



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GEOMETRİK YAKLAŞIM İLE ELDE EDİLEN BİR
İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA
TEOREMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrullah İsa GÜRBÜZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Samet MALDAR

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342401 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Emrullah İsa GÜRBÜZ tarafından hazırlanan “**GEOMETRİK YAKLAŞIM İLE ELDE EDİLEN BİR İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Emrah Evren KARA

Düzce Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 12/ 06 / 2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Emrullah İsa GÜRBÜZ

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin tamamlanmasında emeği geçen herkese en içten teŖekkürlerimi sunarım. Her Ŗeyden önce, yüksek lisans alıŖmalarım boyunca paha biçilmez rehberliği, teŖviki ve geri bildirimleri bu araŖtırmanın başarısına aracı olan danıŖmanım Doç. Dr. Samet MALDAR’a derinden borçluyum.

Ayrıca, bu alıŖmanın kalitesini önemli ölçüde artıran yapıcı yorumları ve anlayıŖlı önerileri için tez savunma jüri üyeleri Prof. Dr. Emrah Evren KARA ve Doç. Dr. Tunar ŖAHAN’a minnettarım.

Yüksek lisans yolculuğumun iniŖ ıkıŖları boyunca beni her zaman destekleyen ve motive eden eŖime ev aileme minnettarım.

Bu alıŖma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik AraŖtırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında desteklenmiŖtir. TÜBİTAK'a bu değerli katkılarından dolayı teŖekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu alıŖmanın amacı doğrultusunda zamanlarını, bilgilerini ve deneyimlerini cömertçe paylaŖan tüm katılımcılara en içten teŖekkürlerimi sunmak isterim.

Deđerli katkılarınız için hepinize teŖekkür ederim.

Emrullah İsa GÜRBÜZ

Aksaray, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	5
3. SABİT NOKTA İÇİN BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİ	11
4. YAKINSAKLIK, YAKINSAKLIK HIZI, KARARLILIK VE VERİ BAĞLILIĞI	17
4.1 Yakınsaklık	17
4.2 Yakınsaklık Hızı	35
4.3 Kararlılık	44
4.4 Veri Bağıllığı	46
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEOMETRİK YAKLAŞIM İLE ELDE EDİLEN BİR İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Emrullah İsa GÜRBÜZ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

ÖZET

Son yıllarda, iterasyon yöntemlerinin performansını artırmaya yönelik birçok çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda, Kanwar ve arkadaşlarının 2021 yılında geliştirdiği yeni iterasyon yöntemleri, literatürde önemli bir yenilik olarak karşımıza çıkmaktadır. İterasyon yöntemleri söz konusu olduğunda, dikkate alınması gereken en önemli hususlardan biri de bu yöntemlerin yakınsama hızlarıdır. Bu konuda son yıllarda sürekli olarak önceki yıllarda elde edilen iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsayan iterasyon yöntemleri ortaya atılmaktadır. Sharma ve arkadaşları tarafından 2024 yılında bazı iterasyon yöntemleri geliştirilmiş olup bu yöntemlerin Kanwar ve arkadaşları tarafından geliştirilen iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir. Bu yöntemler, yalnızca teorik olarak değil, aynı zamanda uygulamalı matematikte de daha hızlı yakınsama ve daha geniş bir problem sınıfında uygulanabilirlik sunmuştur. Bu tez çalışmasında da Sharma ve arkadaşları tarafından geliştirilen iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsayan bir iterasyon yöntemi elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni yöntemin diğer iterasyon yöntemi ile yakınsaklık hızı karşılaştırılmış ayrıca kararlılık ve veri bağılılığı sonuçları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Yakınsaklık, Yakınsaklık Hızı, Yeni İterasyon Yöntemleri

Haziran, 2025; 59 sayfa

M.Sc. THESIS

**SOME FIXED POINT THEOREMS FOR AN ITERATION METHOD
OBTAINED BY GEOMETRIC APPROACH**

Emrullah İsa GÜRBÜZ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Samet MALDAR

ABSTRACT

In recent years, many studies have been conducted to improve the performance of iteration methods. In this context, the new iteration methods developed by Kanwar et al. in 2021 are an important innovation in the literature. When it comes to iteration methods, one of the most important issues to consider is the convergence speed of these methods. In recent years, iteration methods that converge faster than the iteration methods obtained in previous years have been continuously proposed. Some iteration methods were developed by Sharma et al. in 2024 and it was shown that these methods converged faster than the iteration method developed by Kanwar et al. These methods have shown faster convergence and applicability to a wider class of problems, not only theoretically but also in applied mathematics. In this thesis, an iteration method that converges faster than the iteration method developed by Sharma et al. The convergence speed of this new method is compared with the other iteration method and the stability and data dependency results are analyzed.

Keywords: Fixed Point, Convergence, Rate of Convergence, New Iteration Methods

June, 2025; 59 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Geometrik Yaklaşım ile Elde Edilen Bir İterasyon Yöntemi.	15
Şekil 4.1. S Dönüşümünün Contractive-Like Olduğunun Gösterimi.	33
Şekil 4.2. İterasyon (3.18), İterasyon (3.19), İterasyon (3.20), İterasyon (3.21) ve İterasyon (3.22) İçin Yakınsaklık Davranışları	33
Şekil 4.3. Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri ile Bu Çalışmada Ele Alınan Diğer İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışları.....	41
Şekil 4.4. Bu Çalışmada Bahsi Geçen Tüm İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışları	41
Şekil 4.5. (4.54) İterasyonunun Yakınsaklık Davranışı.....	52



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. İterasyon (3.18), İterasyon (3.19), İterasyon (3.20), İterasyon (3.21) ve İterasyon (3.22) İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri...	34
Çizelge 4.2. İterasyon (3.14), İterasyon (3.15) ve Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri	42
Çizelge 4.2.(devam) İterasyon (3.14), İterasyon (3.15) ve Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri	43
Çizelge 4.3. İterasyon (4.54) İçin Yakınsaklık Davranışının Sayısal Değerleri.....	53



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{C}$	Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathcal{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\emptyset$	Boş Küme
K	Cisim
$\mu: E \times E \rightarrow (0, \infty)$	E Üzerinde Tanımlı Metrik Fonksiyonu
$\ \cdot\ : E \rightarrow K$	E Üzerinde Tanımlı Norm Fonksiyonu
(E, μ)	Metrik Uzay
$(E, \ \cdot\)$	Normlu Uzay
$F(S)$	S Dönüşümünün Sabit Noktalarının Kümesi
Sx	x Noktasının S Dönüşümü Altındaki Görüntüsü

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi günlük hayattaki olayların lineer olmayan denklemler olarak ifade edilen yapıların çözümü için gerekli şartların ortaya konularak en iyi çözüme ulaşmasıdır. Bu çözümlere ulaşmak ya da gerçek değerini tespit edebilmek önemlidir. Bu nedenle sabit nokta teorisi devreye girdiğinde iterasyon kavramı karşımıza çıkmaktadır. İterasyon yöntemleri ile kesin ya da yaklaşık sonuçlara belirli adımlarda ulaşılabilir. Bu nedenle seçilen parametrelerin ve iterasyonların önemi büyüktür. Bu temel amaç doğrultusunda, sabit nokta teorisi matematiksel analiz ve topolojinin önemli bir alt dalı olarak karşımıza çıkar. Esasen, belirli dönüşümlerin uygulandığı uzaylarda değişmeyen noktaların, yani sabit noktaların varlığını ve niteliklerini inceler. Bu teori, soyut matematiksel çerçeveler sunmasının yanı sıra, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimleri gibi çeşitli disiplinlerdeki problemlerin çözümünde de güçlü araçlar sunar [1-6]. Sabit nokta teoremleri, bu alanlardaki denge durumlarının, kararlı çözümlerin ve optimal noktaların belirlenmesinde hayati bir rol oynar.

Sabit nokta teorisinin kökleri, diferansiyel denklemler alanındaki öncü çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçiler Picard ve Poincaré'ye kadar uzanmaktadır [7-8]. Ancak bu alandaki ilk somut adım ve kanıtlanmış ilk sabit nokta teoremi olarak kabul edilen Brouwer'ın klasik teoremiyle atılmıştır [9]. Ne var ki, sabit nokta kavramının geniş bir uygulama yelpazesine sahip olmasında Polonyalı matematikçi Banach'ın yadsınamaz bir etkisi bulunmaktadır. 1922 yılında Banach tarafından ortaya konulan ve Banach Büzülme İlkesi olarak bilinen temel teorem, tam metrik uzaylarda tanımlanan bir daralma dönüşümü aracılığıyla oluşturulan Picard iterasyon dizisinin, söz konusu dönüşümün tekil sabit noktasına yakınsayacağını kesin bir şekilde ifade etmektedir [10].

Banach'ın bu çığır açan teoremi, sadece uygulamalı matematik alanında değil, matematiğin çeşitli disiplinlerinde de derin izler bırakmış ve adeta bir dönüm noktası olmuştur. Bu temel sonuç, alandaki hızlı bir ilerlemenin fitilini ateşleyerek pek çok araştırmacıyı bu teoremi farklı matematiksel yapılara uyarlamaya ve genişletmeye teşvik etmiştir. İşte bu yoğun çalışmalar neticesinde, literatürde bugün çok sayıda farklı sabit nokta teoremi bulunmaktadır [8-14].

Uygulamalı matematiğin neredeyse her köşesinde iterasyon yöntemlerinin vazgeçilmez bir yeri vardır. Bu yöntemlerin yakınsaklığının gösterilmesi ve hata paylarının belirlenmesinde ise sıklıkla Banach sabit nokta teoreminin güçlü bir aracı olarak kullanıldığı görülür [10]. Geniş bir perspektiften baktığımızda, integral denklemlerden diferansiyel denklemlere, kısmi diferansiyel denklemlerden dinamik programlamaya, diferansiyel içermelerden sistem analizine ve hatta fraktal modellemeye kadar pek çok alandaki problemlerin çözümünün varlığına dair yapılan araştırmalarda sabit nokta teorisi oldukça işlevsel bir yaklaşım sunmaktadır. Dahası, bu teoremin uygulama alanı sadece bu alanlarla sınırlı kalmayıp, yaklaşım teorisi, oyun teorisi, matematiksel ekonomi ve çeşitli uygulamalı bilimlerde karşılaşılan sorunlara da çözüm sunma potansiyeli taşımaktadır [15].

İterasyonlar, esasında belirli dönüşümlerin değişmeyen noktalarının, yani sabit noktalarının bulunmasını sağlayan güçlü yöntemlerdir. Özellikle doğrusal olmayan karmaşık problemlerin çözümünde bu matematiksel araçlara sıklıkla başvurulur. Bir problem üzerinde uygulanan iterasyon süreci sonucunda elde edilen dizinin limiti, eğer varsa, o problemin çözümünü verir.

Günlük hayat problemlerinin matematiksel olarak modellenmesi fikrinin ilk kıvılcımları, Isaac Newton'un "mekanik yasalarıyla gezegenlerin hareketlerini anlama" vizyonu ile çakmıştır [16]. Diferansiyel hesabın bu sayede kazandığı ivmeyle birlikte, pek çok denklem doğrudan, kapalı formda çözülebiliyordu. Ancak bazı denklemler için asıl önemli olan başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte problemin niteliksel ve niceliksel incelikleri, Picard'ın diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik geliştirdiği ardışık yaklaşım yöntemi sayesinde netlik kazanmıştır. Çözülmesi istenen integral veya diferansiyel denklemlerde uygulanan bu iterasyon yöntemiyle elde edilen dizinin limiti, nihayetinde denklemin çözümünü ortaya koymaktadır [15].

İterasyon kavramının kısa bir tarihsel yolculuğuna çıkılacak olursa, Ardışık Yaklaşımlar İterasyonu'nun bilinen ilk uygulaması, İtalyan matematikçi Picard tarafından adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin yaklaşık çözümünü araştırırken yapılmıştır. Bu alandaki ilk teorik kilit taşı ise Polonyalı matematikçi S. Banach'ın ortaya koyduğu "Daralma Dönüşüm Prensipleri" veya yaygın adıyla "Banach Sabit Nokta Teoremi" olmuştur. İterasyon yöntemlerinin bilim dünyasında böylesine geniş bir uygulama alanı bulması, pek çok araştırmacının dikkatini çekmiş ve Picard'ın

başlattığı bu süreç, günümüze kadar uzanan geniş bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu zaman zarfında, belirli dönüşüm sınıfları için çok sayıda farklı iterasyon yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemlerin güçlü yakınsaklığı, yakınsaklıklarının denkliği, yakınsama hızları ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının verilere ne kadar bağlı olduğu gibi önemli konular detaylı bir şekilde incelenmiştir [17-33].

