



**GEOMETRİK-KUADRATİK KONVEKS
FONKSİYONLAR VE İKİNCİ TÜREVİ
FARKLI SINIFLARDAN KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI**

Faruk SAYKAL

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doc. Dr. Mustafa GÜRBÜZ
2016
Her hakkı saklıdır**

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GEOMETRİK-KUADRATİK KONVEKS FONKSİYONLAR VE
İKİNCİ TÜREVİ FARKLI SINIFLARDAN KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE
UYGULAMALARI**

FARUK SAYKAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2016

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans

GEOMETRİK-KUADRATİK KONVEKS FONKSİYONLAR VE İKİNCİ TÜREVİ FARKLI SINIFLARDAN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Faruk Saykal

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa Gürbüz

Bu tezde, ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için literatürde mevcut bir lemmaya farklı konvekslik sınıfları uygulanarak bazı yeni integral eşitsizlikler elde edilmiş ve uygulamalar verilmiştir. Ayrıca geometrik-kuadratik konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmış, bu sınıfa ait lemma, teorem ve örnekler verilmiştir. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler ile günümüze kadar yapılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan konveks fonksiyon kavramları, bunlar arasındaki hiyerarşi, temel teoremler ve pozitif reel sayıların bazı özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise önce ikinci türevi (α, m) –konveks, s –konveks ve *quasi* –konveks olan fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiş ve elde edilen eşitsizliklerin bazılarına uygulamalar verilmiş, sonra geometrik-kuadratik konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmış, bu sınıfa ait lemma, teorem ve örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlardan bir çoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2016, 53 sayfa

Anahtar sözcükler: Eşitsizlikler, GQ-konveks fonksiyon, Hölder Eşitsizliği, (α, m) –konveks fonksiyon, , Power-Mean Eşitsizliği, *quasi* –konveks fonksiyon, s –konveks fonksiyon

ABSTRACT

Master

GEOMETRIC-QUADRATIC CONVEX FUNCTIONS AND INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS CONCERNING WITH SECOND DERIVATIVE OF A FUNCTIONS

Faruk Saykal

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa Gürbüz

In this thesis, some new integral inequalities are handled and applications are given by applying different convexity classes to a lemma for second order differentiable functions which exist in the literature. Also geometric-quadratic convex function class is defined, lemmas, theorems and examples belong to this class are given. The first part is introductory part which includes information about the findings of the studies related convex functions and inequalities conducted until now. The second includes convex function concepts used in the thesis, the hierarchies among them, basic theorems and some special means of positive real numbers. In the third part, some theorems which are going to be used in the main part of the research are given. In the fourth part, firstly, some inequalities for functions whose second derivatives are (α, m) –convex, s – convex or *quasi* – convex are obtained and applications are given to some of the found inequalities, then geometric-quadratic convex function class is defined; lemmas, theorems and examples belong to this class are given. Most of the findings of this thesis were observed to be supported by the literature.

2016, 53 pages

Keywords: Inequalities, GQ – convex function, Hölder Inequality, (α, m) –convex function, Power-Mean Inequality, *quasi* –convex function, s –convex function

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam,

Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e

teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli görüşlerinden ve tavsiyelerinden yararlandığım değerli hocalarıma en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında değerli yardımları ile bana yardımcı olan arkadaşım Sayın Abdullah YARADILMIŞ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum manevi destek ve güvenden dolayı aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Faruk SAYKAL

Ocak 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİL ve ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi.....	19
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
4. BULGULAR	28
4.1. Fonksiyonun İkinci Türevini İçeren Bazı Yeni Eşitsizlikler.....	28
4.2. Geometrik Kuadratik Konveks Fonksiyon Ve İlgili Bazı Eşitsizlikler.....	35
4.3. Elde Edilen Teoremlere Dair Bazı Sonuç ve Uygulamalar	47
5. SONUÇ ve TARTIŞMA	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$K_m(b)$	m –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log –Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{L}_r(x, y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalaması
Max	Maksimum
Min	Minimum
$M_n^{(r)}(a, p)$	a 'nın p Ağırlıklı Ortalaması
$P(I)$	P –Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h, I)$	h –Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h –Konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİL ve ÇİZELGELER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	5
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	6
Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $)	7
Şekil 2.4. Konveks fonksiyon	8
Şekil 2.5. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon	10
Şekil 2.6. <i>Quasi</i> –konveks olmayan fonksiyon.....	10
Şekil 2.7. Godunova-Levin, P –fonksiyon, Quasi-Konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve <i>Log</i> –Konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	22

1.GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. “Konvekslik” kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve matematik bir bakıma karşılaştırma olduğundan Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır (Beckenbach and Bellman 1961). Bunu Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği “Analytic Inequalities” isimli kitabı takip eder (Mitrinović 1970). Bu temel kaynakların yanı sıra “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (Mitrinović *et al.* 1991), “Classical and New Inequalities in Analysis” (Mitrinović *et al.* 1993), “Mathematical Inequalities” (Pachpatte 2005) ve “Convex Functions and Their Applications” (Niculescu and Persson 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan

eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000).

Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine yoğun çalışan diğer matematikçiler M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, R. Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, N.S. Barnett, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, J. Pečarić, E. Set, A.O. Akdemir, H. Kavurmacı Önalın,

Bu konu üzerine yazılan birçok kitabın dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır. M. Avcı Ardıç, M. Gürbüz, A. Ekinci, Ç. Yıldız, M. Tunç şeklinde sıralanabilir.

“Inequalities and Applications” başlıklı doktora tezinde integral eşitsizlikleri üzerine uygulamalar yazılmış ve ortalamalar üzerine farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanında Cauchy-Schwartz, Bessel ve Jensen eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır (Rooın 2003).

“Solving Methods of Linear Functional Equation and Stability of t –Convex Functions” başlıklı doktora tezinde eşitsizlikler yardımıyla lineer fonksiyonel denklemlerin çözüm yöntemleri incelenmiş, ve t –konveks fonksiyonların kararlılığı incelenirken yine bazı eşitsizlikler kullanılmış ve yenileri elde edilmiştir (Hazy 2005).

“Inequalities and Applications” başlıklı yüksek lisans tezinde ortalamalar üzerine yeni eşitsizlikler elde edilmiş, yeni fonksiyon sınıfları ortaya atılmıştır (Bagdasar 2006).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan m –konveks, (α, m) –konveks, $\log$ –konveks, $quasi$ –konveks, s –konveks, r –konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

“Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Tunç 2011).

“Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –Convex, $Quasi$ –Convex and r –Convex Mappings and Applications” başlıklı doktora tezinde s –konveks, $quasi$ –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

“Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı yüksek lisans tezinde $quasi$ –konveks fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının yanısıra, $quasi$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Yıldız 2011).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; konveks ve konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir. (Kavurmacı 2012),

“Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve literatürde bulunan bazı konveks fonksiyonların çarpımı üzerine integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. (Gülbüz 2013),

“ n . mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ispatlanmış, g 'nin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Lemmalar yazılmış ve bu Lemmalar kullanılarak yeni genelleştirmeler yapılmıştır.(Yıldız 2014).

