



**GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Nurullah KILIÇ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
2016
Her Hakkı Saklıdır**

**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE BAZI
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Nurullah KILIÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**AĞRI
2016**

Her hakkı saklıdır

10/10/2016

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “Geometrik Konveks Fonksiyonlar Üzerine Bazı İntegral Eşitsizlikler” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☒ Tezimin 2 yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

[10/10/2016]

Nurullah KILIÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Nurullah KILIÇ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasında, geometrik-aritmetik konveks ve geometrik-harmonik konveks fonksiyonlara ilişkin bazı yeni integral eşitsizliklere yer verilmiştir. Birinci bölümde, eşitsizlik teorisi ve konveks analiz üzerine bazı bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, bazı tanımlar, temel kavram ve sonuçlar hatırlatılmıştır. Çalışmamızın üçüncü bölümü, literatürde mevcut olan geometrik konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiş olan integral eşitsizlikleri içermektedir. Dördüncü bölümde, temel kavramlar ve elementer analiz teknikleri kullanılarak birinci türevinin mutlak değeri geometrik konveks olan fonksiyonlar için Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler oluşturulmuştur. Ayrıca, geometrik konveks fonksiyonların çarpımını ihtiva eden bazı yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Son olarak, bazı özel durumlar ve örnekler seçilerek sonuçlara dair uygulamalar verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlara ilişkin kısa bir tartışma yapılmıştır.

2016, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, GA – konveks fonksiyon, GG – konveks fonksiyon, GH – konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hölder eşitsizliği

ABSTRACT

In this thesis, some new integral inequalities have been given related to geometric-arithmic convex and geometric-harmonic convex functions. In the first section, some informations have been given on convex analysis and inequality theory. In the second part, some definitions, basic concepts and fundamental results have been recalled. Third part of our study include integral inequalities that have been proved via geometric convex functions, previously. In the fourth section, new integral inequalities of Hadamard type have been established for functions whose absolute values of derivatives are geometric convex by using basic concepts and elementary analysis techniques. Also, some new integral inequalities which involve product of several geometric convex functions have been proved. Finally, by choosing some special cases and examples, applications have been given. In the last section, a short discussion has been achieved on our results.

2016, 59 pages

Keywords: Convex functions, GA -convex function, GG -convex function, GH -convex function, Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren yanımda olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye ve değerli arkadaşlarım Sayın Kıyasettin TAŞDEMİR'e, Sayın Fırat SARIKAYA'ya ve Sayın Abdüllatif YALÇIN'a, en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum manevi destek ve güvenden dolayı aileme ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Deniz KILIÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nurullah KILIÇ

Ağustos, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	4
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Fonksiyonun 1. Türevini İçeren Bazı Yeni Eşitlikler.....	33
4.2. Geometrik Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Yeni Eşitsizlikler.....	35
4.3. Geometrik Konveks Fonksiyonların Tanımı Kullanılarak Oluşturulan Bazı Teoremler	47
4.4.Elde Edilen Bulgulara Dair Bazı Sonuç ve Uygulamalar.....	52
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	56
.....	
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I°	I 'nın İçi
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\in$	Elemanıdır
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
$SV(h, I)$	h –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h –konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	4
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	5
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon	6
Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon	8
Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon	14
Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon.....	14



1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve matematik bir bakıma karşılaştırma olduğundan Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır (Beckenbach and Bellman 1961). Bunu Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği “Analytic Inequalities” isimli kitabı takip eder (Mitrinović 1970).

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi Gauss, Cauchy ve Čebyşev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı Dragomir ve Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000). Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine yoğun çalışan diğer matematikçiler Özdemir, Kırmacı, Agarval, Anastassiou, Milovanovic, Fink, Roberts, Varberg, Barnett, Yıldırım, Sarıkaya, Ujević, Varošanec, Bullen, Cerone, Toader,

Alomari, Qi, Pearce, Darus, Bakula, Pečarić, Set, Akdemir, Kavurmacı-Önalan, Avcı-Ardıç, Gürbüz, Ekinci, Yıldız, Tunç şeklinde sıralanabilir.

Set tarafından hazırlanan “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan m –konveks, (α, m) –konveks, $\log$ –konveks, $quasi$ –konveks, s –konveks, r –konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

Tunç tarafından sunulan “Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Tunç 2011).

Alomari’nin “Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –Convex, $Quasi$ –Convex and r –Convex Mappings and Applications” başlıklı doktora tezinde s –konveks, $quasi$ –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

Yıldız tarafından hazırlanan “Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı yüksek lisans tezinde $quasi$ –konveks fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının yanısıra, $quasi$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Yıldız 2011).

Kavurmacı-Önalan'ın "Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; konveks ve konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Kavurmacı 2012),

Yıldız'ın " n . Mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri" başlıklı doktora tezinde Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ispatlanmış, g 'nin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca n . Mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Lemmalar yazılmış ve bu Lemmalar kullanılarak yeni genelleştirmeler yapılmıştır (Yıldız 2014).