Son yıllarda, iterasyon yöntemlerinin performansını artırmaya yönelik birçok çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda, Kanwar ve arkadaşlarının 2021 yılında geliştirdiği yeni iterasyon yöntemleri, literatürde önemli bir yenilik olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu yöntemler, yalnızca teorik olarak değil, aynı zamanda uygulamalı matematikte de daha hızlı yakınsama ve daha geniş bir problem sınıfında uygulanabilirlik sunmuştur [31].

Sabit nokta iterasyon yöntemleri, yalnızca matematiksel teoremin bir parçası olmakla kalmamış, aynı zamanda farklı disiplinlerdeki problemlerin çözümüne de katkıda bulunmuştur. Literatürde, özellikle Mann, Ishikawa ve Noor gibi klasik yöntemlerin daha hızlı ve kararlı versiyonlarını geliştirmek amacıyla yapılan araştırmalar dikkat çekmektedir [19-21]. Bu araştırmalar, iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızını artırmak ve daha geniş koşullar altında çalışabilir hale getirmek için yeni algoritmalar geliştirmiştir.

Kanwar ve arkadaşlarının önerdiği yeni iterasyon yöntemleri, bu alandaki gelişimin bir örneğidir [31]. Bu yöntemler hem teorik temelleri güçlendirmiş hem de uygulamalı problemlerde daha verimli sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Örneğin, bu yöntemlerin doğrusal olmayan denklemlerdeki kullanımı, sabit nokta teorisinin modern mühendislik ve fen bilimlerindeki rolünü bir kez daha vurgulamıştır. Literatürde yer alan bu tür yöntemler, hem klasik iterasyonların zayıf yönlerini gidermekte hem de daha hızlı yakınsama sağlayan çözümler sunmaktadır.

Bu tezde, sabit nokta iterasyon yöntemlerine odaklanılarak, literatürde yer alan klasik ve modern yöntemlerin analizi yapılmıştır. Kanwar ve arkadaşlarının 2021 yılında geliştirdiği iterasyon yöntemi ile yine 2024 yılında önceki çalışmalarından yola çıkarak ortaya attıkları yeni yöntemler temel alınmış ve bu yöntemlerin yakınsama hızları detaylı bir şekilde incelenmiştir [31-33]. Tez kapsamında geliştirilen yeni iterasyon yöntemi, literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılmış ve yakınsama hızları açısından üstün olduğu gösterilmiştir.

Elde edilen yeni yöntemin, hem daha hızlı bir yakınsama sağladığı hem de w^2 kararlı olduğu da kanıtlanmıştır. Bu kararlılık özelliği, yöntemin geniş bir problem sınıfında güvenilir bir şekilde çalışmasını sağlamaktadır. Tezde ayrıca, yeni yöntemin performansını ve avantajlarını ortaya koymak amacıyla çeşitli örnekler verilmiş ve bu yöntem, literatürdeki diğer yöntemlerle kıyaslanmıştır.

Yakınsama hızı, bir iterasyon yönteminin performansını değerlendirmek için en önemli ölçütlerden biridir. Hızlı yakınsayan yöntemler, daha az işlem adımıyla daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlar. Bu nedenle, iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızını artırmaya yönelik araştırmalar büyük bir öneme sahiptir. Literatürde, bu alanda yapılan çalışmalar, iterasyon yöntemlerinin yalnızca yakınsama hızını değil, aynı zamanda kararlılık ve genelleştirilebilirlik özelliklerini de iyileştirmeyi hedeflemiştir.

Bu tezde geliştirilen yeni yöntem, literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha hızlı yakınsama göstermektedir. Bu durum hem teorik analizlerle hem de sunulan örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, yöntemlerin kararlılığı üzerine yapılan analizler, bu yeni yöntemin w^2 kararlı olduğunu ortaya koymuş ve bu özelliği, yöntemin geniş bir problem sınıfında güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini kanıtlamıştır.

Bu tezde, Kanwar ve arkadaşlarının geliştirdiği yöntemler temel alınarak yeni bir iterasyon yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemin üstün performansı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Yapılan analizler ve verilen örnekler, bu yöntemin literatürdeki diğer yöntemlere kıyasla daha hızlı ve kararlı bir çözüm sunduğunu göstermiştir.

Sonuç olarak, bu çalışma, sabit nokta iterasyon yöntemleri alanında önemli bir katkı sunmakta ve bu yöntemlerin farklı disiplinlerdeki uygulamalarını geliştirmek için bir temel oluşturmaktadır. Sabit nokta teorisinin derinliği ve genişliği göz önüne alındığında, bu tür çalışmaların hem matematiksel teorilere hem de gerçek dünya problemlerine yönelik çözümlere ışık tutacağı açıktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılan temel ifadeler yer verilecektir.

Tanım 2.1. $E \neq \emptyset$ bir küme ve $\mu: E \times E \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

$\forall u, v, w \in E$ için;

$$\begin{aligned} \text{i. } & \mu(u, v) \geq 0 \\ \text{ii. } & \mu(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ \text{iii. } & \mu(u, v) = \mu(v, u) \\ \text{iv. } & \mu(u, v) \leq \mu(u, w) + \mu(w, v) \end{aligned} \tag{2.1}$$

koşullarını gerektiren μ fonksiyonuna E üzerinde metrik, (E, μ) yapısına metrik uzay denir [34].

Tanım 2.2 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (E, μ) metrik uzayında bir dizi ve $u \in E$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken, $\mu(u_n, u) < \rho$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\rho) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi u 'ya yakınsaktır [34].

Tanım 2.3 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (E, μ) metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0, m, n \geq n_0$ için, $d(u_n, u_m) < \rho$ olan bir $n_0 = n_0(\rho)$ sayısı varsa, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bir Cauchy dizisidir [34].

Tanım 2.4 (E, μ) metrik uzayı içinden seçilen her Cauchy dizileri yakınsak oluyor ise bu uzay tam metrik uzaydır [34].

Tanım 2.5 (E, μ_1) ve (D, μ_2) metrik uzayları için, $g: E \rightarrow D$ dönüşüm ve $u_0 \in E$ olsun. $\forall \rho > 0$ sayısı için, $\mu_1(x, x_0) < \delta$ iken $(g(u), g(u_0)) < \rho$ şartını sağlayan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabiliyorsa, g dönüşümü u_0 noktasında süreklidir [35].

Tanım 2.6 $L \neq \emptyset$ bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: K \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L 'ye K cismi üzerinde vektör uzay (lineer uzay) denir;

L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

1. $\forall a, b \in L$ için $a + b \in L$,
2. $\forall a, b, c \in L$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$,
3. $\forall a \in L$ için $a + \theta = \theta + a = a$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,
4. $\forall a \in L$ için $a + (-a) = (-a) + a = \theta$ olacak şekilde $-a \in L$ vardır,
5. $\forall a, b \in L$ için $a + b = b + a$,

$a, b \in L$ ve $m, n \in K$ için aşağıda verilen şartlar elde edilir;

6. $m \cdot a \in L$,
7. $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$,
8. $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$,
9. $(m \cdot n) \cdot a = m \cdot (n \cdot a)$,
10. $1 \cdot a = a$ dır.

$K = \mathbb{R}$ ise L 'ye gerçel vektör uzay, $K = \mathbb{C}$ ise L 'ye kompleks vektör uzay adı verilir [36].

Tanım 2.7 K gerçel bir vektör uzay ve $E \subseteq K$ olsun. $\forall x, y \in E$ için

$$A = \{z \in K : z = bx + (1 - b)y, 0 \leq b \leq 1\} \subseteq E \quad (2.2)$$

ise, E kümesi konvektir (dışbükey) [36].

Tanım 2.8 E bir vektör uzay ve $K = \mathbb{R}$ cismi için, $\|\cdot\|: E \rightarrow K$ dönüşümünün $\forall a, b \in E$ ve $m \in K$ için

- i. $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$
- ii. $\|m \cdot a\| = |m| \cdot \|a\|$
- iii. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

(2.3)

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne E uzayı üzerinde bir norm denir. $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir [37].

Tanım 2.9 $(E, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. E uzayı, $\xi(a, b) = \|a - b\|$ ($a, b \in E$) norm metriğine göre tam ise E 'ye Banach uzayı denir [38].

Tanım 2.10 (E, μ) , $E \neq \emptyset$ bir küme ve $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Su = u$ olacak şekilde bir $u \in E$ varsa, bu u noktasına S 'nin sabit noktası denir ve S 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_S , $F(S)$ veya $Fix(S)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.11 (E, μ) metrik uzay ve $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall u, v \in E$ için

$$\rho(Su, Sv) \leq a \cdot \rho(u, v) \quad (2.4)$$

olup burada $\exists a > 0$ ise S dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm [17],

$$\rho(Su, Sv) \leq \rho(u, v) \quad (2.5)$$

ise S dönüşümüne nonexpansive dönüşüm [17],

$$\rho(Su, Sv) \leq \lambda \cdot \rho(u, v) \quad (2.6)$$

olup burada $\exists \lambda \in [0, 1)$ ise S 'ye contraction dönüşüm [17],

$$\rho(Su, Sv) < \rho(u, v) \quad (2.7)$$

ise S dönüşümüne strict contraction dönüşüm [17],

$$\rho(Su, Sv) \leq a \rho(u, v) + b \rho(u, Sv) \quad (2.8)$$

olup burada $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ için S dönüşümüne zayıf contraction dönüşüm denir [39].

Teorem 2.12 (E, μ) tam metrik uzay ve $S: E \rightarrow E$ (2.6) şartını sağlayan contraction dönüşüm olsun. Bu durumda S, E 'de bir tek u sabitine sahiptir ve bir $u_0 \in E$ için

$$u_{n+1} = Su_n \quad (2.9)$$

burada $n = 0, 1, 2, \dots$ ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi u noktasına yakınsar. [10].

Teorem 2.13 (E, μ) tam metrik uzayı, $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için

$$\rho(Su, Sv) \leq s(\rho(u, v) + \rho(u, Su)) \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ varsa S bir Picard operatörüdür [40].

Teorem 2.14 (E, μ) tam metrik uzayı, $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için

$$\rho(Su, Sv) \leq s(\rho(u, v) + \rho(u, Sv)) \quad (2.11)$$

olacak şekilde bir $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ varsa S bir picard operatörüdür [41].

Tanım 2.15 Bir E kümesinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ verilsin. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\exists \varepsilon(k)$ pozitif reel sayısı bulunabiliyor ve $\|x_n - y_n\| \leq \varepsilon(k)$, $\forall n \geq k$ olarak yazılabiliyorsa, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yaklaşım dizisi olarak adlandırılır. Burada $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine k 'dan itibaren belirli bir hata sınırı içinde yaklaştığını ifade eder [10].

Tanım 2.16 Bir E kümesinde tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ verildiğinde, verilen dizilerin her bir terimi sıfıra yaklaşıyor ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ şartı sağlanıyorsa, bu iki dizi denk olarak kabul edilir [42].

Tanım 2.17 $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. $\delta \in [0, 1)$ şartını sağlayan bir reel sayı, $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olup, $\phi(0) = 0$ olsun. Öyle ki, $\forall x, y \in E$ için;

$$\|Sx - Sy\| \leq \delta \|x - y\| + \phi(\|x - Sx\|) \quad (2.12)$$

şartı sağlanıyorsa, (2.12) ile verilen eşitsizliğe contractive-like operatör denir [43].

Tanım 2.17'deki (2.12) eşitsizliği $Sp = p$ olan S dönüşümünün p sabit noktası için göz önüne alındığında, $\forall x \in E$ için;

$$\|Sx - p\| \leq \delta \|x - p\| \quad (2.13)$$

olmaktadır [33].

Tanım 2.18 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ yakınsak diziler olup, aynı p sabit noktasına yakınsasınlar. Bu durumda, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - p|}{|b_n - p|} = 0$ oluyorsa, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar [44].

Tanım 2.19 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ yakınsak diziler olup, aynı p sabit noktasına yakınsasınlar. $\|a_n - p\| \leq u_n$ ve $\|b_n - p\| \leq v_n$ hata tahminleri olsun. Burada hata tahminleri mümkün olan en iyi tahminlerdir. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ sifıra yakınsayan iki pozitif sayı dizileri olsunlar. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ise $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ise $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri aynı hızda yakınsar denir [45].