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel teoremler ve ikinci türevi konveks fonksiyonlar için literatürde mevcut bazı lemma ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ikinci türevi (α, m) –konveks, s –konveks ve $quasi$ –konveks olan fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra GQ –konveks sınıfı tanımlanıp bu sınıf üzerinde yeni Lemma ve Teoremler elde edilmiştir. Son olarak ise bulunan bazı eşitsizliklere uygulamalar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

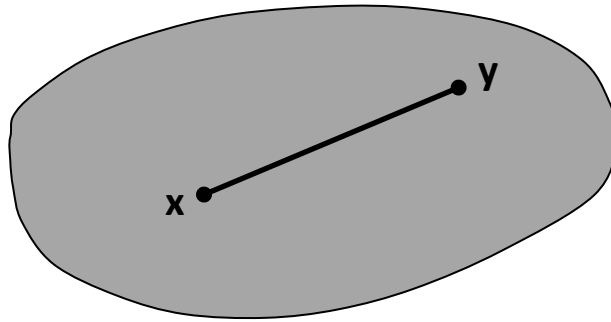
2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

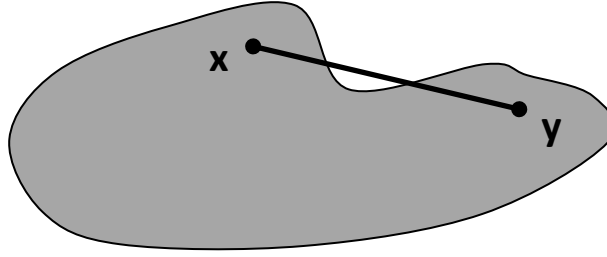
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvektir denir (Pečarić *et al.* 1992).

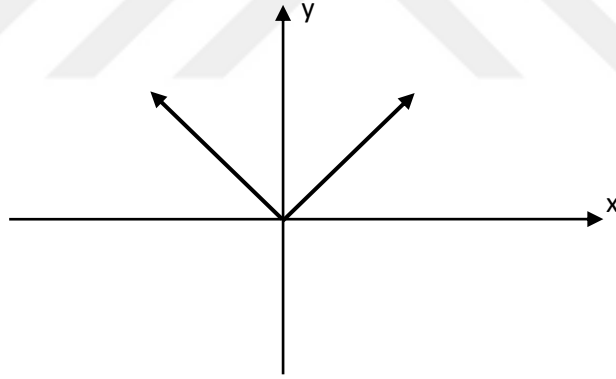
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J –konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

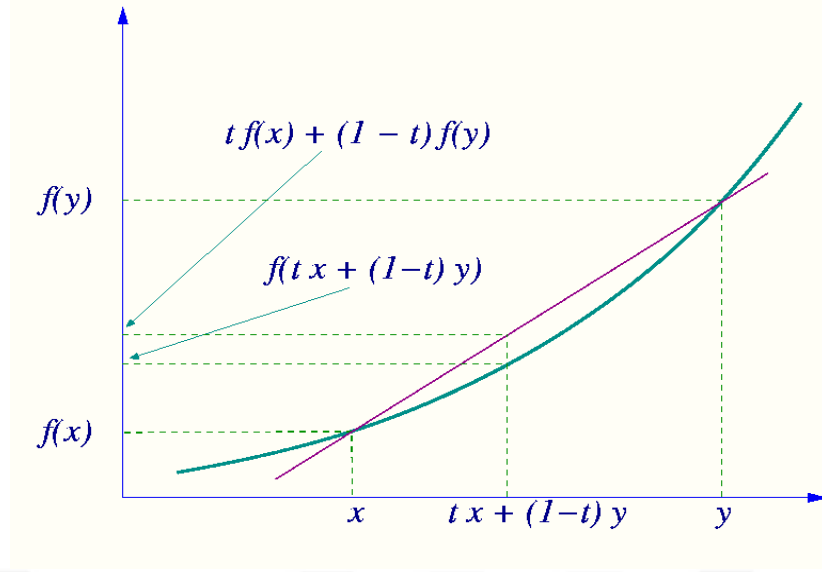
olmasıdır (Mitrinović 1970).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Bakınız Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.5. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' 'ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

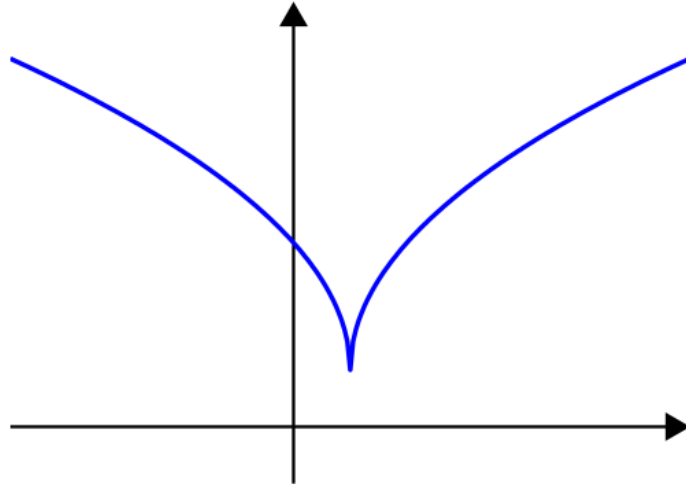
ise f' 'ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.6. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f' 'ye *quasi* –monotonik fonksiyon denir (Greenberg and Pierskalla 1970).

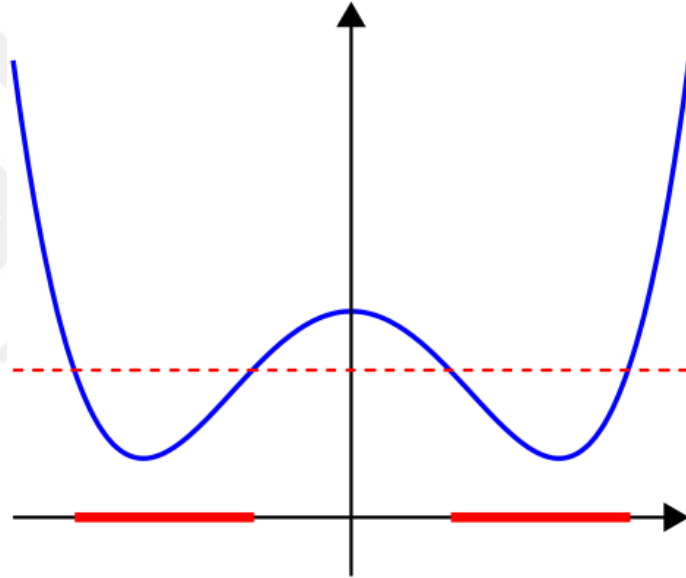
Sonuç 2.1.4. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6. Quasi –konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.1.7. (m –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.1.8. $((\alpha, m)$ –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) –konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm (α, m) –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Burada $(\alpha, m) \in \{(0, 0), (\alpha, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1), (\alpha, 1)\}$ alındığında sırasıyla artan, α –starshaped, starshaped, m –konveks, konveks ve α –konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 2.1.9. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I, \lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.10. (P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan konveks ve Quasi-konveks fonksiyonları içermektedir.

