



**GEOMETRİK VE TOPOLOJİK
ÇIKARIMLAR:
TOPOLOJİK VERİ ANALİZİ**

Sedanur KILIÇ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI**

**2022
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GEOMETRİK VE TOPOLOJİK ÇIKARIMLAR:
TOPOLOJİK VERİ ANALİZİ**

Sedanur KILIÇ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2022

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13 / 06 / 2022

Sedanur KILIÇ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEOMETRİK VE TOPOLOJİK ÇIKARIMLAR: TOPOLOJİK VERİ ANALİZİ

Sedanur KILIÇ

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

TDA, topoloji tekniklerini kullanarak veri kümelerinin analizine yönelik bir yaklaşımdır. Yüksek boyutlu, eksik ve gürültülü veri kümelerinden bilgi çıkarmak genellikle zordur. Yüksek boyutlu verilerin görselleştirilmesini sağlayan TDA, bu tür verileri belirli bir metriğe duyarlı olmayan bir şekilde analiz etmek için genel bir çerçeve sağlar. Topolojik veri analizinin (TDA), amacı verilerin topolojik ve geometrik yapısını anlamaktır. Bu amaç doğrultusunda matematiksel ve algoritmik araçlar sağlar. Günümüzde gelişmekte olan bir alandır. Verilerden çıkarılan topolojik bilgiler göz önüne alınarak matematiksel temellere odaklanılır. Böyle topolojik analizlerin, başka yollarla kolayca elde edilemeyen, veri kümeleri hakkında nitel bilgi verebileceği artık yaygın olarak kabul edilmektedir. Bu tez, bu yeni alana kısa bir giriş sağlar. Bu tezde Topolojik Veri Analizinin ana hatlarından bahsedilmiş ve R STUDIO programı vasıtasıyla Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü (KRDAE) 'nden alınan veri seti kullanılarak bir uygulama yapılmıştır.

2022, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Topolojik Veri Analizi (TDA), Kalıcı Homoloji, Betti Sayıları, Rips Diyagramı, KNN Diyagramı, KDE Diyagramı, Barkod

ABSTRACT

MS. Thesis

GEOMETRIC AND TOPOLOGICAL INFERENCE: TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS

Sedanur KILIÇ

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Topological data analysis (TDA) is an approach to the analysis of datasets using topology techniques. It is often difficult to extract information from high-dimensional, incomplete, and noisy datasets. By enabling the visualization of high-dimensional data, TDA provides a general framework for analyzing such data in a way that is insensitive to the particular metric. The purpose of topological data analysis (TDA) is to understand the topological and geometric structure of data. It provides mathematical and algorithmic tools for this purpose. It is a developing field today. Considering the topological information extracted from the data, the focus is on mathematical foundations. It is now widely accepted that such topological analyzes can yield qualitative information about datasets that are not easily obtained by other means. This thesis provides a brief introduction to this new field. In this thesis, the main lines of Topological Data Analysis were mentioned and an application was made using the data set obtained from Bogazici University Kandilli Observatory and Earthquake Research Institute (KRDAE) through the R STUDIO program.

2022, 53 page

Keywords: Topological Data Analysis (TDA), Persistence Homology, Betti Numbers, Rips Diagram, KNN Diagram, KDE Diagram, Barcode

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışmamı oluşturmamda bana her türlü desteğini esirgemeyen, değerli fikirlerinden yararlandığım, her zaman yanımda olan, bana güvenen çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım çok kıymetli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında her daim yanımda olan, desteklerini esirgemeyen ve duydukları sonsuz güvenden dolayı başta annem Sevdâ KILIÇ, babam Musa KILIÇ, nişanlım Dr. Osman Nuri ÇİNAR'a, değerlim olan kardeşlerime ve çok kıymetli aileme teşekkür ederim.

Sedanur KILIÇ
Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Hesaplama	3
2.2. Görselleştirme	4
2.3. Çok Boyutlu Kalıcılık	4
3. TOPOLOJİK ÖN BİLGİLER	6
3.1. Topolojik Uzaylar	6
3.2. Topolojik Uzayların Karşılaştırılması.....	8
3.2.1 Homeomorfizm, İzotopi ve Homotopi Denkliği	8
3.3. Hausdorff Mesafesi	12
4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER	16
4.1. Geometrik Simplicial Kompleksler.....	16
4.2. Soyut Simplicial Kompleksler	18
4.3. Nerve	20
4.4. Simplicial Komplekslerin Filtrasyonu	21
4.5. Bir Kompleksin Köşelerinde Tanımlanan Bir Fonksiyonla Eşlenen Filtrasyon.....	23
4.6. Vietoris-Rips ve Cech Filtrasyonları.....	24
4.7. Kombinatorial Manifold Üçgenlemeleri	26
4.8. Topolojik Veri Analizi	29
4.9. Kalıcı Homolojiye (Persistence Homoloji) Giriş.....	30
5. TOPOLOJİK DATA ANALİZİNİN BİR UYGULAMASI	40
6. SONUÇ ve ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR	49
EKLER	51

EK 1	51
EK 2	53



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$\inf(A)$	A kümesinin alt sınırlarının en büyüğü
$\sup(A)$	A kümesinin üst sınırlarının en küçüğü
β_k	k. Betti Sayısı
$Sk_j(K)$	K 'nin j –iskeleti
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
R_ε	Rips Kompleks
K	Simplicial kompleksi
C_ε	Čech Kompleks

Kısaltmalar

KRDAE	Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü
KDE	Çekirdek yoğunluk tahmini
KNN	K-Nearest Neighbors (K-En Yakın Komşular)
TDA	Topolojik Veri Analizi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. A ve B kümelerinin grafiği	8
Şekil 3.2. Poligonal eğri ve çember.	9
Şekil 3.3. Tora homeomorf iki yüzey.	10
Şekil 3.4. Homotop örnekleri.....	11
Şekil 3.5 Ofset örnekleri	13
Şekil 3.6. Hausdorff mesafesi örneği.....	14
Şekil 4.1. Simpleks oluşumu.....	17
Şekil 4.2. Simplicial kompleks örneği	18
Şekil 4.3 K simplicial kompleksi filtrasyonu.....	23
Şekil 4.4. Čech kompleksi örneği.	25
Şekil 4.5. İki boyutlu bir kompleks.	27
Şekil 4.6. Betti sayıları.....	29
Şekil 4.7. 19 noktanın temsili	31
Şekil 4.8. 19 noktanın temsili çemberi.....	31
Şekil 4.9. Çember çizme	31
Şekil 4.10. Tüm noktalara t yarıçaplı çember çizilmesi.....	32
Şekil 4.11. Simpleks boyutları	32
Şekil 4.12. Simplicial Kompleks	33
Şekil 4.13. Simplicial Kompleksin inşası	34
Şekil 4.14 4 nokta temsili	34
Şekil 4.15. Mesafe gösterimi	35
Şekil 4.16. Mesafe gösterimi (t2).....	35
Şekil 4.17. Çift temsili	35
Şekil 4.18. Basit komplekslerin dizisi	36
Şekil 4.19. TDA sürecinin nitelenmesi örneği.....	37
Şekil 4.20. Noktaların barkod gösterimlerine bir örnek-1	38
Şekil 4.21. Noktaların barkod gösterimlerine bir örnek-2	39
Şekil 5.1. KRDAE'den alınan veri setinin saçılım grafiği	40
Şekil 5.2. KRDAE' den alınan veri setinin R STUDIO' ile gösterimi.....	40
Şekil 5.3. 1 simpleks oluşumunun gösterimi-1.....	41
Şekil 5.4. 1 simpleks oluşumunun gösterimi-2.....	42

Şekil 5.5. Tetrahedron oluşumunun temsili	42
Şekil 5.6. Tetrahedronların renklendirilerek temsili gösterimi	43
Şekil 5.7. KDE Diyagramı	44
Şekil 5.8. Rotated Diyagramı	45
Şekil 5.9. Barkod	46
Şekil 5.10. KDE	47



1. GİRİŞ

TDA, topoloji teknikleri kullanılarak veri kümelerinin analizine yönelik bir yaklaşımdır. Topolojik Veri Analizinin normal yani alışlagelmiş mod, medyan, aritmetik ortalama, standart sapma, varyans, covaryans gibi değişkenlerle yapılan veri analizinden en büyük farkı küresel karakterizasyonda işlemlerin uygulanmasıdır.

TDA en kısa ve en anlaşılır halde nitel olarak ifade edilecek olursa bir belgesel izlendiğini göz önüne alınsın. Belgeselde bir fasulye tohumunun filizlenip ilk yapraklarını çıkarıp ilk çiçeklerini açtığı hatta ilk fasulye tanelerini verdiği anlara odaklanıldığında, tam olarak 3. Gün 5. Dakika 34. Saniye 10. Salisede tohum filizlendi denilemez çünkü sistem bir süreci takip etmiştir ve zaman konusunda bir netlik yoktur. Filizlenme işlemi üçüncü günün beşinci dakikasında onuncu salisesinden önce başlamış ve sonrasında da devam etmiştir. TDA tam olarak işlemleri birer süreç halinde irdelemektedir. Böylece veri setini lineer olarak alınmadığından herhangi bir kayıp veri oluşmamakta ve daha doğru daha güvenilir sonuçlar elde edilmesi amaçlanmaktadır.

TDA ile birlikte nokta bulutu veri kümeleri için homolojide teori olan persistence homoloji kavramı ortaya çıkmıştır. Persistence kavramını ilk olarak 2002'de Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian tarafından yazılmış olan "Topological Persistence and Simpliciation" adlı makalede ifade edilmiştir. Persistence homoloji ile, topolojik uzayların bir filtrasyonunun homolojisinin değişimini gözlemleyebilir ve dolayısıyla çalışma yapılan uzay hakkında bilgi edinilir.

Günümüzde ise birçok araştırmacı bilim insanı TDA üzerinde çalışmalar yapmaktadır. TDA nispeten yeni gelişen ve çağın gereklilikleri doğrultusunda ilerleyen bir çalışma alanıdır.

Tez aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır,

Birinci bölüm Giriş bölümünü oluşturmaktadır. Bu bölümde TDA kavramının ne olduğundan kısaca bahsedilmiş, tezin başlık ve içeriği ile ilgili bilgiler verilmiştir.

İkinci bölüm Kaynak Özetleri olup tarihsel süreç kısmı Hesaplama, Görselleştirme ve Çok Boyutluluk başlıkları adı altında incelenmiştir.

Üçüncü bölüm Topolojik Ön Bilgilerdir. Bu bölümde Topolojik Uzaylarda yer alan temel tanım ve teoremler hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölüm Simplicial Kompleksler olarak adlandırılmış olup bu bölümde. Simplicial Kompleksler, nerve, filtrasyon çeşitlerinden bahsedilmiştir.

Beşinci bölüm TDA'nın bir uygulaması verilmiştir. Bu bölümde Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü (KRDAE) 'nden alınan 2019 yılına ait 4.0 ve 5.9 şiddetine sahip depremlerden oluşan 176 depreme ait noktadan oluşan veri seti için TDA yapılmıştır.

Altıncı bölüm TDA çalışmaları sonucunda elde edilen Sonuç ve Öneriler Bölümünü oluşturmaktadır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

TDA, topoloji teknikleri kullanılarak veri kümelerinin analizine yönelik bir yaklaşımdır. Yüksek boyutlu, eksik ve gürültülü veri kümelerinden bilgi çıkarmak genellikle zordur. TDA, bu tür verileri belirli metriğe duyarlı olmayan bir şekilde analiz etmek için imkan tanır. Yüksek veri boyutlarında azalma ve gürültüye karşı dayanıklılık sağlar. Tüm bunlara ek olarak, modern matematiğin temel bir kavramı olan işlevsellik, yeni matematiksel araçlara uyum sağlamasına izin veren topolojik yapısından mirastır.

Yapılacak olan ilk iş, verilerin şeklini incelemektir. TDA, matematiksel olarak titiz bir şekil çalışmasına izin vermek için cebirsel topolojiyi ve pür matematikten diğer araçları birleştirir. Tüm bu işlemlerdeki temel işlev, homolojinin nokta bulutu verilerine uyarlanmasıdır. Yani kalıcı homolojidir (persistence). Kalıcı homoloji, birçok alanda birçok veri türüne uygulanır. Ayrıca, matematiksel temeli de teorik öneme sahiptir. TDA 'nın benzersiz özellikleri, onu topoloji ve geometri arasında umut verici bir köprü konumuna getirir.

Kalıcı homolojinin kavramının öncüleri zaman içinde kademeli olarak ortaya çıkmıştır.

Edelsbrunner ve arkadaşları tarafından, kalıcı homoloji kavramı verimli bir algoritma ve kalıcılık diyagramı olarak görselleştirme ile birlikte tanıtılmıştır (Edelsbrunner et al. 2002).

Carlsson ve arkadaşları tarafından ilk tanım yeniden formüle edilmiştir ve kalıcılığı değişmeli cebir dilinde yorumlayarak kalıcılık barkodları adı verilen eşdeğer bir görselleştirme yöntemi verilmiştir (Zomorodyan et al. 2004).

2.1. Hesaplama

Cebirsel topolojide kalıcı homoloji, Sergey Barannikov'un Mors teorisi üzerine çalışmasıyla ortaya çıkmıştır. Düzgün Mors fonksiyonunun kritik değer kümesi kanonik olarak "doğum-ölüm" çiftlerine bölünmüş, filtrelenmiş kompleksler sınıflandırılmış,

bunların değişmezleri, kalıcılık diyagramına eşdeğer ve kalıcılık barkodları, hesaplamaları için verimli algoritma ile birlikte açıklanmıştır. 1994 yılında Barannikov tarafından kanonik formlar adı altında tanımlanmıştır (Barannikov and Sergey 1994).

Cebirsel topoloji ortamında kalıcı homoloji için tüm alanlar üzerindeki ilk algoritma, üst üçgen matrisler tarafından kanonik forma indirgeme yoluyla Edelsbrunner ve diğerleri tarafından verilmiştir.

Zomorodian ve Carlsson tarafından, tüm alanlarda kalıcı homolojiyi hesaplamak için ilk pratik algoritma verilmiştir (Zomorodyan et al. 2004).

Edelsbrunner ve Harer'ın kitabı, hesaplamalı topoloji hakkında genel rehberlik sağlar (Edelsbrunner et al. 2010).

2.2. Görselleştirme

Yüksek boyutlu verilerin doğrudan görselleştirilmesi imkansızdır. Temel bileşen analizi ve çok boyutlu ölçekleme gibi veri kümesinden düşük boyutlu bir yapı çıkarmak için birçok yöntem icat edilmiştir. Bununla birlikte, aynı veri setinde birçok farklı topolojik özellik bulunabileceğinden, sorunun kendisinin kötü bir şekilde ortaya konduğunu belirtmek önemlidir. Bu nedenle, yüksek boyutlu uzayların görselleştirilmesinin incelenmesi, mutlaka kalıcı homoloji kullanımını içermese de, TDA için merkezi öneme sahiptir. Bununla birlikte, veri görselleştirmede kalıcı homoloji kullanmak için son zamanlarda girişimlerde bulunulmuştur.

2.3. Çok Boyutlu Kalıcılık

Çok boyutlu kalıcılık TDA için oldukça önemlidir. Kavram hem teoride hem de pratikte ortaya çıkar.

Carlsson ve Zomorodian tarafından da çok boyutlu kalıcılık teorisi tanıtılmıştır. Tanımları, n değişkenli bir polinom halkası üzerinde $\mathbb{Z}^n$ dereceli bir modül

olarak n parametrelili çok boyutlu kalıcılığı sunar. Değişmeli ve homolojik cebir araçları Harrington-Otter-Schenck-Tillman'ın çalışmasında çok boyutlu kalıcılığın incelenmesine uygulanır. Literatürde ortaya çıkan ilk uygulama, TDA 'nın icadına benzer bir şekil karşılaştırma yöntemidir (Biasotti et al. 2008).



3. TOPOLOJİK ÖN BİLGİLER

3.1. Topolojik Uzaylar

Tanım 3.1.1: X kümesindeki bir topoloji, aşağıdaki üç koşulu karşılayan X 'in alt kümelerinden oluşan bir τ ailesidir:

1. Boş küme $\emptyset$ ve X , τ 'nun elemanlarıdır,
2. τ 'nun elemanlarının herhangi bir birleşimi τ 'nun bir elemanıdır,
3. τ 'nun elemanlarının herhangi bir sonlu kesişimi, τ 'nun bir elemanıdır.

X kümesi, elemanları açık kümeler olarak adlandırılan τ ailesiyle birlikte bir topolojik uzaydır. Tümleyeni açık bir küme ise, X 'in bir C alt kümesi kapalıdır. $Y \subset X$, X 'in bir alt kümesiye, $\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$ ailesi, Y üzerinde indüklenmiş (rölatif topoloji) topoloji adı verilen bir topolojidir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.1.2: S , X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun.

S 'nin kapanışı $\bar{S}$, S 'yi içeren en küçük kapalı kümedir.

S 'nin iç kümesi S° , S 'nin içerdği en büyük açık kümedir.

S 'nin sınırı ∂S , $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$ küme farkıdır (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.1.3: X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere,

$d : X \times X \rightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, d 'ye X üzerinde bir metriktir denir.

$$\forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$\forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

d metriği ile birlikte X kümesine metrik uzay denir. (X, d) İle gösterilir (Karaca 2018).

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere,

$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ tüm açık yuvarlarını içeren en küçük topoloji, d tarafından doğurulan X üzerinde metrik topoloji olarak adlandırılır (Karaca 2018).