Tanım 2.20 Eğer $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde bir pozitif sayılar dizisi ve $\delta, 0 \leq \delta < 1$ olacak şekilde bir sayı ise o zaman

$$\omega_{n+1} \leq \delta \omega_n + \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayılar dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ olur [46].

Tanım 2.21 (E, μ) bir metrik uzay, $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm ve $x_0 \in E$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin S 'nin p sabit noktasına yakınsadığı kabul edilsin ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, E uzayında keyfi bir dizi olmak üzere, $\varepsilon_n = \mu(u_{n+1}, f(S, u_n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olarak alınsın. Bu iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ şartı sağlanıyorsa S dönüşümü S -kararlıdır [47-48].

Tanım 2.22 (E, μ) bir metrik uzay, $S: E \rightarrow E$ dönüşüm ve $x_0 \in E$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin S 'nin p sabit noktasına yakınsadığı kabul edilsin. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, E uzayında $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir yaklaşım dizisi olmak üzere $\varepsilon_n = \mu(u_{n+1}, f(S, u_n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olarak alınsın. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ ise bu iterasyon yöntemi zayıf w^2 -kararlı denir [17].

Tanım 2.23 (E, μ) bir metrik uzay, $S: E \rightarrow E$ dönüşüm ve $x_0 \in E$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin S 'nin p sabit noktasına

yakınsadığı kabul edilsin ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, E uzayında $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir denk dizisi olmak üzere $\varepsilon_n = \mu(u_{n+1}, f(S, u_n)), n = 0, 1, 2, \dots$ olarak alınsın. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ ise bu iterasyon yöntemi w^2 -kararlı denir [49].

Tanım 2.24 $S, \tilde{S}: E \rightarrow E$ iki operatör olsun. $\forall x \in E$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|Sx - \tilde{S}x\| \leq \varepsilon \quad (2.15)$$

ise $\tilde{S}$ 'ye S 'nin bir yaklaşım operatörü denir [50].

Tanım 2.25 $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. (2.13) ve (2.15) eşitsizlikleri göz önüne alındığında S dönüşümü $\forall x, \tilde{x} \in E$ için

$$\begin{aligned} \|Sx - \tilde{S}\tilde{x}\| &\leq \|Sx - p\| + \|\tilde{S}x - p\| + \varepsilon \\ &\leq 2\delta\|x - p\| + \delta\|x - \tilde{x}\| + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.16)$$

eşitsizliğini sağlar [51].

3. SABİT NOKTA İÇİN BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİ

Bu bölümde tezin diğer bölümde kullanılan temel tanım ve sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.1 $E \neq \emptyset$ bir küme ve $S: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Su = u \quad (3.1)$$

olacak şekilde en az bir $u \in S$ varsa, bu u noktalarına S dönüşümünün sabit noktası denir ve S 'nin sabit noktalarının kümesi F_S , $F(S)$ veya $Fix(S)$ ile gösterilir [7].

Tanım 3.2 $x_0 \in E$ olan belirli bir başlangıç noktası ve $\forall n \in N$ için

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad n \in N \quad (3.2)$$

biçiminde verilen iterasyon yöntemi Picard algoritmasıdır [7].

Tanım 3.3 $x_0 \in E$ olan belirli bir başlangıç noktası ve $\forall n \in N$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Sx_n) \quad (3.3)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Krasnoselskii algoritmasıdır [18].

Tanım 3.4 $\forall n \in N$ için $a_n \in [0,1]$,

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n Sx_n \quad (3.4)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Mann algoritmasıdır [19].

Tanım 3.5 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n \in [0,1]$ bir gerçel sayı dizisi olup,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n S y_n \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_n S x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

ifadesi ile verilen iterasyon yöntemi Ishikawa algoritmasıdır [20].

Tanım 3.6 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_nSy_n \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_nSz_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nSx_n \end{cases} \quad (3.6)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Noor algoritmasıdır [21].

Tanım 3.7 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)Sx_n + a_nSy_n \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_nSx_n \end{cases} \quad (3.7)$$

ile verilen iterasyon yöntemi S algoritmasıdır [22-23].

Tanım 3.8 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Sy_n \\ y_n = (1 - a_n)Sx_n + a_nSz_n \\ z_n = (1 - b_n)x_n + b_nSx_n \end{cases} \quad (3.8)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Picard S algoritmasıdır [24].

Tanım 3.9 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)y_n + a_nSy_n \\ y_n = (1 - b_n)z_n + b_nSz_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nSx_n \end{cases} \quad (3.9)$$

ile verilen iterasyon yöntemi SP algoritmasıdır [25-26].

Tanım 3.10 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)y_n + a_nSy_n \\ y_n = (1 - b_n)Sx_n + b_nSz_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nSx_n \end{cases} \quad (3.10)$$

ile verilen iterasyon yöntemi CR algoritmasıdır [27].

Tanım 3.11 $\forall n \in N$ için $a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ bu şartlar ile birlikte bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)Sx_n + a_nSy_n \\ y_n = (1 - b_n)Sx_n + b_nSz_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nSx_n \end{cases} \quad (3.11)$$

ile verilen iterasyon yöntemi S* algoritmasıdır [28].

Tanım 3.12 $\forall n \in N$ için $a_n \in [0,1]$ bu şartlar ile birlikte bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Sy_n \\ y_n = (1 - a_n)x_n + a_nSx_n \end{cases} \quad (3.12)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Picard Mann algoritmasıdır [29].

Tanım 3.13 (Abbas ve Nazır) $\forall n \in N$ için $a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ bu şartlar ile birlikte bir gerçel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)Sy_n + a_nSz_n \\ y_n = (1 - b_n)Sx_n + b_nSz_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nSx_n \end{cases} \quad (3.13)$$

ile verilen iterasyon yöntemi Abbas ve Nazır algoritmasıdır [30].

Tanım 3.14 2021 yılında ise Kanwar ve arkadaşları tarafından aşağıdaki iterasyon yöntemi tanımlanmıştır;

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \quad (3.14)$$

Burada $\alpha \geq 0$ olup, $\alpha = 0$ alındığında Picard iterasyon yöntemi elde edilir [31].

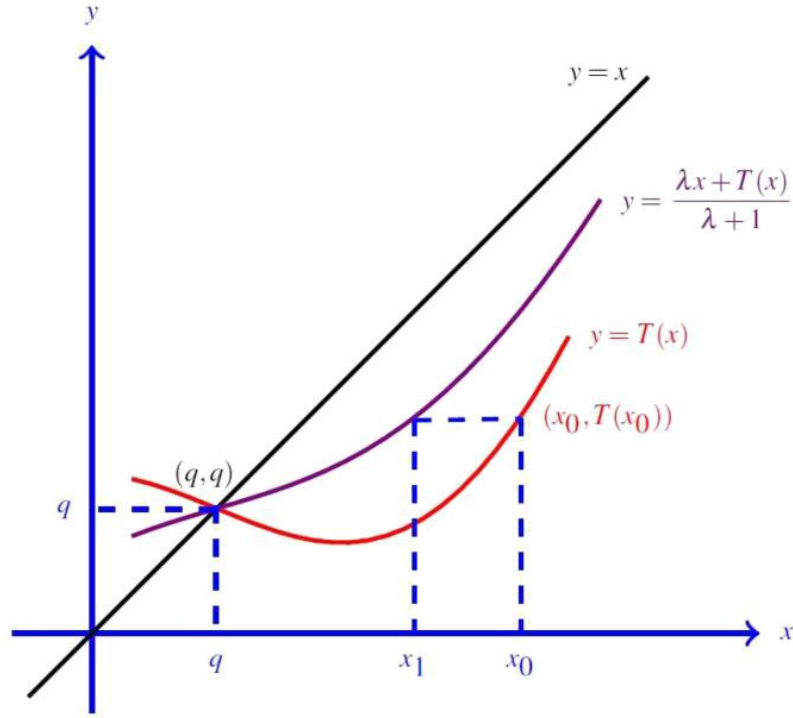
Tanım 3.15 $\alpha > 0$ olmak üzere, 2023 yılında Sharma ve arkadaşları tarafından ise (3.14)'e dayanarak aşağıdaki iterasyon yöntemi geliştirilmiştir [32].

$$\begin{cases} z_n = \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \\ y_n = Sz_n \\ x_{n+1} = Sy_n \end{cases} \quad (3.15)$$

Buraya kadar literatürde yer alan bazı iterasyon yöntemlerini gösterildi. Fakat iterasyon yöntemlerine her gün daha fazla yeni yöntem eklenmektedir. Yeni iterasyon yöntemi oluştururken ise mevcut iterasyon yöntemlerinden daha verimli bir yöntem elde etmek amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda Sharma ve arkadaşları [33] aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda (3.2) ve (3.14) ile verilen iterasyon yöntemlerini dikkate alarak yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Burada sabit nokta problemleri ile alakalı olarak, S operatörünün sabit noktası p olup, x_0 ve x_1 noktalarının bu sabit noktanın iki yaklaşık başlangıç değeri olduğu kabul edilmiştir. x_0 ve x_1 noktalarının birbirine çok yakın olduğu kabul edilsin. O halde Tx_0 ve $\frac{\alpha x_1 + Sx_1}{\alpha + 1}$ birbirine çok yakın olacaktır. Bu kabul altında $Tx_0 = \frac{\alpha x_1 + Sx_1}{\alpha + 1}$ olup,

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} ((\alpha + 1)Sx_0 - S(x_1)) \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu yeni yaklaşım Sharma ve arkadaşları tarafından görsel olarak aşağıdaki gibi açıklanmıştır. Fakat her zaman (3.16) denklemini kullanılarak x_1 noktasının değeri elde edilemez. Bu durumu ortadan kaldırmak amacıyla (3.16) denkleminin sağ tarafındaki x_1 noktasının değerini tahmin etmek için (3.14) eşitliğini kullanarak yaklaşık olarak hesaplamayı amaçlamışlardır [33].



Şekil 3.1. Geometrik Yaklaşım ile Elde Edilen Bir İterasyon Yöntemi

Şekil 3.1. ve yukarıda belirtilen düşünceler ışığında (3.16) numaralı ifadeye dayalı genel bir yeni iteratif yöntemi aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir;

$$x_{n+1} = \frac{1}{\alpha} ((\alpha + 1)Sx_0 - S(x_{n+1}^*)) \quad (3.17)$$

burada $x_{n+1}^* = \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}$ ve $\alpha > 0$ 'dır [33]. Bu bağlamda 2024 yılında Sharma ve arkadaşları tarafından aşağıda verilecek olan iterasyon yöntemleri geliştirilmiştir;

Tanım 3.16 $\alpha \geq 1$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [33];

$$\begin{cases} y_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right) \\ x_{n+1} = Sy_n \end{cases} \quad (3.18)$$

Tanım 3.17 $\alpha \geq 1$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [33];

$$\begin{cases} y_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\ x_{n+1} = S \left(\frac{\beta y_n + Sy_n}{\beta + 1} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

Tanım 3.18 $\alpha \geq 1$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [33];

$$\begin{cases} z_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\ y_n = S \left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right) \\ x_{n+1} = Sy_n \end{cases} \quad (3.20)$$

Tanım 3.19 $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [33];

$$\begin{cases} z_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\ y_n = S \left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right) \\ x_{n+1} = S \left(\frac{\gamma y_n + Sy_n}{\gamma + 1} \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

Tanım 3.20 $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{cases} t_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\ z_n = S \left(\frac{\beta t_n + St_n}{\beta + 1} \right) \\ y_n = S \left(\frac{\gamma z_n + Sz_n}{\gamma + 1} \right) \\ x_{n+1} = S \left(\frac{\mu y_n + Sy_n}{\mu + 1} \right) \end{cases} \quad (3.22)$$