Tanım 2.1.11. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.12. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.1. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.13. (h –Konveks Fonksiyon): $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye h –konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar

$SV(h, I)$ sınıfına aittir. $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h, I)$ sınıfı $Q(I)$ sınıfını; $h(\alpha) = 1$ alınırsa, $P(I)$ sınıfını ve $h(\alpha) = \alpha^s$, $s \in (0,1)$ alınırsa, K_s^2 sınıfını içereceği açıktır.

Örnek 2.1.2. h fonksiyonu her $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \geq \alpha$ şartını sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olsun (örneğin $k \leq 1$ ve $x > 0$ için $h_k = x^k$ fonksiyonu bu özelliğe sahiptir). f fonksiyonu I üzerinde negatif olmayan konveks fonksiyon ise; $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

yazılabilir. Bu, $f \in SX(h, I)$ anlamına gelir. Benzer şekilde h fonksiyonu, $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \leq \alpha$ şartını sağlıyorsa f negatif olmayan konkav fonksiyonu $SV(h, I)$ sınıfına ait olur (Varošanec 2007).

Tanım 2.1.14. (Logaritmik Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık $f: I \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{(1-\alpha)}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna $\log$ –konvekstir denir. $f = \exp(\log f)$ olduğundan $\log$ –konveks fonksiyon konvekstir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.15. (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.1.16. (s –Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang et al. 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tezde adı geçen bazı terimlerin tanımları ve ilgili teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.17. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 ’da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.18. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I ’da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
 (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
 denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.2. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
 - (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
 - (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
 - (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.
- (Adams and Essex 2010).

Sonuç 2.1.3. f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.3. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I° 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.4. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.19. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon verilsin. f ve g fonksiyonları her $x, y \in X$ için

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyonlara birlikte artan ya da birlikte azalan fonksiyonlar denir (Skala 1998).

Tanım 2.1.20. (Bazı Özel Ortalamalar):

Bu kısımda a, b gibi pozitif iki reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen *et al.* 1988; Bullen 2003; Tunç 2012);

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) := \frac{a + b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a + b}$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases}$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases}$$

(6) p – logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases}$$

(7) Kuadratik ortalama:

$$Q = Q(a, b) := \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{L}_p$ ’nin monoton artan olduğu bilinir ve $\mathcal{L}_0 = I$, $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde yer almaktadır:

$$H \leq G \leq \mathcal{L} \leq I \leq A \leq Q.$$

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r . kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$\mathcal{L}_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y}, & r = 0, x \neq y \\ xy \frac{\ln x - \ln y}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.20. (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama): $x_i \in [a, b]$, $p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^n p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere

$$A_n(x, p) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sayılarının p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Mitrinović *et al.* 1993).

Tanım 2.1.21. a ve p iki pozitif sıralı n -li ve $-\infty \leq r \leq +\infty$ olsun. a 'nın r . mertebeden p ağırlıklı ortalaması

$$M_n^{(r)}(a, p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i a_i^r \right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0, -\infty, +\infty \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{P_n}}, & r = 0 \\ \max(a_1, a_2, \dots, a_n), & r = +\infty \\ \min(a_1, a_2, \dots, a_n), & r = -\infty \end{cases}$$

olarak tanımlanır. a ve p iki pozitif sıralı n -li ve $-\infty \leq r < s \leq +\infty$ ise

$M_n^{(r)}(a, p) \leq M_n^{(s)}(a, p)$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduğunda sağlanır (Mitrinović *et al.* 1993).

Kuadratik ortalamanın, Power-Mean eşitsizliğinin $r = n = 2$ hali olduğu kolayca görülür.

Teorem 2.1.6. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.7. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Tanım 2.1.22. $I, (0, \infty)$ 'nın bir alt aralığı, $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, M ve N her hangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Her $x, y \in I$ için;

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna MN – konveks (konkav) fonksiyon denir.

2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken kimi zamanda fonksiyona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibarıyla benzerlik gösterebilir. Çalışmalarımızda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlarken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlar için başka konvekslik sınıfları içinde sağlandığını açıkça görebiliriz. Dolayısıyla buradan konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla şu şekilde oluşturulabilir;

Teorem 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log –Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P –fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülür (Kavurmacı 2012).



Şekil 2.7. Godunova-Levin, P –fonksiyon, **Quasi** –Konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve **Log** –Konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Lemma 2.2.1. Eğer f fonksiyonu m –konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

Lemma 2.2.2. Eğer f fonksiyonu m –konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n –konveks fonksiyondur (Toader 1988).

h –konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebilir ki; eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesinde negatif olmayan konkav fonksiyonlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse fonksiyon $Q(I)$ sınıfından, eğer $h(t) = 1$ sabit fonksiyonu olarak seçilirse $P(I)$ sınıfından fonksiyon, eğer $h(t) = t^s$ seçilirse burada $s \in (0,1)$ olmak üzere K_s^2 sınıfından konveks bir fonksiyon elde edileceği aşikârdır. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h, I), \quad P(I) \subset SX(h, I), \quad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfının alt kümesidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel teoremler verilecektir.

Teorem 3.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Birçok klasik eşitsizlik, yukarıdaki eşitsizliğin bir sonucudur.

Teorem 3.2. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 3.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.4. (Young Eşitsizliği): $a, b > 0$ ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $a^p = b^q$ durumunda sağlanır (Mitrinović 1970).

Lemma 3.1. $a, b \in I$, $a < b$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon ve $\alpha, \lambda \in [0,1]$ olsun. $f, f', f'' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ & + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \\ & = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 k(t) f''(tb + (1-t)a) dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} 2\alpha\lambda t - t^2, & 0 \leq t \leq 1-\alpha \\ (1-t)(t-1+2\lambda(1-\alpha)), & 1-\alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur (Gürbüz ve Yaradılmış).