2.KURAMSAL TEMELLER

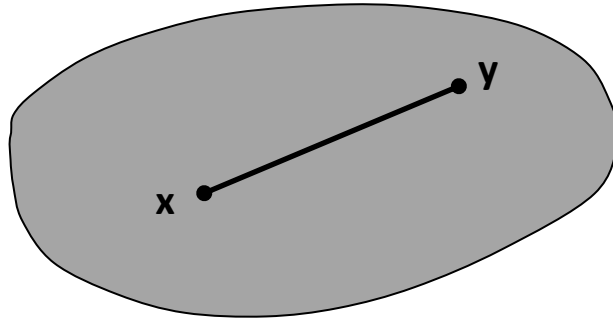
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

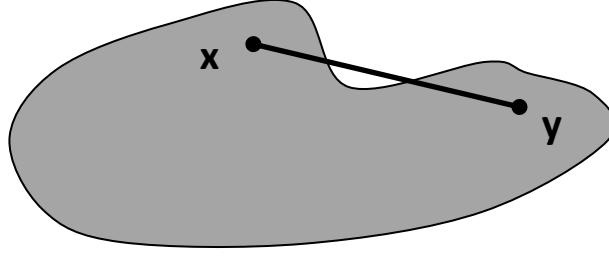
Tanım 2.1.1. “Konveks Küme”: “ L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

İse A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y ’nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon) “ $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon) “Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): “ $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

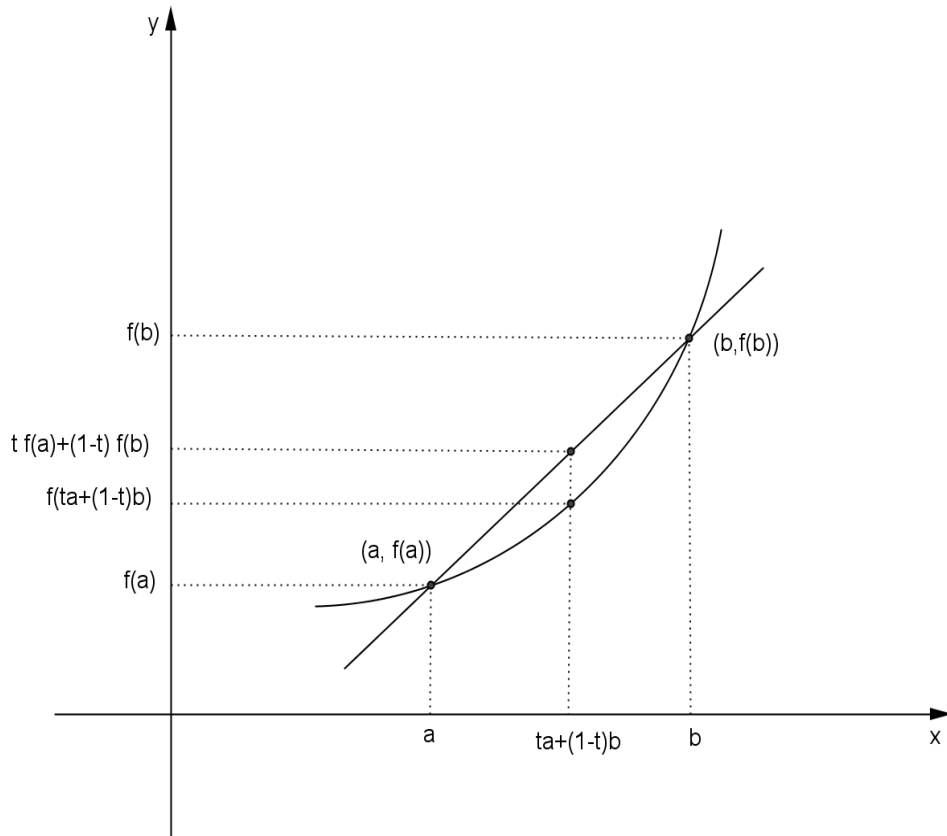
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f' ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman

daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3' den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f' nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği):“Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu):“ f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

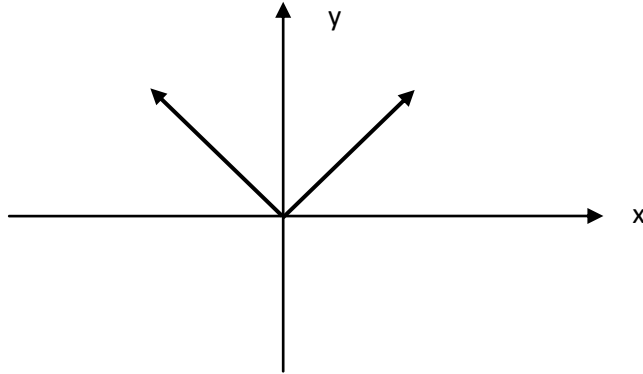
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \\ &\leq |\alpha x| + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden}) \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türevelere sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. “ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. (Hölder Eşitsizliği):“ $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği):“ $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993)