Tanım 3.1.4: X ve X' iki topolojik uzay arasında $f : X \rightarrow X'$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart, herhangi bir açık kümenin ön görüntüsünün açık olmasıdır. Yani f 'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart $0' \subset X'$ açık bir küme olmak üzere $(f^{-1}(0')) = \{x \in X : f(x) \in 0'\}$ kümesi X de açık bir küme olmasıdır. Denk olarak X' 'daki herhangi bir kapalı kümenin ön görüntüsü X te kapalı bir kümeysse f süreklidir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.1.5: X 'in herhangi bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X topolojik uzayı kompakt bir uzaydır denir. Yani $\{U_i\}_{i \in I}$, $X = \cup_{i \in I} U_i$ olacak şekilde açık kümelerinin herhangi bir ailesi olmak üzere $X = \cup_{j \in J} U_j$ olacak şekilde I indis kümesinin sonlu bir $J \subset I$ alt kümesi vardır (Boissonnat et al. 2017).

Metrik uzaylar için, kompaktlık, diziler kullanılarak karakterize edilir: bir X metrik uzayının kompakt olması için, gerek ve yeter şart X 'teki herhangi bir dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır (Boissonnat et al. 2017).

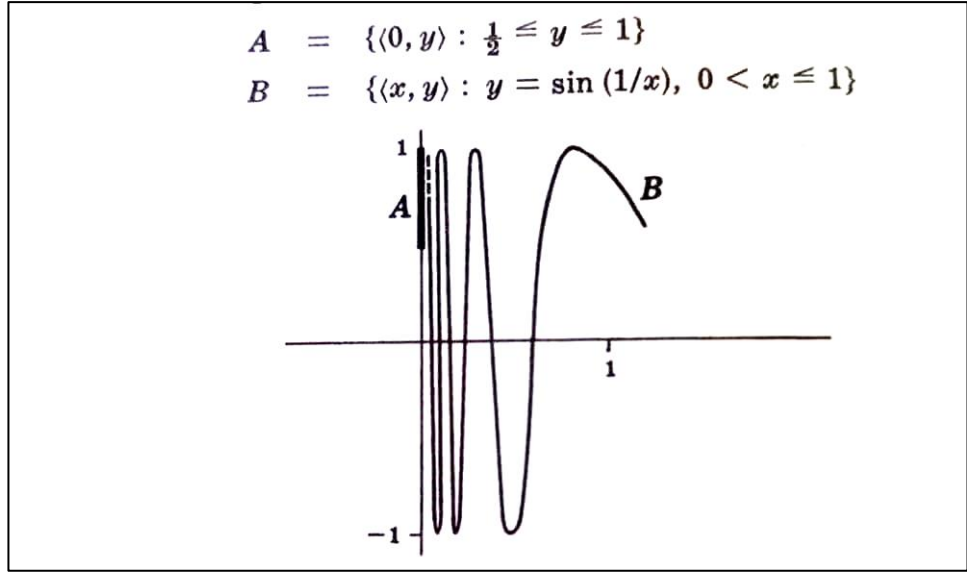
Tanım 3.1.6: $\forall x, y \in X$ için, $\gamma(0) = x$ ve $\gamma(1) = y$ olacak şekilde $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ sürekli dönüşümü varsa, X topolojik uzayı yol (eğrisel) bağlantılıdır (Boissonnat et al. 2017).

Yol bağlantılı bir uzay her zaman bağlantılıdır, ancak genel olarak bunun tersi doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}^2$ alışılmış uzayının aşağıdaki alt kümelerini göz önüne alınırsa:

$$A = \{(0, y) : 1/2 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\},$$

$A \cup B$ bağlantılı bir kümedir ancak eğrisel bağlantılı değildir (Boissonnat et al. 2017).



Şekil 3.1. A ve B kümelerinin grafiği

Tanım 3.1.7: Öklid uzayları $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ uzayı ve bunun alt kümeleri özellikle ilgi çekici örneklerdir. Tez boyunca, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^d x_i^2$$

$\mathbb{R}^d$ üzerindeki Öklid normunu gösterir. $\mathbb{R}^d: d(x, y) = \|x - y\|$ üzerinde Öklid metriğini oluşturur. $\mathbb{R}^d$ üzerindeki standart topoloji, Öklid metriği tarafından oluşturulan topolojidir. Bir $K \subset \mathbb{R}^d$ alt kümesinin (Öklidyen topolojiden oluşturulmuş rölatif topoloji ile) kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır (Heine-Borel Teoremi) (Boissonnat et al. 2017).

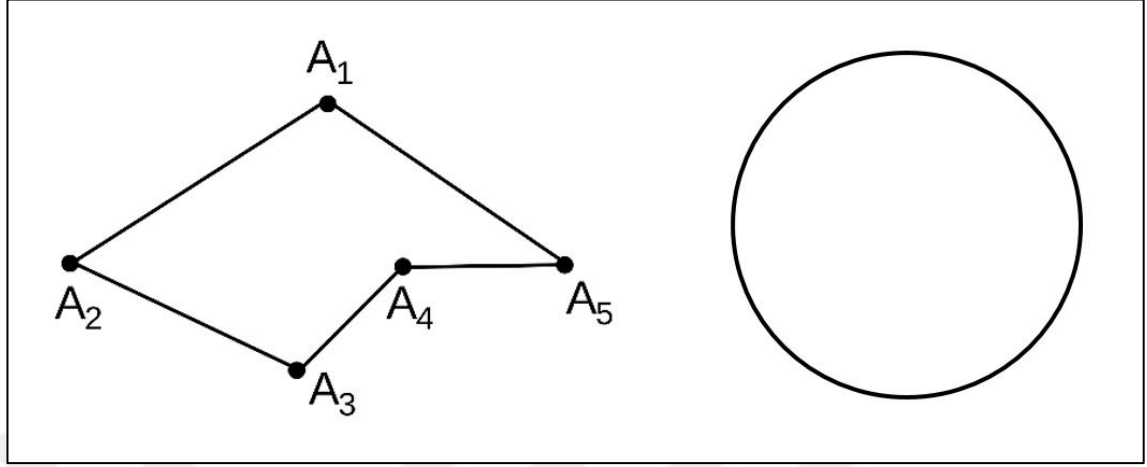
3.2. Topolojik Uzayların Karşılaştırılması

3.2.1 Homeomorfizm, İzotopi ve Homotopi Denkliği

Topolojide, homeomorf olan iki topolojik uzay aynı kabul edilir.

Tanım 3.2.2: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere, eğer h^{-1} tersi sürekli olacak şekilde $h : X \rightarrow Y$ sürekli birebir ve örten bir dönüşüm varsa bu iki topolojik uzayı homeomorftur denir. h dönüşümüne de homeomorfizm denir (Boissonnat et al. 2017).

Örnek olarak, bir çember ve basit kapalı poligonal bir eğri homeomorftur. Öte yandan, bir çember ve bir yay parçasına homeomorf değildir.



Şekil 3.2. Solda: Poligonal eğri, Sağda: Çember yer almaktadır

Tanımdaki ters dönüşümün sürekliliği bazı durumlarda aşıkardır. $U, \mathbb{R}^d$ 'nin açık bir alt kümesi ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ birebir sürekli dönüşüm ise bu durumda Brouwer' ın tanım kümesinin değişmezliğinden $V = f(U)$ açık ve f, U ve V arasında bir homeomorfizmdir. Tanım kümesi sabitliği teoremi manifoldlara genelleştirilebilir: M ve N sınırsız topolojik k -manifoldlar ve f, M 'nin açık bir alt kümesinden N 'ye $f: U \rightarrow N$ birebir sürekli dönüşümse, bu durumda f açıktır ve U ve $f(U)$ arasında bir homeomorfizmdir (Boissonnat et al. 2017).

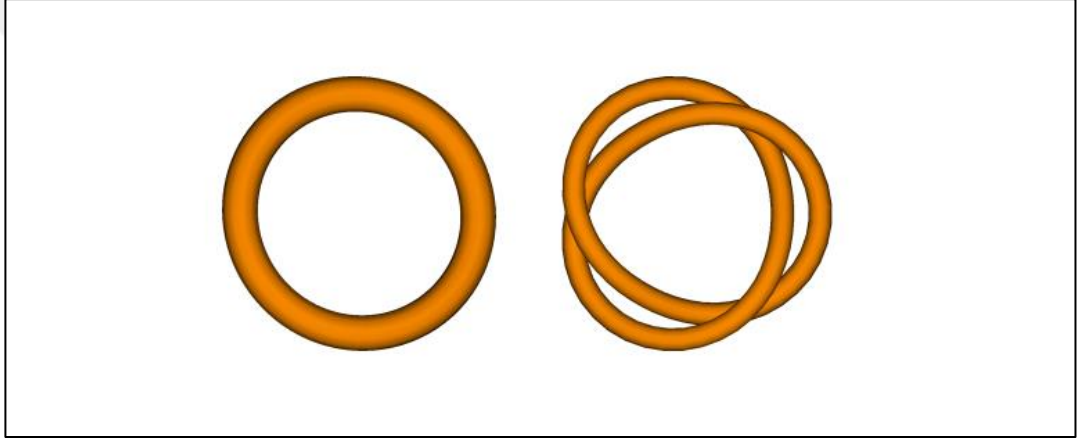
$X, \mathbb{R}^d$ 'nin standart birim küresine homeomorf ise, X 'e topolojik küre (top) denir (Boissonnat et al. 2017).

h iki topolojik uzay X ve Y arasındaki bir dönüşüm olsun. h , görüntüsüne homeomorf ise, bu durumda X, Y 'ye gömülebilir denir. $\mathbb{R}^d$ 'nin X ve Y alt uzaylarını göz önüne aldığımızda izotopi kavramı, uzaylar arasında ayırım yapmak için homeomorfizm kavramından daha güçlüdür.

Tanım 3.2.3: $X \subset \mathbb{R}^d$ ve $Y \subset \mathbb{R}^d$ arasındaki bir ambient izotopi, $F(X, 1) = Y$ ve $F(\cdot, 0) \mathbb{R}^d$ üzerinde özdeşlik dönüşümü olacak şekilde $F: \mathbb{R}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ bir

dönüşümdür ve herhangi bir $t \in [0, 1]$ için $F, \mathbb{R}^d$ 'nin bir homeomorfizmidir (Boissonnat et al. 2017).

Sezgisel olarak, önceki tanım, kendi kendini kesmeyen veya topolojik değişiklik oluşturmeyen X 'in Y 'ye sürekli bir bozulmasını ifade eder. İzotopi kavramı homeomorfizm kavramından daha güçlüdür. X ve Y izotop ise, bu durumda açıkça homeomorf oldukları anlaşılır. Bunun tersine $\mathbb{R}^d$ 'nin homeomorf olan iki alt uzayı izotop olmayabilir. Bu, Şekil 3.3 'deki gibi $\mathbb{R}^3$ 'e gömülü düğümlü ve düğümsüz bir tor için geçerlidir. Sezgisel olarak açık olmasına rağmen, bu iki yüzeyin izotop olmadığını kanıtlamak cebirsel topoloji bilgisi gerektirir.



Şekil 3.3. $\mathbb{R}^3$ 'te gömülü olan tora homeomorf iki yüzey izotop değildir

Genel olarak, iki uzayın homeomorf olup olmadığına karar vermek çok zor bir iştir. Homotopi denkliği adı verilen daha zayıf bir kavramla çalışmak bazen daha uygundur.

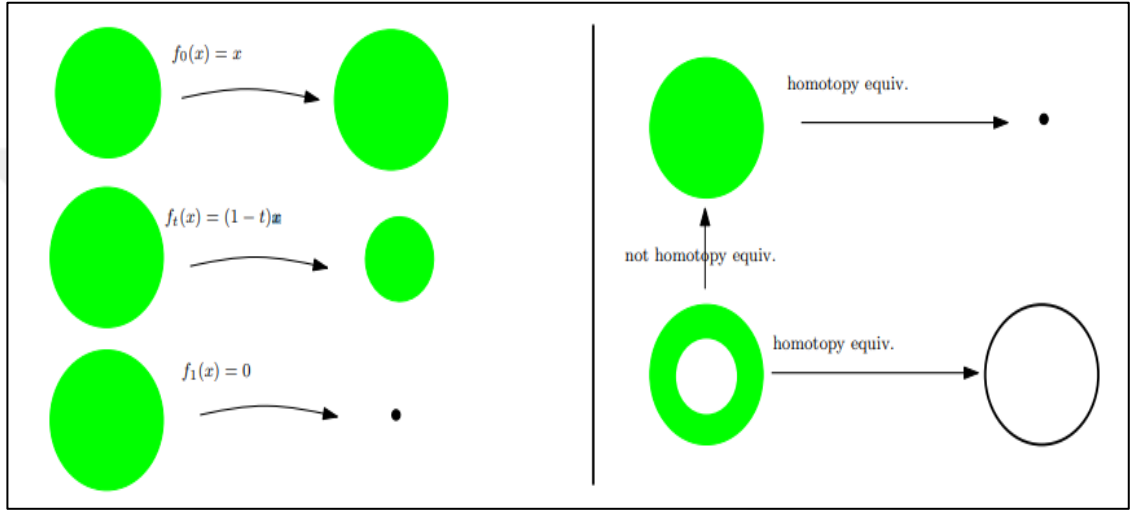
X ve Y iki topolojik uzay, $f_0, f_1, : X \rightarrow Y$ iki dönüşüm olmak üzere $\forall x \in X$ için $H(0, x) = f_0(x)$ ve $H(1, x) = f_1(x)$ olacak şekilde sürekli bir

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

dönüşümü varsa X ve Y topolojik uzayları homotoptur denir. Homotopi denkliği Şekil 3.4 'te tanımlanır.

Tanım 3.2.4: $g \circ f$ X 'te özdeşlik dönüşümüne homotop, $f \circ g$ de Y de özdeşlik dönüşümüne homotop olacak şekilde $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$, sürekli dönüşümler varsa X ve Y topolojik uzayları aynı homotopi tipine sahiptir (veya homotop olarak denktir) denir (Boissonnat et al. 2017).

Örnek olarak, bir Öklid uzayındaki birim küre ve bir nokta homotop olarak denktir ancak homeomorf değildir. Bir çember ve bir halka da homotopi denktir.



Şekil 3.4. Homotop iki dönüşüm örneği (solda) ve homotop denk olan ancak homeomorf olmayan uzay örnekleri (sağda).

Tanım 3.2.5: Büzülebilir uzay, homotop olarak tek bir noktaya denktir (Boissonnat et al. 2017).

Örneğin, bir Öklid uzayı $\mathbb{R}^d$ içindeki bir yay parçası veya daha genel olarak herhangi bir küre büzülebilirdir.

Homotop olarak denkliliği doğrudan tanımı kullanarak ispatlamak genellikle zordur. Y, X 'in bir alt kümesi olduğunda, aşağıdaki kriter, X ve Y arasındaki homotop olarak denkliliğin ispatlanmasında faydalıdır.

Önerme 3.2.6: Eğer $Y \subset X$ ve

$$1. \forall x \in X, H(0, x) = x,$$

$$2. \forall x \in X, H(1, x) \in Y,$$

$$3. \forall y \in Y, \forall t \in [0, 1], H(t, y) \in Y$$

olacak şekilde sürekli bir $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ dönüşümü varsa bu durumda X ve Y homotop olarak denktir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.2.7: Önerme 3.2.6 ‘da H ’nin son özelliği aşağıdaki daha güçlü olan özellik ile değiştirilirse, yani $\forall y \in Y, \forall t \in [0, 1]$,

$$H(t, y) = y$$

olursa bu durumda H ’ye X ’in Y ’ye bir geri çekilerek bozulması denir (Boissonnat et al. 2017).

Uzayların topolojik özelliklerini, bu özellikleri karakterize etmenin ve nicelleştirmenin klasik bir yolu, onların topolojik sabitlerini dikkate alınmasıdır. Topolojik sabitler homeomorf uzaylar için aynı olan matematiksel nesnelerdir (sayılar, gruplar, polinomlar vb.). Homotopi tipi açıkça bir topolojik sabittir: iki homeomorf uzay homotop olarak denktir. Tersini doğru değildir: örneğin, bir nokta ve bir yay parçası homotop olarak denktir ancak homeomorf değildir. Topolojik sabitlerin çoğu gerçekten de homotopi sabitleridir, yani bunlar homotop olarak denk olan uzaylar için aynıdır.

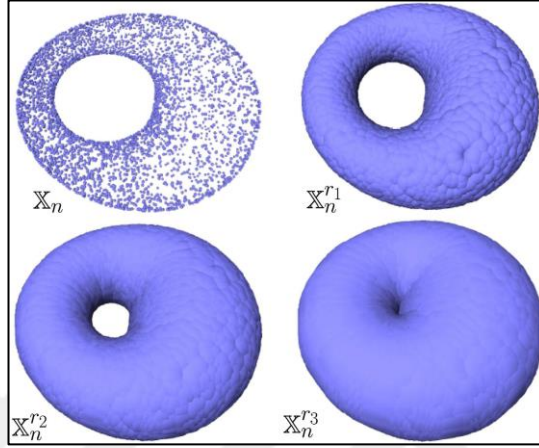
3.3. Hausdorff Mesafesi

Bir metrik uzayın kompakt alt kümeleri kümesi, iki kompakt alt kümenin birbirinden ne kadar uzakta olduğunu ölçmeye izin veren Hausdorff mesafesi adı verilen bir metrik ile verilebilir. Burada $\mathbb{R}^d$ ’nin kompakt alt uzaylarının tanımı verilir. Bu tanım herhangi bir metrik uzayın kompakt alt kümelerine hemen uyum sağlar (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.3.1: $\mathbb{R}^d$ ’nin kompakt bir X kümesi verildiğinde, ε yarıçapındaki X ’in boru şeklindeki komşuluğu veya ofseti X^ε ,

$$X^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : \inf_{x \in X} \|x - y\| \leq \varepsilon\} = \bigcup_{x \in X} \{\bar{B}(x, \varepsilon)\}$$

kapalı küresini belirtmek üzere X 'ten en fazla ε mesafesindeki tüm noktaların kümesidir (Boissonnat et al. 2017).