4. YAKINSAKLIK, YAKINSAKLIK HIZI, KARARLILIK VE VERİ BAĞLILIĞI

4.1. Yakınsaklık

Teorem 4.1.1 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S dönüşümünün tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ olsun. O halde (3.22) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere, S 'nin tek olan p sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat İlk olarak (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ olduğu gösterilmelidir. (2.12) ve (2.13) eşitsizlikleri de kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 \|t_n - p\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right) - p \right\| \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left\| (\alpha + 1)(Sx_n - p) - \left(S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) - p \right) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sx_n - Sp\| + \left\| S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) - Sp \right\| \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sp - Sx_n\| + \left\| Sp - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right\| \right) \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)(\delta\|p - x_n\| + \phi(\|p - Sp\|)) + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right. \\
 &\quad \left. + \phi(\|p - Sp\|) \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|p - x_n\| + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \delta \left\| \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} - p \right\| \right) \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta}{\alpha + 1}\|Sx_n - p\| \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta \|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1} \|x_n - p\| + \frac{\delta^2}{\alpha + 1} \|x_n - p\| \right) \\
&= \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \left\| S \left(\frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right) - p \right\| = \left\| S \left(\frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right) - S p \right\| \\
&= \left\| S p - S \left(\frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right) \right\| \leq \delta \left\| p - \frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right\| + \phi(\|p - S p\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|t_n - p\| + \frac{1}{\beta + 1} \|S t_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|t_n - p\| + \frac{\delta}{\beta + 1} \|t_n - p\| \right) = \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \|t_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \left\| S \left(\frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right) - p \right\| = \left\| S \left(\frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right) - S p \right\| \\
&= \left\| S p - S \left(\frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right) \right\| \leq \delta \left\| p - \frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right\| + \phi(\|p - S p\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + \frac{1}{\gamma + 1} \|S z_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + \frac{\delta}{\gamma + 1} \|z_n - p\| \right) = \frac{\delta(\gamma + \delta)}{\gamma + 1} \|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \left\| S \left(\frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right) - p \right\| \\
&= \left\| S \left(\frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right) - S p \right\| = \left\| S p - S \left(\frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right) \right\|
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta \left\| p - \frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right\| + \phi(\|p - S p\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \|y_n - p\| + \frac{1}{\mu + 1} \|S y_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \|y_n - p\| + \frac{\delta}{\mu + 1} \|y_n - p\| \right) = \frac{\delta(\mu + \delta)}{\mu + 1} \|y_n - p\|
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.1) ile elde edilen eşitsizlik (4.2)'de yerine yazılırsa;

$$\|z_n - p\| \leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) ile elde edilen eşitsizlik (4.3)'te yerine yazılırsa;

$$\|y_n - p\| \leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \frac{\delta(\gamma + \delta)}{\gamma + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \quad (4.6)$$

olur. (4.6) ile elde edilen eşitsizlik (4.4)'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \frac{\delta(\gamma + \delta)}{\gamma + 1} \frac{\delta(\mu + \delta)}{\mu + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \\
&= \delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) ile elde edilen eşitsizlik indirgenirse;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \\
&= \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^2 \|x_{n-1} - p\| \\
&= \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^3 \|x_{n-2} - p\| \\
&= \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^4 \|x_{n-3} - p\|
\end{aligned} \quad (4.8)$$

$$= \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\|$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ \mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \end{array} \right.$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$0 < 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 3$$

elde edilir.

$$\delta < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

seçilirse,

$$\delta^4 < \frac{1}{3}$$

olacağından;

$$0 < \delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) < 1$$

olur. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

olduğundan, (4.8) ile verilen eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ sonucu elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Şimdi bu p noktasının tek olduğu gösterilmelidir.

$p, p^* \in F_S$ olsun. $Sp = p$ ve $Sp^* = p^*$ olup, $p \neq p^*$ olduğu varsayalım.

$$\|p - p^*\| = \|Sp - Sp^*\| \leq \delta \|p - p^*\| + \Phi(\|p - Sp\|) = \delta \|p - p^*\| < \|p - p^*\|$$

elde edilir ki; bu da bir çelişkidir. O halde $p = p^*$ olur ve p 'nin tekliği kanıtlanır.

Şimdi sırasıyla (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) ile verilen iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları gösterilecektir. Bunlarda (3.19) ve (3.21)'nin yakınsaklık ispatları [31]'de verilmiştir.

Teorem 4.1.2 B bir Banach uzayı olup $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p, S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ olsun. (3.18) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$ olmak üzere, S 'nin tek olan p sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat İlk olarak (3.18) ile verilen iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ olduğu gösterilmelidir. (2.12) ve (2.13) eşitsizlikleri de kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) - p \right\| \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\| (\alpha + 1)(Sx_n - p) - \left(S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - p \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sx_n - Sp\| + \left\| S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - Sp \right\| \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sp - Sx_n\| + \left\| Sp - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right\| \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)(\delta \|p - x_n\| + \phi(\|p - Sp\|)) + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right. \\
&\quad \left. + \phi(\|p - Sp\|) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta \|p - x_n\| + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta \|x_n - p\| + \delta \left\| \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} - p \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta \|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1} \|x_n - p\| + \frac{\delta}{\alpha + 1} \|Sx_n - p\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta \|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1} \|x_n - p\| + \frac{\delta^2}{\alpha + 1} \|x_n - p\| \right) \\
&= \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\|x_{n+1} - p\| = \|Sy_n - p\| \leq \delta \|y_n - p\| \quad (4.10)$$

olur.

(4.9) ile elde edilen eşitsizlik (4.10)'da yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) eşitsizliği indirgenirse;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.12)$$

olarak bulunur.

$\alpha \geq 1$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \end{cases}$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$0 < 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 3$$

elde edilir.

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

seçilirse,

$$\delta^2 < \frac{1}{3}$$

olacağından;

$$0 < \delta^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) < 1$$

olur. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\delta^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

olduğundan, (4.12) ile verilen eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ sonucu elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Şimdi bu p noktasının tek olduğu gösterilmelidir.

$p, p^* \in F_S$ olsun. $Sp = p$ ve $Sp^* = p^*$ olup, $p \neq p^*$ olduğu varsayalım.

$$\|p - p^*\| = \|Sp - Sp^*\| \leq \delta \|p - p^*\| + \Phi(\|p - Sp\|) = \delta \|p - p^*\| < \|p - p^*\|$$

elde edilir ki; bu da bir çelişkidir. O halde $p = p^*$ olur ve p 'nin tekliği kanıtlanır.

Teorem 4.1.3 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ olsun. (3.19) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ olmak üzere, S 'nin tek olan p sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat İlk olarak (3.19) ile verilen iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ olduğu gösterilmelidir. (2.12) ve (2.13) eşitsizlikleri de kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) - p \right\| \\
&= \frac{1}{\alpha} \left\| (\alpha + 1)(Sx_n - p) - \left(S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - p \right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sx_n - Sp\| + \left\| S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - Sp \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sp - Sx_n\| + \left\| Sp - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)(\delta\|p - x_n\| + \phi(\|p - Sp\|)) + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right. \\
&\quad \left. + \phi(\|p - Sp\|) \right) \tag{4.13} \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|p - x_n\| + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \delta \left\| \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} - p \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta}{\alpha + 1}\|Sx_n - p\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta^2}{\alpha + 1}\|x_n - p\| \right) \\
&= \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \left\| S \left(\frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} \right) - p \right\| = \left\| S \left(\frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} \right) - S p \right\| \\
&= \left\| S p - S \left(\frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} \right) \right\| \\
&\leq \delta \left\| p - \frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} \right\| + \phi(\|p - S p\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\beta y_n + S y_n}{\beta + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|y_n - p\| + \frac{1}{\beta + 1} \|S y_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|y_n - p\| + \frac{\delta}{\beta + 1} \|y_n - p\| \right) = \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. (4.13) ile elde edilen eşitsizlik (4.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \\
&= \delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitsizliği indirgenirse;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \tag{4.16}$$

olarak bulunur. $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \end{cases}$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$0 < 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 3$$

elde edilir.

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

seçilirse,

$$\delta^2 < \frac{1}{3}$$

olacağından;

$$0 < \delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) < 1$$

olur. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

olduğundan, (4.16) ile verilen eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ sonucu elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Şimdi bu p noktasının tek olduğunu gösterilmelidir.

$p, p^* \in F_S$ olsun. $Sp = p$ ve $Sp^* = p^*$ olup, $p \neq p^*$ olduğu varsayalım.

$$\|p - p^*\| = \|Sp - Sp^*\| \leq \delta \|p - p^*\| + \Phi(\|p - Sp\|) = \delta \|p - p^*\| < \|p - p^*\|$$

elde edilir ki; bu da bir çelişkidir. O halde $p = p^*$ olur ve p 'nin tekliği kanıtlanır.

Teorem 4.1.4 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olsun. (3.20) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ olmak üzere, S 'nin tek olan p sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat İlk olarak (3.20) ile verilen iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ olduğu gösterilmelidir. (2.12) ve (2.13) eşitsizlikleri de kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right) - p \right\| \\
&= \frac{1}{\alpha} \left\| (\alpha + 1)(Sx_n - p) - \left(S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) - p \right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sx_n - Sp\| + \left\| S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) - Sp \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sp - Sx_n\| + \left\| Sp - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)(\delta\|p - x_n\| + \phi(\|p - Sp\|)) + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right. \\
&\quad \left. + \phi(\|p - Sp\|) \right) \tag{4.17} \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|p - x_n\| + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \delta \left\| \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} - p \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta}{\alpha + 1}\|Sx_n - p\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta^2}{\alpha + 1}\|x_n - p\| \right) \\
&= \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \left\| S\left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1}\right) - p \right\| = \left\| S\left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1}\right) - Sp \right\| \\
&= \left\| Sp - S\left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1}\right) \right\| \leq \delta \left\| p - \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right\| + \phi(\|p - Sp\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|z_n - p\| + \frac{1}{\beta + 1} \|Sz_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|z_n - p\| + \frac{\delta}{\beta + 1} \|z_n - p\| \right) \\
&= \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur.

$$\|x_{n+1} - p\| = \|Sy_n - p\| \leq \delta \|y_n - p\| \quad (4.19)$$

olarak bulunur. (4.17) ile elde edilen eşitsizlik (4.18)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \|x_n - p\| \\ &= \delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \|x_n - p\| \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) eşitsizliği de (4.19)'da yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \|x_n - p\| \quad (4.21)$$

olarak bulunur. (4.21) eşitsizliği indirgenirse;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.22)$$

olarak bulunur. $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \end{array} \right.$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$0 < 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 3$$

elde edilir.

$$\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

seçilirse,

$$\delta^3 < \frac{1}{3}$$

olacağından;

$$0 < \delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) < 1$$

olur. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

olduğundan, (4.22) ile verilen eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ sonucu elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

Şimdi bu p noktasının tek olduğu gösterilmelidir.

$p, p^* \in F_S$ olsun. $Sp = p$ ve $Sp^* = p^*$ olup, $p \neq p^*$ olduğu varsayalım.

$$\|p - p^*\| = \|Sp - Sp^*\| \leq \delta \|p - p^*\| + \Phi(\|p - Sp\|) = \delta \|p - p^*\| < \|p - p^*\|$$

elde edilir ki; bu da bir çelişkidir. O halde $p = p^*$ olur ve p 'nin tekliği kanıtlanır.

Teorem 4.1.5 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p, S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olsun. (3.21) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ olmak üzere, S 'nin tek olan p sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat İlk olarak (3.21) ile verilen iterasyon yöntemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ olduğu gösterilmelidir. (2.12) ve (2.13)'de kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right) - p \right\| \\
&= \frac{1}{\alpha} \left\| (\alpha + 1)(Sx_n - p) - \left(S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - p \right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sx_n - Sp\| + \left\| S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) - Sp \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\|Sp - Sx_n\| + \left\| Sp - S \left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right) \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)(\delta\|p - x_n\| + \phi(\|p - Sp\|)) \right. \\
&\quad \left. + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| + \phi(\|p - Sp\|) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|p - x_n\| + \delta \left\| p - \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} \right\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \delta \left\| \frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1} - p \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta}{\alpha + 1}\|Sx_n - p\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\delta\|x_n - p\| + \frac{\alpha\delta}{\alpha + 1}\|x_n - p\| + \frac{\delta^2}{\alpha + 1}\|x_n - p\| \right) \\
&= \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \left\| S \left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right) - p \right\| = \left\| S \left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right) - Sp \right\| \\
&= \left\| Sp - S \left(\frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right) \right\| \leq \delta \left\| p - \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right\| + \phi(\|p - Sp\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\beta z_n + Sz_n}{\beta + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|z_n - p\| + \frac{1}{\beta + 1} \|Sz_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|z_n - p\| + \frac{\delta}{\beta + 1} \|z_n - p\| \right) = \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \left\| S\left(\frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1}\right) - p \right\| = \left\| S\left(\frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1}\right) - S p \right\| \\
&= \left\| S p - S\left(\frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1}\right) \right\| \\
&\leq \delta \left\| p - \frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1} \right\| + \phi(\|p - S p\|) \\
&= \delta \left\| p - \frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1} \right\| = \delta \left\| \frac{\gamma y_n + S y_n}{\gamma + 1} - p \right\| \\
&\leq \delta \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \|y_n - p\| + \frac{1}{\gamma + 1} \|S y_n - p\| \right) \\
&\leq \delta \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \|y_n - p\| + \frac{\delta}{\gamma + 1} \|y_n - p\| \right) = \frac{\delta(\gamma + \delta)}{\gamma + 1} \|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak bulunur.