Teorem 3.5. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilen fonksiyon, $f, f', f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ile $a < b$ olsun. $|f''|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $\alpha, \lambda \in [0,1]$ için,

$$\gamma_1 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^4 + (1-\alpha)^3 \left(\frac{1-\alpha}{4} - \frac{2\alpha\lambda}{3} \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^3(1-\alpha\lambda) + (1-\alpha)^2 \left[\frac{1-\alpha}{3} - \alpha\lambda - \frac{(1-\alpha)^2}{4} + \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)}{3} \right]$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^3}{3} - \frac{(1-\alpha)^4}{4}$$

$$\gamma_4 = (1-\alpha)^2 \left[\alpha\lambda - \frac{1-\alpha}{3} - \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)}{3} + \frac{(1-\alpha)^2}{4} \right]$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3(1-\lambda(1-\alpha)) \\
&\quad - \frac{1}{12}(\alpha-2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha(3\alpha-4)-4\lambda(1-\alpha)^2(1-\lambda)] \\
\mu_2 &= \frac{4}{3}(1-\alpha)^4\lambda^4 + \frac{1}{12}(\alpha-2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha^2(4\lambda^2-4\lambda+3)+4\alpha\lambda(1-2\lambda)+4\lambda^2] \\
\mu_3 &= \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3(1-\lambda(1-\alpha)) \\
&\quad + \frac{1}{12}(\alpha-2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha(3\alpha-4)-4\lambda(1-\alpha)^2(1-\lambda)] \\
\mu_4 &= \frac{4}{3}(1-\alpha)^4\lambda^4 \\
&\quad - \frac{1}{12}(\alpha-2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha^2(4\lambda^2-4\lambda+3)+4\alpha\lambda(1-2\lambda)+4\lambda^2]
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| (b-a)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)f'((1-\alpha)b+\alpha a) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right. \\
&\quad \left. + (1-\lambda)f((1-\alpha)b+\alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \right| \\
&\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2}\{(\gamma_1+\mu_1)|f''(b)| + (\gamma_2+\mu_2)|f''(a)|\}, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \frac{(b-a)^2}{2}\{(\gamma_1+\mu_3)|f''(b)| + (\gamma_2+\mu_4)|f''(a)|\}, & 1-\alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2}\{(\gamma_3+\mu_1)|f''(b)| + (\gamma_4+\mu_2)|f''(a)|\}, & 1-\alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2}\{(\gamma_3+\mu_3)|f''(b)| + (\gamma_4+\mu_4)|f''(a)|\}, & 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \leq 2\alpha\lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Gürbüz ve Yaradılmış).

Lemma 3.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $f' \in L[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du = (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} f'(x^t a^{1-t}) dt$$

$$-(\ln x - \ln b) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} f'(x^t b^{1-t}) dt$$

eşitsizliği sağlanır (Avcı *et al.*, 2015).



4. BULGULAR

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bulgulara yer verilecektir.

4.1 Fonksiyonun İkinci Türevini İçeren Bazı Yeni Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $f: I \subset [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° kümesinde iki kez türevlenebilen fonksiyon olsun. $f, f', f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I^\circ$ ile $a < b$, $b^* > 0$ olmak üzere $|f''|$, I aralığında (α_1, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha, \alpha_1, m, \lambda) \in [0, 1]^4$ için,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^{\alpha_1+2}}{\alpha_1+2} - \frac{(1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} \\ \mu_2 &= \frac{-2\alpha\lambda(1-\alpha)^{\alpha_1+2}}{\alpha_1+2} + \frac{(1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} + \alpha\lambda(1-\alpha)^2 - \frac{(1-\alpha)^3}{3} \\ \mu_3 &= \frac{2\alpha\lambda(2(2\alpha\lambda)^{\alpha_1+2} - (1-\alpha)^{\alpha_1+2})}{\alpha_1+2} + \frac{-2(2\alpha\lambda)^{\alpha_1+3} + (1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} \\ \mu_4 &= \frac{-2(2\alpha\lambda)^{\alpha_1+3} + 2\alpha\lambda(1-\alpha)^{\alpha_1+2}}{\alpha_1+2} + \frac{2(2\alpha\lambda)^{\alpha_1+3} - (1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} \\ &\quad + \frac{(2\alpha\lambda)^3 + (1-\alpha)^3}{3} - \alpha\lambda(1-\alpha)^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))(-1+(1-\alpha)^{\alpha_1+1})}{\alpha_1+1} + \frac{(2-2\lambda(1-\alpha))(1-(1-\alpha)^{\alpha_1+2})}{\alpha_1+2} \\ &\quad + \frac{-1+(1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} \\ \xi_2 &= \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))(1-(1-\alpha)^{\alpha_1+1})}{\alpha_1+1} + \frac{(2-2\lambda(1-\alpha))((1-\alpha)^{\alpha_1+2}-1)}{\alpha_1+2} \\ &\quad + \frac{1-(1-\alpha)^{\alpha_1+3}}{\alpha_1+3} - \frac{(2-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)^2}{2} \\ &\quad + (1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha) - \frac{1-2\lambda(1-\alpha)}{2} + \frac{1}{6} + \frac{(1-\alpha)^3}{3} \\ \xi_3 &= \frac{2(1-2\lambda(1-\alpha))^{\alpha_1+2} - (1-2\lambda(1-\alpha))(1+(1-\alpha)^{\alpha_1+1})}{\alpha_1+1} \\ &\quad + \frac{-2(1-2\lambda(1-\alpha))^{\alpha_1+2}(2-2\lambda(1-\alpha)) + (2-2\lambda(1-\alpha))(1+(1-\alpha)^{\alpha_1+2})}{\alpha_1+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(1 - 2\lambda(1 - \alpha))^{\alpha_1+3} - (1 + (1 - \alpha)^{\alpha_1+3})}{\alpha_1 + 3} \\
\xi_4 = & \frac{-2(1 - 2\lambda(1 - \alpha))^{\alpha_1+2} + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))(1 + (1 - \alpha)^{\alpha_1+1})}{\alpha_1 + 1} \\
& + \frac{2(1 - 2\lambda(1 - \alpha))^{\alpha_1+2}(2 - 2\lambda(1 - \alpha)) - (2 - 2\lambda(1 - \alpha))(1 + (1 - \alpha)^{\alpha_1+2})}{\alpha_1 + 2} \\
& + \frac{-2(1 - 2\lambda(1 - \alpha))^{\alpha_1+3} + (1 + (1 - \alpha)^{\alpha_1+3})}{\alpha_1 + 3} - \frac{(1 - \alpha)^3}{3} \\
& + \frac{(2 - 2\lambda(1 - \alpha))(1 - \alpha)^2}{2} - (1 - 2\lambda(1 - \alpha))(1 - \alpha) \\
& - \frac{(1 - 2\lambda(1 - \alpha))^3}{3} + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))^2 - \frac{1 - 2\lambda(1 - \alpha)}{2} + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left| (b - a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1 - \alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b - a)^2}{2} \left\{ (\mu_1 + \xi_1) |f''(b)| + m(\mu_2 + \xi_2) \left| f'' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}, \\ \quad 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \leq 1 - \alpha \leq 2\alpha\lambda \text{ için;} \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left\{ (\mu_1 + \xi_3) |f''(b)| + m(\mu_2 + \xi_4) \left| f'' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}, \\ \quad 1 - \alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1 - 2\lambda(1 - \alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left\{ (\mu_3 + \xi_1) |f''(b)| + m(\mu_4 + \xi_2) \left| f'' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}, \\ \quad 1 - \alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1 - 2\lambda(1 - \alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left\{ (\mu_3 + \xi_3) |f''(b)| + m(\mu_4 + \xi_4) \left| f'' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}, \\ \quad 2\alpha\lambda \leq 1 - \alpha \leq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \text{ için;} \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1 de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği uygulanır ve I üzerinde $|f''|$ 'nün (α_1, m) konveks olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| \left(t^{\alpha_1} |f''(b)| + m(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| \left(t^{\alpha_1} |f''(b)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \right\} \\
& = \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t| \left(t^{\alpha_1+1} |f''(b)| + mt(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| \left((1-t)t^{\alpha_1} |f''(b)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m(1-t)(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t| \left(t^{\alpha_1+1} |f''(b)| + mt(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \\
& = \begin{cases} \mu_1 |f''(b)| + m\mu_2 \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right|, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \\ \mu_3 |f''(b)| + m\mu_4 \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right|, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| \left((1-t)t^{\alpha_1} |f''(b)| + m(1-t)(1-t^{\alpha_1}) \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \\
& = \begin{cases} \xi_1 |f''(b)| + m\xi_2 \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right|, & 1-\alpha \geq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \xi_3 |f''(b)| + m\xi_4 \left| f''\left(\frac{a}{m}\right) \right|, & 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \end{cases}
\end{aligned}$$