Tanım 2.1.5. (Süreklilik):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 ’da süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Düzgün Süreklilik):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S ’de düzgün süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S ’de Lipschitz şartını sağlıyor denir” (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2.“ f, S ’de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S ’de düzgün süreklidir” (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.5.“ $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° ’de süreklidir”(Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6.“ f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır” (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar):“ f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I ’da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir” (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7.“ J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır” (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3.“ f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir” (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. “Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° ’de artandır (kesin artandır)” (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.9.“ f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' ’nin artan (kesin artan) olmasıdır”(Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.10.“ f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır”(Pečarić *et al.* 1992)

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. (Quasi-Konveks Fonksiyon):“ $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye *quasi* –konveks fonksiyon denir”(Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *strictly-quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

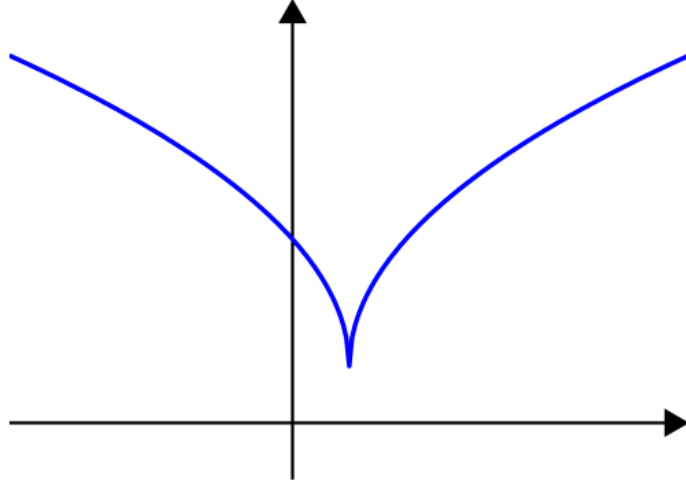
Tanım 2.2.2.“ f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir” (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1.“Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

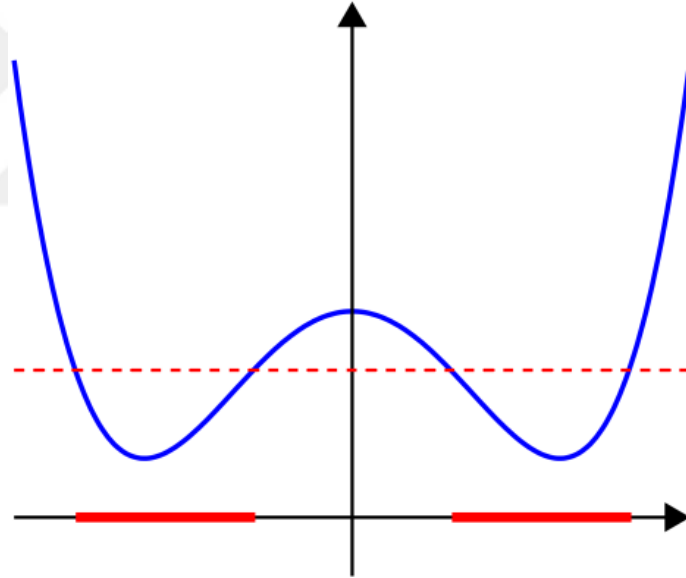
Örneğin $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur” (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6. Quasi -konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.2.3. (Wright-Konveks Fonksiyon): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \alpha > 0$ şartları altında her bir $y + \alpha, x \in I$ için

$$f(x + \alpha) - f(x) \leq f(y + \alpha) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): " $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x$, $\alpha > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \alpha \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \alpha)] \leq \max\{f(x), f(y + t)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. (J –Quasi-Konveks Fonksiyon): " $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi -konvektir$ denir" (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. (Log-Konveks Fonksiyon): " $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvektir denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.7(Godunova-Levin Fonksiyonu): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak;

$f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır” (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8.(P –Fonksiyonu): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir” (Dragomir *et al.*1995).

Tanım 2.2.9.(m –Konveks Fonksiyon): “ $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $\alpha \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir” (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.10. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): “ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir” (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11.(İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): “ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v, h \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir”(Breckner 1978). Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. “ $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir” (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. (h –Konveks Fonksiyon): “ $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun.

Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir” (Varošanec 2007).

“(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h – konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dır” (Varošanec 2007).

“Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dır; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ dir”(Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13.(Starshaped Fonksiyon): “ $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir” (Toader 1984).

Tanım 2.2.14. (Geometrik Konveks Fonksiyon) “ $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.2.15. (s – Geometrik Konveks Fonksiyon) “ $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^{\alpha^s} [f(y)]^{(1-\alpha)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2014)

Tanım 2.2.17. (Ortalama Fonksiyonu): “ M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir” (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.2.2

- “(1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama
 - (2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama
 - (3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama
 - (4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama
 - (5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ Identrik ortalama”
- (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.2.18. (MN - Konveks (Konkav) fonksiyon) : " $f : I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN – konveks(konkav) fonksiyonu denir” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.1. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f : I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b), 0 < b < \infty$ olarak verilsin.

- (1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks(konkav) olmasıdır.
- (2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.
- (3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.
- (4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.
- (5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.
- (6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.
- (7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.
- (8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.
- (9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.2. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b), 0 < b < \infty$ olarak verilsin.