(4.23) ile elde edilen eşitsizlik (4.24)'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq \frac{\delta(\beta + \delta)}{\beta + 1} \delta \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \\
&= \delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.26) eşitsizliği (4.25)'te yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \|x_n - p\| \tag{4.27}$$

olur. (4.27) eşitsizliği indirgenirse;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \tag{4.28}$$

olarak bulunur. $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \end{array} \right.$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$0 < 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 3$$

elde edilir.

$$\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

seçilirse,

$$\delta^3 < \frac{1}{3}$$

olacağından;

$$0 < \delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) < 1$$

olur. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

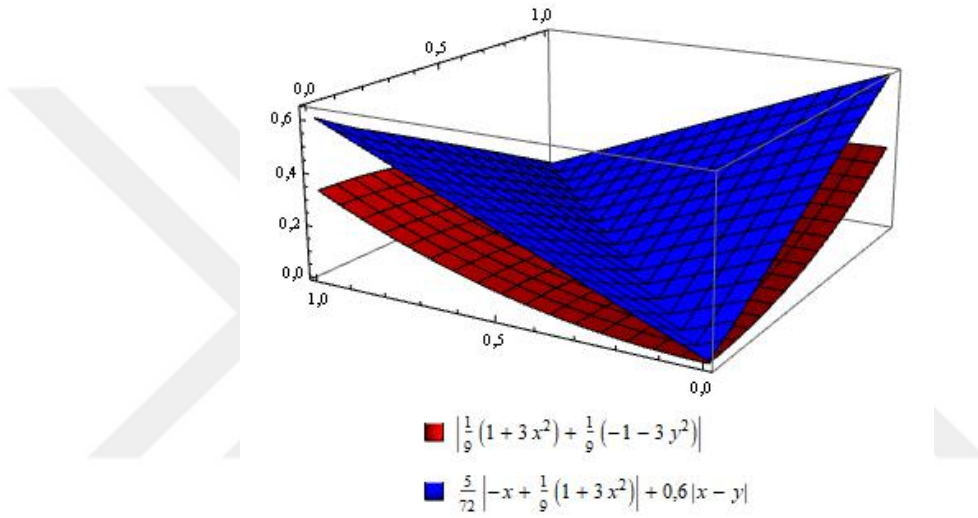
olduğundan, (4.28) ile verilen eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ sonucu elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Şimdi bu p noktasının tek olduğu gösterilmelidir.

$p, p^* \in F_S$ olsun. $Sp = p$ ve $Sp^* = p^*$ olup, $p \neq p^*$ olduğu varsayalım.

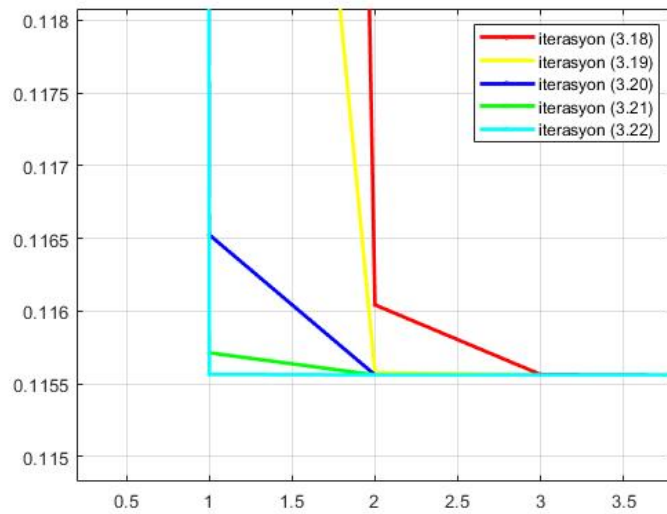
$$\|p - p^*\| = \|Sp - Sp^*\| \leq \delta \|p - p^*\| + \Phi(\|p - Sp\|) = \delta \|p - p^*\| < \|p - p^*\|$$

elde edilir ki; bu da bir çelişkidir. O halde $p = p^*$ olur ve p 'nin tekliği kanıtlanır.

Örnek 4.1.6 $f(x) = 3x^2 - 9x + 1$ olmak üzere, $E = [0,1]$ için $S: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Sx = \frac{3x^2+1}{9}$ biçiminde tanımlansın. $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve $\phi(t) = \frac{5t}{72}$ olsun. Burada ϕ 'nin artan ve sürekli bir fonksiyon olup, $\phi(0) = 0$ şartını sağladığı görülmektedir. S dönüşümünün contractive-like dönüşüm koşulunu sağladığı gösterilmelidir. Bu koşulun sağlandığı Matematica programı kullanılarak Şekil 4.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. S Dönüşümünün Contractive-Like Olduğunun Gösterimi



Şekil 4.2. İterasyon (3.18), İterasyon (3.19), İterasyon (3.20), İterasyon (3.21) ve İterasyon (3.22) İçin Yakınsaklık Davranışları

Çizelge 4.1. İterasyon (3.18), İterasyon (3.19), İterasyon (3.20), İterasyon (3.21) ve İterasyon (3.22) İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri

Adım Sayısı	İterasyon (3.18)	İterasyon (3.19)	İterasyon (3.20)	İterasyon (3.21)	İterasyon (3.22)
0	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000
1	0,17685039985005	0,12744905800158	0,11652553190627	0,11571464997194	0,11556608611265
2	0,11604407092818	0,11558014592121	0,11556279329078	0,11556269214003	0,11556268951497
3	0,11556560041718	0,11556271383041	0,11556268952479	0,11556268951512	0,11556268951365
4	0,11556270707614	0,11556268954753	0,11556268951443	0,11556268951398	0,11556268951365
5	0,11556268961961	0,11556268951701	0,11556268951411	0,11556268951373	0,11556268951365
6	0,11556268951429	0,11556268951665	0,11556268951396	0,11556268951365	0,11556268951365
7	0,11556268951420	0,11556268951515	0,11556268951378	0,11556268951365	0,11556268951365
8	0,11556268951412	0,11556268951425	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
9	0,11556268951399	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
10	0,11556268951386	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
11	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365

Bu dönüşümün sabit noktasının $p = 0,11556268951365$ olduğu görülür. $x_0 = 0.99$ başlangıç koşulu altında $\alpha = 7$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.3$ ve $\delta \in [0.55, 0.76]$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen grafik ile yeni geliştirilen iterasyon yönteminin yakınsaklık bakımından diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğu gösterilmiştir.

Şekil 4.2. ile grafiksel olarak İterasyon (3.18), İterasyon (3.19), İterasyon (3.20), İterasyon (3.21) ve İterasyon (3.22)'nin sabit noktaya ulaştıkları görülür.

Çizelge 4.1.'den görüleceği üzere İterasyon (3.18) 11. adımda, İterasyon (3.19) 9. adımda, İterasyon (3.20) 8. adımda, İterasyon (3.21) 6. adımda ve İterasyon (3.22) 4. adımda sabit noktaya ulaştıkları görülmektedir.

4.2. Yakınsaklık Hızı

Günümüz çalışmalarında elde edilen sonucun yanı sıra bu sonuca ulaşmak için harcanan zaman, emek ve sonucun var olan duruma etkisi önem kazanmaktadır. Bu nedenle hız çalışmaları ya da programlama da kullanılan RAM miktarı önem arz etmektedir. Bu nedenle az adımda sonuca yani sabit noktaya ulaşmak büyük önem taşır. Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızı, bir dizinin sabitlediği değere ne kadar çabuk yaklaştığını gösteren kritik bir ölçüttür. Bir iterasyon yönteminin etkinliğini belirlemede anahtar rol oynar. Yakınsaklık hızı temelde, hata teriminin her adımda nasıl küçüldüğünü ifade eder. Uygulamalı matematikte ve mühendislik uygulamalarında yakınsaklık hızı, bir yöntemin pratik uygulanabilirliği açısından hayati öneme sahiptir. Özellikle büyük ölçekli problemlerde veya hassas sonuçlar gerektiren durumlarda, yavaş yakınsayan bir yöntem kabul edilemez derecede uzun hesaplama sürelerine yol açabilir. Bu nedenle, mümkün olan en hızlı yakınsaklık hızına sahip yöntemleri seçmek veya mevcut yöntemleri hızlandırmak için çeşitli teknikler geliştirmek araştırmaların odak noktası olmuştur.

Teorem 4.2.1 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ olsun. Başlangıç değerleri $x_0 = u_0 \in E$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.18) ile verilen iterasyon dizisi olsun. O halde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 4.1.1'in ispatında aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.29)$$

$\alpha \geq 1, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\begin{cases} \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ \mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1 \end{cases}$$

olduğundan, (4.29) eşitsizliği,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.2'nin ispatında ise aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \quad (4.31)$$

Şimdi a_n , b_n ve Ψ_n dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{aligned} a_n &= \delta^{4(n+1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \\ b_n &= \delta^{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \\ \Psi_n &= \frac{a_n}{b_n} = \frac{\delta^{4(n+1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\|}{\delta^{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\|} = \delta^{2(n+1)} \end{aligned}$$

Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = 0$ olduğu görülür. Tanım 2.18'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı bulunmuş olur.

Teorem 4.2.2 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ olsun. Başlangıç değerleri $x_0 = u_0 \in E$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.19) ile verilen iterasyon dizisi olsun. O halde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 4.1.1'in ispatında aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.32)$$

$\alpha \geq 1, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\begin{cases} \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ \mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1 \end{cases}$$

olduğundan, (4.32) eşitsizliği,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1.3'ün ispatında ise aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^2 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \quad (4.34)$$

Şimdi a_n, b_n ve Ψ_n dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{aligned} a_n &= \delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \\ b_n &= \delta^{2(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \\ \Psi_n &= \frac{a_n}{b_n} = \frac{\delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\|}{\delta^{2(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\|} = \delta^{2(n+1)} \end{aligned}$$

Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = 0$ olduğu görülür. Tanım 2.18'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı bulunmuş olur.

Teorem 4.2.3 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p, S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup,

$\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olsun. Başlangıç değerleri $x_0 = u_0 \in A$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.20) ile verilen iterasyon dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 4.1.1'in ispatında aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.35)$$

$\alpha \geq 1, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. Böylece;

$$\begin{cases} \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ \mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1 \end{cases}$$

olduğundan, (4.35) eşitsizliği,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1.4'ün ispatında ise aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \quad (4.37)$$

Şimdi a_n, b_n ve Ψ_n dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$a_n = \delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\|$$

$$b_n = \delta^{3(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\|$$

$$\Psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|x_0 - p\|}{\delta^{3(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right)^{n+1} \|u_0 - p\|} = \delta^{n+1}$$

Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = 0$ olduğu görülür. Tanım 2.18'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı bulunmuş olur.