yazılabilir. İntegraller hesaplanırsa Teorem 4.1.1 de verilen μ_i ve ξ_i ($i = 1,2,3,4$) katsayıları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° kümesinde iki kez türevlenebilen fonksiyon olsun. $f, f', f'' \in L[a, b]$; $a, b \in I^\circ$ ile $a < b$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere $|f''|$, I aralığında ikinci anlamda s – konveks fonksiyon ise $(\alpha, \lambda) \in [0,1]^2$ için,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^{s+2}}{s+2} - \frac{(1-\alpha)^{s+3}}{s+3} \\ \gamma_2 &= \frac{-2\alpha^{s+2}\lambda + 2\alpha\lambda + \alpha^{s+1} - 1}{s+1} + \frac{2(\alpha^{s+3}\lambda - \alpha\lambda - \alpha^{s+2} + 1)}{s+2} + \frac{\alpha^{s+3} - 1}{s+3} \\ \gamma_3 &= \frac{2(2\alpha\lambda)^{s+3} - 2\alpha\lambda(1-\alpha)^{s+2}}{s+2} + \frac{-2(2\alpha\lambda)^{s+3} + (1-\alpha)^{s+3}}{s+3} \\ \gamma_4 &= \frac{(1-2\alpha\lambda)^{s+1}(-4\alpha\lambda + 2) + 2\alpha\lambda + 2\alpha^{s+2}\lambda - \alpha^{s+1} - 1}{s+1} \\ &\quad + \frac{(1-2\alpha\lambda)^{s+2}(4\alpha\lambda - 4) - 2\alpha\lambda - 2\alpha^{s+3}\lambda + 2\alpha^{s+2} + 2}{s+2} \\ &\quad + \frac{2(1-2\alpha\lambda)^{s+3} - \alpha^{s+3} - 1}{s+3}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{(-1 + (1-\alpha)^{s+1})(1 - 2\lambda(1-\alpha))}{s+1} + \frac{(1 - (1-\alpha)^{s+2})(2 - 2\lambda(1-\alpha))}{s+2} \\ &\quad + \frac{-1 + (1-\alpha)^{s+3}}{s+3} \\ \tau_2 &= \frac{2\alpha^{s+2}(1-\alpha)\lambda}{s+2} - \frac{\alpha^{s+3}}{s+3} \\ \tau_3 &= \frac{(1 - 2\lambda(1-\alpha))[2(1 - 2\lambda(1-\alpha)^{s+1}) - (1-\alpha)^{s+1} - 1]}{s+1} \\ &\quad + \frac{(-2 + 2\lambda(1-\alpha))[2(1 - 2\lambda(1-\alpha))^{s+2} - (1-\alpha)^{s+2} - 1]}{s+2} \\ &\quad + \frac{2(1 - 2\lambda(1-\alpha))^{s+3} - (1-\alpha)^{s+3} - 1}{s+3} \\ \tau_4 &= \frac{2^{s+4}(\lambda(1-\alpha))^{s+3} - 2\alpha^{s+2}(1-\alpha)\lambda}{s+2} - \frac{2^{s+4}(\lambda(1-\alpha))^{s+3} - \alpha^{s+3}}{s+3}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)) \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_1 + \tau_1) |f''(b)| + (\gamma_2 + \tau_2) |f''(a)|\}, \\ 1 - 2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \leq 2\alpha\lambda \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_1 + \tau_3) |f''(b)| + (\gamma_2 + \tau_4) |f''(a)|\}, \\ 1-\alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_3 + \tau_1) |f''(b)| + (\gamma_4 + \tau_2) |f''(a)|\}, \\ 1-\alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_3 + \tau_3) |f''(b)| + (\gamma_4 + \tau_4) |f''(a)|\}, \\ 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \text{ için;} \end{cases}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3.1’de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği uygulanır ve I üzerinde $|f''|$ ’nün ikinci anlamda s – konveks olduğu kullanılırsa;

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t|(t^s|f''(b)| + (1-t)^s|f''(a)|)dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|(t^s|f''(b)| \right. \\
&\quad \left. + (1-t)^s|f''(a)|)dt \right\} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|(t^{s+1}|f''(b)| + t(1-t)^s|f''(a)|)dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|(t^s(1-t)|f''(b)| \right. \\
&\quad \left. + (1-t)^{s+1}|f''(a)|)dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|(t^{s+1}|f''(b)| + t(1-t)^s|f''(a)|)dt \\
&= \begin{cases} \gamma_1|f''(b)| + \gamma_2|f''(a)|, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \\ \gamma_3|f''(b)| + \gamma_4|f''(a)|, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|(t^s(1-t)|f''(b)| + (1-t)^{s+1}|f''(a)|)dt \\
&= \begin{cases} \tau_1|f''(b)| + \tau_2|f''(a)|, & 1-\alpha \geq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \tau_3|f''(b)| + \tau_4|f''(a)|, & 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \end{cases}
\end{aligned}$$

yazılabilir. İntegraller hesaplanırsa Teorem 4.1.2 de verilen γ_i ve τ_i ($i = 1,2,3,4$) katsayıları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.2’de $s = 1$ seçilirse Teorem 3.5 elde edilir.

