



GERÇEL BİRİM YUVARI KORUYAN

MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

BEYZANUR AYAS

Eskişehir 2025

GERÇEL BİRİM YUVARI KORUYAN MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ

Beyzanur AYAS

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Beyzanur AYAS'ın "GERÇEL BİRİM YUVARI KORUYAN MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ" başlıklı tezi 16/01/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN	
Üye	: Prof. Dr. H. Turgay KAPTANOĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Derya ÇELİK	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

16/01/2025

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans ęrencisi Beyzanur AYAS, ‘‘Gerçel Birim Yuvarı Koruyan Möbius Dönüşümleri’’ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN

ÖZET

GERÇEL BİRİM YUVARI KORUYAN MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

BEYZANUR AYAS

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2025

Danışman: Doç. Dr. Adem Ersin Üreyen

Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ 'de hiperdüzlem ve kürelere göre sonlu tane yansımanın bileşkesine Möbius dönüşümü adı verilir. Möbius dönüşümleri açı koruyan dönüşümlerdir ve $n \geq 3$ ise Möbius dönüşümleri dışında açı koruyan dönüşüm yoktur.

Bu tezde ilk olarak hiperdüzlem ve kürelere göre yansımaların özellikleri incelenmiştir. Bu yansımaların açı ve simetriyi korudukları gösterilmiştir. Öklid uzayının izometrilерinin ve daha genel olarak benzerlik dönüşümlerinin yansımaların bileşkesi olarak yazılabileceği, yani Möbius dönüşümleri oldukları gösterilmiştir.

Bu tezin amacı birim yuvarı koruyan Möbius dönüşümlerinin belirlenmesidir. Bunun için öncelikle birim yuvarı koruyan hiperdüzlem ve kürelere göre yansımalar belirlenmiş, daha sonra standart Möbius dönüşümleri olarak adlandırılan dönüşümler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Tezin ana sonucu olarak birim yuvarı koruyan her Möbius dönüşümünün standart dönüşümler ve ortogonal dönüşümlerin bileşkesi olarak yazılabileceği gösterilmiştir.

Son olarak birim yuvar üzerinde sözde hiperbolik metrik tanımlanmış ve bu metriğin Möbius değişmez olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Möbius dönüşümü, Evirtim, Birim yuvar, Çifte oran, Sözde hiperbolik metrik

ABSTRACT

MÖBIUS TRANSFORMATIONS PRESERVING THE REAL UNIT BALL

Beyzanur AYAS

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January 2025

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Adem Ersin ÜREYEN

In the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, composition of a finite number of reflections in hyperplanes and spheres is called a Möbius transformation. These transformations are conformal (angle preserving) and when $n \geq 3$ there are no conformal transformations other than the Möbius transformations.

In this thesis we first study the properties of reflections in hyperplanes and spheres. We show that these reflections are conformal and preserve symmetry. We show that Euclidean isometries and, more generally, the similarities can be written as compositions of reflections.

The main purpose of this thesis is characterizing the Möbius transformations that preserve the unit ball. For this we first determine the reflections in hyperplanes and spheres that preserve the unit ball, then define the canonical Möbius transformations and study their properties. As the main result of the thesis we show that every Möbius transformation that preserve the unit ball can be written as a composition of a canonical transformation and an orthogonal transformation.

Finally, on the unit ball we define the pseudo-hyperbolic metric and show that this metric is Möbius invariant.

Keywords: Möbius transformation, Inversion, Unit ball, Cross-ratio,
Pseudo-hyperbolic metric.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecinin her aşamasında her daim zaman ayırıp bilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve disiplini ile beni yönlendirip tez çalışma sürecimde rehber olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Adem Ersin ÜREYEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Beyzanur AYAS



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Beyzanur AYAS

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. DÜZLEMDE YANSIMALAR	4
2.1. Dik Çemberler.....	8
2.2. Doğruya Göre Yansıma.....	10
2.3. Açık Korunumu.....	11
2.4. Simetri İlkesi	12
3. UZAYDA YANSIMALAR	14
3.1. Dik Küreler	19
4. BİRİM YUVARI KORUYAN EVİRTİMLER	22
5. İZOMETRİLER VE ORTOGONAL DÖNÜŞÜMLER.....	27

5.1. Benzerlik Dönüşümleri	33
6. MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ.....	35
7. AÇI KORUNUMU.....	39
7.1. Simetri İlkesi	43
8. BİRİM YUVARI KORUYAN MÖBİUS DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEK- LERİ.....	45
9. ÇİFTE ORAN	54
10.BİRİM YUVARI KORUYAN TÜM MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ. 57	
10.1.Möbius Değişmezlik	60
11.SÖZDE HİPERBOLİK METRİK	62
KAYNAKÇA.....	65
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Çembere göre evirtim	4
Şekil 2.2. A' noktasının bulunması	4
Şekil 2.3. $\triangle OAB$ ve $\triangle OB'A'$ üçgenleri benzerdir.	6
Şekil 2.4. Evirtim merkezinden geçmeyen doğrunun evirtimi	7
Şekil 2.5. Evirtimn merkezinden geçmeyen çemberin evirtimi.....	7
Şekil 2.6. Dik çemberin evirtimi kendisidir.	9
Şekil 2.7. ℓ doğrusuna teğet, $\mathcal{K}$ çemberine dik çember.....	12
Şekil 2.8. Simetri ilkesi	13
Şekil 3.1. $S(a, r)$ küresine göre evirtim	15

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Id	: Birim dönüşüm
$B(a, r)$	: a merkezli r yarıçaplı yuvar
$\mathbb{B}$	: Birim yuvar
$S(a, r)$	: a merkezli r yarıçaplı küre
$\mathcal{I}_{S(a, r)}$	: a merkezli r yarıçaplı küreye göre evirtim
x^*	: birim küreye göre evirtim
$O(n)$	: Ortogonal matrisler grubu
$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$	: $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'nin Möbius dönüşümleri
$\mathcal{M}(\mathbb{B})$	: $\mathbb{B}$ 'yi koruyan Möbius dönüşümleri
φ_a	: a ile 0'ın yerini değiştiren standart Möbius dönüşümü
$\mathcal{P}(a, t)$	: Normali a olan bir hiperdüzlem
$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$	: $\mathcal{P}(a, t)$ hiperdüzlemine göre yansıma
$J_f(x)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki Jacobi matrisi
d_{ph}	: Sözde hiperbolik metrik

1. GİRİŞ

$U \subset \mathbb{R}^n$ açık küme, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında açı koruyor ise f fonksiyonuna x_0 noktasında açıkorur denir. Daha açık bir ifadeyle γ_1 ve γ_2 , x_0 noktasında kesişen herhangi iki eğri olsun. Eğer x_0 noktasında γ_1 ve γ_2 arasındaki açı ile $f(x_0)$ noktasında $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ eğrileri arasındaki açı aynı ise f fonksiyonu x_0 noktasında açı korur. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki Jacobi matrisi $J_f(x_0)$ olsun. f 'nin x_0 noktasında açıkorur olması için gerek ve yeter şart A ortogonal matris ve $r > 0$ olmak üzere $J_f(x_0) = rA$ olmasıdır.

Eğer $n = 2$ ise birçok farklı açı koruyan dönüşüm vardır. Örnek olarak $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası ile $z = x + iy$ noktasını eşleyerek $\mathbb{R}^2$ 'yi kompleks düzlem $\mathbb{C}$ olarak alalım. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z_0 noktasında (kompleks) türevlenebilir ve $f'(z_0) \neq 0$ ise $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında açı korur. Örnek olarak $f(z) = e^z$ alınırsa her $z \in \mathbb{C}$ için $f'(z) = e^z \neq 0$ ve

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

olduğundan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ 'nin tamamında açı korur. Jacobi matrisi hesaplanırsa

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

ve en sağdaki matris ortogonaldır.

Üst boyutlu uzaylarda, yani $n \geq 3$ ise, durum çok farklıdır ve açı koruyan dönüşümler kısıtlıdır. $n \geq 3$ için $\mathbb{R}^n$ 'de açı koruyan dönüşümler sadece aşağıdaki tipteki dönüşümler ve onların bileşkelerinden ibarettir.

- (i) $f(x) = x + x_0$ şeklindeki öteleme dönüşümleri,
- (ii) A ortogonal matris olmak üzere $f(x) = Ax$ şeklindeki ortogonal dönüşümler,
- (iii) $r > 0$ olmak üzere $f(x) = rx$ şeklindeki genişletme/daraltma dönüşümleri,
- (iv) Kürelere göre yansımalar (evirtimler).

Bu tip dönüşümler dışında açığorur bir dönüşümün olmadığı Liouville tarafından 1850 yılında gösterilmiştir. Liouville teoreminin ispatı [3] kaynağında bulunabilir.

Burada (i) ve (ii)'deki öteleme ve ortogonal dönüşümler hiperdüzlemlere göre yansımaların bileşkesi olarak, (iii)'deki genişletme dönüşümleri ise kürelere göre yansımaların bileşkesi olarak yazılabilir. Yani Liouville teoremi $n \geq 3$ için $\mathbb{R}^n$ 'de açığorur dönüşümler yalnız ve ancak hiperdüzlem ve kürelere göre yansımalar ve bunların bileşkeleridir şeklinde ifade edilebilir.

Hiperdüzlem ve kürelere göre yansıma dönüşümlerinin bileşkeleri Möbius dönüşümleri olarak adlandırılır. Bu tezde Möbius dönüşümlerini inceleyeceğiz. İlk olarak $n = 2$ durumuna bakıp Bölüm 2'de düzlemde çember ve doğrulara göre yansımaların özelliklerine bakacağız. Bu yansımaların açı koruduklarını gösterip simetri ilkesinden bahsedeceğiz. Bölüm 3'te üst boyutlu uzaylarda hiperdüzlem ve kürelere göre yansımalarla bakıp, düzlemde gösterilen özellikleri genelleştireceğiz.

Yukarıda (i), (ii) ve (iii) maddelerinde belirtilen öteleme, ortogonal ve genişletme dönüşümleri bir arada düşünülürse, A ortogonal matris olmak üzere, $f(x) = rAx + x_0$ dönüşümüne bir benzerlik dönüşümü denir. Özel olarak $r = 1$ ise f Öklid uzayının izometrisidir. Bölüm 5'te $\mathbb{R}^n$ 'nin izometrilerini inceleyip bunların sadece $f(x) = Ax + x_0$ formunda olduğunu göstereceğiz. Ayrıca her izometrinin en fazla $n + 1$ tane yansımanın bileşkesi olarak yazılabileceğini ispatlayacağız. Bu bölümde kaynak olarak [2]'yi takip edeceğiz.

Bu tezde asıl amacımız birim yuvar $\mathbb{B}$ 'yi koruyan tüm Möbius dönüşümlerini belirlemektir. Bunun için ilk olarak Bölüm 4'te $\mathbb{B}$ 'yi koruyan küreye göre yansımaları bulacağız. Bunları kullanarak Bölüm 8'de $\mathbb{B}$ 'yi koruyan ve a ile 0 noktalarının yerlerini değiştiren standart Möbius dönüşümleri φ_a 'ları tanımlayacağız. Bölüm 10'da [2] kaynağını takip ederek $\mathbb{B}$ 'yi koruyan tüm Möbius dönüşümlerinin, A ortogonal matris olmak üzere, $A\varphi_a$ formunda olduğunu göstereceğiz. Bunun için ihtiyacımız olan

Möbius dönüşümlerinin çifte oranı koruması özelliğini Bölüm 9’da ispatlayacağız. Son olarak Bölüm 11’de Möbius değişmez olan sözde hiperbolik metriği inceleyeceğiz.