- (1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.
- (2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır” (Anderson 2007).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

Lemma3.1. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du$$

$$= (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} f'(x^t a^{1-t}) dt - (\ln x - \ln b) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} f'(x^t b^{1-t}) dt$$

eşitliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir”(Avcı *et al.* 2015).

Lemma3.2. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$[bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx = (\ln b - \ln a) \int_0^1 b^{2t} a^{2(1-t)} f'(b^t a^{1-t}) dt$$

eşitliği geçerlidir” (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.1. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{[(b-a)A(a,b)]^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \{[L(a^2, b^2) - a^2]|f'(a)|^q + [b^2 - L(a^2, b^2)]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.2. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q > 1$ için;

$$\left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (\ln b - \ln a) \left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} [A|f'(a)|^q |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.3. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{(2q)^{\frac{1}{q}}} \left[L\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \{[L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}]|f'(a)|^q + [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})]|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Zhang *et al.* 2013).

Teorem3.4. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq \left(\frac{L(x^2, b^2) - L(a^2, x^2)}{2} \right) |f'(x)| + \left(\frac{L(a^2, x^2) - a^2}{2} \right) |f'(a)| \\ & \quad + \left(\frac{b^2 - L(x^2, b^2)}{2} \right) |f'(b)| \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir”(Avcı et al. 2015).

Teorem3.5. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a)^{1-\frac{1}{q}} (L(a^2, x^2) - x^2)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(a)|^q - |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + (\ln b - \ln x)^{1-\frac{1}{q}} (L(b^2, x^2) - b^2)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q - |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir”(Avcı et al. 2015).

Teorem3.6. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}} - a^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + (\ln b - \ln x)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q-1}{2q} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(b^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir”(Avcı et al. 2015).

Teorem 3.7.“ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a)L(a^2|f'(a)|, x^2|f'(x)|) + (\ln b - \ln x)L(x^2|f'(x)|, b^2|f'(b)|) \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ için geçerlidir” (Akdemir et al. 2015).

Teorem 3.8. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^o$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \leq (Inx - Ina)L^{1-\frac{1}{q}}(a^2, x^2)L^{\frac{1}{q}}\left(a^2 |f'(a)|^q, x^2 |f'(x)|^q\right) \\ + (Inb - Inx)L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, b^2)L^{\frac{1}{q}}(x^2 |f'(x)|^q, b^2 |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir” (Akdemir et al. 2015).

Teorem 3.9. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \leq (Inx - Ina)L^{1-\frac{1}{q}}\left(a^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}}\right)L^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q, |f'(x)|^q\right) \\ + (Inb - Inx)L^{1-\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{2q}{q-1}}, b^{\frac{2q}{q-1}}\right)L^{\frac{1}{q}}(|f'(x)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q > 1$ için geçerlidir” (Akdemir et al. 2015).

Teorem 3.10. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GG –konveks ise bu taktirde

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \leq (Inx - Ina)L^{\frac{1}{q}}\left((a^2 |f'(a)|)^q, (x^2 |f'(x)|)^q\right) \\ + (Inb - Inx)L^{\frac{1}{q}}((x^2 |f'(x)|)^q, (b^2 |f'(b)|)^q)$$

eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için geçerlidir” (Akdemir et al. 2015).

Teorem 3.11. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon,

$a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise

$$\left| [bf(b) - af(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}} \times \left[L\left(a^{\frac{2q-p}{q-1}}, b^{\frac{2q-p}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \{ [L(a^p, b^p) - a^p] |f'(a)|^q + [b^p - L(a^p, b^p)] |f'(b)|^q \}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $2q > p > 0$ için geçerlidir” (Zhang *et al.* 2013).

Teorem 3.12. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}} \left\{ b \left[(L(a, b) - a) |f'(a)|^q + (2b - a - L(a, b)) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + a \left[(b - 2a + L(a, b)) |f'(a)|^q + (b - L(a, b)) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Latif *et al.* 2014).

Teorem 3.13. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q > 1$ için;

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[L\left(a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ b[A(|f'(a)|^q, 3|f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} + a[A(3|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Latif et al. 2014).

Teorem 3.14. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}} \\ \times \left\{ b \left((L(a^q, b^q) - q)|f'(a)|^q + (2b^q - a^q - L(a^q, b^q))|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + a \left((b^q - 2a^q + L(a^q, b^q))|f'(a)|^q + (b^q - L(a^q, b^q))|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Latif et al. 2014).

Teorem 3.15. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA –konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\left[(\ln b - \ln a) L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right) \right]^{1-\frac{1}{q}}}{2(2p)^{\frac{1}{q}}} \\
& \times \left\{ a^{1-\frac{p}{q}} b \left[(L(a^p, b^p) - a^q) |f'(a)|^q + (2b^p - a^p - L(a^p, b^p)) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + ab^{1-\frac{p}{q}} \left[(b^p - 2a^p + L(a^p, b^p)) |f'(a)|^q + (b^p - L(a^p, b^p)) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $2q > p > 0$ için geçerlidir” (Latif *et al.* 2015).