Teorem 4.1.3. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° kümesinde iki kez türevlenebilen fonksiyon olsun. $f, f', f'' \in L[a, b]$; $a, b \in I^\circ$ ile $a < b$ olmak üzere $|f''|$, $[a, b]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyon ise $(\alpha, \lambda) \in [0, 1]^2$ için,

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha\lambda(1-\alpha)^2 - \frac{(1-\alpha)^3}{3} \\
z_2 &= \frac{(2\alpha\lambda)^3 + (1-\alpha)^3}{3} - \alpha\lambda(1-\alpha)^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{(1-\alpha)^3}{3} - \frac{(2-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)^2}{2} + (1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha) \\ &\quad - \frac{1-2\lambda(1-\alpha)}{2} + \frac{1}{6} \\ \rho_2 &= -\frac{(1-\alpha)^3}{3} + \frac{(1-\alpha)^2}{2} + \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)^2}{2} \\ &\quad - (1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha) + (1-2\lambda(1-\alpha))^2 \\ &\quad - \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^3}{3} - \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^2}{2} + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}& \left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right. \\ & \quad \left. + (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \right| \\ & \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\} (z_1 + \rho_1), \\ \quad 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \leq 2\alpha\lambda \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\} (z_1 + \rho_2), \\ \quad 1-\alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\} (z_2 + \rho_1), \\ \quad 1-\alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \text{ için;} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\} (z_2 + \rho_2), \\ \quad 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \text{ için;} \end{cases}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3.1’de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği uygulanır ve I üzerinde $|f''|$ ’nün *quasi* – konveks olduğu kullanılırsa;

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right. \\ \left. + (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t||f''(tb + (1-t)a)|dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1 - 2\lambda(1-\alpha) - t||f''(tb + (1-t)a)|dt \right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t|(\max\{|f''(b)|, |f''(a)|\})dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|(\max\{|f''(b)|, |f''(a)|\})dt \right\} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t|dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t|dt = \begin{cases} z_1, & 2\alpha\lambda \geq 1 - \alpha \\ z_2, & 2\alpha\lambda \leq 1 - \alpha \end{cases}$$

ve

$$\int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|dt = \begin{cases} \rho_1, & 1 - \alpha \geq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \\ \rho_2, & 1 - \alpha \leq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \end{cases}$$

yazılabilir. İntegraller hesaplanırsa Teorem 4.1.3 de verilen z_i ve ρ_i ($i = 1, 2$) katsayıları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2 Geometrik Kuadratik Konveks Fonksiyon Ve İlgili Bazı Eşitsizlikler

Tanım 4.2.1 $I, \mathbb{R}^+$ da bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq (tf^2(x) + (1-t)f^2(y))^{\frac{1}{2}}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna geometrik kuadratik konveks (GQ - konveks) fonksiyon denir.

Lemma 4.2.1 i) Eğer f fonksiyonu GA –konveks fonksiyon ise aynı zamanda GQ –konveks fonksiyondur. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

ii) Eğer f fonksiyonu GQ –konveks ve artan bir fonksiyon ise aynı zamanda harmonik kuadratik konveks (HQ –konveks) fonksiyondur.

İspat: i) Eğer f fonksiyonu GA –konveks fonksiyon ise

$$f(G(x, y)) \leq A(f(x), f(y))$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy}) &\leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \\ &\leq \sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu ise f fonksiyonunun GQ –konveks olduğunu gösterir.

ii) Eğer f fonksiyonu GQ –konveks fonksiyon ise

$$Q(f(x), f(y)) \geq f(G(x, y))$$

olarak yazılır. f fonksiyonunun artan olduğu göz önüne alındığında

$$Q(f(x), f(y)) \geq f(H(x, y))$$

elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun HQ –konveks olmasıdır.

Örnek 4.2.1. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ fonksiyonu $[e, \infty)$ aralığında GQ –konveks fonksiyondur fakat GA –konveks fonksiyon değildir.

İspat: f fonksiyonu GQ –konveks olması için ,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq (tf^2(x) + (1-t)f^2(y))^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir. Buradan $f(x) = \sqrt{\ln x}$ yazılırsa;

$$\sqrt{\ln(x^t y^{1-t})} = \sqrt{t \ln x + (1-t) \ln y}$$

olduğu görülür. Bu ise f fonksiyonunun GQ –konveks olduğunu gösterir. Şimdi ise f fonksiyonunun GA –konveks olmadığını gösterelim.

f fonksiyonu GA –konveks olması için ,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

şartını sağlaması gerekir. Buradan;

$$\sqrt{\ln(x^t y^{1-t})} \leq t\sqrt{\ln x} + (1-t)\sqrt{\ln y}$$

olup $t = \frac{1}{2}$, $x = e^2$, $y = e^3$ olarak seçilirse,

$$\sqrt{\frac{5}{2}} \leq \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$$

yazılır. Böylece;

$$\begin{aligned} 1,58113883 &\leq \frac{1,41421356237 + 1,73205080757}{2} \\ &= 1,57313218497 \end{aligned}$$

çelişkisiyle karşılaşılır ki bu durum $f(x) = \sqrt{\ln x}$ fonksiyonunun verilen değerler için GA –konveks olmadığını gösterir.

Teorem 4.2.1 i) $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu GQ –konveks fonksiyon ise $f^2(be^{-t})$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

ii) $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu GQ –konveks fonksiyon ise $f^2(x)$ fonksiyonu I üzerinde GA –konveks fonksiyondur.

İspat: **i)** f fonksiyonunun GQ –konveks olması kullanılıp $x = be^{-r}$ ve $y = be^{-s}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(be^{-\left(\frac{r+s}{2}\right)}\right) &\leq \sqrt{\frac{f^2(be^{-r}) + f^2(be^{-s})}{2}} \\ f^2\left(be^{-\left(\frac{r+s}{2}\right)}\right) &\leq \frac{f^2(be^{-r}) + f^2(be^{-s})}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise $f^2(be^{-t})$ fonksiyonunun konveks olması demektir.

ii) f fonksiyonunun GQ –konveks olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy}) &\leq \sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}} \\ f^2(\sqrt{xy}) &\leq \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise $f^2(x)$ fonksiyonunun GA –konveks olmasıdır.

Sonuç 4.2.1. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun GQ –konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $xf(x)f'(x)$ fonksiyonunun artan olmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.1' in şartları göz önüne alındığında sonuç görülür.

Kriter 4.2.1. İkinci mertebeden türevlenebilen f fonksiyonunun GQ –konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$x[f'(x)]^2 + f(x)[f'(x) + xf''(x)] > 0$$

olmasıdır.

Örnek 4.2.2. $f(x) = \log(1+x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında GQ –konveks fakat GG –konkav fonksiyondur.