2. DÜZLEMDE YANSIMALAR

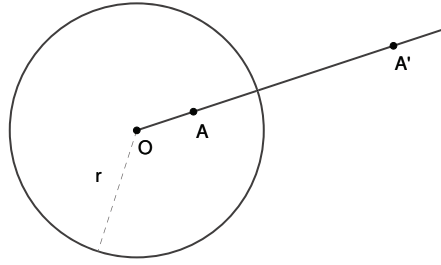
Bu bölümde düzlemde çember ve doğrulara göre yansımaları ve özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümde kaynak olarak [4–6, 8, 9] kullanılmıştır.

İlk olarak evirtim olarak adlandırılan çemberlere göre yansımalarla bakalım.

Tanım 2.1. $\mathcal{K}$, merkezi O ve yarıçapı r olan bir çember, A ise O 'dan farklı herhangi bir nokta olsun. OA ısnını üzerinde bulunan ve (Şekil 2.1)

$$|OA| |OA'| = r^2 \quad (2.1)$$

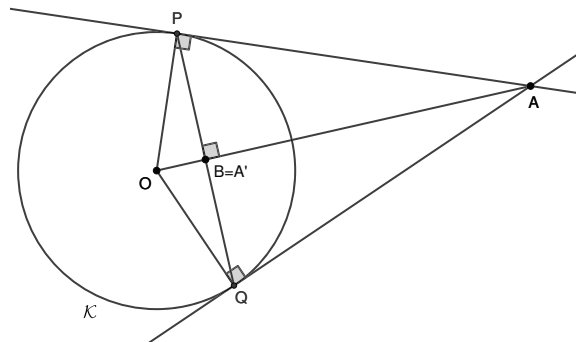
eşitliğini sağlayan A' noktasına A 'nın $\mathcal{K}$ çemberine göre *evirtimi* (*yansıması*, *inversiyonu*) denir. $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtim dönüşümü $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ ile gösterilir.



Şekil 2.1. Çembere göre evirtim

Bir A noktasının evirtimi A' ise A' noktasının evirtimi A noktası olur, yani $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}^2 = \text{Id}$ birim dönüşümüdür ve $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}^{-1} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ 'dır. Evirtim $\mathcal{K}$ çemberinin içindeki noktaları çemberin dışına, dışındaki noktaları ise içine gönderir; çemberin üzerindeki noktalar ise evirtim altında aynen kalır.

A noktasının evirtiminin geometrik olarak nasıl bulunacağını gösterelim. A noktası, $\mathcal{K}$ evirtim çemberinin dışında ise A noktasından $\mathcal{K}$ çemberine teğetleri çizelim



Şekil 2.2. A' noktasının bulunması

(Şekil 2.2). Bu teğetlerin $\mathcal{K}$ 'yi kestiği noktalar P ve Q olsun. P ve Q 'yi birleştiren doğrunun OA ışını kestiği B noktası A 'nın inversiyonudur. Şimdi bunu göstere-
lim. $\angle OBP$ ve $\angle OPA$ açıları dik ve O açısı ortak olduğundan $\triangle OBP$ ve $\triangle OPA$ dik
üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla

$$\frac{|OB|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OA|}$$

olur ve $|OP| = r$ olduğundan $|OA||OB| = r^2$ dir ve B , A 'nın inversiyonudur. Eğer
 A noktası $\mathcal{K}$ evirtim çemberinin içinde ise aynı adımlar ters sırada uygulanır. OA
ışınına A noktasından çizilen dik doğrunun $\mathcal{K}$ evirtim çemberini kestiği noktalar
 P ve Q olsun. P ve Q noktalarından evirtim çemberine çizilen teğetlerin kesişim
noktası A' noktası olur. Bunun açıklaması bir önceki durum ile aynıdır.

Evirtim O noktasında tanımlı değildir. Ayrıca evirtimi O olan bir nokta da yok-
tur. Öte yandan A noktası O 'ya yaklaşıırken A' noktası O 'dan sınırsız bir şekilde
uzaklaşmaktadır. Çünkü (2.1) eşitliğinde $|OA||OA'|$ çarpımı sabit r^2 sayısına eşittir
ve eğer $|OA|$ çok küçük ise $|OA'|$ çok büyük olmalıdır. O noktasının evirtiminin
olması için düzleme “ ∞ ” noktasını ekleyip

$$\hat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

genişletilmiş düzlemi oluşturulur ve

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(O) = \infty$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde A noktası O 'dan uzaklaştığında A' noktası O 'ya
yaklaşacağından

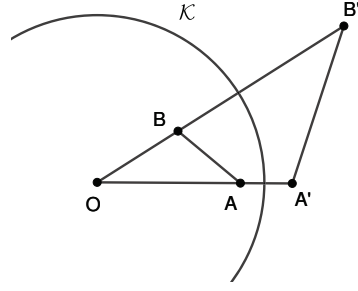
$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\infty) = O$$

olarak tanımlanır. Böylece

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}} : \hat{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^2$$

bire bir ve örten bir dönüşüm olur.

Önsav 2.2. $\mathcal{K}$, O merkezli r yarıçaplı çember, A ve B , O 'dan farklı iki nokta ve



Şekil 2.3. $\triangle OAB$ ve $\triangle OA'B'$ üçgenleri benzerdir.

$\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(A) = A'$, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(B) = B'$ olsun. $\triangle OAB$ ve $\triangle OA'B'$ üçgenleri benzerdir ve

$$|A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|} |AB| \quad (2.2)$$

dir.

Kanıt. (2.1) eşitliğinden $|OA||OA'| = r^2$ ve $|OB||OB'| = r^2$ olduğundan

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$$

olur (Şekil 2.3). Ayrıca $\angle O$ açısı ortak olduğundan kenar-açı-kenar özelliğinden $\triangle OAB$ ve $\triangle OA'B'$ üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla

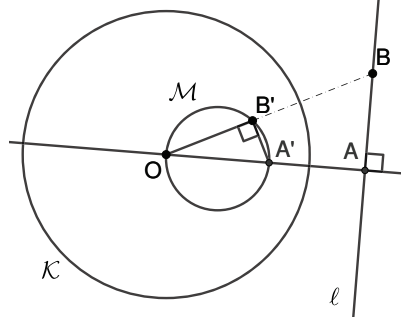
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OB'|}{|OA|}$$

dir. Diğer yandan (2.1) eşitliğinden $|OB'| = r^2/|OB|$ 'dir ve bu üstteki eşitlikte yerine yazılırsa istenen sonuç bulunur. $\square$

Şimdi doğruların ve çemberlerin evirtimlerini belirleyelim. Bu evirtimler doğru ya da çemberin evirtim merkezi O 'dan geçip geçmediğine göre ayrılırlar. Her doğrunun ∞ noktasını içerdiğini kabul edip önce doğruların evirtimine bakalım.

Önsav 2.3. *Evirtim merkezinden geçen bir doğrunun evirtimi kendisidir.*

Kanıt. Evirtim merkezi O ve ℓ , O 'dan geçen bir doğru olsun. A noktası ℓ üzerinde ise OA ışını da ℓ üzerindedir. Dolayısıyla A' noktası da ℓ üzerindedir. Yani evirtim ℓ doğrusunu, çemberin içinde kalan kısmı dışına, dışında kalan kısmı içine gelecek şekilde kendi üzerine gönderir. $\square$

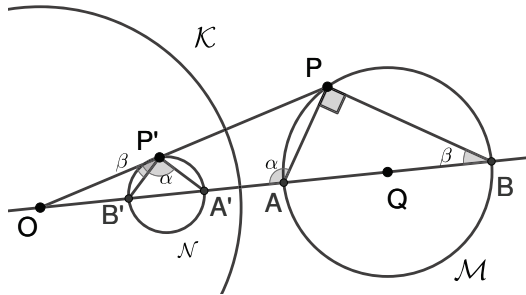


Şekil 2.4. Evirtim merkezinden geçmeyen doğrunun evirtimi

Önsav 2.4. *Evirtim merkezi O 'dan geçmeyen bir doğrunun evirtimi O 'dan geçen bir çemberdir.*

Kanıt. $\mathcal{K}$, O merkezli evirtim çemberi ve ℓ , O noktasından geçmeyen bir doğru olsun (Şekil 2.4). O noktasından ℓ doğrusuna çizilen dik, ℓ doğrusunu A noktasında kessin. A noktasının evirtimi A' olsun. OA' çaplı çembere $\mathcal{M}$ diyelim. ℓ doğrusunun evirtimi $\mathcal{M}$ çemberidir. Bunu görmek için herhangi bir $B \in \ell$ noktası alalım ve $B' \in \mathcal{M}$ olduğunu gösterelim. Önsav 2.2'den $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ olduğundan $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$ ve dolayısıyla B' noktası, OA' çaplı $\mathcal{M}$ çemberi üzerindedir. Burada ℓ doğrusu üzerindeki ∞ noktasının evirtimi O noktasıdır. $\square$

Şimdi çemberlerin evirtimine bakalım. Evirtimin tersi kendisi olduğu için, Önsav 2.4'ten, evirtim merkezinden geçen bir çemberin evirtimi bir doğru olur.



Şekil 2.5. Evirtimin merkezinden geçmeyen çemberin evirtimi

Önsav 2.5. *Evirtim merkezinden geçmeyen bir çemberin evirtimi bir çemberdir.*

Kanıt. $\mathcal{K}$, O merkezli evirtim çemberi, $\mathcal{M}$ ise Q merkezli O 'dan geçmeyen bir çember olsun (Şekil 2.5). OQ doğrusu $\mathcal{M}$ çemberini A ve B noktalarında kessin. Bu noktaların $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimleri A' ve B' olsun. $A'B'$ çaplı çembere $\mathcal{N}$ diyelim. $\mathcal{M}$ çemberinin evirtiminin $\mathcal{N}$ olduğunu gösterelim (Şekil 2.5). Önsav 2.2'den

$\triangle OAP$ ve $\triangle OP'A'$ üçgenleri benzer dolayısıyla $\angle OAP$ ve $\angle OP'A'$ açıları eşittir. Bu açılara α diyelim. Benzer şekilde $\triangle OBP$ ve $\triangle OP'B'$ üçgenleri de benzerdir ve dolayısıyla $\angle OBP = \angle OP'B'$ dir. Bu açılara da β diyelim. $\angle APB = 90^\circ$ olduğundan $\angle OAP$ dış açısı $\alpha = 90^\circ + \beta$ 'dir. Dolayısıyla $\angle B'P'A' = \alpha - \beta = 90^\circ$ 'dir ve P' noktası $A'B'$ çaplı $\mathcal{N}$ çemberi üzerindedir ve $\mathcal{M}$ çemberinin evirtimi $\mathcal{N}$ çemberidir. $\square$

Sonuç olarak bir doğru ya da çemberin evirtimi yine bir doğru ya da çemberdir. Bunu daha kısa ifade etmek için doğrular yarıçapı ∞ olan ya da ∞ noktasından geçen çemberler olarak alınıp doğru ve çember ailesinin elemanları genelleştirilmiş çember olarak adlandırılır. Böylece Önsav 2.3, 2.4 ve 2.5 kısaca genelleştirilmiş çemberlerin evirtimi genelleştirilmiş çemberlerdir olarak ifade edilebilir. Özel olarak çember ∞ noktasını içeriyorsa aslında bir doğrudur.

Kısalık açısından genelleştirilmiş çember yerine bazen çember ifadesini de kullanacağız. Yarıçapı sonlu çemberleri özel olarak belirtmek gerekirse bunlar için sonlu yarıçaplı çember diyeceğiz.