Şekil 3.5 $\mathbb{R}^3$ 'te (sol üst) bir tor yüzeyinde örneklenen X^n nokta bulutu örneği ve farklı $r_1 < r_2 < r_3$ yarıçap değerleri için ofsetleridir. Yarıçapın (örneğin, r_1 ve r_2) iyi seçilmiş değerleri için, ofsetler açıkça bir torla homotoptur.

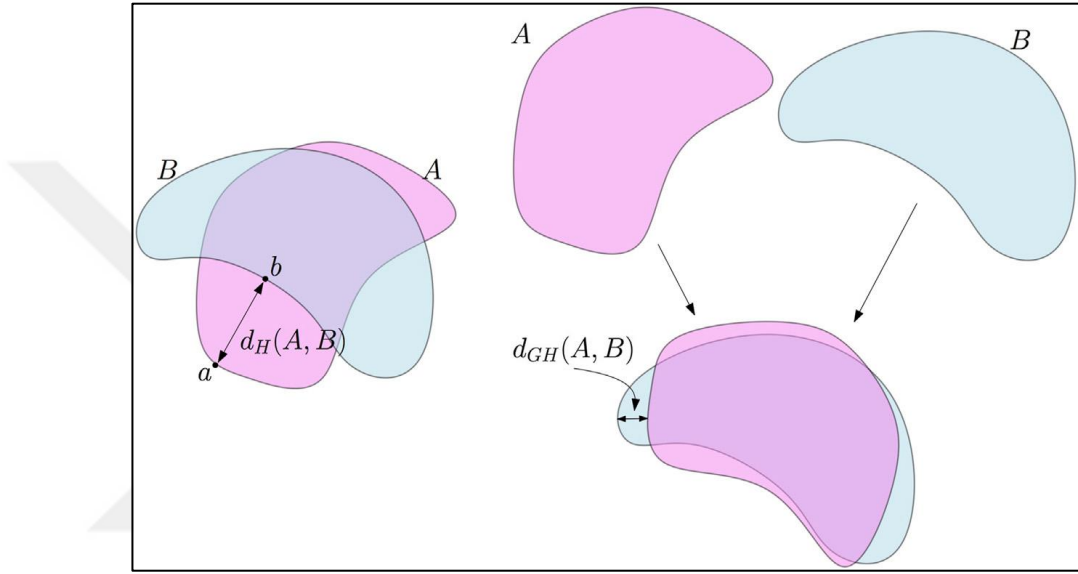
Tanım 3.3.2: $\mathbb{R}^d$ 'nin iki kapalı X ve Y alt kümesi arasındaki Hausdorff mesafesi $d_H(X, Y)$ ile gösterilir. $X \subset Y^\varepsilon$ ve $Y \subset X^\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \geq 0$ sayısının infimumudur. Buna denk olarak,

$$d_H(X, Y) = \max \left(\sup_{y \in Y} (\inf_{x \in X} \|x - y\|), \sup_{x \in X} (\inf_{y \in Y} \|x - y\|) \right)$$

Şeklinde tanımlanabilir. Hausdorff mesafesi, $\mathbb{R}^d$ 'nin kompakt alt kümelerinin uzayı üzerinde bir mesafeyi tanımlar (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 3.3.3: İki kompakt metrik uzay arasındaki Gromov-Hausdorff mesafesi $d_{gH}(M_1, M_2)$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır, (M, ρ) bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzayın M_1 ve M_2 'ye izometrik olan iki kompakt C_1 ve $C_2 \subset M$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $d_H(C_1, C_2) \leq r$ olacak şekilde $r \geq 0$ gerçel sayılarının infimumudur (Chazal et al. 2021).

Yakındaki veri noktası çiftlerinin kenarlarla bağlanması, örneğin bazı kümeleme algoritmaları kullanılarak verilerin bağlantısının analiz edilebildiği standart komşu grafik kavramına yol açar. Bağlantının ötesine geçmek için, TDA'daki ana fikir, yalnızca bağlantı çiftlerini değil, aynı zamanda $(k + 1)$ - çok sayıda yakın veri noktasını kullanarak komşu grafiklerin daha yüksek boyutlu eşdeğerlerini oluşturmaktır. Simplicial kompleksler olarak adlandırılan elde edilen nesneler, döngüler, boşluklar ve bunların yüksek boyutlu karşılıkları gibi yeni topolojik özellikleri tanımlamamıza izin verir.



Şekil 3.6. Solda: düzlemin iki alt kümesi A ve B arasındaki Hausdorff mesafesi. Bu örnekte, $d_H(A, B)$, B'den en uzak olan A'daki a noktası ile B'deki noktalar arasında en yakını olan b ile arasındaki mesafedir. Sağda: A ve B arasındaki Gromov Hausdorff mesafesi. A, Hausdorff mesafesini B'ye düşürmek için döndürülebilir. Bu, A'nın düzleme izometrik bir gömülmesidir. Sonuç olarak, $d_{GH}(A, B) \leq d_H(A, B)$.

Tanım 3.3.4: $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A, V ile birleştirilmiş bir afin uzaydır.

$$A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

A2) $\forall P \in A$ için ve $\forall a \in V$ için $f(P, Q) = a$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ vardır.

Örneğin, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ kümesini alınsın. $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = Q - P$$

fonksiyonu afin uzaydaki önermeleri doğrular. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir afin uzaydır (Yüce 2020).

Tanım 3.3.5: : Sonlu P kümesinin noktalarının $= \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ $\mathbb{R}^d$ ‘deki k ’den küçük boyutlu herhangi bir afin alt uzayda içermiyorsa afin bağımsız oldukları söylenmektedir (Boissonnat et al. 2017).

4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER

Kelime kökeni “simple” kavramından gelen simplicial kelimesinin tam bir Türkçe karşılığı bulunmamaktadır. Bu nedenle kullanım şekli “Simpleksler Kompleksi”, “Simpleksel Kompleks” ya da “Simplicial Kompleks” olarak yaygındır.

Eğriler, bilgisayarlar tarafından kullanılabilen sonlu ayrık bir yapı olarak doğrudan kodlanamayan, sürekli matematiksel nesnelerdir. Bu sebeple geometrik yapılarını yakalayacak temsiller bulmak gerekir. Bu geometrik şekiller bilgisayarlar veya bilgi işlem cihazları tarafından kullanılırken sonlu ayrık bir yapı olarak doğrudan kodlanamayan "sürekli" matematiksel nesneler olarak ifade edilebilir. Bu nedenle, geometrik yapılarını yakalayacak ve uygulanabilir veri yapılarının ayrık ve sonlu doğasında var olan kısıtlamalara uyacak kadar zengin olan bu şekillerin temsillerini bulmak gerekir. Diğer yandan, mevcut tek veri bilinmeyen şekiller etrafında örneklenen nokta bulutları olduğunda, topolojiyi ve alttaki şeklin geometrisini aslına uygun olarak kodlayan verilerin üzerine bir miktar sürekli uzay inşa edebilmek gerekir. Basit kompleksler, bu zorlukların üstesinden gelmek için klasik ve esnek bir çözüm sunarlar.

4.1. Geometrik Simplicial Kompleksler

Tanım 4.1.1: $P = \{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^d$ kümesi verildiğinde, $k + 1$ afin bağımsız noktalar, k -boyutlu simpleksler σ veya kısaca k -simpleks, P ile gerilen dışbükey kombinasyonların kümesidir;

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i p_i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ ve } \lambda_i \geq 0$$

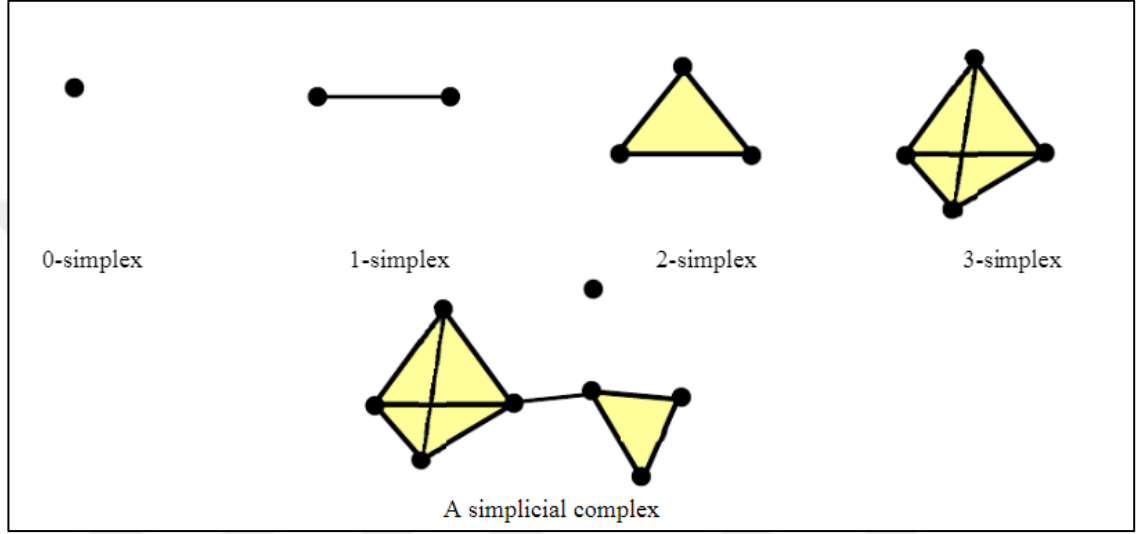
şeklindedir. Burada $p_0, \dots, p_k$ noktaları σ 'nın köşeleri olarak adlandırılır (Boissonnat et al. 2017).

σ , P noktalarının dışbükey kabuğudur, yani $p_0, p_1, \dots, p_k$ içeren $\mathbb{R}^d$ 'nin en küçük dışbükey alt kümesidir. 0-simpleks bir noktadır, 1-simpleks bir doğru parçasıdır, 2-simpleks bir üçgendir, 3-simpleks bir tetrahedrondur. Köşe kümesi P olan bir σ

4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER

simpleksin yüzü P 'nin alt kümeleriyle gerilen simplekslerdir. σ 'dan herhangi bir farklı her yüzüne σ 'nın uygun yüzü adı verilir.

Örneğin, $\{p_1, p_2, p_3\} \in \mathbb{R}^d$, 3 bağımsız nokta tarafından gerilen bir üçgenin yüzleri $\emptyset$; $[p_0]$; $[p_1]$; $[p_0; p_1]$; $[p_1; p_2]$; $[p_2; p_0]$ ve $[p_0; p_1; p_2]$ simpleksleridir. $\emptyset$; genellikle köşelerin boş alt kümesi tarafından gerilen simpleks olarak yüzlere eklenir.

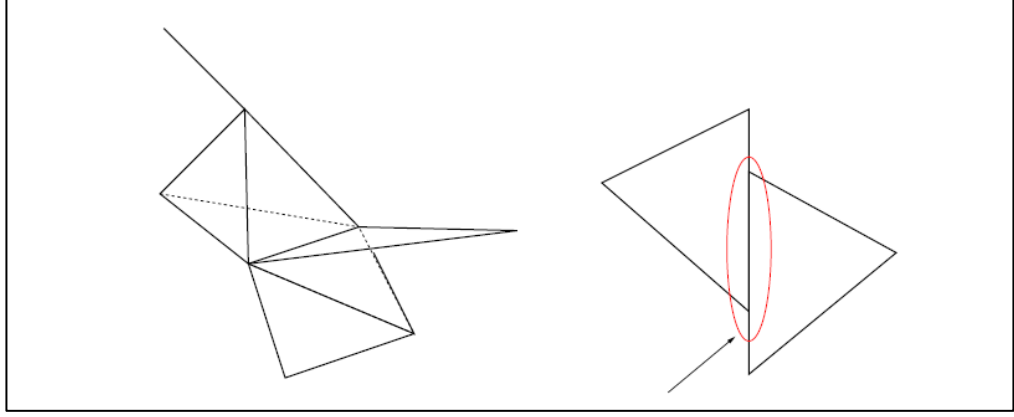


Şekil 4.1. Simpleks oluşumu gösterilmiştir (Zulkepli et. al 2019).

Tanım 4.1.2: $\mathbb{R}^d$ de bir (sonlu) simpleks kompleks K , bir (sonlu) simpleksler topluluğudur, öyle ki:

1. K 'nin bir simpleksinin herhangi bir yüzü K 'nin bir simpleksidir,
2. K 'nin herhangi iki simplekslerinin arakesiti ya boş kümedir ya da her ikisinin ortak yüzüdür (Boissonnat et al. 2017).

Bu tezde ele alınan tüm Simplicial kompleksler sonludur. K 'nin simplekslerine K 'nin yüzleri denir. K 'nin boyutu, simplekslerinin en yüksek boyutudur. k boyutlu bir komplekse k kompleksi de denir. Kendisi de simplicial kompleks olan K 'nin simplekslerinin bir alt kümesine K 'nin bir alt kompleksi denir. $Sk_j(K)$, K 'nin j -iskeleti en fazla j boyutlu simplekslerinden oluşan k 'nın alt kompleksidir.



Şekil 4.2. Sol: Simplicial kompleks örneği. Sağ: Simplicial kompleks olmayan 1 –simplekslerin birleşimi.

$\mathbb{R}^d$ 'deki bir Simplicial kompleks K için onun altında yatan temel uzay, $|K| \subset \mathbb{R}^d$, K 'nin simplekslerinin birleşimidir. K 'nin topolojisi, $\mathbb{R}^d$ 'deki standart topoloji tarafından $|K|$ üzerinde indirgenen topolojidir. Karışıklık riski olmadığında, $\mathbb{R}^d$ 'deki bir kompleks ile onun altında yatan temel uzay arasında net bir ayrım yapılamamaktadır (Boissonnat et al. 2017).

4.2. Soyut Simplicial Kompleksler

Köşe kümesi bilindiğinde, $\mathbb{R}^d$ 'deki bir simpleks kompleksin, simplekslerinin listesi ile tamamen ve kombinatorial olarak karakterize edildiğine dikkat edilmelidir. Bu, soyut simpleks komplekslerin aşağıdaki kavramına yol açar.

Tanım 4.2.1: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ sonlu bir küme olsun. V köşe kümesine sahip soyut bir simplicial kompleksi $\tilde{K}$, aşağıdaki iki koşulu sağlayan V 'nin sonlu alt kümelerinin kümesidir:

1. V 'nin elemanları $\tilde{K}$ 'ye aittir.
2. $\tau \in \tilde{K}$ ve $\sigma \in \tau$ ise $\sigma \in \tilde{K}$

Burada $\tilde{K}$ 'nın elemanlarına $\tilde{K}$ 'nın simpleksleri veya yüzleri denir. $\sigma \in \tilde{K}$ tam olarak $k + 1$ elemana sahipse, σ 'nın boyutu k 'dir ve σ 'ya k -simpleks denir. $\tilde{K}$ boyutu,

simplekslerinin maksimal boyutudur. $\mathbb{R}^d$ 'deki herhangi bir simpleks kompleks K , doğal olarak, K 'nin köşe şeması olarak adlandırılan soyut bir simpleks kompleksi $\tilde{K}$ 'yı belirler: K ve $\tilde{K}$, aynı köşe kümesine sahiptir ve $\tilde{K}$ 'nin simpleksleri, K 'nin simplekslerinin köşelerinin kümeleridir. Tersine, eğer soyut bir kompleks $\tilde{K}$, $\mathbb{R}^d$ 'deki bir K kompleksinin köşe şemasıysa, bu durumda K 'ya, $\tilde{K}$ 'nin geometrik bir gerçekleşmesi adı verilir. Herhangi bir sonlu soyut simplicial kompleks $\tilde{K}$ 'nin aşağıdaki şekilde bir öklid uzayında geometrik bir gerçekleşmeye sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

n , $\tilde{K}$ 'nin köşe sayısı olmak üzere, $\{v_1, \dots, v_n\}$; $\tilde{K}$ 'nin köşelerinin kümesi olsun ve $\sigma \subset \mathbb{R}^n$; herhangi bir $i = 1, 2, \dots, n$ için e_i , i . koordinatı 1 diğer tüm koordinatları 0 olan vektör olmak üzere $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gerilen simpleks olsun. Bu durumda K , $[e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}]$ K 'nin k -simpleksi ile tanımlanan, σ 'nın alt kompleksi olması için gerek ve yeter şart $[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ 'nın K 'nin simpleksi olmasıdır. Ayrıca, d boyutlu herhangi bir sonlu soyut simplicial kompleksin, $\mathbb{R}^{2d+1}$ 'de simplicial kompleks olarak gerçekleştirilebileceği kanıtlanabilir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.2.2: $\{v_0, \dots, v_k\} \in \tilde{K}$ olması için gerek ve yeter şart $\{\phi(v_0) \dots \phi(v_k)\} \in \tilde{K}'$ olması olacak şekilde $\phi: V \rightarrow V'$ birebir ve örten dönüşümü varsa köşe kümeleri ile V ve V' olan iki soyut simplicial kompleks $\tilde{K}$ ve $\tilde{K}'$ izomorftur (Boissonnat et al. 2017).

İki soyut simplicial kompleks arasındaki izomorfizm ilişkisi, onların geometrik gerçekleştirmeleri arasındaki homeomorfizme indirgenir.

Önerme 4.2.3: Eğer iki simplicial kompleks K, K' , iki izomorf soyut simplicial kompleksin geometrik gerçekleştirmeleri ise $\tilde{K}, \tilde{K}'$, bu durumda $|K|$ ve $|K'|$ homeomorf topolojik uzaylardır. Özellikle soyut simplicial komplekslerin herhangi iki geometrik gerçekleşmesinin altında yatan uzaylar homeomorftur (Boissonnat et al. 2017).