Lemma3.3. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \\
& = \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır” (İşcan 2014).

Teorem 3.16. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir” (İşcan 2014).

Teorem 3.17. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise $q \geq 1$ için;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{ab(b-a)}{2} \kappa_1^{1-\frac{1}{q}} [\kappa_2 |f'(a)|^q + \kappa_3 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\kappa_1 = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

$$\kappa_2 = \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

ve

$$\kappa_3 = \frac{1}{a(b-a)} - \frac{3a+b}{(b-a)^3} \ln \frac{(a+b)^2}{4ab} = \kappa_1 - \kappa_2$$

şeklinde tanımlıdır” (İşcan 2014).

Teorem 3.18. “ $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ & \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} [\mu_1 |f'(a)|^q + \mu_2 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $q > 1$ için geçerlidir ve burada

$$\mu_1 = \frac{a^{2-2q} + b^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

$$\mu_2 = \frac{a^{2-2q} - a^{1-2q}[(b-a)(1-2q) - a]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

şeklinde tanımlıdır” (İşcan 2014).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bulgulara yer verilecektir.

4.1. Fonksiyonun 1. Türevini İçeren Bazı Yeni Eşitlikler

Lemma4.1.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\begin{aligned} b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \\ = (\ln b - \ln a) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(a^t b^{1-t}) dt \end{aligned}$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için,

$$\int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(a^t b^{1-t}) dt$$

integralinde, $x = a^t b^{1-t}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(a^t b^{1-t}) dt \\ = \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_b^a x^n f'(x) dx \\ = \frac{1}{(\ln b - \ln a)} [b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx] \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin her tarafı $(\ln b - \ln a)$ ile çarpılırsa ispat tamamlanmış olur.

Lemma4.1.2. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonu I° üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ iken aşağıdaki eşitlik $\forall u \in (a, b)$ için geçerlidir

$$\begin{aligned} & b^n f(b) - a^n f(a) \\ & - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \\ & = (\ln u - \ln a) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t}) dt \\ & + (\ln b - \ln u) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t}) dt \end{aligned}$$

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için önce

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t}) dt \\ I_2 &= \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t}) dt \end{aligned}$$

alalım. $x = u^t a^{1-t}$ değişken değiştirmesi yapılır ve integral alınır

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} f'(u^t a^{1-t}) dt \\ &= \frac{1}{(\ln u - \ln a)} \left[u^n f(u) - a^n f(a) - n \int_a^u x^{n-1} f(x) dx \right] \end{aligned} \quad (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} f'(u^t b^{1-t}) dt \\
&= \frac{1}{(\ln u - \ln b)} \left[u^n f(u) - b^n f(b) - n \int_b^u x^{n-1} f(x) dx \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

(1) eşitlik $(\ln u - \ln a)$ ve (2) eşitlik $(\ln b - \ln u)$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur.

4.2. Geometrik Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Yeni Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GG-konveks ise;

$$\begin{aligned}
&\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
&\leq (\ln b - \ln a) L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1 ve $|f'(x)|^q$ nin GG konveks olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (\ln b - \ln a) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt \\
& \leq (\ln b - \ln a) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a)|^t |f'(b)|^{(1-t)} dt \\
& = (\ln b - \ln a) b^{(n+1)} |f'(b)| \int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{(n+1)t} \left| \frac{f'(a)}{f'(b)} \right|^t dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (\ln b - \ln a) b^{(n+1)} |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left| \frac{f'(a)}{f'(b)} \right|^{tq} dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln b - \ln a) L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem4.2.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise;

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (\ln b - \ln a) (p+1)^{-\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}) (|f'(a)| + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma4.1, $|f'(x)|^q$ in GA – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (lnb - lna) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt \\
& \leq (lnb - lna) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|) dt \right] \\
& = (lnb - lna) b^{(n+1)} \left[|f'(a)| \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} dt + |f'(b)| \int_0^1 (1-t) \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} dt \right] \\
& \leq (lnb - lna) b^{(n+1)} \left[|f'(a)| \left(\int_0^1 t^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + |f'(b)| \left(\int_0^1 (1-t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq (p+1)^{\frac{1}{p}} (lnb - lna) L^{\frac{1}{q}}(a^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}) (|f'(a)| + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GG –konveks ise $\forall u \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (lnu - lna) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(a)|^q) \\
& \quad + (lnb - lnu) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma4.2, $|f'(x)|^q$ in GG – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq (lnu - lna) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})| dt \\
& \quad + (lnb - lnu) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})| dt \\
& \leq (lnu - lna) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u)|^t |f'(a)|^{(1-t)} dt \\
& \quad + (lnb - lnu) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u)|^t |f'(b)|^{(1-t)} dt \\
& = (lnu - lna) a^{(n+1)} |f'(a)| \int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)t} \left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^t dt \\
& \quad + (lnb - lnu) b^{(n+1)} |f'(b)| \int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)t} \left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^t dt \\
& \leq (lnu - lna) a^{(n+1)} |f'(a)| \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a}\right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(u)}{f'(a)}\right|^{tq} dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (lnb - lnu) b^{(n+1)} |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b}\right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left|\frac{f'(u)}{f'(b)}\right|^{tq} dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \leq (lnu - lna) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(a)|^q) \\
& \quad + (lnb - lnu) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(u)|^q, |f'(b)|^q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur