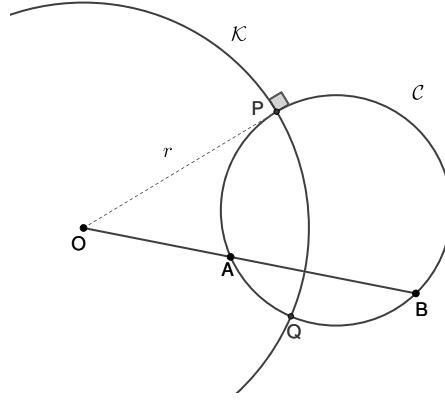
2.1. Dik Çemberler

$\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ çemberleri P noktasında kesişsin ve P noktasındaki teğetleri t_1 ve t_2 olsun. Eğer t_1 ve t_2 birbirine dik ise $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ çemberleri birbirine diktir denir ve $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$ şeklinde yazılır. Eğer $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$ ise t_1 teğeti $\mathcal{C}_2$ 'nin merkezinden ve t_2 teğeti $\mathcal{C}_1$ 'in merkezinden geçer. Bunun tersi de doğrudur. Yani çemberlerden birisinin kesişim noktasındaki teğeti diğerinin merkezinden geçiyor ise bu iki çember diktir.

Eğer bir ℓ doğrusu $\mathcal{C}$ çemberinin merkezinden geçiyorsa $\mathcal{C}$ 'ye diktir. Bunun tersi de doğrudur. Yani ℓ doğrusu ve $\mathcal{C}$ çemberi eğer ve ancak ℓ doğrusu $\mathcal{C}$ 'nin merkezinden geçiyorsa birbirine diktir.

Önsav 2.6. *Evirtim çemberine dik bir genelleştirilmiş çemberin evirtimi kendisidir.*

Kanıt. Evirtim çemberi $\mathcal{K}$ 'nin merkezi O ve yarıçapı r olsun. Önce çemberin sonlu yarıçaplı olduğu duruma bakalım. $\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{K}$ 'ya dik olsun ve $\mathcal{K}$ çemberini P, Q noktalarında kessin (Şekil 2.6). $\mathcal{C}$ üzerinde herhangi bir A noktası alalım. OA ışını $\mathcal{C}$ 'yi B 'de kessin. O noktasının $\mathcal{C}$ 'ye göre kuvveti $|OA||OB|$ 'dir. Diğer taraftan $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{K}$ dik olduğundan $\mathcal{C}$ 'nin P noktasındaki teğeti O 'dan geçer yani OP , P noktasında $\mathcal{C}$ 'ye teğettir. Yani O 'nun $\mathcal{C}$ 'ye göre kuvveti aynı zamanda $|OP|^2 = r^2$ 'dir. Dolayısıyla



Şekil 2.6. Dik çemberin evirtimi kendisidir.

$|OA||OB| = r^2$ ve $B = A' = \mathcal{I}_K(A)$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{C}$ üzerinde alınan her noktanın evirtimi yine $\mathcal{C}$ üzerindedir ve $\mathcal{I}_K(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ 'dir. Ek olarak $\mathcal{I}_K$, $\mathcal{C}$ çemberinin $\mathcal{K}$ içinde kalan kısmını $\mathcal{K}$ 'nın dışına, $\mathcal{K}$ 'nın dışında kalan kısmını ise $\mathcal{K}$ 'nın içine gelecek şekilde $\mathcal{C}$ çemberinin içini yine kendi üzerine gönderir.

Eğer $\mathcal{C}$ çemberi bir doğru ise $\mathcal{K}$ 'ya dik olduğundan $\mathcal{K}$ 'nın merkezinden geçer ve Önsav 2.3'ten evirtimi kendisidir. $\square$

Bu önsavın tersi de doğrudur. Yani evirtim altında aynı kalan bir çember $\mathcal{K}$ 'ya diktir. Aslında bundan çok daha zayıf bir şart yeterlidir. Eğer herhangi bir $A \in \mathcal{C}$ için $\mathcal{I}_K(A) = A' \in \mathcal{C}$ oluyorsa $\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{K}$ 'ya diktir.

Önsav 2.7. $\mathcal{K}$ bir çember ve $A \notin \mathcal{K}$ olsun. A ve $A' = \mathcal{I}_K(A)$ noktalarından geçen bir genelleştirilmiş çember $\mathcal{K}$ 'ya diktir.

Kanıt. $\mathcal{K}$ 'nın merkezi O ve yarıçapı r olsun. $\mathcal{C}$ genelleştirilmiş çemberi A ve A' noktalarından geçsin. Önce $A, A' \neq O, \infty$ durumuna bakalım. Eğer $\mathcal{C}$ bir doğru ise A, A' ve O noktaları doğrusal olduğundan $\mathcal{C}$ doğrusu O noktasından geçer ve dolayısıyla $\mathcal{K}$ 'ya diktir. Şimdi $\mathcal{C}$ 'nin sonlu yarıçaplı çember olduğu duruma bakalım. A ve A' noktalarının birisi $\mathcal{K}$ 'nın içinde diğeri dışında olduğundan $\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{K}$ 'yı bir P noktasında keser. O noktasının $\mathcal{C}$ 'ye göre kuvveti $|OA||OA'| = r^2 = |OP|^2$ olduğundan OP doğrusu $\mathcal{C}$ 'ye teğettir ve dolayısıyla $\mathcal{K}$ ile $\mathcal{C}$ birbirine diktir.

Eğer $A = \infty$ ise $A' = O$ 'dur ve $\mathcal{C}$ bir doğrudur. Bu doğru O 'dan geçtiği için $\mathcal{K}$ 'ya diktir. Eğer $A = O$ ise $A' = \infty$ 'dur ve açıklama aynıdır. $\square$

A noktasının evirtiminin geometrik olarak nasıl bulunacağı daha önce gösterilmişti. Şimdi ikinci bir yol gösterelim.

Önsav 2.8. $A \notin \mathcal{K}$ olsun. A noktasının $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan iki farklı genelleştirilmiş çemberin ikinci kesim noktasıdır.

Kanıt. Önsav 2.6'dan A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan genelleştirilmiş çemberler A' noktasından da geçer. Yani A' noktası her iki çember üzerindedir ve dolayısıyla ikinci kesim noktası A' 'dür. Özel olarak $A = O$ ya da ∞ ise her iki genelleştirilmiş çember de bir doğrudur. $\square$

Düzlemde genelleştirilmiş iki çemberin arakesiti en fazla iki noktadır. Ancak üst boyutlu uzaylarda iki kürenin arakesiti çok daha büyük olabilir ve A' noktasını belirlemek için iki kürenin arakesitine bakmak yeterli olmaz. Bu yüzden üstteki önsavı üst boyutlu uzaylara genelleşecek şekilde değiştirelim.

Önsav 2.9. $A \notin \mathcal{K}$ olsun. A noktasının $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş çemberlerin ikinci arakesit noktasıdır.

Kanıt. Önsav 2.6'dan A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş çemberler A' noktasından da geçeceği için ispat öncekiyle aynıdır. $\square$

2.2. Doğruya Göre Yansımalar

ℓ düzlemde bir doğru olsun. ℓ doğrusu üzerindeki noktaların ℓ 'ye göre yansımaları kendisidir. $P \in \mathbb{R}^2$, ℓ üzerinde olmayan bir nokta ise P noktasının ℓ doğrusuna göre yansımaları P noktasından ℓ doğrusuna indirilen dikmenin doğrunun diğer tarafına eşit miktarda uzatılması ile elde edilen P' noktasıdır. ℓ doğrusuna göre yansımalar $\mathcal{R}_\ell$ ile gösterilir. $P = \infty$ ise $\mathcal{R}_\ell(\infty) = \infty$ olarak tanımlanır.

Yukarıda çembere göre evirtim için gösterilen özelliklerin benzerleri doğruya göre yansımalar için de geçerlidir. İleride üst boyutlu uzaylarda hiperdüzlemlere göre yansımaların analitik ifadelerini ve özelliklerini detaylı olarak inceleyip ispatlayacağız. Şimdilik düzlemde doğrulara göre yansımalar ile ilgili geometrik olarak açık bazı özellikleri ifade edelim.

$\mathcal{R}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bire bir ve örtendir ve $\mathcal{R}_\ell^2 = \text{Id}$ 'dir. $\mathcal{R}_\ell$ uzaklık koruyan bir dönüşümdür (izometri) ve dolayısıyla açı korur. Doğru ve çemberlerin yansımaları yine bir doğru ve çemberdir. Önsav 2.6, 2.7, 2.8 ve 2.9'da çembere göre yansımalar için gösterilen özellikler doğrulara göre yansımalar için de geçerlidir. ℓ doğrusuna dik bir doğru ya da çemberin yansımaları yine kendisidir. P ve $P' = \mathcal{R}_\ell(P)$ noktalarından

geçen bir doğru ya da çember ℓ 'ye diktir. P noktasının ℓ doğrusuna göre yansıması P noktasından geçen ve ℓ 'ye dik olan iki (ya da tüm) çember ya da doğrunun diğer kesim noktasıdır. Yani Önsav 2.6, 2.7, 2.8 ve 2.9 yansıma çemberi $\mathcal{K}$ genelleştirilmiş çember iken de doğrudur.

İleride üst boyutlara da genelleştireceğimiz ve bir noktanın yansımasının belirlenmesini de sağlayan bu özellikleri bir önerme olarak ifade edelim.

Önerme 2.10. $\mathcal{K}$ genelleştirilmiş bir çember, $A \in \hat{\mathbb{R}}^2$ ve A noktasının $\mathcal{K}$ 'ya göre yansıması A' olsun.

1. Eğer $A \in \mathcal{K}$ ise $A' = A$ olur.

2. Eğer $A \notin \mathcal{K}$ ise

(i) A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan her genelleştirilmiş çember A' noktasından da geçer.

(ii) A ve A' noktalarından geçen her genelleştirilmiş çember $\mathcal{K}$ 'ya diktir.

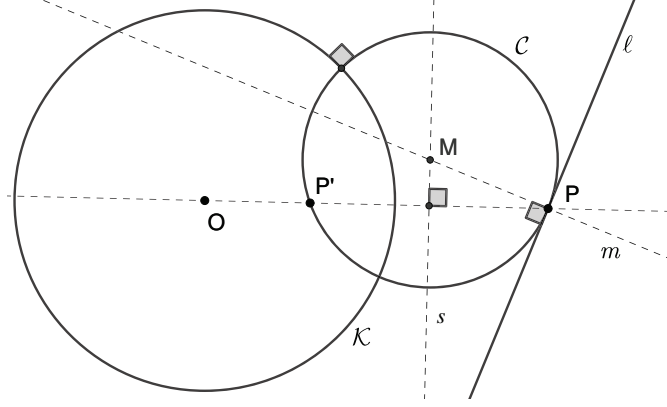
(iii) A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş çemberlerin arakesiti $\{A, A'\}$ kümesidir. Yani A' noktası A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş çemberlerin ikinci arakesit noktasıdır.

2.3. Açık Korunumu

γ_1 ve γ_2 düzlemde P noktasında kesişen iki eğri ve bu iki eğrinin P noktasındaki teğetleri t_1 ve t_2 olsun. γ_1 ve γ_2 eğrileri arasındaki açı, t_1 ve t_2 teğetleri arasındaki açı olarak tanımlanır. $U \subset \mathbb{R}^2$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir dönüşüm olsun. Eğer f , P noktasından geçen eğriler arasındaki açıyı koruyor ise yani γ_1 ve γ_2 arasındaki P noktasındaki açı ile $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ arasındaki $f(P)$ noktasındaki açı aynı ise f , P noktasında açıyor bir dönüşümdür denir. Eğer f tanım kümesindeki her noktada açı koruyor ise f 'ye açıyor dönüşüm denir. Bazı kaynaklarda açı koruyan dönüşümler, açının yönünün korunup korunmamasına göre ikiye ayrılır. Bu tezde bu ayrımı yapmayacağız.