Bu tezde, köşeleri $\mathbb{R}^d$ 'de noktalar olan soyut simpleks komplekslerle sık sık ifade edilmektedir. $\tilde{K}$ köşe kümesi $V \subset \mathbb{R}^d$ olan soyut bir kompleks olsun. Her bir k -simpleks 'in dışbükey gövdesi $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in \tilde{K}$, $\mathbb{R}^d$ 'de geometrik bir k –simplekstir ve bu

simplekslerin toplanması simpleks bir K kompleksini tanımlarsa, o zaman $\tilde{K}$ 'nin $\mathbb{R}^d$ 'ye doğal olarak gömülü olduğunu ve K 'nin $\tilde{K}$ 'nin doğal gömülmesi olduğu söylenebilir. Belirsizlik olmadığında $\tilde{K}$ ve K için aynı gösterim kullanılır.

Terminoloji hakkında önemli bir kısım ifade edilirse soyut bir simpleks kompleksin tüm geometrik gerçekleştirmelerinin altında yatan uzaylar birbirine homeomorfik olduğundan, bu temel uzayların topolojik özelliklerini kompleksin kendisiyle ilişkilendirmek olağandır.

Örneğin, bir soyut simpleks kompleks K 'nin homeomorf veya bir X topolojik uzayına denk homotopi olduğu iddia edildiğinde, bu, K 'nin herhangi bir geometrik gerçekleştirmesinin altında yatan uzayın, X 'e denk homeomorf veya homotop olduğu anlamına gelir.

4.3. Nerve

Önceki bölümde fark edildiği gibi, simplicial kompleksler aynı zamanda topolojik uzaylar ve sadece kombinatoryal nesneler olarak görülebilir.

Tanım 4.3.1: X topolojik uzayının açık örtüsü I bir küme $i \in I$ olmak üzere, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak şekilde $U_i \subseteq X$, açık alt kümelerinin $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ koleksiyonudur. Benzer şekilde X ' in kapalı bir örtüsü, birleşimleri X olan kapalı kümelerin bir koleksiyonudur (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.3.2: $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, X topolojik uzayının bir örtüsü verildiğinde;

$$\sigma = [U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_k}] \in C(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset$$

olacak şekilde köşe kümesi $\mathcal{U}$ olan soyut simplicial kompleks $C(\mathcal{U})$ ile eşlenir (Boissonnat et al. 2017).

Bu simplicial komplekse, $\mathcal{U}$ örtüsünün nerve (siniri) olarak adlandırılır.

Tüm U_i kümeleri açık ve onların tüm sonlu arakesitleri büzülebilir olduğunda, yani bir noktaya homotop olduğunda, Nerve Teoremi $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ ve X 'in topolojisini ilişkilendirir.

Teorem 4.3.3: U_i 'lerin herhangi bir arakesiti ya boş ya da büzülebilir olacak şekilde $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ $\mathbb{R}^d$ 'nin X alt kümesinin sonlu açık örtüsü olsun. Bu durumda X ve $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ homotoptur (Boissonnat et al. 2017).

Nerve teoremi, X üzerinde biraz daha kısıtlayıcı bir varsayım altında kapalı örtüler için de geçerlidir.

Teorem 4.3.4: $\subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d$ 'de

$\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ kapalı dışbükey kümelerinin sonlu birleşimi olsun. Bu durumda X ve $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ homotoptur (Boissonnat et al. 2017).

Nerve Teoremi'nin varsayımlarını karşılayan bir örtü iyi bir örtü olarak adlandırılır. Nerve Teoremi, hesaplamalı topoloji ve geometrik çıkarımda esas öneme sahiptir: İyi bir örtüsünün kesişme modelini tanımlayan simplicial kompleksle X 'in topolojik uzayı homotopi tipini kodlamanın bir yolunu sağlar. Özellikle $X, \mathbb{R}^d$ 'deki (kapalı veya açık) kürelerin (sonlu) bir birleşimi olduğunda, bu kürelerin birleşiminin nerve'üne homotoptur.

4.4. Simplicial Komplekslerin Filtrasyonu

Simplicial kompleksler genellikle, geometri çıkarımında temel bir rol oynayan basitlerinin belirli bir sıralamasıyla gelir.

Tanım 4.4.1: Sonlu bir basit kompleks K 'nin filtrasyonu, σ^{i+1} , K 'nin bir simpleksi olmak üzere $K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}$ olacak şekilde;

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^m = K$$

iç içe geçmiş bir alt kompleksler dizisidir.

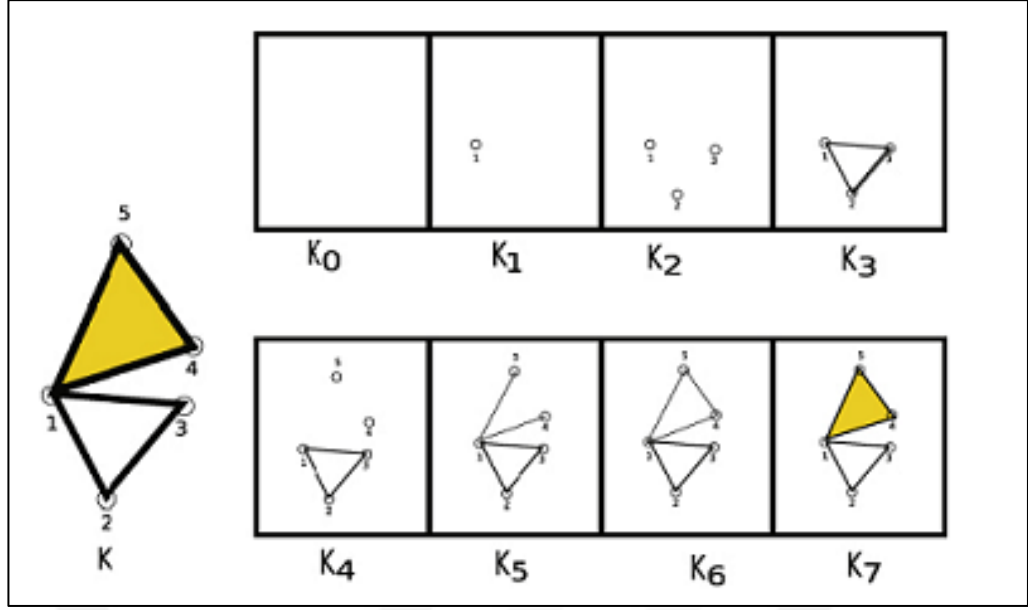
Denk olarak, K 'nin filtrasyonu, herhangi bir $i \geq 0$ için, simplekslerin sıralanması gibi görülebilir. İlk i simplekslerinin koleksiyonu bir simplicial komplekstir. Bu sonraki koşulu sağlamak için, her simpleks σ^i 'nin tüm yüzlerinden sonra filtrasyonda görüldüğünü bilmek yeterlidir.

K 'nin filtrasyonu tam olarak simplekslerin bir sıralaması olduğundan, bazı durumlarda, simpleksleri reel sayıların $(\alpha_i)_{i=1}^m$ artan bir dizisiyle indekslemek daha doğal olabilir: $\emptyset = K^{\alpha_0} \subset K^{\alpha_1} \subset \dots \subset K^{\alpha_m} = K$. Bu durumda,

- i. $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})$ için $K^\alpha = K^{\alpha_i}$,
- ii. $\alpha < \alpha_0$ için $K^\alpha = \emptyset$

dır. $\alpha \geq \alpha_m$ için $K^\alpha = K$ tanımlanarak reel sayıların tamamına filtrasyonu genişletmek uygundur (Boissonnat et al. 2017).

Örneğin, K 'nin köşelerinde bir fonksiyon tanımlandığında, aşağıdaki yolla bir alt seviye küme filtrasyonuna tanımlanabilir.



Şekil 4.3. K simplicial kompleksi filtrasyonu (Horak et al. 2009)

4.5. Bir Kompleksin Köşelerinde Tanımlanan Bir Fonksiyonla Eşlenen Filtrasyon

K simplicial bir kompleks olsun ve f , K 'nin köşelerinde tanımlanan reel değerli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir simpleks $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ için bu fonksiyonla eşlenen filtrasyon;

$$f(\sigma) = \max_{i=0 \dots k} f(v_i)$$

olarak tanımlanır. $f(\sigma)$ ile gösterilir.

Her bir simpleks değerlerine göre K 'nin simplekslerinin sıralanması, bir K filtrasyonunu tanımlar. Farklı simplekslerin aynı değere sahip olabileceğini dikkat edilmelidir. Bu durumda onlar artan boyuta göre sıralanır ve aynı boyutun aynı değerdeki simpleksleri rastgele olarak sıralanabilir. f tarafından indirgenen filtrasyon, f 'nin $f^{-1}((-\infty; t])$ alt seviye kümeleri ile filtrasyonudur (Boissonnat et al. 2017).

4.6. Vietoris-Rips ve Cech Filtrasyonları

Filtrasyonlar genellikle verilerin altında yatan topolojik yapıyı ortaya çıkarmak için sonlu nokta kümelerinin üzerine kurulur $P \subset \mathbb{R}^d$ bir (sonlu) noktalar kümesi olsun.

Tanım 4.6.1: Çizgi teorisinin matematiksel alanında bir klik, klikteki her iki farklı köşe bitişik olacak şekilde yönlendirilmemiş bir grafiğin köşelerinin bir alt kümesidir (Alba 1973).

Tanım 4.6.2: Matematikte bir kategorinin iskeleti, genel ifade edilirse herhangi bir yabancı izomorfizm içermeyen bir alt kategoridir. Belirli bir anlamda, bir kategorinin iskeleti orijinalin tüm kategorik özelliklerini yakalayan en küçük eşdeğer kategoridir. Aslında iki kategori ancak ve ancak izomorfik iskeletleri varsa eşdeğerdir. İzomorfik nesneler mutlaka aynıysa bir kategoriye iskelet denir (Goldblatt 1984).

Tanım 4.6.3: $\alpha > 0$ verildiğinde, P köşe noktası kümesi ve parametresi olan Cech kompleksi, P merkezli ve yarıçaplı topların birleşimlerinin $\check{Cech}(P, \alpha)$ nervedür. $\check{Cech}(P, \alpha)$ 'nin simpleksleri aşağıdaki koşulla karakterize edilir:

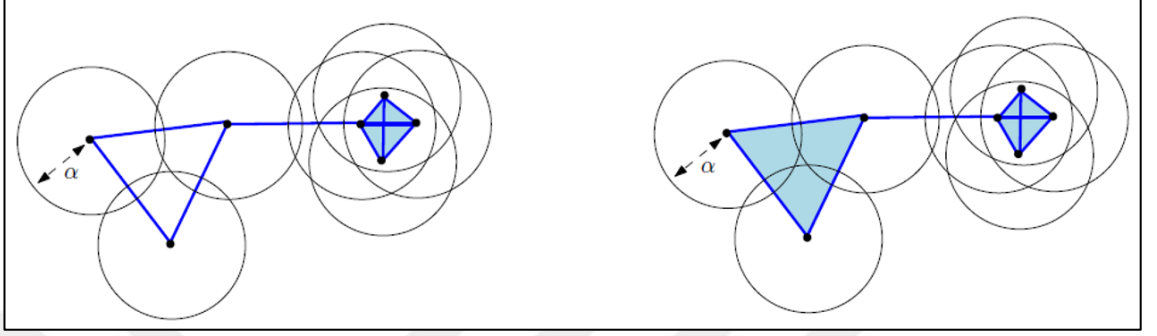
$$\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \check{Cech}(P, \alpha) \Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha) \neq \emptyset$$

α , 0'dan $+\infty$ 'a değerler alırken, $\check{Cech}(P, \alpha)$ komplekslerinin iç içe dizisi $\check{Cech}$ kompleks filtrasyonunu tanımlar.

$|P| - 1$ boyutunun simpleksinin k boyutlu bir yüzü σ verildiğinde, en küçük α öyle ki $\sigma \in \check{Cech}(P, \alpha)$, σ 'nin köşelerini çevreleyen en küçük yuvarın yarıçapıdır. Sonuç olarak, $\check{Cech}$ filtrasyonun k -boyutlu iskeleti, P 'nin en fazla k noktasının tüm alt kümelerini minimum çevreleyen yuvarlar $O(|P|^k)$ elde edilerek hesaplanabilir (Boissonnat et al. 2017).

Bir dizi k noktayı kapsayan minimum hesaplanması $O(k)$ zamanında yapılabilir de tüm $\check{Cech}$ filtrasyonunun hesaplanması pratikte hızla çetin hale gelir. $\alpha > 0$

verildiğinde, $\check{Cech}(P, \alpha)$ 'in, k -iskeletinin hesaplanması, ilk olarak bir graf olan $\check{Cech}(P, \alpha)$ 'nin 1-iskeletinin en fazla $(k + 1)$ köşelerinin tüm hesaplanmasıyla ve ikinci olarak α ile üst sınırlı yarıçapa sahip minimum çevreleyen yuvarlara sahip kliklerin seçilmesiyle yapılabilir.



Şekil 4.4. Čech kompleksi $\check{Cech}\alpha(X)$ (solda) ve Vietoris-Rips $Rips2\alpha(X)$ (sağda) $\mathbb{R}^2$ düzleminde sonlu bir nokta bulutudur. $\check{Cech}\alpha(X)$ 'in alt kısmı iki bitişik üçgenin birleşmesi iken $Rips2\alpha(X)$ 'in alt kısmı dört köşe ve tüm yüzleri ile yayılan tetrahedron'dur. Čech kompleksinin boyutu 2'dir. Vietoris-Rips kompleksinin boyutu 3'tür. Bu ikincisinin bu nedenle $\mathbb{R}^2$ 'ye gömülmediğine dikkat edilmelidir.

Čech filtrasyonu ile yakından ilişkili olan simplicial bir kompleks, Vietoris-Rips filtrasyonu, $Rips(P)$ ile gösterilir.

Tanım 4.6.4: $\alpha > 0$ verildiğinde, P köşe kümesi ve α parametresi ile Vietoris-Rips kompleksi $Rips(P, \alpha)$ aşağıdaki koşulla tanımlanır,

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in Rips(P, \alpha) \Leftrightarrow \|x_i - x_j\| \leq \alpha, \quad i, j \in \{0, \dots, k\}$$

α , 0'dan $+\infty$ 'a değerler alırken, $Rips(P, \alpha)$ komplekslerinin iç içe geçmiş dizisi Vietoris-Rips filtrasyonunu tanımlar.

Vietoris-Rips kompleksinin hesaplanması, yalnızca mesafe karşılaştırmalarını içerdiğinden Čech filtrasyonu hesaplamaktan çok daha basittir. Vietoris-Rips kompleksi, Čech kompleksi gibi aynı 1-iskelete sahip en büyük simplicial komplekstir. Böylece tamamen 1-iskeleti ile karakterize edilir. Vietoris-Rips filtrasyonunun tüm k -boyutlu

iskeleti P 'nin en fazla k noktasının tüm alt kümelerinin yarıçapları hesaplanarak elde edilir (Boissonnat et al. 2017).

Lemma 4.6.5: $P, \mathbb{R}^d$ 'de bir sonlu nokta kümesi olsun. Herhangi bir $\alpha > 0$ için,

$$Rips(P, \alpha) \subseteq Cech(P, \alpha) \subseteq Rips(P, 2\alpha)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

İspat

Eğer $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in Rips(P, \alpha)$ ise $x_0 \in \bigcap_{i=1}^k B(x_i, \alpha)$ 'dir. Bu yüzden $\sigma \in Cech(P, \alpha)$ 'dır. Bu, birinci içermeyi ispatlar.

Şimdi, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in Cech(P, \alpha)$ ise, $y \in \bigcap_{i=0}^k B(x_i, \alpha)$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}^d$ vardır. Yani herhangi bir $i = 0, \dots, k$ için $\|x_i - y\| \leq \alpha$ 'dır.

Sonuç olarak, tüm $i, j \in \{0, \dots, k\}$ için $\|x_i - x_j\| \leq 2\alpha$ ve $\sigma \in Rips(P, 2\alpha)$ 'dir.

$Cech$ ve Vietoris-Rips filtrasyonlarının herhangi bir metrik uzayda noktaların bir kümesi için tanımlanabilir ve yukarıda bahsedilen özellik sağlanır (Boissonnat et al. 2017).

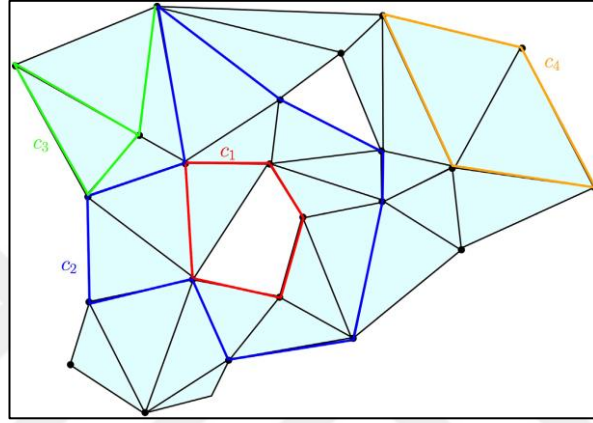
4.7. Kombinatorial Manifold Üçgenlemeleri

Tanım 4.7.1: Belli sayıda noktaların konumunu büyük bir doğrulukla ve kesinlikle saptayabilmek için, bu noktaları tepe olarak kabul edip bulundukları alanı üçgenlere bölme işlemidir (Goldblatt 1984).

Tanım 4.7.2: P köşe noktası kümesiyle K simplicial kompleks olsun. $p \in P$ 'nin starı, köşe noktası p olan K 'nin simplekslerinin kümesidir. Bu $star(p, K)$ olarak

gösterilir. p 'nin linki, $\sigma \in \text{star}(p, K)$ ancak $\tau \notin \text{star}(p, K)$ olacak şekilde $\tau \subset \sigma$ simpleksler kümesidir. $\text{link}(p, K)$ ile gösterilir.