Teorem 4.2.4 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p, S 'nin tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olsun. Başlangıç değerleri $x_0 = u_0 \in A$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.22) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (3.21) ile verilen iterasyon dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 4.1.1'in ispatında aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.38)$$

$\alpha \geq 1, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ ve $\delta \in [0, 1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1$$

olduğundan, (4.38) eşitsizliği,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|x_0 - p\| \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1.5'in ispatında ise aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmıştı;

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \left(\delta^3 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right)^{n+1} \|u_0 - p\| \quad (4.40)$$

Şimdi a_n, b_n ve Ψ_n dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$a_n = \delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right)^{n+1} \|x_0 - p\|$$

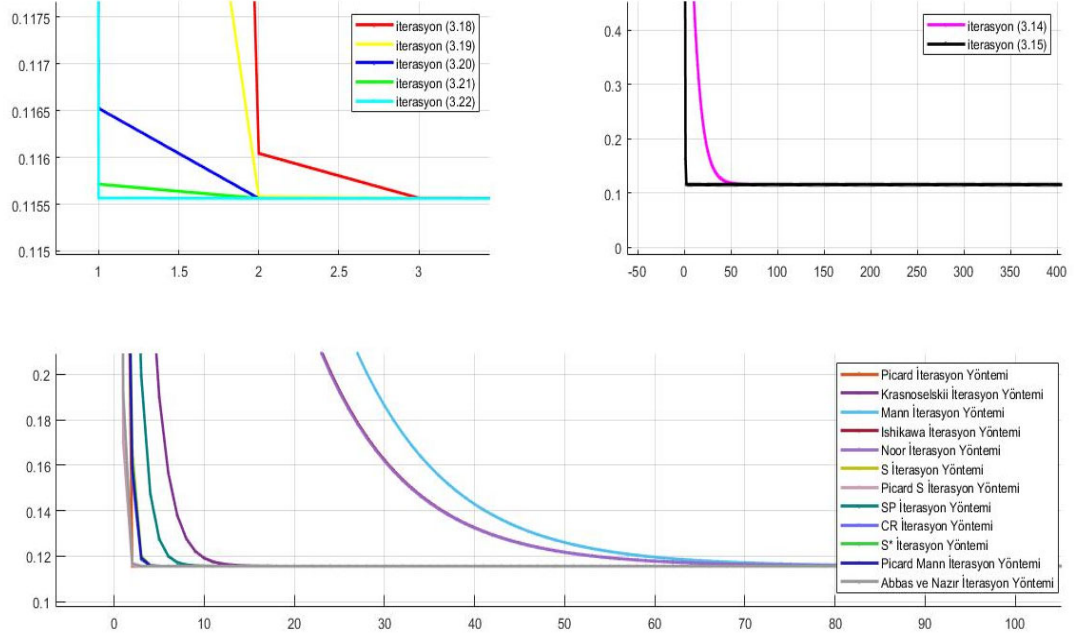
$$b_n = \delta^{3(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right)^{n+1} \|u_0 - p\|$$

$$\Psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\delta^{4(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right)^{n+1} \|x_0 - p\|}{\delta^{3(n+1)} \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right)^{n+1} \|u_0 - p\|} = \delta^{n+1}$$

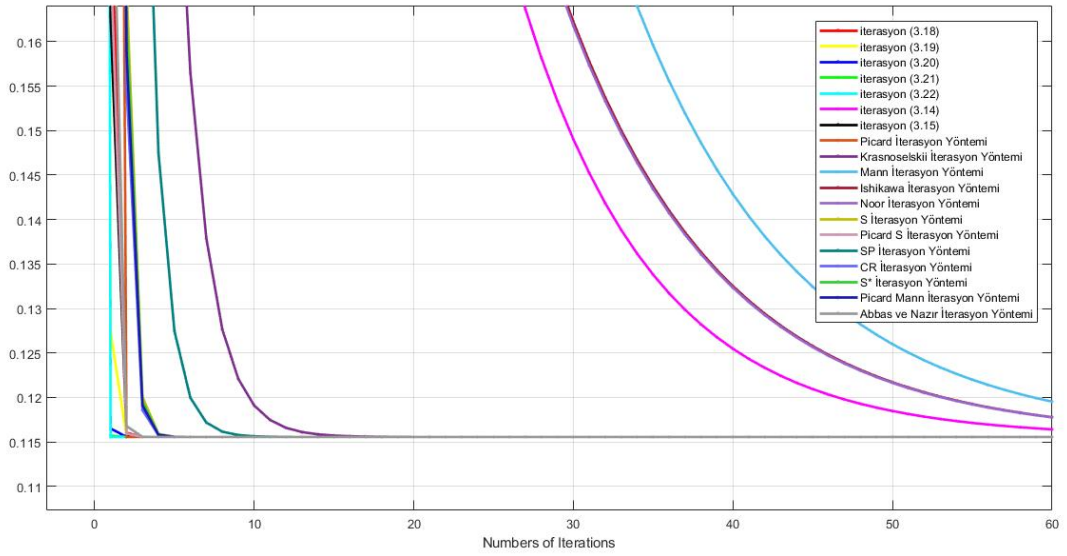
Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = 0$ olduğu görülür. Tanım 2.18'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı bulunmuş olur.

Açıklama 4.2.5 Verilen teoremlerde; Teorem 4.1.1'de $\delta < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'te $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$, Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5'te $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$, Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4'te $\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olmak üzere farklı δ aralıkları seçildiği görülmektedir. Burada ki amaç iterasyonların uygulanabilir olduğu en geniş δ aralığını seçmektir. $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ seçilerek tüm ispatlar için ortak bir çözümde alınabilir. Fakat unutmamak gerekir ki bu durum uygulanabilir δ aralığını daha küçük bir hale getirir.

Örnek 4.2.6 Örnek 4.1.6'nın verileri kullanılarak klasik anlamdaki bazı iterasyonlar, Kanwar ve arkadaşları tarafından tanımlanan iterasyon yöntemleri ile bu çalışmada ortaya konulan iterasyon yönteminin yakınsaklık bakımından karşılaştırmaları Çizelge 4.2., Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri ile Bu Çalışmada Ele Alınan Diğer İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışları



Şekil 4.4. Bu Çalışmada Bahsi Geçen Tüm İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışları

Çizelge 4.2. İterasyon (3.14), İterasyon (3.15) ve Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri

Adım Sayısı	İterasyon (3.14)	İterasyon (3.15)	Krasnoselskii İterasyon Yöntemi	Mann İterasyon Yöntemi	Ishikawa İterasyon Yöntemi	Noor İterasyon Yöntemi	SP İterasyon Yöntemi	Abbas ve Nazır İterasyon Yöntemi
0	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000	0,990000000000000
1	0,92097638888889	0,16281537522692	0,713905555555556	0,934781111111111	0,91657338193926	0,91565500327702	0,57754067814619	0,19229353648723
2	0,85508479203712	0,11586126788968	0,49745185704218	0,88154130196745	0,84807990759897	0,84648883753081	0,32302163623550	0,11678952485915
3	0,79255349865358	0,11556425920156	0,34552454242243	0,83040211845096	0,78445706973182	0,78239412636816	0,19923492665885	0,11557753503400
4	0,73354574388694	0,11556269775562	0,24821569500281	0,78145860699457	0,72557369028653	0,72319961678011	0,14751471571002	0,11556286825272
5	0,67816180472224	0,11556268955693	0,18993190826458	0,73477977588776	0,67124801096853	0,66868896881566	0,12748266288958	0,11556269166553
6	0,62644311107852	0,11556268951601	0,15653386465068	0,69040962004522	0,62126310867743	0,61861620698193	0,11996912406312	0,11556268953956
7	0,57837790155833	0,11556268951553	0,13790629634464	0,64836861726684	0,57537959792198	0,57271805970554	0,11718601924871	0,11556268952456
8	0,53390792762789	0,11556268951491	0,12767839482313	0,60865559544648	0,53334579565327	0,53072355524065	0,11615996200418	0,11556268951941
9	0,49293572869596	0,11556268951445	0,12211171505122	0,57124986814189	0,49490563631887	0,49236129176995	0,11578234095573	0,11556268951502
10	0,45533205285723	0,11556268951421	0,11909662490662	0,53611353950055	0,45980466773516	0,45736479285532	0,11564345399924	0,11556268951456
11	0,42094307173726	0,11556268951399	0,11746786901956	0,50319388756946	0,42779445740542	0,42547632285215	0,11559238422808	0,11556268951412
12	0,38959712122747	0,11556268951378	0,11658927344067	0,47242574620654	0,39863571327477	0,39644948737518	0,11557360712694	0,11556268951365

Çizelge 4.2.(devam) İterasyon (3.14), İterasyon (3.15) ve Bazı Klasik İterasyon Yöntemleri İçin Yakınsaklık Davranışlarının Sayısal Değerleri

13	0,36111078316579	0,11556268951367	0,11611570205613	0,44373381888629	0,37210038563152	0,37005089163986	0,11556670346887	0,11556268951365
14	0,33529419906390	0,11556268951365	0,11586054929428	0,41703487150955	0,34797297617081	0,34606108013425	0,11556416527443	0,11556268951365
15	0,31195557140005	0,11556268951365	0,11572310801649	0,39223976493821	0,32605124090729	0,32427493727576	0,11556323208756	0,11556268951365
⋮	⋮	0,11556268951365	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0,11556268951365
38	0,12822473956254	0,11556268951365	0,11556268961908	0,14862272039616	0,13633150660156	0,13611251324486	0,11556268951365	0,11556268951365
⋮	⋮	0,11556268951365	⋮	⋮	⋮	⋮	0,11556268951365	0,11556268951365
60	0,11642044020401	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11953587161754	0,11779079450833	0,11776531051288	0,11556268951365	0,11556268951365
⋮	⋮	0,11556268951365	0,11556268951365	⋮	⋮	⋮	0,11556268951365	0,11556268951365
297	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951408	0,11556268951373	0,11556268951373	0,11556268951365	0,11556268951365
⋮	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	⋮	⋮	⋮	0,11556268951365	0,11556268951365
354	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951375	0,11556268951368	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
355	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951373	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
⋮	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	⋮	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365
375	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365	0,11556268951365

4.3. Kararlılık

Kararlılık kavramı sabit nokta teorisinde etkin ve ilgi çekici bir konudur. Kararlılık, ele alınan bir dizi yerine farklı bir dizi alındığında ya da bazı aşamalardaki değişimler söz konusu olduğunda bu dizinin davranışlarının incelenmesidir. Eğer bu değişim küçük değişimlere ya da hiçbir değişime sebebiyet vermediyse dizi kararlıdır denir. Eğer dizide büyük değişimler söz konusu ise kararlılık kavramı ortadan kalkar. Birçok araştırmacı keyfi diziler olarak kararlılık çalışmaları yapmıştır. Fakat son yıllarda yapılan çalışmalar keyfi diziler ele almanın hatalı olduğunu ortaya koymuştur. Bunun yerine verilen diziye denk bir dizi ele alındığında daha sağlıklı sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür. Literatürdeki çalışmalardaki örneklerle bakıldığında hep denk dizilere yer verilmiştir. Fakat teori ispatlanırken keyfi dizi seçilmesinden bahsedilmektedir. Kararlılık meselesi sadece sabit nokta teorisinde kullanılan bir kavram değildir. Uygulamalı matematikte, fizik, kimya ve daha pek çok bilim dalının da etkin olarak ele aldığı bir çalışma konusudur. Bu sebeple de kararlılık konusunda yapılan çalışmalarda dizi seçimine dikkat edilmelidir.

Teorem 4.3.1 B bir Banach uzayı olup, $\emptyset \neq E \subseteq B$ kapalı ve dışbükey bir küme olsun. p , S dönüşümünün tek sabit noktası ve $S: E \rightarrow E$ dönüşümü (2.12) eşitsizliğini karşılayan bir dönüşüm olup, $\delta < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ olsun. (3.22) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere, w^2 -kararlıdır.

İspat $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, E 'da rastgele bir dizi olsun. (3.22) tarafından oluşturulan dizinin $x_{n+1} = f(S, x_n)$ tek olan p sabit noktasına yakınsadığı ve $\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(S, u_n)\|$ olduğu varsayalım. İterasyon yönteminin w^2 -kararlı olduğunu göstermek için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğu gösterilmelidir.

Öncelikle $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu varsayalım.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &= \|u_{n+1} - f(S, u_n) + f(S, u_n) - p\| \\ &\leq \|u_{n+1} - f(S, u_n)\| + \|f(S, u_n) - p\| = \varepsilon_n + \|f(S, u_n) - p\| \end{aligned}$$

elde edilir. (4.7) ile verilen eşitsizlikten faydalanılırsa,

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \varepsilon_n + \delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \|u_n - p\|$$

olarak yazılır. $\delta < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ olduğundan,

$$\delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) < 1$$

olur. Hipotez gereği $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu kabul edilmişti. Dolayısıyla Tanım 2.20 kullanılarak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğu görülmüş olur. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğu varsayalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \|u_{n+1} - f(S, u_n)\| = \|u_{n+1} - p + p - f(S, u_n)\| \\ &\leq \|u_{n+1} - p\| + \|p - f(S, u_n)\| \\ &= \|u_{n+1} - p\| + \|f(S, u_n) - p\| \\ &\leq \|u_{n+1} - p\| + \delta^4 \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)}\right) \|u_n - p\| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ hipotezinden yola çıkarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi w^2 -kararlıdır.

