and l_∞ . *II. Math. Commun.* 16, 383-398.
- Musielak, J. (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, 1034, Springer-Verlag, Berlin.
- Ng, P. N. ve Lee, P. Y. (1976). On the associate spaces of Cesàro sequence spaces. *Nanta Math.*, 9(2), 168-170.
- Orlicz, W. (1992). *Linear Functional Analysis*. Singapore: World Sci. Pub.
- Sağır, B. ve Eyüpoğlu, İ. (2022). Geometrik Hesap Tarzına Göre Lebesgue Dizi Uzaylarının Bazı Geometrik Özellikleri. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, doi:10.17714/gumusfenbil.1018374.
- Sanhan, W. (2000). *On Geometric Properties Of Some Banach Sequence Spaces. Yüksek Lisans Tezi, Chiang Mai University, Thailand.*

- Sanhan, W. ve Suantai, S. (2003). On k-nearly uniform convex property in generalized Cesàro sequence spaces. *Internat. J. Math. Sc.*, 57, 3599-3607.
- Shiue, J.S. (1970a). A note on Cesàro Function Space. *Tamkang Journal of Mathematics*, 1, 91-95.
- Shiue, J.S. (1970b). On the Cesàro sequence spaces. *Tamkang Journal of Mathematics*, 1, 19-25.
- Suantai, S. (2003a). On Some Convexity Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 10(1), 193-200.
- Suantai, S. (2003b). On the H-Property of Some Banach Sequence Spaces. *Archivum Mathematicum(BRNO)*, 39, 309-316.
- Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some Basic Results On The Sets of Sequences With Geometric Calculus. *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Gümüşhane, Türkiye.
- Yeh, J. (2006). *Reel analysis: Theory of measure and integration* (2. Baskı). Singapore: World Scientific Publishing, 738.

ÖZGEÇMİŞ

Melisa TİFTİKÇİER, 2012 yılında Edremit Anadolu Lisesi'nde okumaya başladı. 2016 yılında kazandığı Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2020 yılında tamamladı. Aynı yıl Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı.