Teorem 4.2.2. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ GQ –konveks fonksiyon olsun. $f \in L_1[a, b]$ olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için;

$$\int_0^1 f(x^t y^{1-t}) dt \leq \frac{2}{3} (f(x), f(y))$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f fonksiyonu GQ –konveks olduğundan,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq (tf^2(x) + (1-t)f^2(y))^{\frac{1}{2}}$$

yazılır. Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için;

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq \sqrt{t}f(x) + \sqrt{1-t}f(y)$$

yazılabilir. Her iki tarafın t 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinden integrali alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. f ve g fonksiyonları I üzerinde GQ –konveks fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\frac{1}{\ln y - \ln x} \int_x^y \frac{(fg)(u)}{u} du \leq \frac{f(x)g(x) + f(y)g(y)}{2} + [f(x)g(y) + f(y)g(x)] \frac{\pi}{8}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g fonksiyonları I üzerinde GQ –konveks olduğundan her $t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq (tf^2(x) + (1-t)f^2(y))^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$g(x^t y^{1-t}) \leq (tg^2(x) + (1-t)g^2(y))^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(x^t y^{1-t})g(x^t y^{1-t}) &\leq (tf^2(x) + (1-t)f^2(y))^{\frac{1}{2}}(tg^2(x) + (1-t)g^2(y))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\sqrt{t}f(x) + \sqrt{1-t}f(y))(\sqrt{t}g(x) + \sqrt{1-t}g(y)) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin t 'ye göre $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinden integrali alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4. $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde GQ –konveks ise her $x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} &\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ &\leq \frac{a^2(\ln x - \ln a)}{2} \left(\frac{L(a^4, x^4)}{a^4} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(a)|) \\ &\quad + \frac{b^2(\ln b - \ln x)}{2} \left(\frac{L(x^4, b^4)}{b^4} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(b)|) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 3.2 de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği uygulanır ve f' fonksiyonunun GQ –konveks olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u)du \right| \\ &\leq (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} |f'(x^t a^{1-t})| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\ln b - \ln x) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} |f'(x^t b^{1-t})| dt \\
& \leq (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} \sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[|f'(a)|]^2} dt \\
& \quad +(\ln b - \ln x) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} \sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[|f'(b)|]^2} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} [\sqrt{t}|f'(x)| + \sqrt{1-t}|f'(a)|] dt \\
& \quad +(\ln b - \ln x) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} [\sqrt{t}|f'(x)| + \sqrt{1-t}|f'(b)|] dt \\
& = a^2(\ln x - \ln a) \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{2t} \sqrt{t}|f'(x)| dt + \int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{2t} \sqrt{1-t}|f'(a)| dt \right] \\
& \quad + b^2(\ln b - \ln x) \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{b}\right)^{2t} \sqrt{t}|f'(x)| dt + \int_0^1 \left(\frac{x}{b}\right)^{2t} \sqrt{1-t}|f'(b)| dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen ifadeye Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq \frac{a^2(\ln x - \ln a)}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{4t} |f'(x)| dt + \int_0^1 t |f'(x)| dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \left(\frac{x}{a} \right)^{4t} |f'(a)| dt + \int_0^1 (1-t) |f'(a)| dt \Bigg] \\
& + \frac{b^2(\ln b - \ln x)}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{4t} |f'(x)| dt + \int_0^1 t |f'(x)| dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{4t} |f'(b)| dt + \int_0^1 (1-t) |f'(b)| dt \right] \\
& = \frac{a^2(\ln x - \ln a)}{2} \left(\frac{\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 1}{4(\ln x - \ln a)} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(a)|) \\
& + \frac{b^2(\ln b - \ln x)}{2} \left(\frac{\left(\frac{x}{b} \right)^4 - 1}{4(\ln x - \ln b)} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(b)|) \\
& = \frac{a^2(\ln x - \ln a)}{2} \left(\frac{L(a^4, x^4)}{a^4} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(a)|) \\
& + \frac{b^2(\ln b - \ln x)}{2} \left(\frac{L(x^4, b^4)}{b^4} + \frac{1}{2} \right) (|f'(x)| + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5 $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $|f'|$, I üzerinde GQ -konveks ise her $x \in [a, b]$ ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq (\ln x - \ln a) L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, a^{2p}) \left(\frac{2}{3} \{ [|f'(x)|]^q + [|f'(a)|]^q \} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (\ln b - \ln x) L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{2}{3} \{ [|f'(x)|]^q + [|f'(b)|]^q \} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.2 de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği uygulanıp daha sonra f' fonksiyonunun GQ –konveks olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} |f'(x^t a^{1-t})| dt \\
& \quad + (\ln b - \ln x) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} |f'(x^t b^{1-t})| dt \\
& \leq (\ln x - \ln a) \left(\int_0^1 (x^{2t} a^{2(1-t)})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln b - \ln x) \left(\int_0^1 (x^{2t} b^{2(1-t)})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln x - \ln a) \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{a} \right)^{2tp} a^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln b - \ln x) \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b} \right)^{2tp} b^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq a^2 (\ln x - \ln a) \left(\frac{\left(\frac{x}{a} \right)^{2p} - 1}{2p(\ln x - \ln a)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[f'(a)]^2} \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + b^2 (\ln b \\
& \quad - \ln x) \left(\frac{\left(\frac{x}{b} \right)^{2p} - 1}{2p(\ln x - \ln b)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[f'(b)]^2} \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq (\ln x - \ln a)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, a^{2p}) \left(\int_0^1 \sqrt{t[|f'(x)|]^{2q} + (1-t)[|f'(a)|]^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ + (\ln b - \ln x)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, b^{2p}) \left(\int_0^1 \sqrt{t[|f'(x)|]^{2q} + (1-t)[|f'(b)|]^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ \leq (\ln x - \ln a)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, a^{2p}) \left(\int_0^1 (\sqrt{t}[|f'(x)|]^q + \sqrt{1-t}[|f'(a)|]^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ + (\ln b - \ln x)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, b^{2p}) \left(\int_0^1 (\sqrt{t}[|f'(x)|]^q + \sqrt{1-t}[|f'(b)|]^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ = (\ln x - \ln a)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, a^{2p}) \left(\frac{2}{3} \{[|f'(x)|]^q + [|f'(a)|]^q\} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + (\ln b - \ln x)L^{\frac{1}{p}}(x^{2p}, b^{2p}) \left(\frac{2}{3} \{[|f'(x)|]^q + [|f'(b)|]^q\} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.6 $f: I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $|f'|$, I üzerinde GQ –konveks ise her $x \in [a, b]$ ve $p > 1$ için