Örnek 4.3.2 Örnek 4.1.6'daki veriler göz önüne alınıp, S dönüşümü ve (3.22) iterasyonu yeniden yazılırsa $Sx_n = \frac{3x_n^2 + 1}{9}$ ve

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{9\alpha x_n + 3x_n^2 + 1}{9(\alpha + 1)} \\ t_n &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1) \frac{3x_n^2 + 1}{9} - \frac{3m_n^2 + 1}{9} \right) \\ v_n &= \frac{9\beta t_n + 3t_n^2 + 1}{9(\beta + 1)} \\ z_n &= \frac{3v_n^2 + 1}{9} \\ w_n &= \frac{9\gamma z_n + 3z_n^2 + 1}{9(\gamma + 1)} \\ y_n &= \frac{3w_n^2 + 1}{9} \\ k_n &= \frac{9\mu y_n + 3y_n^2 + 1}{9(\mu + 1)} \\ x_{n+1} &= \frac{3k_n^2 + 1}{9} \end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.22) ile verilen iterasyon yönteminin düzenlenmiş versiyonudur. Bu eşitlikler sonucunda Örnek 4.1.6'dan da görüleceği üzere $p = 0,11556268951365$ olarak elde edilmiştir. O halde $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $u_n = \left(\frac{9-\sqrt{69}}{6}\right)\frac{n+1}{n}$ seçilirse $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - u_n| = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir denk dizisi olur.

$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için $Su_n = \frac{3u_n^2+1}{9} = \frac{1}{9} \left(\frac{(9-\sqrt{69})^2(n+1)^2}{12n^2} + 1 \right)$ elde edilir. (4.41) eşitliğine benzer biçimde yazılarak $\{u_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilir.

Burada $\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(S, u_n)\|$ ifadesi kullanılarak $\varepsilon_n = \left\| \left(\frac{9-\sqrt{69}}{6}\right)\frac{n+2}{n+1} - f(S, u_n) \right\|$ yazılabilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{9-\sqrt{69}}{6}\right)\frac{n+2}{n+1} - f(S, u_n) \right| = 0$ olduğu hesaplanır. Böylelikle S dönüşümünün w^2 -kararlı olduğu görülür.

4.4. Veri Bağlılığı

Bu kısımda birbirine yakın olan dönüşüm sınıflarının diziler ile birlikte davranışları incelenecektir. Veri bağlılığı ile kararlılık her ne kadar kavramsal olarak birbirlerine yakın konular olsa da etkin farklılıklar söz konusudur. Bunlardan başlıcaları şu şekilde verilebilir; veri bağlılığı dizide yer alan dönüşümler üzerinde yapılan çalışmalardan oluşmaktadır, kararlılık ise parametreler ve dizilerdeki içsel şartlardan elde edilen çalışmalardan oluşmaktadır. Bunlar artırılarak devam edilebilir. Sonuç olarak iki farklı ve önemli konudur. Bu nedenle ikisinin de ayrı ayrı incelenmesi önem arz etmektedir. Son zamanlar bu iki çalışma konusuna aynı makaleler içinde farklı başlıklar altında yer verilmektedir.

Teorem 4.4.1 C, E ve S Teorem 4.1.1'de olduğu gibi tanımlansın ve $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ şartları verilsin. $\tilde{S}$, S 'nin yaklaşım operatörü olarak verilsin. S ve $\tilde{S}$, operatörleri sırasıyla p ve $\tilde{p}$ sabit noktalarına sahip olsun. S operatöründen ve (3.22) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile belirtisin. $\tilde{S}$, operatörü için $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1) \tilde{S} u_n - \tilde{S} \left(\frac{\alpha u_n + \tilde{S} u_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\
w_n &= \tilde{S} \left(\frac{\beta r_n + \tilde{S} r_n}{\beta + 1} \right) \\
v_n &= \tilde{S} \left(\frac{\gamma w_n + \tilde{S} w_n}{\gamma + 1} \right) \\
u_{n+1} &= \tilde{S} \left(\frac{\mu v_n + \tilde{S} v_n}{\mu + 1} \right)
\end{aligned}$$

Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow \tilde{p}$ ise

$$\|p - \tilde{p}\| \leq \frac{4\delta^3 + 2\delta^2 + 2}{1 - 3\delta^4} \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Tanım 3.20’de $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi verilmişti;

$$\begin{cases}
t_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1) S x_n - S \left(\frac{\alpha x_n + S x_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\
z_n = S \left(\frac{\beta t_n + S t_n}{\beta + 1} \right) \\
y_n = S \left(\frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} \right) \\
x_{n+1} = S \left(\frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} \right)
\end{cases} \quad (4.42)$$

Şimdi $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{cases}
r_n = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1) \tilde{S} u_n - \tilde{S} \left(\frac{\alpha u_n + \tilde{S} u_n}{\alpha + 1} \right) \right) \\
w_n = \tilde{S} \left(\frac{\beta r_n + \tilde{S} r_n}{\beta + 1} \right) \\
v_n = \tilde{S} \left(\frac{\gamma w_n + \tilde{S} w_n}{\gamma + 1} \right) \\
u_{n+1} = \tilde{S} \left(\frac{\mu v_n + \tilde{S} v_n}{\mu + 1} \right)
\end{cases} \quad (4.43)$$

(2.16) ile verilen eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \left\| S\left(\frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1}\right) - \tilde{S}\left(\frac{\mu v_n + \tilde{S} v_n}{\mu + 1}\right) \right\| \\
&\leq 2\delta \left\| \frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} - p \right\| + \delta \left\| \frac{\mu y_n + S y_n}{\mu + 1} - \frac{\mu v_n + \tilde{S} v_n}{\mu + 1} \right\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \|y_n - p\| + \frac{1}{\mu + 1} \|S y_n - p\| \right) \\
&\quad + \delta \frac{\mu}{\mu + 1} \|y_n - v_n\| + \frac{\delta}{\mu + 1} \|S y_n - \tilde{S} v_n\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \|y_n - p\| + \delta \frac{\mu}{\mu + 1} \|y_n - v_n\| \\
&\quad + \frac{\delta}{\mu + 1} (2\delta \|y_n - p\| + \delta \|y_n - v_n\| + \varepsilon) + \varepsilon \\
&= 2\delta \frac{\mu + 2\delta}{\mu + 1} \|y_n - p\| + \delta \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \|y_n - v_n\| + \left(\frac{\delta}{\mu + 1} + 1 \right) \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &= \left\| S\left(\frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1}\right) - \tilde{S}\left(\frac{\gamma w_n + \tilde{S} w_n}{\gamma + 1}\right) \right\| \\
&\leq 2\delta \left\| \frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} - p \right\| + \delta \left\| \frac{\gamma z_n + S z_n}{\gamma + 1} - \frac{\gamma w_n + \tilde{S} w_n}{\gamma + 1} \right\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + \frac{1}{\gamma + 1} \|S z_n - p\| \right) \\
&\quad + \delta \frac{\gamma}{\gamma + 1} \|z_n - w_n\| + \frac{\delta}{\gamma + 1} \|S z_n - \tilde{S} w_n\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + \delta \frac{\gamma}{\gamma + 1} \|z_n - w_n\| \\
&\quad + \frac{\delta}{\gamma + 1} (2\delta \|z_n - p\| + \delta \|z_n - w_n\| + \varepsilon) + \varepsilon \\
&= 2\delta \frac{\gamma + 2\delta}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + \delta \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \|z_n - w_n\| + \left(\frac{\delta}{\gamma + 1} + 1 \right) \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &= \left\| S\left(\frac{\beta t_n + St_n}{\beta + 1}\right) - \tilde{S}\left(\frac{\beta r_n + \tilde{S}r_n}{\beta + 1}\right) \right\| \\
&\leq 2\delta \left\| \frac{\beta t_n + St_n}{\beta + 1} - p \right\| + \delta \left\| \frac{\beta t_n + St_n}{\beta + 1} - \frac{\beta r_n + \tilde{S}r_n}{\beta + 1} \right\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \|t_n - p\| + \frac{1}{\beta + 1} \|St_n - p\| \right) \\
&\quad + \delta \frac{\beta}{\beta + 1} \|t_n - r_n\| + \frac{\delta}{\beta + 1} \|St_n - \tilde{S}r_n\| + \varepsilon \\
&\leq 2\delta \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \|t_n - p\| + \delta \frac{\beta}{\beta + 1} \|t_n - r_n\| \\
&\quad + \frac{\delta}{\beta + 1} (2\delta \|t_n - p\| + \delta \|t_n - r_n\| + \varepsilon) + \varepsilon \\
&= 2\delta \frac{\beta + 2\delta}{\beta + 1} \|t_n - p\| + \delta \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \|t_n - r_n\| + \left(\frac{\delta}{\beta + 1} + 1 \right) \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\|t_n - r_n\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)Sx_n - S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1)\tilde{S}u_n - \tilde{S}\left(\frac{\alpha u_n + \tilde{S}u_n}{\alpha + 1}\right) \right) \right\| \\
&\leq \frac{\alpha + 1}{\alpha} \|Sx_n - \tilde{S}u_n\| \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \left\| S\left(\frac{\alpha x_n + Sx_n}{\alpha + 1}\right) - \tilde{S}\left(\frac{\alpha u_n + \tilde{S}u_n}{\alpha + 1}\right) \right\| \\
&\leq \frac{\alpha + 1}{\alpha} (2\delta \|x_n - p\| + \delta \|x_n - u_n\| + \varepsilon) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \left(2\delta \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} \|x_n - p\| + \delta \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} \|x_n - u_n\| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\delta}{\alpha + 1} + 1 \right) \varepsilon \right) \\
&= \frac{2\delta}{\alpha} \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - p\| \\
&\quad + \frac{\delta}{\alpha} \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - u_n\| + \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + 2 + \frac{\delta}{\alpha + 1} \right) \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.47}$$

olur. (4.47) ile elde edilen eşitsizlik (4.46) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &\leq 2\delta \frac{\beta + 2\delta}{\beta + 1} \|t_n - p\| \\
&+ \frac{2\delta^2}{\alpha} \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - p\| \\
&+ \frac{\delta^2}{\alpha} \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - u_n\| \\
&+ \left[\frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 2 + \frac{\delta}{\alpha + 1} \right) + \left(\frac{\delta}{\beta + 1} + 1 \right) \right] \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak bulunur. (4.48) ile elde edilen eşitsizlik (4.45) ile elde edilen eşitsizlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\leq 2\delta \frac{\gamma + 2\delta}{\gamma + 1} \|z_n - p\| + 2\delta^2 \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + 2\delta}{\beta + 1} \right) \|t_n - p\| \\
&+ \frac{2\delta^3}{\alpha} \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - p\| \\
&+ \frac{\delta^3}{\alpha} \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - u_n\| \\
&+ \left[\frac{\delta^2}{\alpha} \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 2 + \frac{\delta}{\alpha + 1} \right) \right. \\
&\left. + \delta \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\delta}{\beta + 1} + 1 \right) + \left(\frac{\delta}{\gamma + 1} + 1 \right) \right] \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.49}$$

olarak elde edilir. (4.49) ile elde edilen eşitsizlik (4.44) ile elde edilen eşitsizlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq 2\delta \frac{\mu + 2\delta}{\mu + 1} \|y_n - p\| + 2\delta^2 \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + 2\delta}{\gamma + 1} \right) \|z_n - p\| \\
&+ 2\delta^3 \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + 2\delta}{\beta + 1} \right) \|t_n - p\| \\
&+ \frac{2\delta^4}{\alpha} \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - p\| \\
&+ \frac{\delta^4}{\alpha} \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} \right) \|x_n - u_n\| \\
&+ \left[\frac{\delta^3}{\alpha} \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\beta + \delta}{\beta + 1} \right) \left(\alpha + 2 + \frac{\delta}{\alpha + 1} \right) \right. \\
&+ \delta^2 \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{\delta}{\beta + 1} + 1 \right) + \delta \left(\frac{\mu + \delta}{\mu + 1} \right) \left(\frac{\delta}{\gamma + 1} + 1 \right) \\
&\left. + \left(\frac{\delta}{\mu + 1} + 1 \right) \right] \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.50}$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ ve $\delta \in [0,1)$ olduğu biliniyor. O halde;

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ \alpha + \delta < \alpha + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha + 1} < 1 \\ \beta + \delta < \beta + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\beta + \delta}{\beta + 1} < 1 \\ \gamma + \delta < \gamma + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1} < 1 \\ \mu + \delta < \mu + 1 \text{ olup } 0 < \frac{\mu + \delta}{\mu + 1} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + \delta}{\alpha(\alpha + 1)} < 1 \\ 0 < \frac{\alpha + 2\delta}{\alpha + 1} < 2 \\ 0 < \frac{\beta + 2\delta}{\beta + 1} < 2 \\ 0 < \frac{\gamma + 2\delta}{\gamma + 1} < 2 \\ 0 < \frac{\mu + 2\delta}{\mu + 1} < 2 \end{array} \right.$$

ifadeleri göz önüne alınarak (4.50) eşitsizliği düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq 4\delta\|y_n - p\| + 4\delta^2\|z_n - p\| + 4\delta^3\|t_n - p\| \\ &\quad + 8\delta^4\|x_n - p\| + 3\delta^4\|x_n - u_n\| + (4\delta^3 + 2\delta^2 + 2)\varepsilon \end{aligned} \quad (4.51)$$

elde edilir. Teorem 4.1.1'in ispatından,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|y_n - p\| \leq \|x_n - p\| \\ \|z_n - p\| \leq \|x_n - p\| \\ \|t_n - p\| \leq \|x_n - p\| \end{array} \right. \quad (4.52)$$

olduğu biliniyor. Ayrıca Teorem 4.1.1'e göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - p\| = 0$$

olur. O halde; (4.51) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa;

$$\|p - \tilde{p}\| \leq \frac{4\delta^3 + 2\delta^2 + 2}{1 - 3\delta^4} \varepsilon \quad (4.53)$$

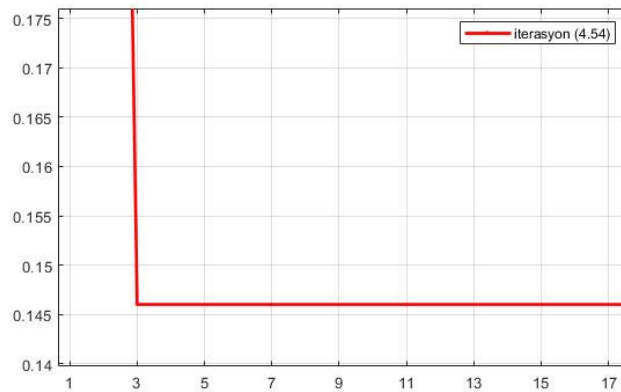
olarak bulunur.