Bir simpleksin star 'ının, link olmasına rağmen kompleks olmadığı gözlemlenmektedir. $\text{star}(p, K)$ simplekslerinden ve onların alt yüzlerinden oluşan K 'nin alt komplekslerini belirtmek için K 'de p 'nin kapalı star 'ı adı kullanılsın (Boissonnat et al. 2017).



Şekil 4.5. İki boyutlu bir kompleks K : c_1 , c_2 ve c_4 üzerindeki devirlerin, döngülerin ve sınırların bazı örnekleri tek döngülerdir; c_3 bir tek devirdir, ancak bir sınır değildir; c_4 tek sınırdır, yani c_4 ile çevrili iki üçgenin toplamı olarak elde edilen iki devirin sınırıdır. c_1 ve c_2 döngüleri, farkları c_1 ve c_2 'nin birleşmesi tarafından çevrelenen üçgenlerin birleşimiyle temsil edilen iki devir olduğundan, $H_1(K)$ 'de aynı ögeyi kapsar.

Tanım 4.7.3: K 'deki her simpleks bir k –simpleksin yüzüyse bir simplicial k –kompleks pürdür (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.7.4 : K bir pür simplicial k –kompleks olsun. K 'nin ∂K ile gösterilen sınırı, $(k - 1)$ –simpleksleri K 'nin $(k - 1)$ –simpleksleri olan ve k boyutunun yalnızca bir yüzüne denk gelen K 'nin $(k - 1)$ - alt kompleksidir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.7.5: Eğer

1. K saf k kompleksidir,
2. $K/\partial K$ 'nin herhangi bir köşesinin “link”i üçgenlenmiş $(k - 1)$ –küredir

3. ∂K 'nin herhangi bir köşesinin "link"i üçgenlenmiş bir $(k - 1)$ -yuvardır.
4. Simplicial kompleks K ise, bir kombinatorial k -manifolddur.

İki köşe ile eşlenen iki simpleks genelde $k - 1$ simplekse sahip ise bir kombinatorial k -manifoldunun K 'nin komşuluk grafi, köşeleri K 'nin k -simpleksleri kabul eden ve iki köşeyi bir kenar ile birleştiren graf olarak tanımlanır (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.7.6: Sonlu bir nokta kümesinin $P \in \mathbb{R}^d$ üçgenlenmesi, köşe kümesi P olan ve altındaki uzayı P 'nin en küçük konveks kümesi olan bir geometrik simplicial kompleks K 'dir.

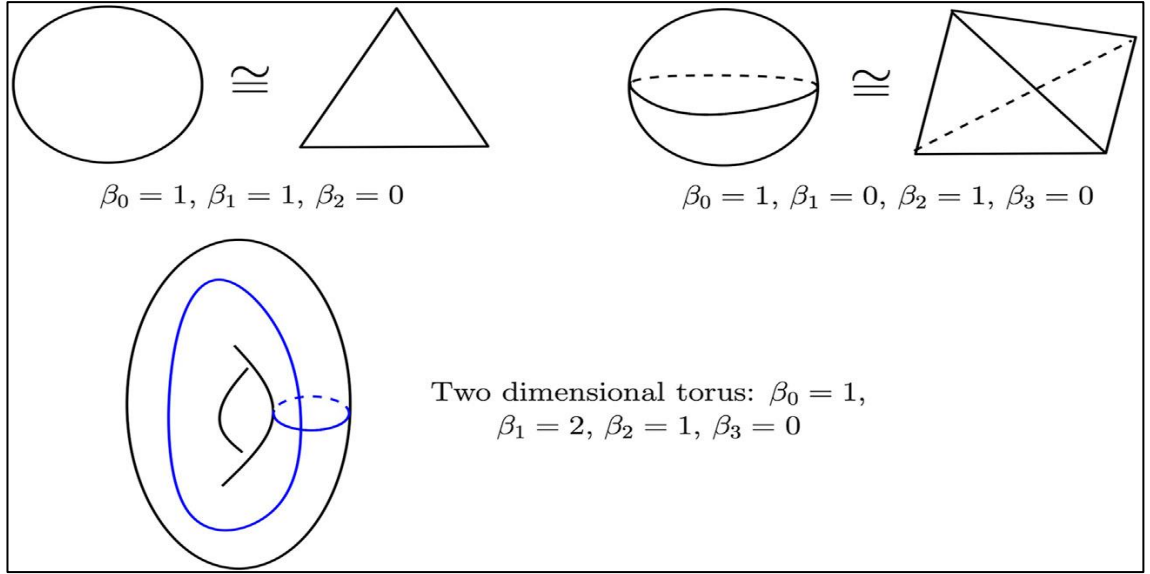
Bir sonlu nokta kümesi $P \in \mathbb{R}^d$ 'nin üçgenlenmesi, sınırı P 'nin en küçük konveks kümesinin sınır kompleksi olan bir kombinatorial manifolddur (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.7.7: Bir X topolojik uzayının üçgenlemesi, simplicial kompleks K ve bir $h: K \rightarrow |X|$ homeomorfizmidir (Boissonnat et al. 2017).

Tanım 4.7.8: K 'nin k th (basit) homoloji grubu, bölüm vektör uzayıdır.

$$H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$$

Şekil 4.6, Betti birkaç basit uzayın sayısını verir. $c, c' \in Z_k(K)$ olmak üzere iki çemberin homolog olduğu söylenir. Bir sınıra göre farklılık gösterirse, yani $c' = c + \partial_{k+1}(d)$ olacak şekilde bir $(k + 1)$ devir varsa Bu tür iki çember aynı H_k elemanına yol açar. Başka bir deyişle, $H_k(K)$ öğeleri homolog çemberlerinin denk sınıflarıdır (Chazal 2021).



Şekil 4.6. Dairenin Betti sayıları (sol üst), iki boyutlu küre (sağ üst) ve iki boyutlu tor (alt). Tor üzerindeki mavi eğriler, homoloji sınıfı tek boyutlu homoloji grubunun temeli olan iki bağımsız döngüyü temsil eder.

4.8. Topolojik Veri Analizi

Tanım 4.8.1: Homoloji, sürekli deformasyon altında değişmez olan nitel özellikleri tanımlayan, $\mathbb{R}^n$ 'nin uygun herhangi bir alt kümesine (ve diğer, daha genel uzay türleri) uygulanabilir olan matematiksel bir şekil teorisidir. Bu özellikler, bir X uzayının bölündüğü bağlantılı parçaların sayısını içerir. Burada, X 'te X 'teki herhangi iki noktayı birbirine bağlayan sürekli bir yol varsa, $\mathbb{R}^n$ 'nin bir X alt kümesinin bağlı olduğunu söylüyoruz; Başka bir deyişle, bağlantılı bir uzayda kişi herhangi bir uzayı diğerine deforme edebilir. Homolojinin bir X uzayı hakkında ölçtüğü bir diğer özellik, X 'teki bir döngünün, deformasyonun asla X 'ten ayrılmadığı şekilde X 'teki tek bir noktaya deforme edilip edilemeyeceğidir. Benzer, daha yüksek boyutlu özellikler de homoloji ile tespit edilir, örneğin bir kürenin bir noktaya kadar deforme olup olmadığı ölçülebilir.

Homoloji ölçümlerinin boyutla ölçüldüğü yukarıdaki örneklerin her biri: noktalar 0 –boyutlu, döngüler 1 –boyutlu, küreler 2 –boyutlu ifade edilir. Bunun nedeni, homolojinin benzer şekilde boyuta göre derecelendirilmesidir. Homoloji, negatif olmayan her i tamsayısı, X topolojik uzayı ve değişmeyen G grubu için yeni bir grup tanımlar.

$$H_i(X, G)$$

X 'in i . homoloji grubu olarak adlandırılır.

Açıklama: G 'nin bir alan (reeller $\mathbb{R}$ veya iki elemanlı alan $\mathbb{F}^2$ gibi) olduğunu varsayacağız, böylece her homoloji grubu aslında bir vektör uzayı olacak ve bunu

$$H_i(X)$$

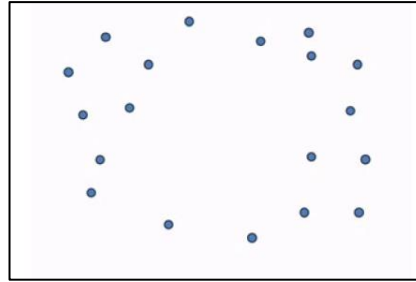
olarak yazacağız. $H_i(X)$ homoloji grubunun elemanları, belirli i boyutlu özelliklerin denklik sınıflarıdır. Örneğin, birbirine deforme olabilen iki döngü, $H_1(X)$ 'in aynı elemanını temsil eder (Skosana 2016).

4.9. Kalıcı Homolojiye (Persistence Homoloji) Giriş

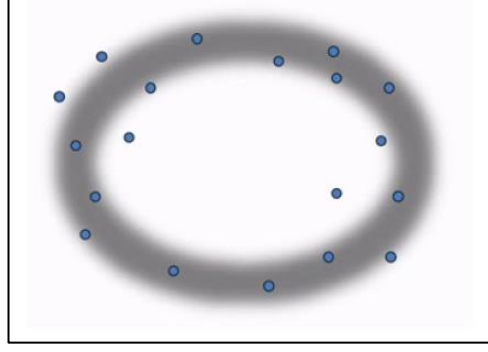
Kalıcı homoloji, verilerin topolojik özelliklerini ayırt etmek için cebirsel bir yöntemdir. Topolojik özellikler ile bileşenler, kümeler, delikler ve grafik yapısı gibi özellikler kastedilir. Veri, örneğin nokta çiftleri arasındaki mesafeleri veren bir metriğe sahip bir nokta kümesi olabilir.

Bir düzlemde 19 noktadan oluşan aşağıdaki nokta bulutunu (veri seti = sonlu metrik uzay) ele alırsak,

Örneğin, aşağıdaki veriler hangi topolojik özellikleri sergiliyor?

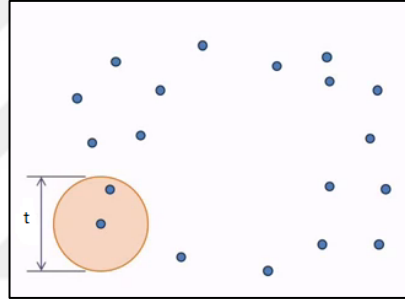


Şekil 4.7. 19 noktanın temsili

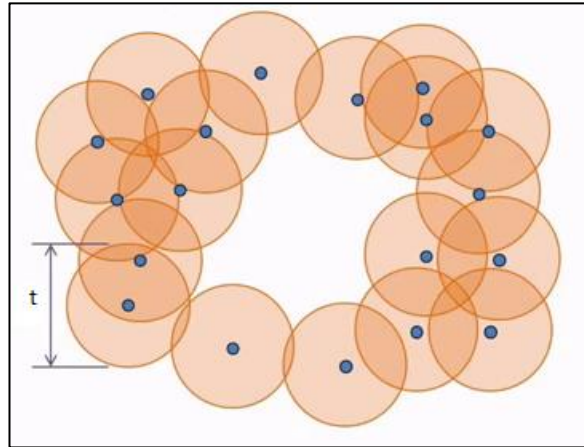


Şekil 4.8. 19 noktanın temsili çemberi

Bu noktaların bir çemberden kabaca örneklendiği anlaşıyor, ancak çember sadece noktalardan nasıl tespit edilebilir? Yakındaki noktaları birbirine bağlamak bir fikir olarak öne sürülebilir. Önce bir mesafe veya bir ölçek parametresi olarak t seçilir.



Şekil 4.9. Çapı t olan çember çizme



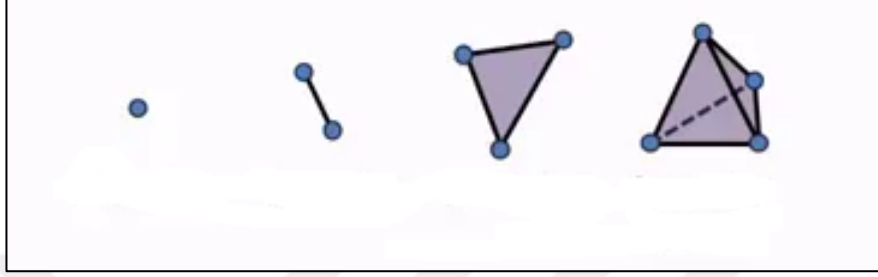
Şekil 4.10. Tüm noktalara t yarıçaplı çember çizilmesi

Her noktanın etrafına t çapında bir çember çizilir. Aslında komşulukların birer temsili bu çemberlerdir. İki çember, iki nokta t mesafesi kadar uzakta olmadığında tam

4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER

olarak kesişir, bu durumda iki noktayı bir kenarla birleştirilir. Grafik bize noktaların t ölçek parametresinde tek bir küme oluşturduğunu gösteriyor.

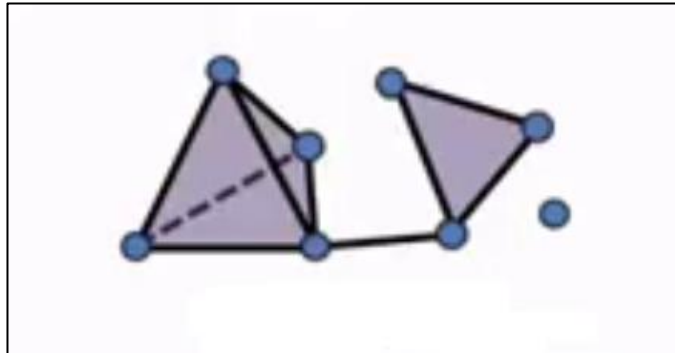
Simplicial kompleks, noktalardan, kenarlardan, üçgen yüzlerden oluşturulmuş bir nesnedir.



Şekil 4.11. Simpleks boyutları

- İki nokta arasındaki kenar 1 – boyutlu tek yönlüdür
- Üçgen bir yüz, 2 – boyutlu bir simplekstir
- Katı bir tetrahedron 3 – boyutlu bir simplekstir ve daha yüksek boyutlu simpleksler için böyle devam eder.
- Birçok simpleksi, simpleksler arasındaki kesişim de bir simpleks olacak şekilde birbirine yapıştırılırsa, basit bir kompleks elde edilir.

Aşağıda basit bir kompleks örneği verilmiştir.



Şekil 4.12. Simplicial complex

Topolojide ayrıca simpleks kompleksler için homoloji tanımlanır.

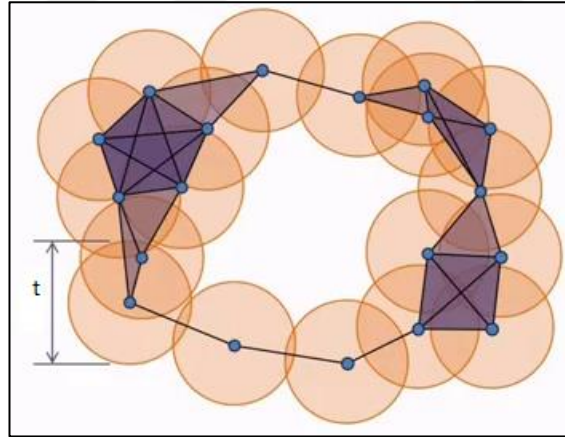
4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER

Homoloji, $H_k(X)$ vektör uzayının bir dizisini belirli bir X topolojik uzayını veren bir topolojik değişmezdir.

Homolojiyi n boyutlu delikleri saymak olarak da düşünülebilir. Şekil 4.7'deki nokta bulutuna tekrar bakılırsa yakındaki noktaları birleştirilir ve ardından basit bir kompleks oluşturulur. Daha önce olduğu gibi t mesafesi ile başlanır ve t 'den daha uzak olmayan nokta çiftlerini birleştirilir.

Ancak bu sefer tam simpleksleri doldurulur (yani, bir üçgen oluşturmak için kenarlarla birbirine bağlanmış üç nokta olduğunda, üçgen 2 boyutlu yüzlerle doldurulur, çift olarak bağlı herhangi dört nokta üç ile doldurulur. Elde edilen simplicial kompleks, Rips Kompleksi veya Victoris Rips Kompleksi olarak adlandırılır.

Daha sonra, merkezi bir deliğin varlığını kötileyen bu komplekse homoloji uygulanır. Bu komplekse homoloji uygulanır, bu da merkezi bir deliğin varlığını reddeder.

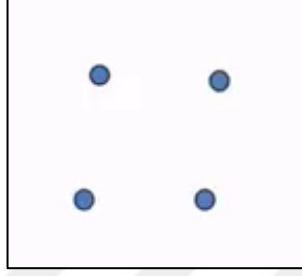


Şekil 4.13. Simplicial kompleksin inşası

Ancak yine de bir sorun var: t mesafesini nasıl seçilir? Eğer t çok küçükse, birden fazla bağlı bileşen görülebilir ve örneklemenin artefaktları (insan eliyle yapılan) olan küçük delikler, kısacası gürültüyü algılayacaktır. Öte yandan, eğer t çok büyükse herhangi iki nokta birbirine bağlanır ve önemsiz homolojiye sahip dev bir simpleks elde edilir.

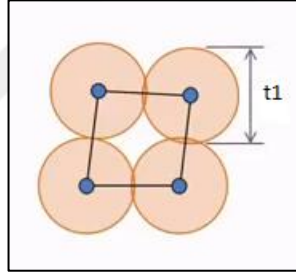
4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER

Bazı özel yazılım programları olmadan hangi mesafeyi seçeceğimizi bilmiyoruz. Bu t seçimi (kullanılan t mesafesi iyi görünüyor) tek bir deliği ortaya çıkarıyor, ancak bu deliğin gürültü değil de önemli olduğunu nasıl bilinebilir? Tek bir t mesafesi seçmek yerine, tüm t mesafesini dikkate alınır. Her deliğin belirli bir t değerinde görüldüğünü ve başka bir t değerinde kaybolduğu gözlemlenebilir.