Doğruya göre yansıma açı koruyan bir dönüşümdür. Benzer şekilde çembere göre yansıma da açı korur. Bunu görmek için önce bir önsav gösterelim.

$\mathcal{K}$ bir çember olsun. P noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ çemberine dik sonsuz tane çember vardır. Ancak hem $\mathcal{K}$ çemberine dik olan hem de P noktasında verilen bir ℓ doğrusuna teğet olan tek bir çember vardır.



Şekil 2.7. ℓ doğrusuna teğet, $\mathcal{K}$ çemberine dik çember

Önsav 2.11. $\mathcal{K}$ bir çember ve ℓ , P noktasından geçen bir doğru olsun. $\mathcal{K}$ çemberine dik olan ve ℓ doğrusuna P noktasında teğet olan bir tek $\mathcal{C}$ genelleştirilmiş çemberi vardır.

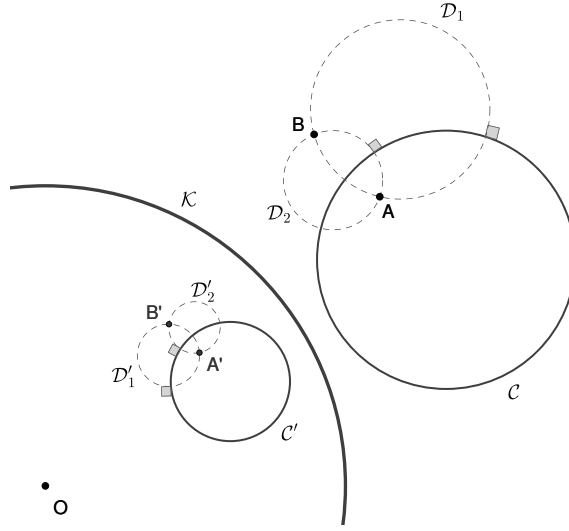
Kanıt. Eğer ℓ doğrusu O noktasından geçiyorsa aranan $\mathcal{C}$ çemberi ℓ doğrusunun kendisidir. $O \notin \ell$ durumuna bakalım. Bu durumda $P \neq O$ 'dur. ℓ doğrusuna P noktasında dik olan doğruya m diyelim. P 'nin $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi P' , ve P ile P' 'nin orta dikmesi s doğrusu olsun. m ile s 'nin kesim noktası M olsun. M merkezli ve P noktasından geçen $\mathcal{C}$ çemberi aranan çemberdir. $\mathcal{C}$ çemberi P ve P' 'den geçtiği için Önsav 2.7'den $\mathcal{C} \perp \mathcal{K}$ 'dir ve $MP \perp \ell$ olduğundan ℓ doğrusu P noktasında $\mathcal{C}$ 'ye teğettir. $\square$

Önerme 2.12. Çembere göre evirtim açısı koruyan bir dönüşümdür.

Kanıt. $\mathcal{K}$ evirtim çemberi, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ evirtim dönüşümü ve γ_1 ile γ_2 , P noktasında kesişen iki eğri olsun. γ_1 ve γ_2 'nin P noktasındaki teğetleri t_1, t_2 ve bu iki teğet arasındaki açı θ olsun. Önsav 2.11'den P noktasında teğeti t_1 (t_2) ve $\mathcal{K}$ çemberine dik olan bir $\mathcal{C}_1$ ($\mathcal{C}_2$) genelleştirilmiş çemberi vardır ve $\mathcal{C}_1$ ile $\mathcal{C}_2$ arasındaki açı θ 'dır. $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(P)$ noktasında $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\gamma_1)$ ve $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\gamma_2)$ arasındaki açı ile $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1)$ ve $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_2)$ arasındaki açı aynıdır. Diğer yandan Önsav 2.6'dan $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$ 'dir. Kesişen iki çember arasındaki açı her iki kesim noktasında da aynı olduğundan $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(P)$ noktasında $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1)$ ile $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_2)$ arasındaki açı θ 'dır. Dolayısıyla $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\gamma_1)$ ve $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\gamma_2)$ arasındaki açı da θ 'dır. $\square$

2.4. Simetri İlkesi

$\mathcal{K}$ genelleştirilmiş bir çember olsun. Eğer $A \in \hat{\mathbb{R}}^2$ noktasının $\mathcal{K}$ çemberine göre yansıması B noktası ise A ve B noktaları $\mathcal{K}$ çemberine göre simetriktir denir. $\mathcal{K}$



Şekil 2.8. Simetri ilkesi

çemberi üzerindeki noktaların, ve sadece bu noktaların, simetriği kendisidir. İleride simetri ilkesini özellikle ∞ noktası için kullanacağımızdan bu noktaya özel olarak bakalım. Eğer $\mathcal{K}$ çemberi bir doğru ise ∞ noktasının simetriği ∞ , yani kendisidir. Eğer $\mathcal{K}$, O merkezli sonlu yarıçaplı bir çember ise ∞ noktasının simetriği O noktasıdır.

Önerme 2.10'dan birbirinden farklı A ve B noktalarının $\mathcal{K}$ çemberine göre simetrik olmaları için gerek ve yeter şart A noktasından geçen ve $\mathcal{K}$ 'ya dik olan tüm çemberlerin B noktasından da geçmesidir.

Şimdi yansımaların simetriyi koruduğunu gösterelim.

Önerme 2.13. $A, B \in \hat{\mathbb{R}}^2$ noktaları $\mathcal{C}$ genelleştirilmiş çemberine göre simetrik olsun. A, B ve $\mathcal{C}$ 'nin $\mathcal{K}$ genelleştirilmiş çemberine göre yansımaları $A', B', \mathcal{C}'$ ise A' ve $B', \mathcal{C}'$ 'ye göre simetriktir.

Kanıt. Eğer $A = B$, yani A 'nın simetriği kendisi ise bu nokta $\mathcal{C}$ üzerindedir ve $A' = B', \mathcal{C}'$ üzerinde yer alacağından önerme doğrudur.

$A \neq B$ olsun. A' noktasından geçen ve $\mathcal{C}'$ çemberine dik olan herhangi bir $\mathcal{D}'$ genelleştirilmiş çemberi alalım. $\mathcal{D}'$ 'nin $\mathcal{K}$ 'ya göre yansıması $\mathcal{D}$ olsun. $A \in \mathcal{D}'$ dir ve açı korunumundan $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}'$ 'ye dik bir genelleştirilmiş çemberdir. A 'nın $\mathcal{C}'$ 'ye göre simetriği B olduğundan $B \in \mathcal{D}'$ dir. Dolayısıyla $B' \in \mathcal{D}'$ dür. A' noktasından geçen ve $\mathcal{C}'$ 'ye dik olan her $\mathcal{D}'$ çemberi B' noktasından da geçtiği için A' noktasının $\mathcal{C}'$ 'ye göre simetriği B' noktasıdır. $\square$

3. UZAYDA YANSIMALAR

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ ve $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Öklid uzayının iç çarpımı ve

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Öklid uzayının normu olsun. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için x ve y arasındaki Öklid uzaklığı $|x-y|$ 'dir.

$a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\langle x, a \rangle = t$ eşitliği a vektörüne dik $(n-1)$ boyutlu bir hiperdüzlem belirler. Bu hiperdüzlemi

$$\mathcal{P}(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = t\}$$

ile göstereceğiz ve kısalık açısından bazen de düzlem olarak adlandıracacağız. $x \in \mathbb{R}^n$ noktasının $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemine göre yansıması, x noktasından düzleme indirilen dikme düzlemin diğer tarafına eşit miktarda uzatıldığında elde edilen x' noktasıdır. Şimdi x' noktasını belirleyelim. a vektörü düzleme dik olduğundan $x' - x, a$ 'ya paraleldir, yani uygun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$x' = x + \lambda a$$

dır. $(x' + x)/2$ noktasının $\mathcal{P}(a, t)$ düzleminde olduğu kullanılarak λ sayısı bulunabilir:

$$t = \left\langle \frac{x' + x}{2}, a \right\rangle = \left\langle \frac{x + \lambda a + x}{2}, a \right\rangle$$

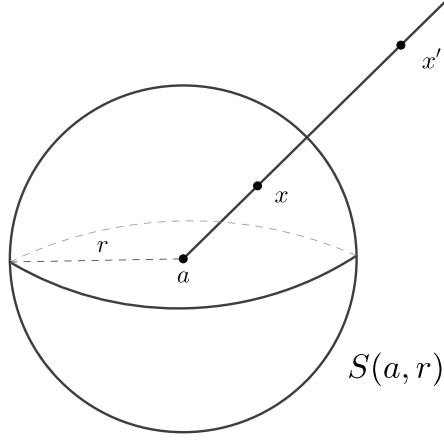
eşitliğinden

$$\lambda = \frac{2(t - \langle x, a \rangle)}{|a|^2}$$

olur ve $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemine göre yansıma dönüşümü $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$ ile gösterilirse

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}(x) = x - 2(\langle x, a \rangle - t) \frac{a}{|a|^2}$$

olduğu görülür. $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ yansıma dönüşümü bire bir ve örtendir. $\mathcal{P}(a, t)$



Şekil 3.1. $S(a, r)$ küresine göre evirtim

düzlemi üzerindeki noktaların yansıması kendisidir. Yani $x \in \mathcal{P}(a, t)$ ise $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}(x) = x$ 'tir ve yansıması kendisi olan noktalar sadece $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemi üzerindeki noktalardır. x noktasının yansıması x' ise x' noktasının yansıması x 'tir. Yani $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}^2 = \text{Id}$ ve $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$ 'dir.

Önceki bölümde incelediğimiz düzlemde bir çembere göre yansıma dönüşümü üst boyutlu uzaylara genelleştirilebilir. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere a merkezli, r yarıçaplı açık yuvarı

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\},$$

kapalı yuvarı

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$$

ile ve a merkezli, r yarıçaplı küreyi

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

ile gösterelim. Özel olarak orijin $0 = (0, \dots, 0)$ merkezli ve 1 yarıçaplı yuvar birim yuvar olarak adlandırılır ve $\mathbb{B} = B(0, 1)$ ile gösterilir. Benzer şekilde birim küre $\mathbb{S} = S(0, 1)$ ile gösterilir.

$S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ bir küre $x \in \mathbb{R}^n$, a 'dan farklı bir nokta olsun. Başlangıcı a olan ve x noktasından geçen ışın üzerinde yer alan ve

$$|x - a||x' - a| = r^2 \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlayan $x' \in \mathbb{R}^n$ noktasına x noktasının $S(a, r)$ küresine göre yansıması, evirtimi ya da inversiyonu denir ve $x' = \mathcal{I}_{S(a, r)}(x)$ ile gösterilir (Şekil 3.1). $\mathcal{I}_{S(a, r)}$ dönüşümü $S(a, r)$ küresinin içini dışına, dışını ise içine gönderir. $S(a, r)$ küresi üzerindeki bir noktanın evirtimi kendisidir. x noktasının evirtimi x' ise x' noktasının evirtimi x 'dir. Yani $\mathcal{I}_{S(a, r)}^2 = \text{Id}$ ya da $\mathcal{I}_{S(a, r)}^{-1} = \mathcal{I}_{S(a, r)}$ 'dir.