Teorem4.2.4. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise $\forall u \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\ & \leq (p+1)^{-\frac{1}{p}} \left[(\ln u - \ln a) L^{\frac{1}{q}}(u^{(n+1)q}, a^{(n+1)q})(|f'(u)|, |f'(a)|) \right. \\ & \quad \left. + (\ln b - \ln u) L^{\frac{1}{q}}(u^{(n+1)q}, b^{(n+1)q})(|f'(u)|, |f'(b)|) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir

İspat: Lemma4.2, $|f'(x)|^q$ in GA –konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})| dt \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})| dt \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(a)|) dt \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(b)|) dt \\
& = \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} \left[|f'(u)| \int_0^1 t \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)t} dt \right. \\
& \quad \left. + |f'(a)| \int_0^1 (1-t) \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)t} dt \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} \left[|f'(u)| \int_0^1 t \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)t} dt \right. \\
& \quad \left. + |f'(b)| \int_0^1 (1-t) \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)t} dt \right] \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} \left[|f'(u)| \left(\int_0^1 t^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + |f'(a)| \left(\int_0^1 (1-t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} \left[|f'(u)| \left(\int_0^1 t^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + |f'(b)| \left(\int_0^1 (1-t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)tq} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[(\ln u - \ln a) L^{\frac{1}{q}}(u^{(n+1)q}, a^{(n+1)q}) \cdot (|f'(u)|, |f'(a)|) \right. \\
& \quad \left. + \left(\ln \frac{b}{u} \right) L^{\frac{1}{q}}(u^{(n+1)q}, b^{(n+1)q}) (|f'(u)|, |f'(b)|) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur

Teorem4.2.5. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise ;

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(q+1)^{-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma4.1, $|f'(x)|^q$ in GA – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\leq \left(\ln \frac{b}{a} \right) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt$$

$$\leq \left(\ln \frac{b}{a} \right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{(n+1)t} (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|) dt \right]$$

$$\leq \left(\ln \frac{b}{a} \right) b^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{(n+1)tp} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Eğer burada $t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)| = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(q+1)^{-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem4.2.6. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GA –konveks ise $\forall u \in (a, b)$ için

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\leq (q+1)^{-\frac{1}{q}} \left[\left(\ln \frac{u}{a} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\ln \frac{b}{u} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir

İspat: Lemma 4.2, $|f'(x)|^q$ in GA – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})| dt \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})| dt \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)t} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(a)|) dt \right] \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)t} (t|f'(u)| + (1-t)|f'(b)|) dt \right] \\
& \leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)tp} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(u)| \right. \\
& \quad \left. + (1-t)|f'(a)|)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)tp} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t|f'(u)| \right. \\
& \quad \left. + (1-t)|f'(b)|)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer burada $t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)| = u$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\leq (q+1)^{-\frac{1}{q}} \left[\left(\ln \frac{u}{a} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(a)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\ln \frac{b}{u} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur

Teorem4.2.7. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH –konveks ise;

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\ \leq \left(\ln \frac{b}{a} \right) (1-q)^{-\frac{1}{q}} |f'(a)| |f'(b)| L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma4.1, $|f'(x)|^q$ in GH – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\ln \frac{b}{a}\right) \int_0^1 a^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(a^t b^{1-t})| dt \\
&\leq \left(\ln \frac{b}{a}\right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)t} \left(\frac{|f'(a)| |f'(b)|}{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|} \right) dt \right] \\
&\leq \left(\ln \frac{b}{a}\right) b^{(n+1)} |f'(a)| |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|} \right)^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\ln \frac{b}{a}\right) (1-q)^{-\frac{1}{q}} |f'(a)| |f'(b)| L^{\frac{1}{p}}(a^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur

Teorem4.2.8. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|f'(x)|^q$ fonksiyonu GH -konveks ise $\forall u \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned}
&\left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
&\leq (1-q)^{-\frac{1}{q}} |f'(u)| \left[|f'(a)| \left(\ln \frac{u}{a} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(-q+1)} - |f'(a)|^{(-q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + |f'(b)| \left(\ln \frac{b}{u} \right) L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Lemma4.2, $|f'(x)|^q$ in GH – konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^n f(b) - a^n f(a) - n \int_a^b x^{n-1} f(x) dx \right| \\
&= \left(\ln \frac{u}{a} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} a^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t a^{1-t})| dt \\
&+ \left(\ln \frac{b}{u} \right) \int_0^1 u^{(n+1)t} b^{(n+1)(1-t)} |f'(u^t b^{1-t})| dt \\
&\leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)t} \left(\frac{|f'(u)| |f'(a)|}{t |f'(u)| + (1-t) |f'(a)|} \right) dt \right] \\
&+ \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)t} \left(\frac{|f'(u)| |f'(b)|}{t |f'(u)| + (1-t) |f'(b)|} \right) dt \right] \\
&\leq \left(\ln \frac{u}{a} \right) a^{(n+1)} |f'(u)| |f'(a)| \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{a} \right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t |f'(u)| + (1-t) |f'(a)|} \right)^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\ln \frac{b}{u} \right) b^{(n+1)} |f'(u)| |f'(b)| \left[\int_0^1 \left(\frac{u}{b} \right)^{(n+1)tp} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t |f'(u)| + (1-t) |f'(b)|} \right)^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= (1-q)^{-\frac{1}{q}} |f'(u)| \left[\left(\ln \frac{u}{a} \right) |f'(a)| L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, a^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(-q+1)} - |f'(a)|^{(-q+1)}}{|f'(u)| - |f'(a)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\ln \frac{b}{u} \right) |f'(b)| L^{\frac{1}{p}}(u^{(n+1)p}, b^{(n+1)p}) \left(\frac{|f'(u)|^{(-q+1)} - |f'(b)|^{(-q+1)}}{|f'(u)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