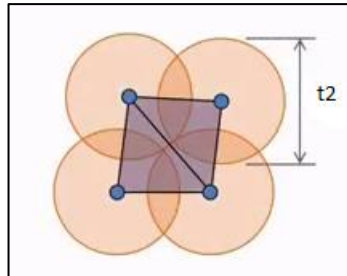


Şekil 4.14. 4 nokta temsili

Bu dört nokta alındığında,



Şekil 4.15. En küçük bir t_1 mesafesi var

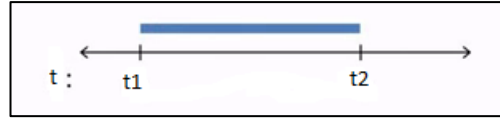


Şekil 4.16. t_2 Mesafesi

t mesafesi bu dört kenarın ortada bir delik oluşturarak görünmesi için yeterince büyüktür. Aynı nokta konfigürasyonu için başka bir t_2 mesafesi vardır.

Zıt noktalar arasında bir kenarın görünmesi için yeterince büyük olan t mesafesi vardır. Bu, doldurulan iki üçgeni tamamlar ve delik kaybolur.

- Böylece delik t_1 mesafesinde görünür ve t_2 mesafesinde kaybolur.
- Bu deliğin kalıcılığı bir çift (t_1, t_2) olarak ifade edilebilir.
- Bu çifti ayrıca t_1 'den t_2 'ye kadar bir aralık veya çubuk olarak görselleştirilebilir:



Şekil 4.17. Çift temsili

Bu çubuk, deliğin kalıcılığının bir temsilidir. Bir çubuk koleksiyonu bir barkoddur ve barkodlar, kalıcı homolojide çalışmanın temel nesneleridir. Barkodu kaydetmek için her noktanın etrafında büyüyen küreler oluşturulur.

Küreler büyümeye başladıkça, kenarlar belirmeye başlar ve kompleks yavaş yavaş birbirine bağlanır, birkaç küçük delik belirir, ancak hızla doldurulur. Büyük merkezi delik görünür ve dışarıda daha fazla simpleks ortaya çıktıkça kalır.

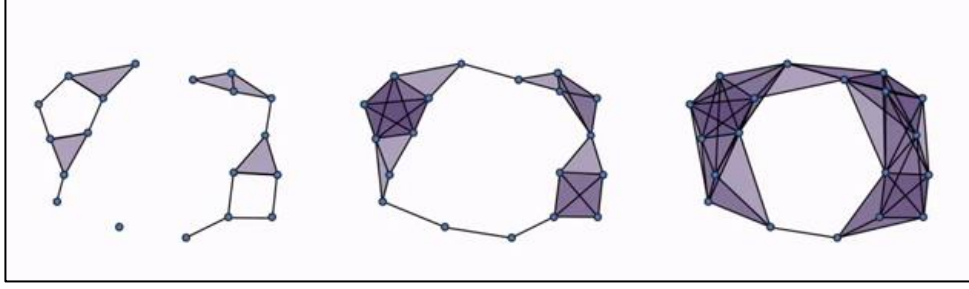
Sonunda küreler büyüdükçe, deliğin ortasında kenarlar belirir ve sonunda o da doldurulur.

İlk görünen küçük delikler, örnekleme düzensizliğinden veya gürültüden kaynaklanır. Barkodda kısa çubuklarla temsil edilirler.

Verinin önemli bir özelliği olarak görülen delik ne kadar büyükse, barkodda uzun bir çubukla gösterilir.

Kısa çubuklar gürültüyü temsil eder. Uzun çubuklar özellikleri temsil eder Bir çubuk, cebirsel bir özelliğin görselleştirilmesidir.

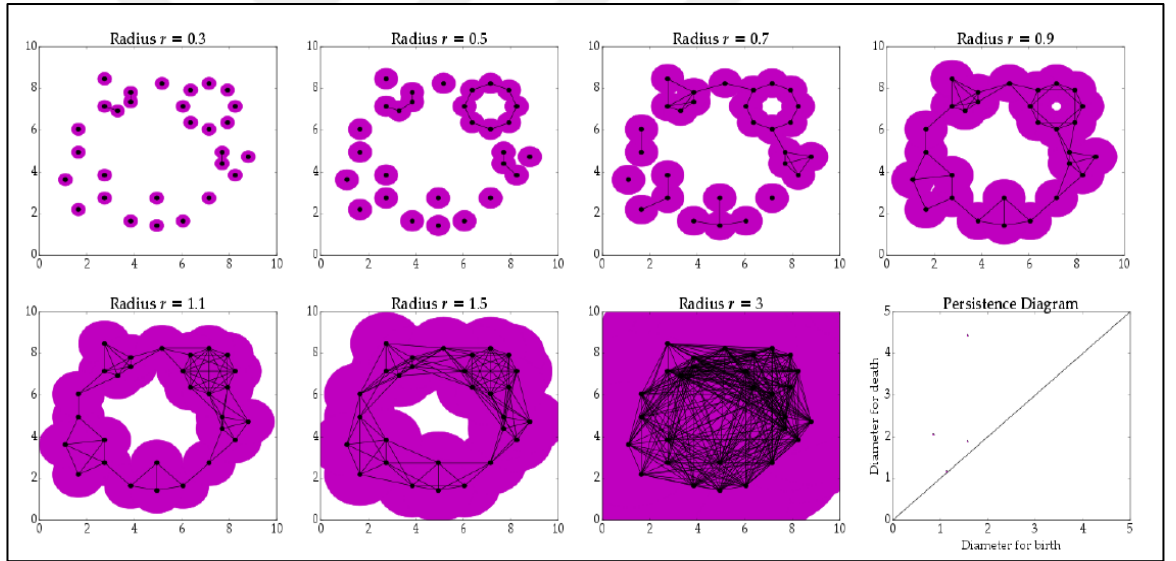
4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER



Şekil 4.18. Basit komplekslerin dizisi

Yukarıda barkodların barkod açıklamasında, her biri bir sonrakinin alt kompleksi olan bir dizi basit kompleks ile ifade edilir.

Bu, bazı küçük mesafeler için verilerden oluşturulan simplicial kompleks, büyük bir mesafe için inşa edilen simplicial kompleksin bir alt kümesidir (Skosana 2016).



Şekil 4.19. TDA sürecinin nitelenmesi örneği (Chazal and Michel 2021)

Şekil 4.19 boyutlarından dolayı EK-2 olarak tekrar verilmiştir.

Tanım 4.9.1: E^n , n boyuta sahip Euclidean uzayındaki noktaların bir sırasız dizisidir (Chazal et al. 2016).

Tanım 4.9.2: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x noktasının bir komşuluğu denir. Diğer bir deyişle τ 'nun x noktasını içeren her elemanına x noktasının bir komşuluğu denir (Koçak 2015).

Tanım 4.9.3: Çekirdek yoğunluk tahmini (KDE), rastgele bir değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmenin parametrik olmayan bir yoludur. Çekirdek yoğunluğu tahmini, sonlu bir veri örneğine dayalı olarak popülasyon hakkında çıkarımların yapıldığı temel bir veri yumuşatma problemidir (Rosenblatt 1956).

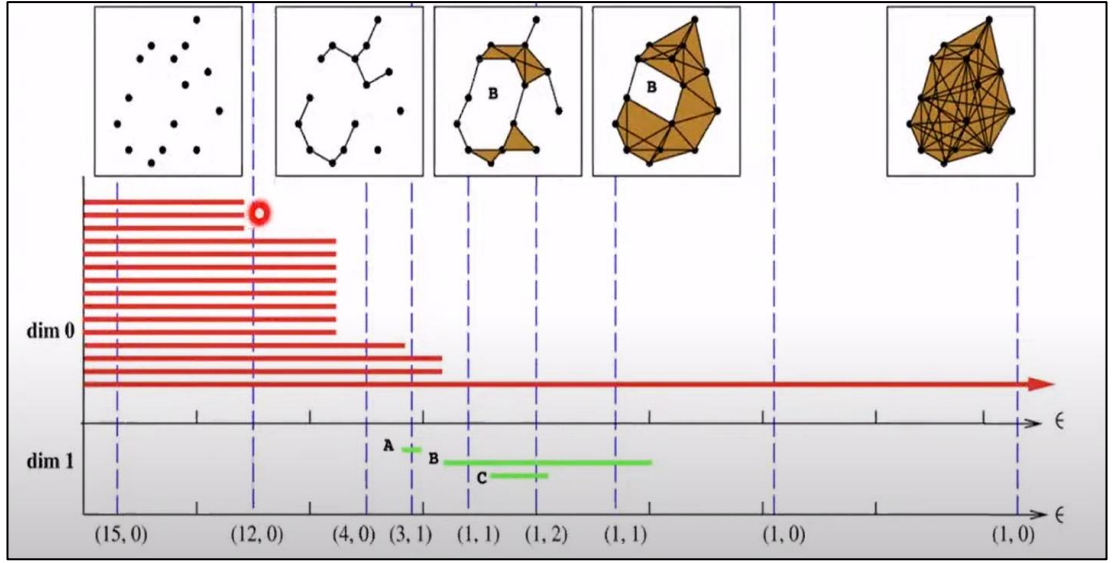
Tanım 4.9.4: En yakın komşu grafiği (KNN), düzlemdeki Öklid mesafesi gibi bir metrik uzaydaki bir dizi nokta için tanımlanan yönlendirilmiş bir grafiktir. KNN 'nin her nokta için bir köşesi ve q, p 'nin en yakın komşusu olduğunda, p 'den q 'ya yönlendirilmiş bir kenarı vardır, bu nokta, p 'ye olan uzaklığı p 'nin kendisinden başka tüm verilen noktalar arasında minimum olan bir noktadır (Preparata 1985).

Tanım 4.9.5: Vietoris-Rips kompleksi $R(X, \epsilon)$ olsun. $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ ve çap en fazla ϵ köşeli simplekslerden oluşur. Başka bir deyişle, σ 'daki her köşe çifti en fazla ϵ uzaklıktaysa, bir simpleks σ komplekse dahil edilir. Yarıçap ϵ kademeli olarak artırılarak elde edilen Rips kompleksleri dizisi bir filtrasyon oluşturur (Fasy et al. 2014).

Tanım 4.9.6: Yatay eksen parametrelere karşılık gelen ve dikey eksen homoloji üreteçlerinin (keyfi) bir sıralamasını temsil eden bir düzlemdeki doğru parçalarının bir koleksiyonu olarak $H_k(C; f)$ homoloji grubunun çizge sunumudur. Bu çizge sunumu barkod olarak adlandırılır (Ghrist 2008).

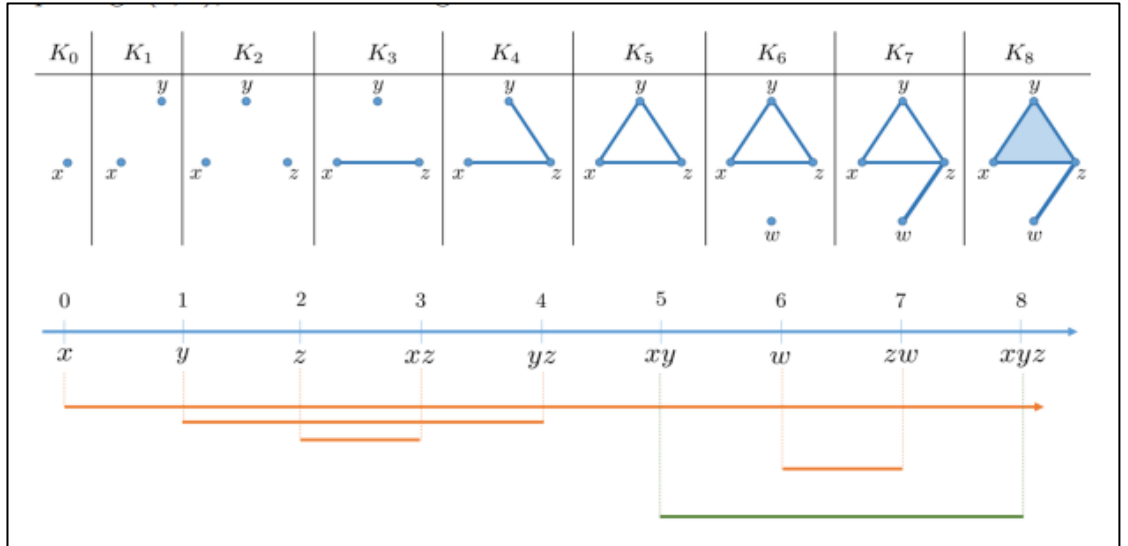
Aşağıdaki örnekler ile veri setlerine karşılık gelen barkodların nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

4. BASİT (SIMPLICIAL) KOMPLEKSLER



Şekil 4.20. Noktaların barkod gösterimlerine bir örnek-1 (Hylton 2019)

Şekil 4.20’de kırmızı çizgiler bağlı bileşenleri, yeşil çizgiler ise 1 –boyutlu delikleri ifade eder. Bu şekilde önce nokta veri setlerinin bir dağılımı alınmış, ardından simpleks oluşumları gözlemlenmiştir. Simpleks oluşum sürecinde her bir nokta 0 simpleksi temsil eder. Ardından 1 –simpleks, 2 –simpleks ve 3 –simpleksler oluşacak şekilde işleme devam edilir.



Şekil 4.21. Noktaların barkod gösterimlerine bir örnek-2 (Perea2018)

Şekil 4.21 ‘de simpleks oluşumlarının birer temsili verilmiştir. Burada x noktasının başlangıcı doğduğu an olarak kabul edilir. Turuncu çizgilerin en uzununu x noktasını temsil eder. Yani x noktası noktalar arasında en uzun ömürlü olan en inatçı

olan noktadır. y noktası K_1 'inci zaman diliminde doğmuş ardından K_4 'üncü zaman diliminde z noktasına bağlandığından bir simplicial kompleks ortaya çıkmış ve ölmüştür. Dolayısıyla ikinci sıradaki turuncu çizgi bu zaman diliminde sonra ermiştir. K_5 'inci zaman diliminde bir delik ortaya çıkmış ve bu deliğin temsili yeşil çizgi ile yapılmıştır. Delik K_8 'inci zaman diliminde tamamen 3 simplekslerle dolduğundan ölmüştür. Dolayısıyla çizgi bu zaman diliminde sonlanmıştır. Artık K_8 'inci zaman diliminden sonra simplicial kompleksin görüntüsü hep aynı şekilde görünmektedir, bunun sebebi ise doğacak ya da ölecek bir nokta veya delik kalmadığındandır.

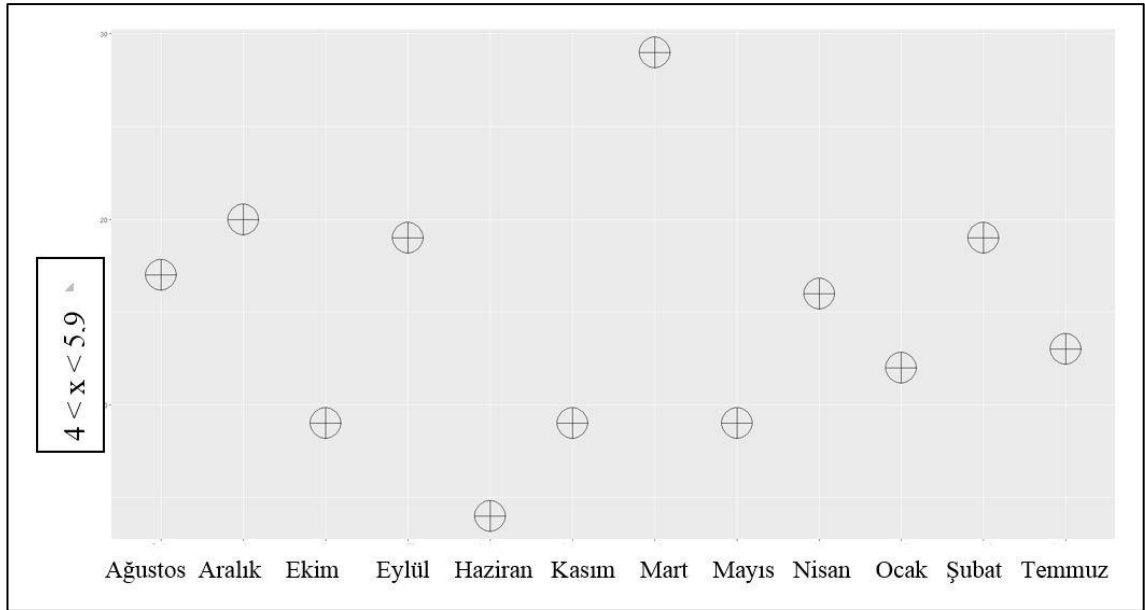


5. TOPOLOJİK DATA ANALİZİNİN BİR UYGULAMASI

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Aylar	Gün Sayısı	M>0,6	Ortalama Gün	0,6<M<1,9	2<M<2,9	3<M<3,9	4<M<4,9	5<M<5,9	6<M<6,9	7<M<7,9	Aylık Toplam	4+5	deprem şiddeti	toplam deprem	
2	ocak	31	1199	39	683	428	76	11	1	0	0	1199	12	0,6-1,9	8522	
3	şubat	28	1252	45	704	450	79	18	1	0	0	1252	19	2-2,9	5962	
4	mart	31	2330	75	1293	849	159	27	2	0	0	2330	29	3-3,9	1020	
5	nisan	30	1564	52	814	643	91	14	2	0	0	1564	16	4-4,9	156	
6	mayıs	31	1132	38	573	474	7	9	0	0	0	1132	9	5-5,9	20	
7	haziran	30	816	27	385	36	66	4	0	0	0	819	4	6-6,9	0	
8	temmuz	31	1047	34	528	445	61	11	2	0	0	1047	13	7-7,9	0	
9	ağustos	31	1336	43	618	581	120	13	4	0	0	1336	17			
10	eylül	30	1422	47	690	597	116	16	3	0	0	1422	19			
11	ekim	31	1422	46	825	521	67	8	1	0	0	1422	9			
12	kasım	30	1195	40	656	454	76	8	1	0	0	1195	9			
13	aralık	31	1359	44	753	484	102	17	3	0	0	1359	20			
14																

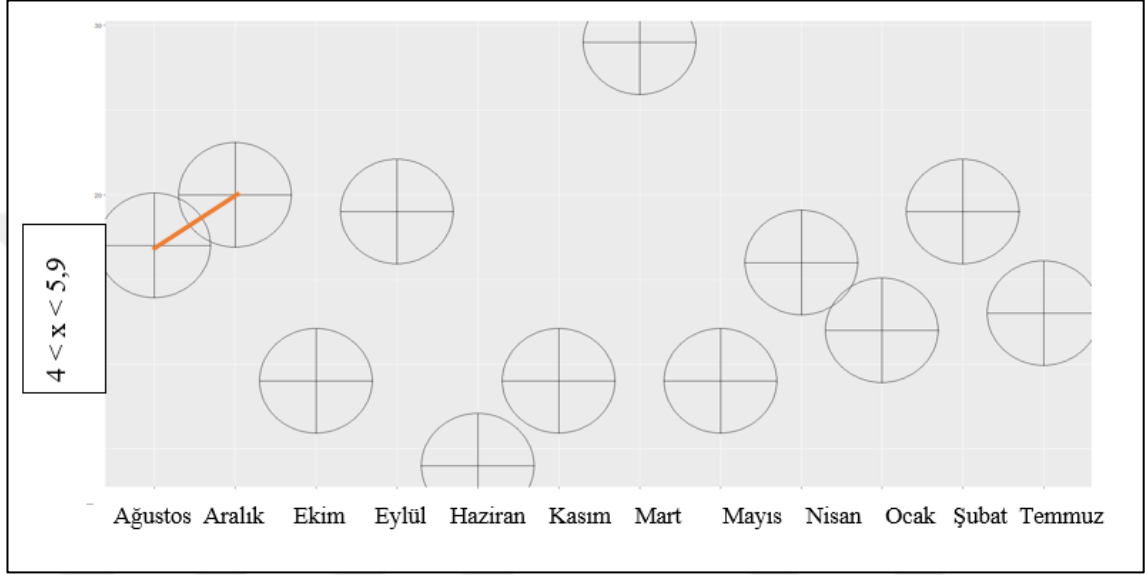
Şekil 5.1. Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü (KRDAE)’ den alınan veri setinin R STUDIO ‘daki görüntüsü.