Kürenin merkezi olan a noktasının evirtimi (3.1) eşitliği ile bulunamaz. Ancak (3.1)' den kolaylıkla görüleceği üzere x noktası a 'ya yaklaşıırken, x' noktası a 'dan sınırsız bir şekilde uzaklaşmaktadır ve tersine x noktası a 'dan sınırsız bir şekilde uzaklaşıırken x' noktası a 'ya yaklaşmaktadır. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ uzayına “ ∞ ” ile gösterilen yeni bir nokta ekleyip

$$\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

genişletilmiş uzayı oluşturalım ve

$$\mathcal{I}_{S(a, r)}(a) = \infty, \quad \mathcal{I}_{S(a, r)}(\infty) = a$$

olarak tanımlayalım. Böylece $\mathcal{I}_{S(a, r)} : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ bire bir, örten ve tersi kendisi olan bir dönüşümdür.

Şimdi $\mathbb{S}$ birim küresine göre evirtiminin analitik ifadesini bulalım. $x' = \mathcal{I}_{\mathbb{S}}(x)$ noktası 0'dan başlayan x noktasından geçen ışın üzerinde olduğundan $x' = kx$, $k \geq 0$ 'dır. (3.1)'de $a = 0, r = 1$ alınırsa $|x||x'| = k|x|^2 = 1$ ve buradan $k = 1/|x|^2$ bulunur. Yani $\mathcal{I}_{\mathbb{S}}(x) = x/|x|^2$ 'dir. İleride sıklıkla kullanacağımız bu ifadeyi x^* ile gösterelim, yani

$$x^* := \frac{x}{|x|^2} = \mathcal{I}_{\mathbb{S}}(x) \quad (3.2)$$

olsun. Şimdi genel bir $S(a, r)$ kümesine göre yansımanın analitik ifadesini bulalım.

Önsav 3.1. $x \in \mathbb{R}^n, x \neq a$ için

$$\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} = a + r^2(x - a)^*$$

olur.

Kanıt. $x' = \mathcal{I}_{S(a, r)}(x)$ noktası a 'da başlayan x noktasından geçen ışın üzerinde olduğundan öyle $k \geq 0$ vardır ki $x' - a = k(x - a)$ olur. Bu eşitlik (3.1)'de yerine konursa

$k = r^2/|x - a|^2$ olduğu görülür. $\square$

Sonuç olarak $a \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere $S(a, r)$ küresine göre yansıma dönüşümü $\mathcal{I}_{S(a, r)} : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ aşağıdaki formülle belirlenir.

$$\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = \begin{cases} a + r^2(x - a)^*, & x \neq a, \infty, \\ \infty, & x = a, \\ a, & x = \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Benzer şekilde hiperdüzlemlere göre yansıma da ∞ noktasının görüntüsü ∞ alınarak $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'ye genişletilir. Tüm hiperdüzlemlere ∞ noktasını katarak

$$\mathcal{P}(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = t\} \cup \{\infty\}$$

olarak alalım ve $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)} : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ yansıma dönüşümünü

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}(x) = \begin{cases} x - 2(\langle x, a \rangle - t)a^*, & x \neq \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases} \quad (3.4)$$

olarak tanımlayalım.

Üst boyutlu uzaylarda kürelere göre evirtim daha önce gördüğümüz düzlemde çemberlere göre evirtime indirgenebilir. Şöyle ki $S(a, r)$ evirtim küresi ve Π_2 , a noktasından geçen 2 boyutlu bir düzlem olsun. $S(a, r)$ küresi ve Π_2 düzleminin arakesiti bir çemberdir. Bu çembere $\mathcal{K}$ dersek Π_2 düzlemindeki noktaların $S(a, r)$ kümesine göre evirtimi ile $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi aynıdır. Yani $x \in \Pi_2$ için

$$\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x)$$

olur. Bunu bir önsav olarak ifade edelim.

Önsav 3.2. $S(a, r)$ evirtim küresi ve Π_2 , a noktasından geçen 2 boyutlu bir düzlem ve $\Pi_2 \cap S(a, r) = \mathcal{K}$ çemberi olsun. $x \in \Pi_2$ için $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x)$ olur.

Bu önsavın ilk uygulaması olarak (2.2) eşitliğinin üst boyutlu uzaylarda da doğru olduğunu gösterelim.

Önsav 3.3. $S(a, r)$ evirtim küresi, x ve y , a 'dan farklı iki nokta olsun. $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = x'$, $\mathcal{I}_{S(a, r)}(y) = y'$ ise

$$|y' - x'| = \frac{r^2}{|x - a||y - a|} |y - x|$$

olur.

Kanıt. Π_2 , a , x ve y noktalarından geçen 2 boyutlu bir düzlem olsun. x' noktası a ve x 'i birleştiren ışın üzerinde olduğundan x' , Π_2 düzleminindedir. Benzer şekilde y' noktası da Π_2 düzleminindedir. $\Pi_2 \cap S(a, r) = \mathcal{K}$ çemberi olsun. $\mathcal{K}$ çemberi a merkezli ve r yarıçaplıdır. Önsav 3.2'den $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x) = \mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = x'$ ve benzer şekilde $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(y) = y'$ olur. $\mathcal{K}$ çemberi ve a , x , x' , y , y' noktalarının hepsi Π_2 düzleminde yer aldığından (2.2) eşitliğinden

$$|y' - x'| = \frac{r^2}{|x - a||y - a|} |y - x|$$

olduğu görülür. □

Şimdi hiperdüzlemlerin ve kürelerin evirtimlerini bulalım.

Teorem 3.4. (i) *Evirtim merkezinden geçen bir hiperdüzlemin evirtimi bir hiperdüzlemdir.*

(ii) *Evirtim merkezinden geçmeyen bir hiperdüzlemin evirtimi evirtim merkezinden geçen bir küredir.*

(iii) *Evirtim merkezinden geçen bir kürenin evirtimi bir hiperdüzlemdir.*

(iv) *Evirtim merkezinden geçmeyen bir kürenin evirtimi bir küredir.*

Kanıt. Evirtim küresi $S(a, r)$ olsun.

(i) $\mathcal{P}$ hiperdüzlemi a noktasından geçiyorsa her $x \in \mathcal{P}$ için a ve x 'i birleştiren ışın $\mathcal{P}$ düzlemi üzerinde ve dolayısıyla $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) \in \mathcal{P}$ 'dir.

(ii) $\mathcal{P}$, a noktasından geçmeyen bir hiperdüzlem olsun. a noktasından $\mathcal{P}$ hiperdüzlemine indirilen dikme $\mathcal{P}$ 'yi h noktasında kessin ve h 'nin evirtimi h' olsun. $\mathcal{P}$ 'nin evirtimi ah' çaplı $\mathcal{T}$ küresidir. Bunu görmek için $x \in \mathcal{P}$ alalım. a , h ve x noktalarından geçen 2 boyutlu düzlem Π_2 , $S(a, r) \cap \Pi_2 = \mathcal{K}$ çemberi ve $\mathcal{P} \cap \Pi_2 = \ell$ doğrusu olsun. Önsav 3.2'den ℓ doğrusunun $S(a, r)$ küresine göre evirtimi ile $\mathcal{K}$ çemberine

göre evirtimi aynıdır. Önsav 2.4'ten ℓ doğrusunun $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi Π_2 düzleminde ah' çaplı çemberdir. Bu çember $\mathcal{T} \cap \Pi_2$ olduğundan $\mathcal{I}_{S(a,r)}(x) \in \mathcal{T}$ 'dir.

(iii) Evirtimin tersi kendisi olduğu için bu kısım (ii) durumunun bir sonucudur.

(iv) $S(b, \rho)$, a noktasından geçmeyen bir küre olsun. a ve b merkezlerini birleştiren doğru $S(b, \rho)$ küresini y ve z noktalarında kessin ve bu noktaların evirtimi y' ve z' olsun. $S(b, \rho)$ küresinin evirtimi $y'z'$ çaplı $\mathcal{T}$ küresidir. Bunu görmek için bir $x \in S(b, \rho)$ noktası alalım. a ve b merkezleri ile x noktasından geçen 2 boyutlu düzlem Π_2 ve $S(a, r) \cap \Pi_2 = \mathcal{K}$ ve $S(b, \rho) \cap \Pi_2 = \mathcal{C}$ çemberleri olsun. x noktası $\mathcal{C}$ çemberi üzerindedir. a ve b 'yi birleştiren doğru Π_2 düzleminde olduğundan y, z ve y', z' noktaları da Π_2 düzleminde. Önsav 3.2'den $\mathcal{C}$ çemberinin $S(a, r)$ küresine göre evirtimi ile $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi aynıdır. Diğer taraftan Önsav 2.5'den $\mathcal{C}$ çemberinin $\mathcal{K}$ çemberine göre evirtimi Π_2 düzleminde $y'z'$ çaplı çemberdir. Dolayısıyla x noktasının evirtimi $y'z'$ çaplı küre üzerinde yani $\mathcal{I}_{S(a,r)}(x) \in \mathcal{T}$ 'dir. $\square$

Hiperdüzlemleri yarıçapı ∞ olan ya da ∞ noktasından geçen küreler olarak alıp küre ve hiperdüzlemlerin oluşturduğu ailenin elemanlarına genelleştirilmiş küre diyelim. Böylece Teorem 3.4'ü kısaca genelleştirilmiş kürelerin bir küreye göre evirtimi yine bir genelleştirilmiş küredir olarak ifade edebiliriz. Özel olarak küre ∞ noktasından geçiyorsa aslında hiperdüzlemdir.

Benzer bir durum hiperdüzlemlere göre yansıma için de geçerlidir. Sonlu yarıçaplı bir kürenin bir hiperdüzleme göre yansıması aynı yarıçaplı bir küre ve bir hiperdüzlemin bir hiperdüzleme göre yansıması yine bir hiperdüzlemdir. Tüm bunları bir sonuç olarak şöyle ifade edebiliriz.

Sonuç 3.5. *Genelleştirilmiş bir kürenin genelleştirilmiş bir küreye göre yansıması yine genelleştirilmiş bir küredir.*

3.1. Dik Küreler

Bu bölümde iki genelleştirilmiş kürenin birbirine dik olmasını inceleyeceğiz ve bu durumda kürelerden birinin diğerine göre yansımasının yine kendisi olduğunu göstereceğiz. Bunu kullanarak Önerme 2.10'u üst boyutlara genelleştirerek bir noktanın bir genelleştirilmiş küreye göre yansımasını karakterize edeceğiz. Önce sonlu yarıçaplı kürelere göre yansılara bakalım.

$S(a, r)$ ve $S(b, \rho)$ küreleri p noktasında kesişsin. Eğer bu iki kürenin p noktasındaki normalleri birbirine dik ise bu iki küre birbirine diktir denir. $S(a, r)$ küresinin p noktasındaki normali $p - a$ vektörü olduğu için $S(a, r)$ ve $S(b, \rho)$ küreleri ancak ve ancak $(p - a) \perp (p - b)$ ise birbirine diktir.

Diğer yandan bir $S(a, r)$ küresi ile bir $\mathcal{P}$ düzleminin dik oması için gerek ve yeter şart $\mathcal{P}$ düzleminin $S(a, r)$ küresinin merkezi olan a noktasından geçmesidir.