4.3.Geometrik Konveks Fonksiyonların Tanımı Kullanılarak Oluşturulan Bazı Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1. $f_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$, GG –konveks fonksiyonlar ve

$f_i \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\prod_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq L \left(\prod_{i=1}^n f_i(a), \prod_{i=1}^n f_i(b) \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f_i fonksiyonları birer GG –konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ için

$$f_1(a^t b^{1-t}) \leq (f_1(a))^t (f_1(b))^{1-t}$$

$$f_2(a^t b^{1-t}) \leq (f_2(a))^t (f_2(b))^{1-t}$$

.....

.....

$$f_n(a^t b^{1-t}) \leq (f_n(a))^t (f_n(b))^{1-t}$$

ifadeleri yazılabilir. $f_i, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$ ler pozitif fonksiyon olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f_1(a^t b^{1-t}) f_2(a^t b^{1-t}) \dots \dots f_n(a^t b^{1-t}) dt \\ & \leq \int_0^1 [f_1(a) f_2(a) \dots f_n(a)]^t [f_1(b) f_2(b) \dots \dots f_n(b)]^{1-t} dt \end{aligned}$$

elde edilir. $x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\prod_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq L \left(\prod_{i=1}^n f_i(a), \prod_{i=1}^n f_i(b) \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $f_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$, GG –konveks fonksiyonlar ve

$f_i \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n L(f_i(a), f_i(b))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f_i, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları birer GG –konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ için

$$f_1(a^t b^{1-t}) \leq (f_1(a))^t (f_1(b))^{1-t}$$

$$f_2(a^t b^{1-t}) \leq (f_2(a))^t (f_2(b))^{1-t}$$

.....

$$f_n(a^t b^{1-t}) \leq (f_n(a))^t (f_n(b))^{1-t}$$

ifadeleri yazılabilir. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(f_1(a^t b^{1-t}) + f_2(a^t b^{1-t}) + \dots + f_n(a^t b^{1-t}))] dt \\ & \leq \int_0^1 [(f_1(a))^t (f_1(b))^{1-t} + (f_2(a))^t (f_2(b))^{1-t} \\ & \quad + \dots + (f_n(a))^t (f_n(b))^{1-t}] dt \end{aligned}$$

elde edilir. $x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n L(f_i(a), f_i(b))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. $f_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$, GA –konveks fonksiyonlar ve

$f_i \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} \right) = A(f_i(a) + f_i(b))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f_i , $(i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları birer GA – konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ için

$$f_1(a^t b^{1-t}) \leq t f_1(a) + (1-t) f_1(b)$$

$$f_2(a^t b^{1-t}) \leq t f_2(a) + (1-t) f_2(b)$$

.....

.....

$$f_n(a^t b^{1-t}) \leq t f_n(a) + (1-t) f_n(b)$$

ifadeleri yazılabilir. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve $[0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(f_1(a^t b^{1-t}) + f_2(a^t b^{1-t}) + \dots \dots \dots + f_n(a^t b^{1-t}))] dt \\ & \leq \int_0^1 [(t f_1(a) + (1-t) f_1(b)) + (t f_2(a) + (1-t) f_2(b)) \\ & \quad + \dots \dots \dots + (t f_n(a) + (1-t) f_n(b))] dt \end{aligned}$$

elde edilir. $x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} \right) = A(f_i(a) + f_i(b))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4. $f_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$, GH –konveks fonksiyonlar ve

$f_i \in L[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \left(f_i(a) f_i(b) L^{-1}(f_i(a), f_i(b)) \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f_i, (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları birer GH –konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ için

$$f_1(a^t b^{1-t}) \leq \frac{f_1(a) f_1(b)}{t f_1(a) + (1-t) f_1(b)}$$

$$f_2(a^t b^{1-t}) \leq \frac{f_2(a) f_2(b)}{t f_2(a) + (1-t) f_2(b)}$$

.....