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right|$$

$$\leq \sum_{n=a,b} n^{\frac{4}{p}} (\ln x - \ln n) L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, n^2) \left(\left(\frac{L(x^4, n^4)}{n^4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{[|f'(x)|]^p}{2} + \frac{[|f'(n)|]^p}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.2 de her iki yanın mutlak değeri alınıp integraller için üçgen eşitsizliği ve Power Mean eşitsizliği uygulanıp daha sonra f' fonksiyonunun GQ –konveks olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq (\ln x - \ln a) \int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} |f'(x^t a^{1-t})| dt \\ & \quad + (\ln b - \ln x) \int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} |f'(x^t b^{1-t})| dt \\ & \leq (\ln x - \ln a) \left(\int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} |f'(x^t a^{1-t})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + (\ln b - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} |f'(x^t b^{1-t})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq a^2 (\ln x - \ln a) \left(\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln a)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} \left(\sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[|f'(a)|]^2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + b^2 (\ln b - \ln x) \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln b)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} \left(\sqrt{t[|f'(x)|]^2 + (1-t)[|f'(b)|]^2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq a^2(\ln x - \ln a) \left(\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln a)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} \sqrt{t[|f'(x)|]^{2p} + (1-t)[|f'(a)|]^{2p}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + b^2(\ln b - \ln x) \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln b)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} \sqrt{t[|f'(x)|]^{2p} + (1-t)[|f'(b)|]^{2p}} dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq a^2(\ln x - \ln a) \left(\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln a)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 x^{2t} a^{2(1-t)} (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p + \sqrt{1-t}[|f'(a)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b^2(\ln b - \ln x) \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 1}{2(\ln x - \ln b)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 x^{2t} b^{2(1-t)} (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p + \sqrt{1-t}[|f'(b)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = a^2(\ln x - \ln a) \left(\frac{L(x^2, a^2)}{a^2} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{2t} a^2 (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{1-t}[|f'(a)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + b^2(\ln b - \ln x) \left(\frac{L(x^2, b^2)}{b^2} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b}\right)^{2t} b^2 (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{1-t}[|f'(b)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = a^{\frac{4}{p}}(\ln x - \ln a) L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, a^2) \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{a}\right)^{2t} (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p + \sqrt{1-t}[|f'(a)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + b^{\frac{4}{p}}(\ln b - \ln x) L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, b^2) \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{b}\right)^{2t} (\sqrt{t}[|f'(x)|]^p + \sqrt{1-t}[|f'(b)|]^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen ifadeye Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(u) du \right| \\
& \leq a^{\frac{4}{p}}(\ln x - \ln a) L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, a^2) \\
& \times \left(\frac{[|f'(x)|]^p}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{4t} + t \right) dt + \frac{[|f'(a)|]^p}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{4t} + 1 - t \right) dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b^{\frac{4}{p}}(\ln b - \ln x)L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, b^2) \\
& \times \left(\frac{[|f'(x)|]^p}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^{4t} + t \right) dt + \frac{[|f'(b)|]^p}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{b} \right)^{4t} + 1 - t \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = a^{\frac{4}{p}}(\ln x - \ln a)L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, a^2) \left(\left(\frac{L(x^4, a^4)}{a^4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{[|f'(x)|]^p}{2} + \frac{[|f'(a)|]^p}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& +b^{\frac{4}{p}}(\ln b - \ln x)L^{1-\frac{1}{p}}(x^2, b^2) \left(\left(\frac{L(x^4, b^4)}{b^4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{[|f'(x)|]^p}{2} + \frac{[|f'(b)|]^p}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3 Elde Edilen Teoremlere Dair Bazı Sonuç ve Uygulamalar

Sonuç 4.3.1. Teorem 4.1.2’de $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = 1$ seçilirse,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2(s+2)(s+3)} (|f''(b)| + |f''(a)|)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.1.3’de $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{11(b-a)^2}{162} \max\{|f''(b)|, |f''(a)|\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uygulama 4.3.1. $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $s \in (0,1)$ olsun. Bu durumda

$$|A(a^s, b^s) - L_s^s(a, b)| \leq \frac{(b-a)^2 s(s-1)}{(s+2)(s+3)} A(a^{s-2}, b^{s-2})$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.3.1’de $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, s \in (0,1), a, b, c \in \mathbb{R}, b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

s –konveks fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 4.3.2. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$|H^{-1}(a, b) + 2A^{-1}(a, b) - 3L^{-1}(a, b)| \leq \frac{11(b-a)^2}{27\min\{a^3, b^3\}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.3.2’de $x > 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x}$ *quasi* –konveks fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Uygulama 4.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu durumda

$$|A(\ln a, \ln b) + 2\ln(A(a, b)) - 3\ln(I(a, b))| \leq \frac{11(b-a)^2}{54\min\{a^2, b^2\}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Sonuç 4.3.2’de $f(x) = \log x$ *quasi* –konveks fonksiyonu seçilirse istenen sonuç elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada geometrik-kuadratik konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış, bu sınıfın özellikleri ortaya konulmuş, bu sınıfa ait örnekler verilmiş ve bulunan yeni sınıfla ilgili lemmalar ve teoremler elde edilmiştir. Bunun yanı sıra ikinci türevi farklı sınıflardan konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiş ve bu eşitsizliklere uygulamalar verilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, bu çalışmada da elde edilen geometrik-kuadratik konveks fonksiyon sınıfını kullanarak yeni eşitsizlikler elde edebilir; literatürde mevcut fonksiyon sınıflarını örneklendirerek teorik ifadeleri görselleştirebilirler. Ayrıca bu çalışmada elde edilmiş olan yeni konveks fonksiyon türlerini kullanarak Hermite-Hadamard tipli, Fejér tipli, Grüss tipli birçok yeni eşitsizlik yazabilirler.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Alomari, M., 2011. Several Inequalities of Hermite–Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –convex, quasi-convex and r –convex Mappings and Applications, Ph.D. Thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi, Malezya.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., 2007. Generalized convexity and inequalities, J.Mat.Anal.Appl., 335, 1294-1308.
- Avcı, M., Akdemir, A.O., Set, E., 2015. New Integral inequalities via GA –convex functions, <http://ajmaa.org/RGMIA/papers/v18/v18a103.pdf>, submitted.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Bagdasar, O., 2006. Inequalities and Applications, Master Thesis, Babeş Bolyai University, Romania.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse aller allgemeiner konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen, Publ. Inst. Math., 23, 13–20.
- Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 459 pp, Dordrecht-Boston.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21 (3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlya funktsii širokogo klassa, soderzhashchego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funktsii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Gürbüz, M. and Yaradılmış, A., 2015. Some generalizations of integral inequalities and their applications, arXiv:1503.02500, submitted.
- Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

- Hazy, A., 2005. Solving Methods of Linear Functional Equation and Stability of t –Convex Functions, Debrecen Üniversitesi, Macaristan.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions, Aequationes Math., 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Pachpatte, B.G., 2005. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York.
- Roojin, J., 2003. Inequalities and Applications, University for Teacher Education, İran.
- Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Skala, H.J., 1998. On the characterization of certain similarly ordered super-additive functionals, Proceedings of the American Mathematical Society, 126 (5), 1349-1353.
- Toader, G.H., 1984. Some Generalisations of the Convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca, 329-338, Romania.
- Toader, G.H., 1988. On a generalization of the convexity, Mathematica, 30(53), 83-87.
- Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Tunç, M., 2012. On some new inequalities for convex functions, Turk. J. Math., 36, 245-251.
- Varošanec, S., 2007. On h –convexity, J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61, 620-622.
- Yıldız, Ç., 2011. Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

- Yıldız, Ç., 2014. n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s –Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/560586.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Hatay’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Hatay’da tamamladı. 2004 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında tezsiz yüksek lisan eğitimine başlayıp 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Ağrı ilinde ortaöğretim matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Evli olup Hatay ili Belen ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