Önsav 3.6. *Evirtim küresine dik olan bir genelleştirilmiş kürenin evirtimi kendisidir.*

Kanıt. Evirtim küresi $S(a, r)$ olsun. Önce sonlu yarıçaplı kürelere bakalım. $S(b, \rho) \perp S(a, r)$ ve $x \in S(b, \rho)$ olsun. Π_2 , a , b ve x noktalarından geçen 2 boyutlu bir düzlem olsun. $S(a, r) \cap \Pi_2 = \mathcal{K}$ ve $S(b, \rho) \cap \Pi_2 = \mathcal{C}$ çemberleri olsun. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{C}$ çemberleri p noktasında kesişsin. $(p - a) \perp (p - b)$ olduğundan $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{C}$ çemberleri birbirine diktir ve Önsav 2.6'dan $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x) \in \mathcal{C}'$ 'dir. Önsav 3.2'den $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x) = \mathcal{I}_{S(a, r)}(x)$ olduğundan $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) \in \mathcal{C}$, yani $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) \in S(b, \rho)$ 'dur.

Eğer $\mathcal{P}$ hiperdüzlemi $S(a, r)$ küresine dik ise a noktasından geçer ve Teorem 3.4 (i)'den evirtimi kendisidir. $\square$

Bu önsavın tersi de doğrudur; evirtimi kendisi olan bir küre evirtim küresine diktir. Ancak bu sonuç çok daha zayıf bir şart altında da doğrudur.

Önsav 3.7. *$x \notin S(a, r)$ ve x noktasının $S(a, r)$ küresine göre evirtimi x' olsun. x ve x' noktalarından geçen bir genelleştirilmiş küre $S(a, r)$ küresine diktir.*

Kanıt. Önce genelleştirilmiş kürenin hiperdüzlem olduğu duruma bakalım. x ve x' noktalarından geçen bir hiperdüzlem, x , x' ve a noktaları doğrusal olduğundan, a noktasından da geçer ve dolayısıyla $S(a, r)$ 'ye diktir.

Şimdi sonlu yarıçaplı kürelere bakalım. $S(b, \rho)$ küresi x ve x' noktalarından geçsin. $\mathcal{I}_{S(a, r)}(x) = x'$ olduğundan a , x ve x' noktaları doğrusaldır. Π_2 , a , b , x ve x' noktalarından geçen 2 boyutlu bir düzlem olsun. $S(a, r) \cap \Pi_2 = \mathcal{K}$ ve $S(b, \rho) \cap \Pi_2 = \mathcal{C}$ çemberleri olsun. Önsav 3.2'den $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(x) = x'$ 'dür ve $x, x' \in \mathcal{C}$ olduğundan Önsav 2.7'den $\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{K}$ çemberine diktir. Bu iki çember q noktasında kesişsin. $\mathcal{C} \perp \mathcal{K}$ olduğundan $(q - a) \perp (q - b)$ olur ve dolayısıyla $S(a, r)$ ve $S(b, \rho)$ küreleri birbirine diktir. $\square$

Şimdi bir $\mathcal{P}$ hiperdüzlemine göre yansımaya bakalım. Eğer bir $S(a, r)$ küresi $\mathcal{P}$ 'ye dik ise $\mathcal{P}$ düzlemi kürenin merkezinden geçer ve kürenin $\mathcal{P}$ 'ye göre yansıması kendisidir. Eğer bir $\tilde{\mathcal{P}}$ hiperdüzlemi $\mathcal{P}$ 'ye dik ise $x \in \tilde{\mathcal{P}}$ noktasından $\mathcal{P}$ 'ye indirilen dikme $\tilde{\mathcal{P}}$ düzleminde kalır ve x 'in $\mathcal{P}$ 'ye göre yansıması yine $\tilde{\mathcal{P}}$ düzleminde kalır. Dolayısıyla $\mathcal{P}$ 'ye dik bir hiperdüzlemin yansıması kendisidir. Yani Önsav 3.6 yansıma küresi bir hiperdüzlem olduğunda da doğrudur. Benzer şekilde Önsav 3.7'de de yansıma küresi bir hiperdüzlem olabilir. x noktasının $\mathcal{P}$ hiperdüzlemine göre yansıması x' olsun. Eğer bir $S(a, r)$ küresi hem x , hem de x' noktasından geçiyorsa merkezi $\mathcal{P}$ hiperdüzlemi üzerindedir ve $\mathcal{P}$ 'ye diktir. Son olarak eğer bir $\tilde{\mathcal{P}}$ hiperdüzlemi hem x , hem de x' 'den geçiyorsa, $x - x'$ vektörü $\mathcal{P}$ 'nin normali olur ve $\tilde{\mathcal{P}}$ düzlemi $\mathcal{P}$ 'ye diktir.

Bu özellikleri bir önerme halinde birleştirelim ve ek olarak Önerme 2.10 2.(iii)'de olduğu gibi bir x noktasının yansımasını karakterize eden bir özellik de verelim. Aşağıdaki önerme Önerme 2.10'un üst boyutlara genellemesidir.

Önerme 3.8. Σ genelleştirilmiş bir küre, $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ ve x noktasının Σ 'ya göre yansıması x' olsun.

1. Eğer $x \in \Sigma$ ise $x' = x$ 'dir.
2. Eğer $x \notin \Sigma$ ise
 - (i) x noktasından geçen ve Σ 'ya dik olan her genelleştirilmiş küre x' noktasından da geçer.
 - (ii) x ve x' noktalarından geçen her her genelleştirilmiş küre Σ 'ya diktir.
 - (iii) x noktasından geçen ve Σ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş kürelerin arakesiti $\{x, x'\}$ kümesidir. Yani x' noktası x noktasından geçen ve Σ 'ya dik olan tüm genelleştirilmiş kürelerin ikinci arakesit noktasıdır.

4. BİRİM YUVARI KORUYAN EVİRTİMLER

Bu bölümde birim yuvar $\mathbb{B} = B(0, 1)$ ve birim küre $\mathbb{S} = S(0, 1)$ 'yi koruyan evirtimleri belirleyeceğiz.

Varsayalım ki $b \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve ρ yarıçaplı $S(b, \rho)$ küresine göre evirtim birim yuvar ve küreyi korusun, yani $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$ ve $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ olsun. Bu durumda Önsav 3.7'den $\mathbb{S}$ ve $S(b, \rho)$ küreleri birbirine diktir. Dolayısıyla p noktası bu iki kürenin bir kesim noktası ise $\triangle 0pb$ üçgeni dik üçgendir ve

$$|b|^2 = 1 + \rho^2 \quad (4.1)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten $|b| > 1$ olması gerektiği, yani b merkezinin birim yuvarın dışında olduğu da görülmektedir. Bu şartlar gerekli olduğu gibi yeterlidir de, yani merkezi birim yuvarın dışında bir b noktası ve yarıçapı $\rho = \sqrt{|b|^2 - 1}$ olan her $S(b, \rho)$ küresi $\mathbb{S}$ 'ye diktir ve dolayısıyla Önsav 3.6'dan $\mathbb{S}$ ve $\mathbb{B}$ 'yi korur. Sonuç olarak bir $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}$ evirtiminin $\mathbb{S}$ ve $\mathbb{B}$ 'yi koruması için gerek ve yeter şartların

$$\begin{aligned} (i) \quad & |b| > 1 \\ (ii) \quad & \rho = \sqrt{|b|^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

olduğunu göstermiş olduk. Bu iki şartın sağlandığı bir $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}$ evirtimi için $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$ olduğundan orijinin görüntüsü birim kürenin içindedir. Bu noktaya a diyelim, yani

$$\mathcal{I}_{S(b, \rho)}(0) =: a$$

olsun. (4.2) şartlarını a noktası üzerinden yazmak daha kullanışlıdır. Öncelikle a ve b noktaları arasındaki ilişkiyi belirleyelim. 0 , a ve b doğrusal ve a noktası 0 ile b arasında olduğundan $a = kb$, $0 < k < 1$ olmalıdır. $\mathcal{I}_{S(b, \rho)}(0) = a$ olduğundan (3.1) eşitliğinden

$$|0 - b||a - b| = \rho^2$$

dir. Burada $|a - b| = |kb - b| = |b|(1 - k)$ ve ρ^2 , (4.1) ile belirlendiğinden

$$|b|^2(1 - k) = |b|^2 - 1$$

ve $k = 1/|b|^2$ bulunur. Yani $a = b/|b|^2 = b^*$ ve dolayısıyla $b = (b^*)^* = a^*$ ve

$$\rho = \sqrt{|b|^2 - 1} = \sqrt{|a^*|^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1} = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{|a|}$$

dir. Sonuç olarak birim yuvar ve birim küreyi koruyan bir evirtim için, 0 noktasının görüntüsü a ise, evirtim küresinin merkezinin a^* ve yarıçapının $\sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ olduğunu göstermiş olduk. Bunu bir önsav olarak ifade edelim ve bu evirtimler için özel bir gösterim kullanalım.

Tanım 4.1. $a \in \mathbb{B}$ ve $a \neq 0$ olsun. a^* merkezli ve

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{|a|} \quad (4.3)$$

yarıçaplı $S(a^*, \rho)$ küresine göre evirtimi $\psi_a := \mathcal{I}_{S(a^*, \rho)}$ ile gösterelim.

Önsav 4.2. $a \in \mathbb{B}$ ve $a \neq 0$ olsun. ψ_a birim küre ve birim yuvarı korur ve 0 ile a noktalarının yerlerini değiştirir. Ayrıca birim küreyi ve birim yuvarı koruyan her evirtim ψ_a ($a \in \mathbb{B}, a \neq 0$) formundadır.

ψ_a evirtimleri birim yuvarı koruyan Möbius dönüşümlerinin ve özelliklerinin belirlenmesinde temel bir rol oynayacaktır. Bu yüzden ψ_a dönüşümlerinin özelliklerini detaylı olarak inceleyelim. İlk olarak ψ_a evirtiminin analitik ifadesini bulalım. ψ_a , a^* merkezli ve (4.3) tarafından belirlenen ρ yarıçaplı küreye göre evirtim olduğundan Önsav 3.1'den

$$\begin{aligned} \psi_a(x) &= a^* + \rho^2(x - a^*)^* \\ &= a^* + \frac{1 - |a|^2}{|a|^2} \frac{(x - a^*)}{|x - a^*|^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir. Burada paydada yer alan $|a||x - a^*|$ çarpımı ileride sıklıkla kullanılacaktır ve bu çarpım özel bir sembolle gösterilir.

Tanım 4.3. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$[x, y] := \sqrt{1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2}$$

olsun.

Önsav 4.4. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$(i) \quad [x, y] = [y, x].$$

$$(ii) \quad [x, 0] = [0, y] = 1.$$

$$(iii) \quad [x, y]^2 = |x - y|^2 + (1 - |x|^2)(1 - |y|^2).$$

$$(iv) \quad y \neq 0 \text{ ise } [x, y] = \left| |y|x - y/|y| \right| = |y| |x - y^*|.$$

Kanıt. (i) ve (ii) özellikleri Tanım 4.3'ten hemen görülür. (iii) özelliğini görmek için

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

eşitliği ile

$$(1 - |x|^2)(1 - |y|^2) = 1 - |x|^2 - |y|^2 + |x|^2|y|^2$$

eşitliği taraf tarafa toplanırsa

$$|x - y|^2 + (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) = 1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2 = [x, y]^2$$

olduğu görülür. (iv) özelliği için $\left| |y|x - y/|y| \right| = \left| |y|(x - y/|y|^2) \right| = |y| |x - y^*|$ olduğu açıktır. Buradaki norm hesaplandığında

$$\begin{aligned} \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|^2 &= \left\langle |y|x - \frac{y}{|y|}, |y|x - \frac{y}{|y|} \right\rangle \\ &= |y|^2 \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \frac{\langle y, y \rangle}{|y|^2} \\ &= |x|^2|y|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1 \\ &= [x, y]^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Bu tezde özellikle $x, y \in \overline{\mathbb{B}}$ noktaları ile ilgileneceğiz. Bu durumda Önsav 4.4'de listelenen özelliklere ek olarak aşağıdaki özellikler de geçerlidir.