.....

$$f_n(a^t b^{1-t}) \leq \frac{f_n(a) f_n(b)}{t f_n(a) + (1-t) f_n(b)}$$

ifadeleri yazılabilir. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve $[0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [(f_1(a^t b^{1-t}) + f_2(a^t b^{1-t}) + \dots + f_n(a^t b^{1-t}))] dt \\
& \leq \int_0^1 \left[\left(\frac{f_1(a)f_1(b)}{tf_1(a) + (1-t)f_1(b)} \right) + \left(\frac{f_2(a)f_2(b)}{tf_2(a) + (1-t)f_2(b)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \dots + \left(\frac{f_n(a)f_n(b)}{tf_n(a) + (1-t)f_n(b)} \right) \right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer burada

sağ taraf için $t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)| = u,$

sol taraf için $x = a^t b^{1-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n (f_i(a)f_i(b)L^{-1}(f_i(a), f_i(b)))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.4. Elde Edilen Bulgulara Dair Bazı Sonuç ve Uygulamalar

Sonuç 4.4.1. Teorem 4.2.1 de $n = 1$ seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (\ln b - \ln a) L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) L^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.2.2 de $n = 1$ seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (\ln b - \ln a)(p+1)^{-\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q})(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 4.4.3. Teorem 4.2.5 de $n = 1$ seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (\ln b - \ln a)(q+1)^{-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Sonuç 4.4.4. Teorem 4.2.7 de $n = 1$ seçilirse

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (\ln b - \ln a)(1-q)^{-\frac{1}{q}} |f'(a)| |f'(b)| L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{|f'(a)|^{(q+1)} - |f'(b)|^{(q+1)}}{|f'(a)| - |f'(b)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için elde edilir.

Uygulama 4.4.1 $a, b \in R^+$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$|e^b(b-1) - e^a(a-1)| \leq (\ln b - \ln a) L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) L^{\frac{1}{q}}(e^{aq}, e^{bq})$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.4.1 de $f: R^+ \rightarrow R^+, f(x) = e^x$ $GG - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 4.4.2 $a, b \in R^+$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left| \log \left[(e^{a-b}) \left(\frac{b+1}{a+1} \right) \right] \right| \leq (\ln b - \ln a)(p+1)^{-\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^{2q}, b^{2q})((a+1)^{-1} + (b+1)^{-1})$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.4.2 de $f: R^+ \rightarrow R^+, f(x) = \log(x+1)$ $GA - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 4.4.3 $a, b \in R^+$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left| \log \left[(e^{a-b}) \left(\frac{b+1}{a+1} \right) \right] \right| \leq (\ln b - \ln a)(q+1)^{-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{(b+1)^{-(q+1)} - (a+1)^{-(q+1)}}{(b+1)^{-1} - (a+1)^{-1}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.4.3'de $f: R^+ \rightarrow R^+, f(x) = \log(x+1)$ $GA - konveks$ fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir

Uygulama 4.4.4 $a, b \in R^+$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$|b - a| \leq (\ln b - \ln a)(1 - q)^{-\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{a^{-(q+1)} - b^{-(q+1)}}{b - a} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.4.4'te $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ve $f(x) = -\ln x$ GH – konveks fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Eşitsizlikler tüm bilim dallarında sıklıkla kullanılan, bazen estetik olduğu için tercih edilen, uygulama alanı oldukça geniş bir teoridir. Bilim sürekli genişleyen ve kendini yenileyen bir olgudur. Bu tez çalışmasında geometrik konveks fonksiyonlarla ilgili Hölder integral eşitsizliği kullanılarak elde edilmiş yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli yeni sınırlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında verilen integral eşitliklerine benzer eşitlikler kurularak konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca yeni genelleştirmeler, Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli benzer eşitsizlikler elde edilebilir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, dördüncü bölümde verilen ve kullanılan lemmaların farklı versiyonlarını elde edebilir ve yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., Some inequalities for GG – convex functions, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Avcı-Ardıç, M. and Set, E., New integral inequalities via GA –convex functions, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir, M.E., and Yalçın, A., New generalizations for functions whose second derivatives are GG –convex, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M. and Yalçın, A., Some new generalizations for GA –convex functions, submitted. (2015)
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Carter, M. and van Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Application, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html>. (10.10.2010).
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.
- G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen, Generalized convexity and inequalities J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294–1308
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for s –convex functions. J. Math. Anal. Appl., 215, 461-470.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Gürbüz, M. and Yaradılmış, A., 2015. Some generalizations of integral inequalities and their applications, ar Xiv: 1503.02500, submitted.
- Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları .Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

- İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43(6) (2014), 935-942.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum
- Latif, M.A., New Hermite-Hadamard type integral inequalities for GA – convex functions with applications, Analysis, Volume 34, Issue 4, 379-389, 2014. Doi:10.1515/anly-2012-1235.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Ağrı'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ağrı'da tamamladı. 1998 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında tezsiz yüksek lisans eğitimine başlayıp 2008 yılında mezun oldu. 2002-2013 yılları arasında Erzurum ilinde çeşitli özel kurumlarda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2013 yılında Ağrı ilinde ortaöğretim matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2015 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Evli olup halen Ağrı Hüseyin Celal Yardımcı Fen Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.