TDA uygulaması yapılırken öncelikle veri seti R STUDIO programına aktarılarak saçılım grafiği oluşturulur. Bu tezde deprem verilerinde 4 şiddetinden büyük 5.9 şiddetinden küçük toplam 176 nokta incelenmiştir (R STUDIO programında kullanılan kodlar EK-1 olarak sunulmuştur.).



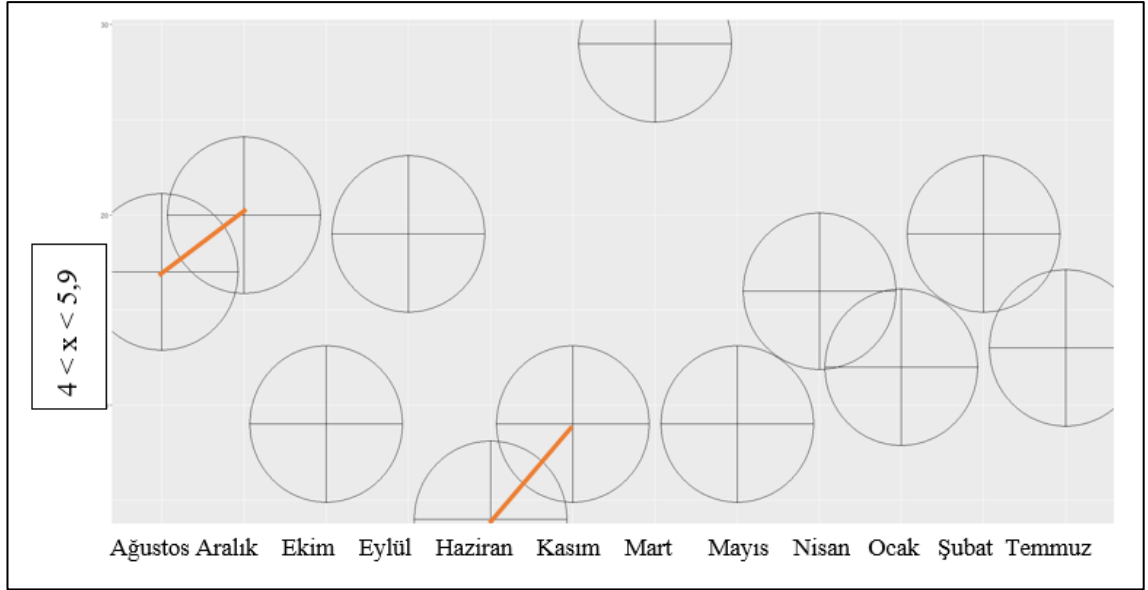
Şekil 5.2. Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü (KRDAE) ‘nden alınan veri setinin R STUDIO programı ile gösterimi.

Şekil 5.2 'ye göre en fazla depremin mart ayında olduğu açıkça görülmektedir. Saçılım grafiği R STUDIO programında çizdirdikten hemen sonra veri setine Cebirsel Topoloji'ye ait olan kavramlardan Simplicial Complex işlemlerini adım adım uygulanarak Rips Filtasyonu oluşturulur. Tüm bunların ardından oluşturulan KDE Diyagramı aşağıda Şekil 5.7 adı ile yer almaktadır. Tüm bu işlemler R STUDIO programında gerekli kodlamalar girilerek oluşturulmuştur.



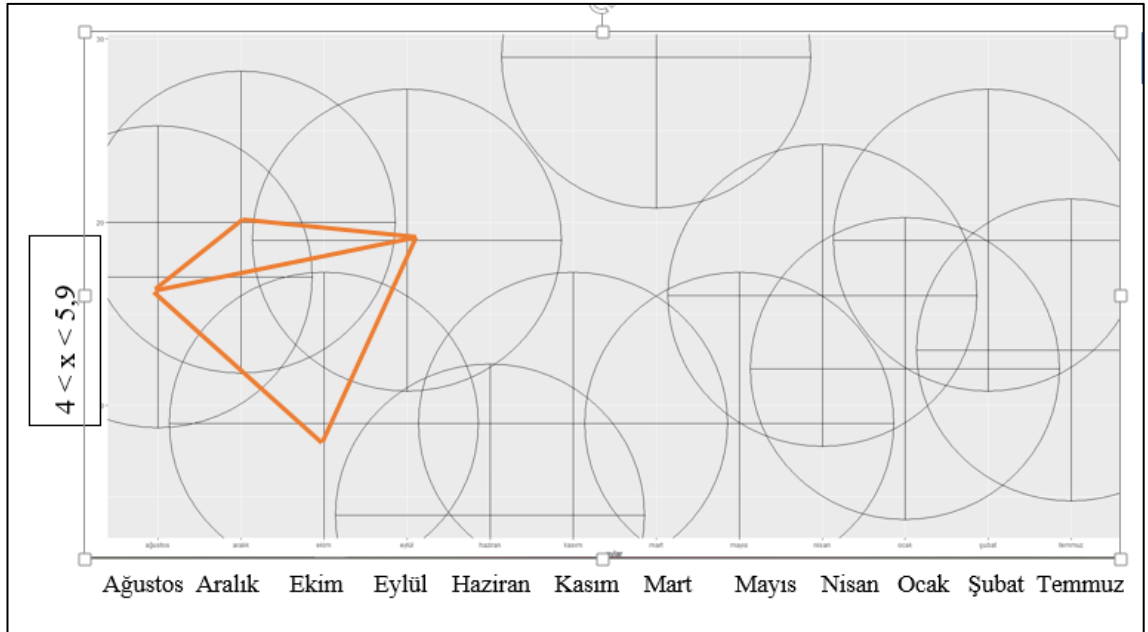
Şekil 5.3. Ağustos ve Aralık aylarına ait kesişme işlemi temsili ve 1 –simpleks oluşumunun gösterimi.

Öncelikle her bir nokta için ε yarıçapa sahip komşuluklar alınır. Yarıçaplar R STUDIO programı aracılığı ile büyütülmeye başlanır. Yani ε değeri sürekli bir halde artar. Artan yarıçaplarla birlikte büyüyen komşuluklar arasında kesişmeler meydana gelir. İki komşuluk yani iki nokta kesiştiğinde 1 –Simpleksler oluşur.



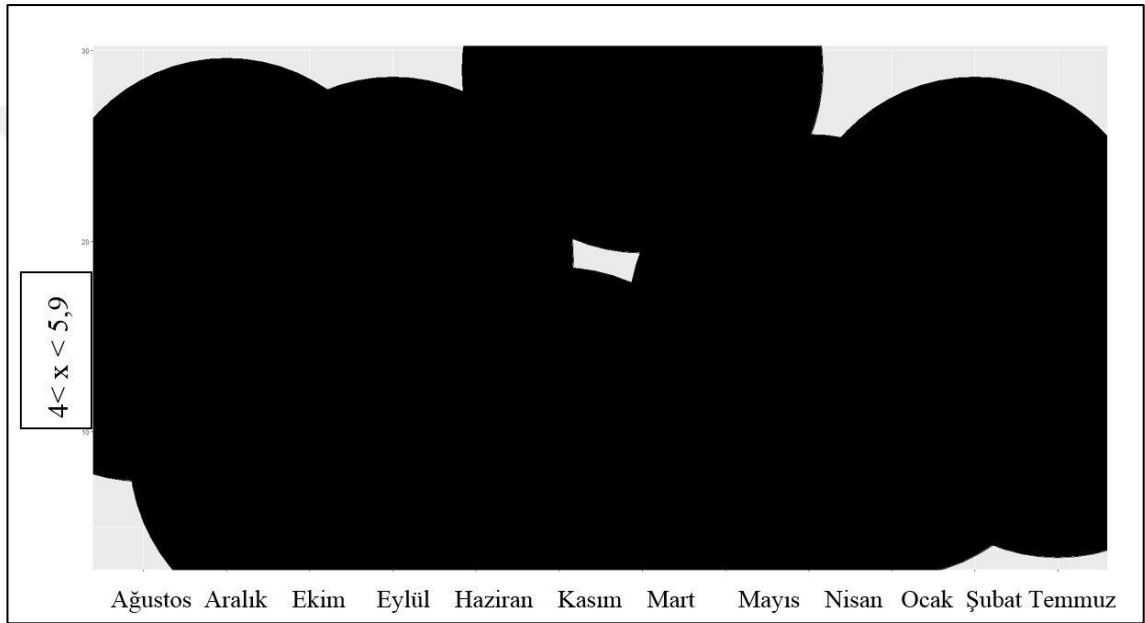
Şekil 5.4. Haziran ve Kasım aylarına ait kesişme işlemi temsili ve 1 –simpleks oluşumunun gösterimi.

ε yarıçapı büyüdükçe noktalara ait komşuluk kesişimleri artmaktadır. 1 –simplekslerin ardından 2 –simpleksler oluşmaya başlar. Amaç en küçük konveks kümeyi oluşturmak olduğundan 3 –simplekler yani tetrahedronlar oluşturmak için ε yarıçaplar büyütülmeye devam edilir.



Şekil 5.5. ε yarıçapı büyütülmesi ile tetrahedron oluşumunun temsili gösterimi

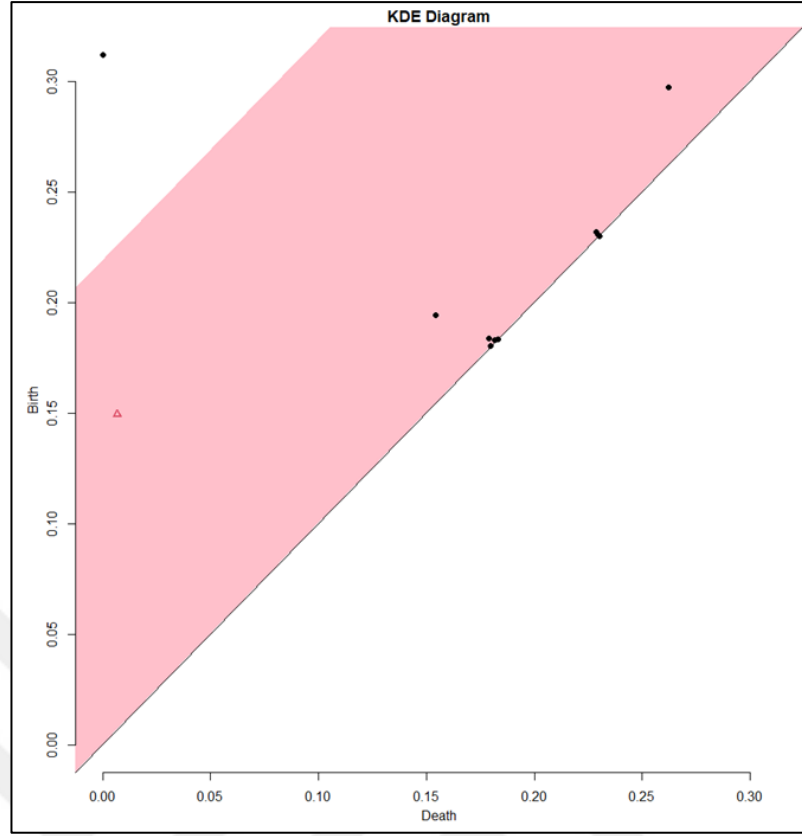
Şekil 5.5 ‘ te açıkça görüldüğü üzere bir çok noktaya ait komşuluklar kesişmiştir. Ancak mart ayının hala kesişmediği görülmektedir. Burada en doğru ε değerinin ne olduğu sorusu akıllara gelebilir. Tam olarak bu kısımda Topolojik Veri Analizi devreye girerek R STUDIO programında TDA kütüphanesi ile bütün reel sayıları süreklilik sistemi içerisinde inceleyerek ε yarıçapları sistematik olarak arttırmaya başlar. Süreklilik kavramından ötürü TDA bir süreç olarak ele alınır. Bu yüzden grafiklerde zaman, ölüm ve doğum kavramları yer almaktadır. Komşulukların kesişme anların veri noktalarının ölüm anını temsil ederken kesişmeye bağlı oluşan döngüler ise doğumun temsilidir.



Şekil 5.6. ε yarıçapı büyütülmesi ile oluşan tetrahedronların renklendirilerek temsili gösterimi.

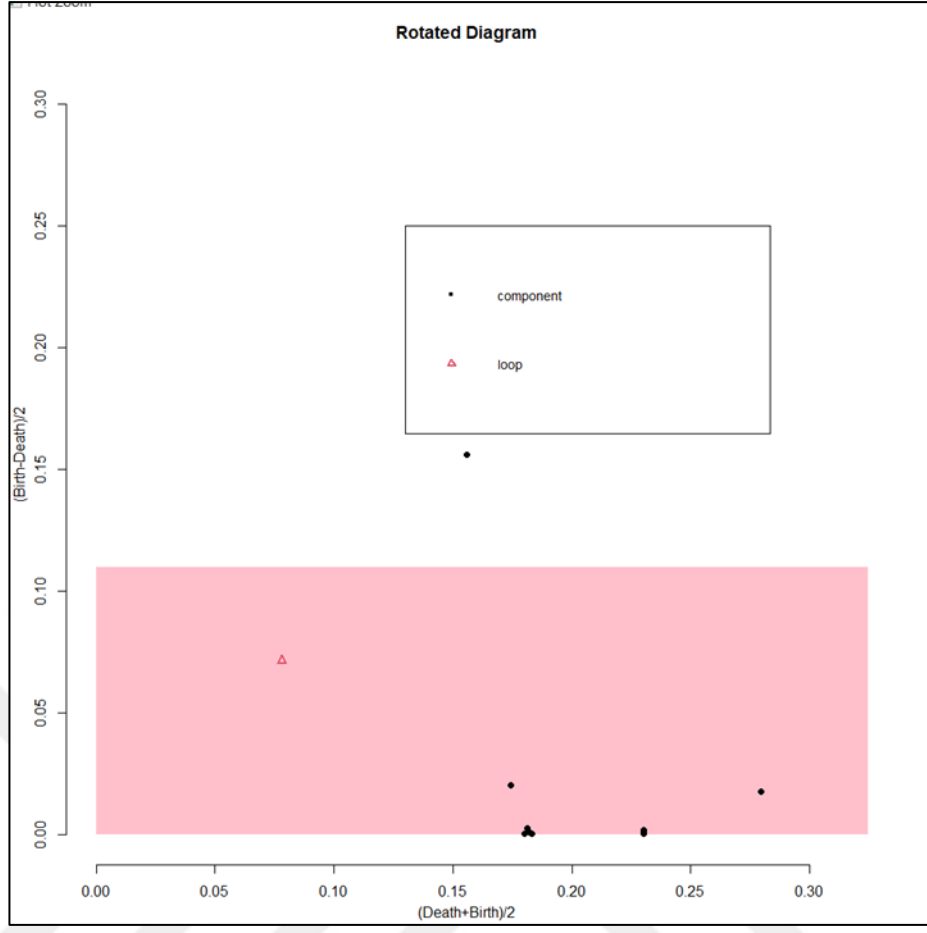
Şekil 5.6 da komşuluklar kesişmiş ve bir çok sayıda tetrahedron oluşturulmuştur. Komşuluk kesişimlerini daha net görebilmek adına kesişimler renklendirilmiştir. Bu durumda kesişmenin yaşanmadığı kısmı yani ortada kalan boşluğu açıkça ifade edebiliriz. Her komşuluk artık konveks kümelerden oluştuğundan veri bulutu TOR şeklini almıştır. Betti Sayıları ile ifade edilirse $b_0=1$, $b_1=2$, $b_2=1$ şeklindedir. $b_2=1$ ifadesi döngü olarak da ifade edilmektedir.