Örnek 4.4.2 Örnek 4.1.6'daki veriler göz önüne alınsın. $\tilde{S}x = \frac{x^3+x^2+1}{7}$ olarak seçilirse, bu operatörün sabit noktasının $\tilde{p} = 0,14603508020487$ olduğu Çizelge 4.3.'ten görülmektedir. S dönüşümünün yaklaşım operatörünün $\tilde{S}$ dönüşümü olduğu ise $\max_{x \in [0,1]} |Sx - \tilde{S}x| = 0.031746$ eşitliğinden anlaşıp, $|Sx - \tilde{S}x| \leq \varepsilon = 0.031746$ olur.

$\tilde{S}$ operatörü kullanılarak, (3.22) iterasyonu yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{7\alpha u_n + u_n^3 + u_n^2 + 1}{7(\alpha + 1)} \\ r_n &= \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + 1) \frac{u_n^3 + u_n^2 + 1}{7} - \frac{k_n^3 + k_n^2 + 1}{7} \right) \\ l_n &= \frac{7\beta u_n + r_n^3 + r_n^2 + 1}{7(\beta + 1)} \\ w_n &= \frac{l_n^3 + l_n^2 + 1}{7} \\ m_n &= \frac{7\gamma u_n + w_n^3 + w_n^2 + 1}{7(\gamma + 1)} \\ v_n &= \frac{m_n^3 + m_n^2 + 1}{7} \\ n_n &= \frac{7\mu u_n + v_n^3 + v_n^2 + 1}{7(\mu + 1)} \\ u_{n+1} &= \frac{n_n^3 + n_n^2 + 1}{7} \end{aligned} \quad (4.54)$$

elde edilir. $u_0 = 0.99$ başlangıç koşulu ve (4.54) ile elde edilen iterasyon yöntemi kullanılarak $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yakınsama davranışı Şekil 4.5.'te görülür.



Şekil 4.5. (4.54) İterasyonunun Yakınsaklık Davranışı

Çizelge 4.3. İterasyon (4.54) İçin Yakınsaklık Davranışının Sayısal Değerleri

Adım Sayısı	İterasyon (4.54)
0	0,990000000000000
1	0,14603670594596
2	0,14603508023789
3	0,14603508021672
4	0,14603508020499
5	0,14603508020487
6	0,14603508020487
7	0,14603508020487

Yukarıdaki bütün kabuller, elde edilen bazı sonuçlar ve Teorem 4.4.1’de elde edilen (4.53) eşitsizliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned} 0.03047239069122 = |p - \tilde{p}| &\leq \frac{4\delta^3 + 2\delta^2 + 2}{1 - 3\delta^4} \varepsilon \\ &= \frac{4(0.6)^3 + 2(0.6)^2 + 2}{1 - 3(0.6)^4} 0.031746 \\ &= 0.18615455497382 \end{aligned}$$

sonuç olarak

$$|p - \tilde{p}| \leq 0.18615455497382$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması sonucunda, Sharma ve arkadaşları tarafından geliştirilen iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsadığı gösterilen yeni bir iterasyon yöntemi başarıyla elde edilmiştir [33]. Yapılan teorik analizler, önerilen yöntemin literatürdeki mevcut yöntemlere kıyasla daha üstün bir yakınsama hızına sahip olduğunu açıkça ortaya koymuştur. Elde edilen bu yeni yöntemin, karşılaştırılan diğer iterasyon yöntemiyle yapılan yakınsaklık hızı karşılaştırması, yeni yöntemin daha az sayıda adımda ve daha etkin bir şekilde çözüme yaklaştığını teyit etmiştir. Ayrıca, yeni yöntemin kararlılığı ve veri bağıllığı özelliklerinin incelenmesi, yöntemin sayısal uygulamalarda güvenilir sonuçlar sunma potansiyelini desteklemektedir.

Bu bulgular ışığında, gelecekteki araştırmalar için çeşitli yollar düşünülebilir. Öncelikle, elde edilen bu yeni iterasyon yönteminin farklı varyasyonel eşitsizlik problemleri üzerindeki performansı daha kapsamlı bir şekilde değerlendirilebilir. Farklı operatör türleri ve kısıt kümeleri için yöntemin etkinliği ve verimliliği incelenebilir. İkinci olarak, bu yöntemin farklı fonksiyon uzaylarında veya daha genel matematiksel yapılarda nasıl bir davranış sergileyeceği araştırılabilir. Üçüncü olarak, yöntemin optimizasyon algoritmaları, mühendislik problemleri veya diğer uygulamalı bilim alanlarındaki potansiyel kullanımları ve uyarlanabilirlikleri üzerine çalışmalar yapılabilir. Son olarak, bu yeni iterasyon yönteminin farklı hızlandırma teknikleriyle kombine edilerek performansının daha da artırılması ve daha geniş problem sınıflarına uygulanabilir hale getirilmesi gelecek araştırmalar için önemli bir yön olabilir.

KAYNAKLAR

1. Pugachev, V. S., ve Sinitsyn, I., 1999. Lectures on functional analysis and applications. World Scientific Publishing Company.
2. Cousot, P. ve Cousot, R., 1977. Abstract interpretation: a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. In Proceedings of the 4th Acm Sigact-Sigplan symposium on Principles of programming languages. 238-252.
3. Border, K., 1985. Fixed point theorems with applications to economics and game theory. Cambridge university press.
4. Urai, K., 2010. Fixed points and economic equilibria. World Scientific.
5. Zeidler, E., 2012. Applied functional analysis: main principles and their applications Springer Science and Business Media.
6. Cho, J., 2017. Survey on metric fixed point theory and applications. Advances in Real and Complex Analysis with Applications, 183-241.
7. Picard, É., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6, 145-210.
8. Poincare, H., 1885. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1, 167-244.
9. Brouwer, L., 1911. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 71, 3, 320-327.
10. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations intégrales, Fundamenta Mathematicae, 3, 1, 133-181.
11. Schauder, J., 1930. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. Studia Mathematica, 2, 1, 171-180.
12. Kakutani, S., 1941. A generalization of Brouwer's fixed point theorem.
13. Leray, J., ve Schauder, J., 1934. Topologie et équations fonctionnelles. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 45-78.
14. Knaster, B., 1928. Un theoreme sur les fonctions d'ensembles. Ann. Soc. Polon. Math., 6, 133-134.
15. Atalan, Y., 2017. Sabit Nokta Yaklaşımlarıyla Bazı Diferansiyel ve İntegral Deklemlerinin Çözümü, 32-33.
16. Newton, I., 1833. Philosophiae naturalis principia mathematica. Brookman.

17. Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points, Springer, Berlin.
18. Krasnoselskii, M. A., 1955. Two Remarks on the Method of Successive Approximations, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, 1, 123-127.
19. Mann, W.R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 3, 506-510.
20. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 1, 147-150.
21. Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 1, 217-229.
22. Agarwal, R. O., Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8, 1, 61-79.
23. Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D., 2009. Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications, Springer Science & Business Media.
24. Gürsoy, F. ve Karakaya, V., 2014. A Picard-S Hybrid Type Iteration Method for Solving a Differential Equation with Retarded Argument.
25. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 235, 9, 3006-3014.
26. Suparatulatorn, R., Chalamjiak, W., ve Suantai, S., 2018. A modified S-iteration process for G-nonexpansive mappings in Banach spaces with graphs. *Numerical Algorithms*, 77, 479-490.
27. Chugh, R. Kumar, V. ve Kumar, S., 2012. Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces, *American Journal of Computational Mathematics*, 2, 345-357.
28. Karahan, I. ve Ozdemir, M., 2013. A General Iterative Method for Approximation of Fixed Points and Their Applications, *Advances in Fixed Point Theory*, 3, 3, 510-526.
29. Khan, S.H., 2013. A Picard-Mann Hybrid Iterative Process, *Fixed point Theory and Applications*, 69, 1-10.
30. Abbas, M. ve Nazir, T., 2014. A New Faster Iteration Process Applied to Constrained Minimization and Feasibility Problems, *Matematički Vesnik*, 66, 2, 223-234.

31. Kanwar, V., Sharma, P., Argyros, I.K., Behl, R., Argyros, C., Ahmadian, A., ve Salimi, M., 2021. Geometrically constructed family of the simple fixed point iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 9, 6, 1-13.
32. Sharma, P., Ramos, H., Behl, R., ve Kanwar, V., 2023. A new three-step fixed point iteration scheme with strong convergence and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 430, 115-242.
33. Sharma, P., Ramos, H., Kanwar, V., Behl, R., ve Rajput, M., 2024. Efficient iterative procedures for approximating fixed points of contractive-type mappings with applications. *Numerical Algorithms*, 1-48.
34. Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York.
35. Maddox, I. J., 1988. *Elements of Functional Analysis*, CUP Archive.
36. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold.
37. Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific.
38. Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Academic Press.
39. Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 1, 43-54.
40. Kannan, R., 1968. Some results on fixed points, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 1-2, 71-76.
41. Chatterjea, S. K., 1972. Fixed point theorems, *Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences*, 25, 727-730.
42. Cardinali, T., ve Rubbioni, P., 2010, A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces, *Fixed Point Theory* 11, 3-10.
43. Imoru, C.O., ve Olatinwo, M.O., 2003. On the stability of Picard and Mann iteration processes. *Carpathian J. Math.* 19, 2, 155-160.
44. Berinde, V., 2004, Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators. *Fixed Point Theory and Application*, 2, 1-9.
45. Berinde, V., 2016. On a notion of rapidity of convergence used in the study of fixed point iterative methods, *Creative Mathematics and Informatics*, 25, 29-40.

46. Berinde, V., 2002, On the stability of some fixed point procedures, Buletinul științific al Universitatii Baia Mare, Seria B, Fascicola matematică-informatică, 18, 1, 7-14.
47. Harder A. M., ve Hicks, T. L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures, Mathematica Japonica, 33, 693-706.
48. Harder A. M., ve Hicks, T. L., 1988. A stable iteration procedure for nonexpansive mappings, Mathematica Japonica, 33, 687-692.
49. Timiș, I., 2010. On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings. Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, 37, 2, 106-114.
50. Şoltuz, S.M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive like operators Fixed Point Theory and Applications, 1, 1-7.
51. Çopur, A. K., 2024. Results of Convergence, Stability, and Data Dependency for an Iterative Algorithm. Journal of New Theory, 48, 99-112.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emrullah İsa GÜRBÜZ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Doğu Akdeniz Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim
Matematik Öğretmenliği Programı, 2010-2015

Lisans : Karatekin Üniversitesi, Hukuk Fakültesi, Hukuk, 2022

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Gürbüz, E. İ. ve Maldar, S., 2025. The Convergence Analysis for a Fast And Accurate New Version of an İteration Method, Uluslararası Yıldırım Bayezid Bilimsel Araştırmalar ve İnovasyon Sempozyumu 2025, Bursa Teknik Üniversitesi, 9-10 Mayıs 2025, Bursa.