Önsav 4.5. $x, y \in \overline{\mathbb{B}}$ olsun.

$$(i) \quad \text{Eğer } y \in \mathbb{S} \text{ ise } [x, y] = |x - y| \text{ olur.}$$

(ii) $[x, x] = 1 - |x|^2$ 'dir.

(iii) $1 - |x||y| \leq [x, y] \leq 1 + |x||y|$ eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $y \in S$ için $|y| = 1$ olduğundan (i) özelliği Önsav 4.4 (iv) özelliğinden hemen görülür. Aynı önsavın (iii) özelliğinde $y = x$ alınırsa $[x, x]^2 = (1 - |x|^2)^2$ ve $|x| \leq 1$ olduğundan $[x, x] = 1 - |x|^2$ bulunur. (iii) özelliği üçgen eşitsizliğinin bir sonucudur. $|y/|y|| = 1$ olduğundan Önsav 4.4 (iv) özelliğinden

$$[x, y] = ||y|x - y/|y|| \geq |y/|y|| - ||y|x| = 1 - |x||y|$$

ve

$$[x, y] = ||y|x - y/|y|| \leq |y/|y|| + ||y|x| \leq 1 + |x||y|$$

olur. □

(4.4) eşitliğini ve Önsav 4.4 (iv) özelliğini kullanarak ψ_a evirtimini aşağıdaki formda yazabiliriz.

Önsav 4.6. $a \in \mathbb{B}, a \neq 0$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\psi_a(x) = a^* + \frac{(1 - |a|^2)(x - a^*)}{[x, a]^2} \quad (4.5)$$

dir.

(4.5) formülü kullanılarak $|\psi_a(x)|$ normu hesaplanabilir, ancak bu norm Önsav 3.3 kullanılarak daha kolay şekilde bulunabilir. Önce daha genel olarak $|\psi_a(x) - \psi_a(y)|$ normunu bulalım.

Önsav 4.7. $a \in \mathbb{B}, a \neq 0$ olsun. $x, y \in \mathbb{R}^n, x, y \neq a^*$ için

$$|\psi_a(x) - \psi_a(y)| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]} |x - y|$$

dir.

Kanıt. ψ_a , a^* merkezli ve $\rho = \sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ yarıçaplı küreye göre evirtim olduğundan Önsav 3.3 ve Önsav 4.4 (iv) özelliğinden

$$\begin{aligned} |\psi_a(x) - \psi_a(y)| &= \frac{\rho^2}{|x - a^*||y - a^*|} |x - y| \\ &= \frac{1 - |a|^2}{|a||x - a^*||a||y - a^*|} |x - y| \\ &= \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]} |x - y| \end{aligned}$$

bulunur. □

Şimdi $|\psi_a(x)|$ normunu bulalım.

Önsav 4.8. $a \in \mathbb{B}, a \neq 0$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n, x \neq a^*$ için

$$|\psi_a(x)| = \frac{|x - a|}{[x, a]}$$

dir.

Kanıt. Önsav 4.7'de $y = a$ alınırsa, $\psi_a(a) = 0$ olduğundan

$$|\psi_a(x)| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][a, a]} |x - a|$$

bulunur. Diğer yandan Önsav 4.5 (ii) özelliğinden $[a, a] = 1 - |a|^2$ olduğundan istenen sonuç elde edilir. □

Önsav 4.9. $a \in \mathbb{B}, a \neq 0$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n, x \neq a^*$ için

$$1 - |\psi_a(x)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2}$$

dir.

Kanıt. Önsav 4.8'den

$$1 - |\psi_a(x)|^2 = 1 - \frac{|x - a|^2}{[x, a]^2} = \frac{[x, a]^2 - |x - a|^2}{[x, a]^2}$$

dir. Diğer yandan Önsav 4.4 (iii) özelliğinden $[x, a]^2 - |x - a|^2 = (1 - |x|^2)(1 - |a|^2)$ olduğundan istenen sonuç elde edilir. □

5. İZOMETRİLER VE ORTOGONAL DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm izometrilerini belirleyeceğiz.

Tanım 5.1. (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $\phi : X \rightarrow Y$ olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad (5.1)$$

ise ϕ 'ye izometri denir.

Bu bölümde asıl olarak $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid uzaklığını koruyan izometrileri yani her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|$$

eşitliğini sağlayan $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümlerini inceleyeceğiz. Ama öncelikle izometrilere ilgili genel birkaç özelliğe bakalım. Her izometri bire birdir çünkü $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ ise $d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = 0$ ve (5.1)'den $d_X(x_1, x_2) = 0$ ve $x_1 = x_2$ olur. Fakat izometrilere örten olmak zorunda değildir. Örnek olarak $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y) = (x, y, 0)$ izometridir ama örten değildir. Diğer yandan $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ise yani ϕ , $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir izometri ise ϕ örtendir. Bunun açıklamasını ileride vereceğiz. Eğer ϕ izometrisi örten ise ϕ^{-1} de izometridir. Ayrıca izometrilere bileşkeleri de izometridir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'de izometrilere örnekler verelim.

Örnek 5.2. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi(x) = x + x_0$$

öteleme dönüşümü bir izometridir çünkü

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x + x_0 - (y + x_0)| = |x - y|$$

olur.

Örnek 5.3. $\mathcal{P}(a, t)$ bir hiperdüzlem ise $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemine göre yansıma dönüşümü $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir izometridir.

Örnek 5.4. $\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, orijin etrafında saatin ters yönünde θ açısı kadar döndürme dönüşümü bir izometridir.

Örnek 5.3 ve 5.4'te verilen dönüşümlerin izometri olduğu geometrik olarak açıktır. Daha ayrıntılı açıklamayı ilerleyen kısımlarda vereceğiz.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'de ortogonal dönüşümleri tanımlayalım. Eğer $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} (i) \quad & T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ (ii) \quad & T(kx) = kT(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ise T 'ye doğrusal dönüşüm denir. T doğrusal ise $T(x)$ yerine kısaca Tx de yazılır. İç çarpımı koruyan doğrusal dönüşümlere ortogonal denir.

Tanım 5.5. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal olsun. Eğer her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

ise T 'ye ortogonal dönüşüm denir.

Önsav 5.6. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i) Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ olur.
- ii) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $|Tx| = |x|$ olur.

Yani ortogonal dönüşümler norm koruyan doğrusal dönüşümler olarak da tanımlanabilir.

Kanıt. (i) sağlanıyor ise $y = x$ alındığında $\langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle$ yani $|Tx| = |x|$ olduğu görülür. Şimdi varsayalım ki (ii) doğru olsun.

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

olduğundan

$$\langle x, y \rangle = \frac{|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2}{2} \quad (5.2)$$

sağlanır. T norm koruduğundan $|Tx| = |x|$, $|Ty| = |y|$ ve $|Tx - Ty| = |T(x - y)| =$

$|x - y|$ olur ve (5.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\langle Tx, Ty \rangle &= \frac{|Tx|^2 + |Ty|^2 - |Tx - Ty|^2}{2} \\ &= \frac{|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2}{2} \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

olur. □

$1 \leq i \leq n$ için $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, i 'yinci bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan vektör olsun. $e_1, \dots, e_n$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$ 'nin standart tabanı denir.

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümleri ile $n \times n$ 'lik kare matrisler arasında bir eşleme vardır. Her $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümüne

$$T(x) = Ax$$

olacak şekilde bir $A = A_{n \times n}$ matrisi karşılık gelir ve tersine her A matrisi $T(x) = Ax$ olacak şekilde bir T doğrusal dönüşümü belirler. A matrisine T 'nin standart tabana göre matrisi denir.

Tanım 5.7. A , bir kare matris olsun. Eğer

$$A^t A = A A^t = I \tag{5.3}$$

ise A matrisine *ortogonal matris* denir.

Eğer $A^t A = I$ ise $A A^t = I$ eşitliği de sağlanır. Yani A 'nın ortogonal olması için $A^t A = I$ ya da $A A^t = I$ eşitliklerinden birisinin sağlanması yeterlidir. A 'nın satır vektörleri $r_1, \dots, r_n$ ve sütun vektörleri $c_1, \dots, c_n$ olsun. $A A^t$ eşitliği $r_1, \dots, r_n$ vektörlerinin ortonormal, yani

$$\langle r_i, r_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olması anlamına gelmektedir. Benzer şekilde $A^t A = I$ eşitliği $c_1, \dots, c_n$ vektörlerinin ortonormal olmasına denktir.

Örnek 5.8. $0 \leq \theta < 2\pi$ için

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

matrisi ortonormaldir. Bu $A^t A = I$ olduğu gösterilerek ya da iki sütun vektörü $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ nin ortonormal olduğu kontrol edilerek görülebilir. Bu matris $\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, orijin etrafında θ açısı kadar saatin ters yönünde dönme dönüşümünün matrisidir.

A ortogonal matris ise $A^{-1} = A^t$ de ortogonal matristir ve A, B ortogonal ise AB de ortogonaldir çünkü

$$AB(AB)^t = ABB^t A^t = AIA^t = I$$

olur. Dolayısıyla ortogonal matrisler bir grup oluşturur. Bu grup $O(n)$ ile gösterilir ve ortogonal grup olarak adlandırılır.

A ortogonal matris ise $\det(A^t) = \det(A)$ olduğundan

$$1 = \det I = \det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2$$

olur. Yani $\det A = \pm 1$ 'dir.

Şimdi ortogonal dönüşüm ve ortogonal matrisler arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Önsav 5.9. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşüm ve T 'nin standart tabana göre matrisi A , yani $T(x) = Ax$ olsun. T dönüşümü ortogonaldir eğer ve ancak A matrisi ortogonalse.

Kanıt. Eğer A ortogonal matris ise $A^t A = I$ olduğundan

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ay)^t Ax = y^t A^t Ax = y^t Ix = y^t x = \langle x, y \rangle$$

olur. Tersine eğer T ortogonal dönüşüm ise her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$y^t x = \langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = y^t A^t Ax,$$

yani her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$y^t (I - A^t A)x = 0 \quad (5.4)$$

olur. Şimdi $x = e_j, y = e_i$ ($1 \leq i, j \leq n$) alınırsa (5.4) eşitliğinin sol tarafı $I - A^t A$ matrisinin ij 'yinci terimini verir. Sağ taraf 0 olduğundan $I - A^t A$ matrisinin tüm terimleri 0, yani $I - A^t A = 0$ ve $A^t A = I$ 'dir. Dolayısıyla A ortogonal matristir. $\square$

Önsav 5.6 ve Önsav 5.9'un sonucu olarak şunu söyleyebiliriz.

Önsav 5.10. *A, bir kare matris olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *A ortogonal matristir.*

(ii) *Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$*

(iii) *Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $|Ax| = |x|$ 'dir.*

Şimdi izometrilere ve ortogonal dönüşümler arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Önsav 5.11. *Ortogonal dönüşümler izometridir.*

Kanıt. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonal ise Önsav 5.6'dan

$$|Tx - Ty| = |T(x - y)| = |x - y|$$

olur ve T izometridir. $\square$

Önsav 5.12. *$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometri ve $\phi(0) = 0$ ise ϕ doğrusaldır ve ortogonaldır.*

Kanıt. ϕ izometri ve $\phi(0) = 0$ olduğundan

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| = |x - 0| = |x| \quad (5.5)$$

yani ϕ dönüşümü normu korur. Ek olarak ϕ iç çarpımı da korur, çünkü (5.2) ve (5.5) eşitlikleri ve ϕ izometri olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \frac{|\phi(x)|^2 + |\phi(y)|^2 - |\phi(x) - \phi(y)|^2}{2} \\ &= \frac{|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2}{2} \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

olur ve $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ vektörleri ortonormaldir. Ortonormal vektörler doğrusal bağımsız olduğundan ve vektör sayısı n olduğundan $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ 'nin bir tabanıdır.