R STUDIO programında TDA için adımlar devam ettirildiğinde sırasıyla KDE Diyagramı, KNN Diyagramı, Rotated Diyagramı ve Barkod sistemleri oluşmaktadır. Tüm bu adımların temel amacı barkod sistemini oluşturmaktır.



Şekil 5.7. R STUDIO programında KDE Diyagramı gösterimi

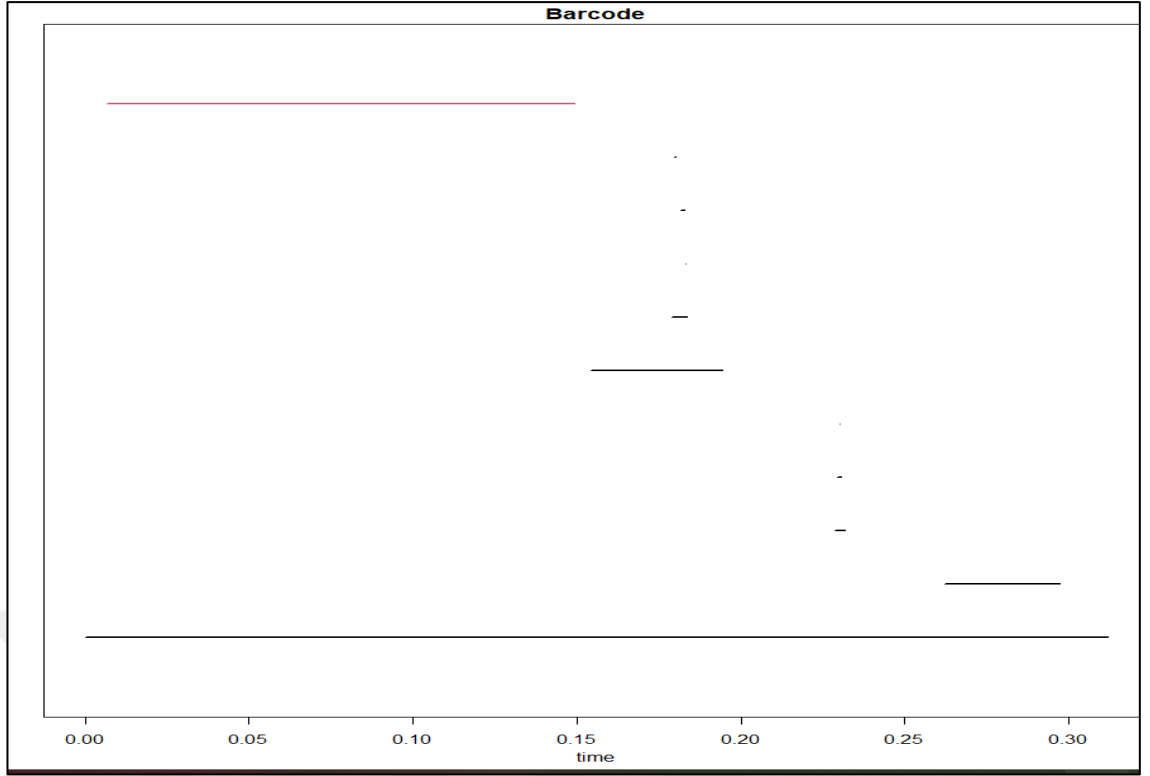
Şekil 5.7 'ye göre siyah noktalar bağlı bileşenleri kırmızı üçgenler ise döngüleri temsil eder. Açığortay doğrusuna noktalar ne kadar yakın ise o kadar noktaların ömürleri barkod sisteminde o kadar kısa ifade edilecek şekilde düzenlenecektir. Barkod sistemine ulaşmanın diğer bir yolu Rotated Diyagramının oluşturulmasıdır.



Şekil 5.8. R STUDIO programında Rotated Diyagramı gösterimi

Şekil 5.8, Şekil 5.7 deki diyagrama benzemekle beraber pembe kısım %90 güven bandı kısmını oluşturarak noise-parazit verilerden arındırılmış haldedir. Örneğin Mart ayı pembe bandın dışında bulunan siyah nokta ile temsil edilir.

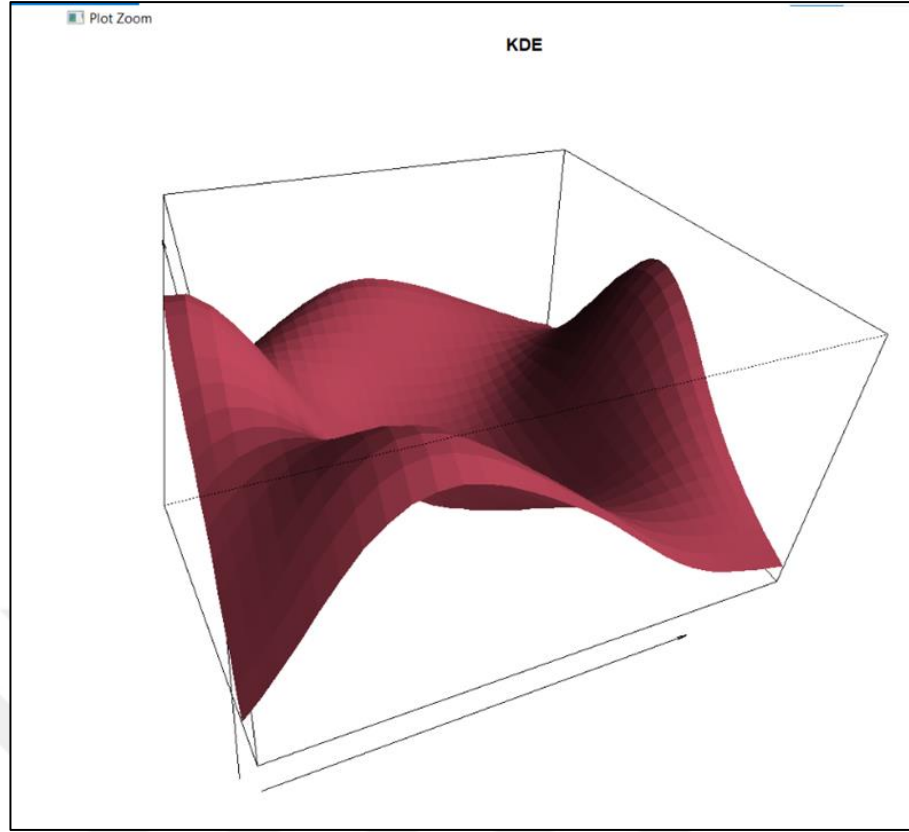
Tüm bu işlemlerin ardından Barkod sistemi oluşturulur.



Şekil 5.9. Kırmızı çizgi döngülerin ömrünü, siyah kısımlar ise bağlı bileşenlerin ömrünü temsil eder.

Noktalarının birbirine bağlanma süreçleri düşünüldüğünde ilk olarak aralık ve ağustos aylarına ait noktalar kesişmiş ve 1 simpleks olduğu gözlemlenmiştir. TDA işlemleri zaman algısında inceler. Böylece kesişimlerin kısa sürede gerçekleşmesi TDA sürecinde ölüm olarak ifade edilir. Ölen noktalar barkod diyagramında kısa doğru parçaları ile gösterilirken daha geç kesişme, daha büyük ε yarıçapları ile kesişen noktalar ise daha uzun doğru parçaları ile temsil edilir. Örneğin yukarıdaki grafikte görünen en uzun siyah doğru parçası mart ayının kesişme zamanını ifade eder. TDA verileri süreklilik adı altında incelediğinden mart ayına ait nokta incelenirse yaklaşık 0.30 ‘uncu zaman diliminden hemen önce başlayarak ve bu zaman dilimini de aşarak kesişme anının yaşandığını söyleyebiliriz. Bunu giriş kısmında verdiğimiz bitki örneği ile temsil edebiliriz.

Kesişme işlemini hemen gerçekleştiren noktalar veri seti ile uyumlu noktalar olarak ilişkilendirilirken kesişmesi uzun süren noktalar noise- parazit noktalar olarak adlandırılır. Örneğin mart ayının noise-parazit olduğu fark edilir. Yani veri setiyle en uyumsuz olan noktadır.



Şekil 5.10. 3 Boyutta veri bulutu olan KDE Veri bulutu

Veri bulutu barkod sisteminden sonra R STUDIO aracılığıyla 3 –boyutta KDE ile ifade edilir.

Sivri kısımların Mart ayını daha yumuşak yüzeylerin ise Ağustos-Aralık ayları olarak temsil edildiği söylenebilir (Kılıç ve Elmalı 2021).

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tez boyunca TDA tanıtılmıştır. TDA düşük boyutlu veri bulutlarından yüksek boyutlu sağlam verileri elde etmeyi amaçlar. Veriler, kayıp olmaması ve en doğru sonuçları vermesi adına veri analizinden farklı olarak küresel karakterizasyonda sunulmuştur. Veri setinin küresel şekli işlem sonuçları hakkında önemli bilgiler sağlamaktadır. Bunun için öncelikle veri bulutları Rips Komplekslerle temsil edilmiş ve komplekslerin filtrasyonlarının barkod yapıları oluşturulmuştur.

Persistence Homoloji Teorisi aracılığıyla bir uzayın yüksek boyutlu veri kümesinin bir örnekleminde elde edilen küresel topolojik bilgileri ortaya çıkarma problemini çözmesi hedeflenmektedir.

Bu tezde Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi ve Deprem Araştırma Enstitüsü (KRDAE) 'nden alınan veri seti kullanılarak bir uygulama yapılmıştır. Uygulama sonucunda veri bulutunun Rips Diyagramı, KDE Diyagramı, KNN Diyagramı ve barkod yapısı oluşturulmuştur. Bunun sonucunda en fazla depremin mart ayında olduğu, mart ayındaki verinin aykırı nokta olduğu yani noise-parazit nokta olduğu görülmüştür. Ayrıca homotop olan iki şeklin barkodları her zaman aynı değildir.

TDA paketi, kalıcı homolojinin hesaplanması için etkili algoritmalara erişim sağlayarak topolojik veri analizini daha geniş bir kitleye erişilebilir hale getirmeyi amaçlar.

TDA 'nın verilerin analizi için kapsamlı bir uygulama olmasını hedeflenmektedir. Tezde kullandığımız R STUDIO programındaki TDA paketi/kütüphanesi bu işlevi sağlamaktadır. Var olan tüm TDA kütüphaneleri için yeni işlevler eklenmesi hedeflenmektedir.

1.000 nokta ve üzerine sahip veri setlerinde çalışırken günümüzde sık sık kullanılan bilgisayarlar yetersiz kalmaktadır. Daha küçük kapasiteye sahip bilgisayarlarda daha yüksek boyutlu işlemleri çalıştırabilecek programlara ihtiyaç duyulmaktadır.

KAYNAKLAR

- Alba, R. D. 1973. A graph-theoretic definition of a sociometric clique. *Journal of Mathematical Sociology*, 3(1), 113.
- Biasotti, S., Giorgi, D., Spagnuolo, M., Falcidieno, B. 2008. Reeb graphs for shape analysis and applications. *Theoretical Computer Science*, 392(1-3), 5-22.
- Boissonnat, J. D., Chazal, F., Yvinec, M. 2018. *Geometric and topological inference*. Cambridge University Press, (57), 19-38.
- Chazal, F., Michel, B. 2021. An introduction to topological data analysis: fundamental and practical aspects for data scientists. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 4, 4-10.
- Edelsbrunner, H., Letscher, D., Zomorodian, A. 2000. Topological Persistence and Simplification, In *Proceedings 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 12-14 Kasım, IEEE, 511.
- Fasy, B. T., Kim, J., Lecci, F., Maria, C. 2014. Introduction to the R package TDA, In collaboration with the CMU TopStat Group. *Journal of Symbolic Computation*, 3, 9-12.
- Ghrist, R. 2008. Barcodes: The Persistent Topology of Data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(1), 61-75.
- Goldblatt, R. 1984. *Topoi: Categorical Analysis of Logic* (Dover Books on Mathematics). Elsevier, 98, Kuzey Hollanda.
- Horak, D. Maletic, S. and Rajkovic, M. 2009. Persistent Homology of Complex Networks, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(3), 1-19.
- Karaca, İ. 2018. *Çözümleriyle Topoloji Problemleri*. Palme yayınevi. 132, Türkiye.
- Kılıç, S. ve Elmalı C. S. 2021. 1st international symposium on recent advances in fundamental and applied sciences, 10-12 Eylül, Atatürk Üniversitesi yayınları, 1, 574-581, Türkiye.
- Koçak, M. 2015. *Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri*. Nisan Kitapevi yayınları, 93, Eskişehir.
- Preparata, F. P., Shamos, M. I. 1985. *Computational geometry: an introduction*. Springer Science & Business Media, 220, New York.
- Skosana, S. L., Visaya, M. V. 2016. Onur Projesi. *Topological Data Analysis.*, University Of Johannesburg, 8-11, Johannesburg.
- Hylton, A., Henselman-Petrusek, G., Sang, J., Short, R. 2019. Tuning the performance of a computational persistent homology package. *Software: Practice and Experience*, 49(5), 2-3.

Yüce, S. 2020. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri. Pegem yayınevi, 2, Ankara.

Zulkepli, N. F. S., Noorani, M. S. M., Razak, F. A., Ismail, M., Alias, M. A. 2019. Topological characterization of haze episodes using persistent homology. Aerosol and Air Quality Research, 19(7), 5.

Zomorodian, A., Carlsson, G. 2005. Computing persistent homology. Discrete & Computational Geometry, 33(2), 249.



EKLER

EK 1

R STUDIO programında kullanılan kodlar EK-1 olarak verilmiştir.

```
1 library("TDA")
2 X <- circleunif(176)
3 xlim <- c(-1.6, 1.6); ylim <- c(-1.7, 1.7); by <- 0.065
4 xseq <- seq(xlim[1], xlim[2], by = by)
5 yseq <- seq(ylim[1], ylim[2], by = by)
6 Grid <- expand.grid(xseq, yseq)
7 distance <- distFct(X = X, Grid = Grid)
8 m0 <- 0.1
9 DTM <- dtm(X = X, Grid = Grid, m0 = m0)
10 k <- 60
11 knn <- knnD(X = X, Grid = Grid, k = k)
12 h <- 0.3
13 KDE <- kde(X = X, Grid = Grid, h = h)
14 h <- 0.3
15 kdlist <- kernelbist(X = X, Grid = Grid, h = h)
16 persp(xseq, yseq,
17       matrix(KDE, ncol = length(yseq), nrow = length(xseq)), xlab = "",
18       ylab = "", zlab = "", theta = -20, phi = 35, ltheta = 50,
19       col = 2, border = NA, main = "KDE", d = 0.5, scale = FALSE,
20       expand = 3, shade = 0.9)
21 band <- bootstrapBand(X = X, FUN = kde, Grid = Grid, B = 100,
22                       parallel = FALSE, alpha = 0.1, h = h)
23 diaggrid <- griddiag(
24   X = X, FUN = kde, h = 0.3, lim = cbind(xlim, ylim), by = by,
25   sublevel = FALSE, library = "dionysus", location = TRUE,
26   printProgress = FALSE)
27 plot(DiagGrid[["diagram"]], band = 2 * band[["width"]],
28      main = "KDE diagram")
29 par(mfrow = c(1, 2), mai = c(0.8, 0.8, 0.3, 0.1))
30 plot(DiagGrid[["diagram"]], rotated = TRUE, band = band[["width"]],
31      main = "Rotated diagram")
32 plot(DiagGrid[["diagram"]], barcode = TRUE, main = "Barcode")
33 Circle1 <- circleunif(60)
34 Circle2 <- circleunif(60, r = 2) + 3
35 Circles <- rbind(Circle1, Circle2)
36 maxscale <- 5
37 maxdimension <- 1
38 Diagrps <- ripsdiag(X = Circles, maxdimension, maxscale,
39                    library = c("GUDHI", "Dionysus"), location = TRUE, printProgress = FALSE)
40 persistence diagram of alpha complex
41 Diagonalphcmplx <- alphaComplexdiag(
42   Diagrps, maxdimension, maxscale,
43   library = c("GUDHI", "Dionysus"), location = TRUE, printProgress = FALSE)
44 plot(Diagonalphcmplx, main = "Alpha complex persistence diagram")
45
```

```

39 library = c("GUDHI", "dionysus"), location = TRUE, printProgress = FALSE)
40 persistence diagram of alpha complex
41 Diagonalphacmplx <- alphacomplexDiag(
42   X = X, library = c("GUDHI", "dionysus"), location = TRUE,
43   printProgress = TRUE)
44
45 par(mfrow = c(1, 2))
46 plot(Diagonalphacmplx[["diagram"]], main = "Alpha complex persistence diagram")
47 one <- which(Diagonalphacmplx[["diagram"]][, 1] == 1)
48 one <- one[which.max(
49   Diagonalphacmplx[["diagram"]][one, 3] - Diagonalphacmplx[["diagram"]][one, 2])]
50 plot(X, col = 1, main = "Representative loop")
51 for (i in seq(along = one)) {
52   for (j in seq_len(dim(Diagonalphacmplx[["cycleLocation"]][one[i]])[1])) {
53     lines(Diagonalphacmplx[["cycleLocation"]][one[i]][j, ], pch = 19,
54           + cex = 1, col = i + 1)
55   }
56 }
57 par(mfrow = c(1, 1))
58 n <- 30
59 X <- cbind(circLeunif(n = n), runif(n = n, min = -0.1, max = 0.1))
60 Diagonalphashape <- alphashapediag(
61   X = X, maxdimension = 1, library = c("GUDHI", "dionysus"), location = TRUE,
62   printProgress = TRUE)

```

EK 2

Şekil 4.19 EK 2 olarak verilmiştir.