Şimdi ϕ dönüşümünün doğrusal olduğunu gösterelim. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ taban olduğundan

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(e_i)$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reel sayıları vardır ve $\phi(e_i)$ vektörleri ortonormal olduğundan

$$\langle \phi(x), \phi(e_i) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(e_i), \phi(e_i) \right\rangle = \alpha_i$$

dir. Ayrıca ϕ iç çarpımı koruduğundan

$$\alpha_i = \langle \phi(x), \phi(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle = x_i$$

dir ve dolayısıyla

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i)$$

olur. Bu da ϕ 'nin doğrusal olduğunu gösterir. Daha açık ifadeyle $k \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$

için $kx = \sum_{i=1}^n kx_i e_i$ ve $x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i$ olduğundan

$$\phi(kx) = \sum_{i=1}^n kx_i \phi(e_i) = k \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) = k\phi(x)$$

ve

$$\phi(x + y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \phi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) + \sum_{i=1}^n y_i \phi(e_i) = \phi(x) + \phi(y)$$

olur.

Sonuç olarak ϕ doğrusaldır ve aynı zamanda iç çarpımı koruduğundan ϕ ortogonal dönüşümdür. Dolayısıyla Önsav 5.9'dan $\phi(x) = Ax$ olacak şekilde A ortogonal matrisi vardır. Ek olarak ϕ izometri olduğundan bire birdir. Bundan dolayı çekirdeği 0 boyutlu ve görüntü kümesi n boyutludur. Yani $\phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ ve ϕ örtendir. $\square$

A ortogonal matris ise Önsav 5.11 ve Örnek 5.2'den $\phi(x) = Ax + x_0$ bir izometridir. Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim.

Sonuç 5.13. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir izometri olsun.

$$\phi(x) = Ax + x_0$$

olacak şekilde A ortogonal matrisi ve x_0 vektörü vardır.

Kanıt. $\phi(0) = x_0$ olsun. $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - x_0$$

dönüşümü bir izometridir ve $\tilde{\phi}(0) = \phi(0) - x_0 = 0$ 'dır. Önsav 5.12'den $\tilde{\phi}$ ortogonaldır ve $\tilde{\phi}$ 'nin standart tabana göre matrisi A ortogonal matrisidir. Dolayısıyla $\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + x_0 = Ax + x_0$ 'dır. $\square$

5.1. Benzerlik Dönüşümleri

İzometrilere uzaklık koruyan dönüşümlerdir. Uzaklığı sabit bir oranda büyüten/küçülten dönüşümlere ise benzerlik dönüşümü denir.

Tanım 5.14. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Eğer her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$|\phi(x) - \phi(y)| = r|x - y|$$

oluyorsa ϕ 'ye benzerlik dönüşümü ve r sayısına benzerlik oranı denir.

İzometrilere olduğu gibi benzerlik dönüşümleri de $\phi(\infty) = \infty$ alınarak $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'ye genişletilir. Eğer $r = 1$ ise ϕ bir izometridir. Eğer ϕ bir benzerlik dönüşümü ise $\psi = \phi/r$ bir izometridir çünkü her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$|\psi(x) - \psi(y)| = \left| \frac{\phi(x)}{r} - \frac{\phi(y)}{r} \right| = \frac{1}{r} r|x - y| = |x - y|$$

olur.

A ortogonal matris ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ise $\phi(x) = rAx + x_0$ bir benzerlik dönüşümüdür, çünkü

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |(rAx + x_0) - (rAy + x_0)| = r|A(x - y)| = r|x - y|$$

olur. Bunun tersi de doğrudur.

Önsav 5.15. $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ benzerlik oranı r olan bir benzerlik dönüşümü ise

$$\phi(x) = rAx + x_0$$

olacak şekilde A ortogonal matrisi ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır.

Kanıt. $\psi = \phi/r$ izometri olduğundan Sonuç 5.13'ten $\psi(x) = Ax + x_1$ olacak şekilde $A \in O(n)$ ve $x_1 \in \mathbb{R}^n$ vardır. Buradan $x_0 = rx_1$ alınırsa $\phi(x) = r\psi(x) = rAx + x_0$ olur. $\square$

6. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

$\hat{\mathbb{R}}^n$ 'de $\mathcal{P}(a, t)$ hiperdüzlemine ve $S(a, r)$ küresine göre yansıma dönüşümlerini önceki bölümlerde inceledik. Bu bölümde bu yansımaların bileşkelerini inceleyeceğiz.

Tanım 6.1. *Sonlu tane yansımanın (hiperdüzlem ya da küreye göre) bileşkesine Möbius dönüşümü denir.*

Örnek 6.2. *Öteleme bir Möbius dönüşümüdür çünkü (düzleme göre) iki yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\phi(x) = x + x_0$ olsun. x_0 vektörüne dik olan ve orijinden geçen $\mathcal{P}(x_0, 0)$ düzlemine göre yansımaya $\mathcal{R}_1$, x_0 vektörüne dik olan ve $x_0/2$ noktasından geçen $\mathcal{P}(x_0, |x_0|^2/2)$ düzlemine göre yansımaya $\mathcal{R}_2$ denirse $\phi = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ 'dir.*

Örnek 6.3. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = -x$ dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür. ϕ_1 , $\mathcal{P}(e_1, 0)$ düzlemine göre yansıma olsun. $\phi_1(x) = x - 2\langle x, e_1 \rangle e_1$ yani

$$\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olur. Benzer şekilde $i = 1, 2, \dots, n$ için ϕ_i , $\mathcal{P}(e_i, 0)$ düzlemine göre yansıma ise $\phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ 'dir ve $\phi = \phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1$ denirse $\phi(x) = -x$ olur. Yani ϕ dönüşümü n tane yansımanın bileşkesidir.

Örnek 6.4. $\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ orijin etrafında saatin ters yönünde θ açısı kadar dönme dönüşümü olsun. ϕ_θ iki yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir ve dolayısıyla Möbius dönüşümüdür.

Bu üç örnekteki dönüşümler izometridir. İleride tüm izometrilerin yansımaların bileşkesi olarak yazılabileceğini yani Möbius dönüşümleri olduğunu göstereceğiz. Şimdi izometri olmayan bir Möbius dönüşümü örneği verelim.

Örnek 6.5. $r > 0$ ve $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$, $\phi(x) = rx$ genişletme/daraltma dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür. $\mathbb{S} = S(0, 1)$ küresine göre yansımaya $\mathcal{I}_1$ ve $S(0, \sqrt{r})$ küresine göre yansımaya $\mathcal{I}_2$ dersek $\phi = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ 'dir. Çünkü $\mathcal{I}_1(x) = x^*$ ve (3.3) 'den $\mathcal{I}_2(x) = rx^*$ 'dir ve dolayısıyla $\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_1(x)) = r(x^*)^* = rx$ olur.

Düzlem ve küreye göre yansıma dönüşümleri (3.4) ve (3.3)'de verildiği gibi $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'den $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'ye bire bir ve örtendir ve her yansımanın tersi kendisidir. Dolayısıyla Möbius dönüşümleri bire bir ve örtendir ve her Möbius dönüşümünün tersi de bir Möbius dönüşümüdür. Eğer $\phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_m$ Möbius dönüşümü ϕ_i ($i = 1, \dots, m$) yansımalarının bileşkesi ise $\phi^{-1} = \phi_m \circ \dots \circ \phi_1$ 'dir. Ayrıca herhangi bir ϕ yansıması için $\phi^2 = \text{Id}$ olduğundan birim dönüşüm bir Möbius dönüşümüdür. Son olarak Möbius dönüşümlerinin bileşkeleri de Möbius dönüşümü olduğundan Möbius dönüşümleri bileşke işlemi altında bir grup oluşturur.

Tanım 6.6. $\hat{\mathbb{R}}^n$ üzerindeki tüm Möbius dönüşümlerinin oluşturduğu gruba Möbius grubu denir ve $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ ile gösterilir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm izometrilerin Möbius dönüşümü olduğunu gösterelim.

Önsav 6.7. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometri ve $\phi(0) = 0$ olsun. ϕ en fazla n tane (hiperdüzleme göre) yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir.

Kanıt. ϕ izometri ve $\phi(0) = 0$ olduğundan Önsav 5.12'den ϕ doğrusal ve ortogonaldir yani her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (6.1)$$

olur. Şimdi ϕ 'yi değiştirerek $0, e_1, \dots, e_n$ noktalarının hepsini koruyan bir dönüşüm bulalım.

İlk olarak hem 0 hem de e_1 noktalarını koruyan bir ϕ_1 dönüşümü oluşturalım. Bunun için

$$a_1 = \phi(e_1) - e_1$$

diyelim.

Eğer $a_1 \neq 0$ ise $\mathcal{P}(a_1, 0)$ düzlemine göre yansıma ψ_1 , yani

$$\psi_1(x) = x - 2\langle x, a_1 \rangle a_1^*$$

olsun. $\psi_1 \circ \phi$ dönüşümünün hem 0 hem de e_1 'i koruduğunu gösterelim. $\psi_1 \circ \phi(0) = \psi_1(0) = 0$ olduğu açıktır. Şimdi

$$\psi_1(\phi(e_1)) = \phi(e_1) - 2\langle \phi(e_1), \phi(e_1) - e_1 \rangle \frac{\phi(e_1) - e_1}{|\phi(e_1) - e_1|^2} \quad (6.2)$$

eşitliğinde $2\langle\phi(e_1), \phi(e_1) - e_1\rangle$ iç çarpımını hesaplayalım. Öncelikle $|\phi(e_1)| = |e_1| = 1$ olduğundan

$$\langle\phi(e_1) + e_1, \phi(e_1) - e_1\rangle = |\phi(e_1)|^2 + \langle\phi(e_1), e_1\rangle - \langle e_1, \phi(e_1)\rangle - |e_1|^2 = 0$$

olur ve bu eşitlik $2\phi(e_1) = \phi(e_1) + e_1 + \phi(e_1) - e_1$ eşitliği ile beraber kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\langle\phi(e_1), \phi(e_1) - e_1\rangle &= \langle\phi(e_1) + e_1, \phi(e_1) - e_1\rangle + \langle\phi(e_1) - e_1, \phi(e_1) - e_1\rangle \\ &= |\phi(e_1) - e_1|^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade (6.2)'de yerine yazılırsa $\psi_1(\phi(e_1)) = e_1$ elde edilir.

Eğer $a_1 = 0$ ise $\phi(e_1) = e_1$ 'dir ve $\psi_1 = \text{Id}$ alınırsa $\psi_1 \circ \phi$ dönüşümü yine hem 0 hem de e_1 'i korur. Şimdi $\phi_1 = \psi_1 \circ \phi$ dersek ϕ_1 hem 0 hem de e_1 'i koruyan bir izometridir.

Genel olarak varsayalım ki ϕ_k dönüşümü $0, e_1, \dots, e_k$ noktalarını koruyan bir izometri olsun. Bu noktalara ek olarak e_{k+1} noktasını da koruyan bir ϕ_{k+1} izometrisi oluşturalım. Bunun için

$$a_{k+1} = \phi_k(e_{k+1}) - e_{k+1}$$

diyelim.

Eğer $a_{k+1} = 0$ ise $\psi_{k+1} = \text{Id}$ alınırsa $\phi_{k+1} = \psi_{k+1} \circ \phi_k$ dönüşümü $0, e_1, \dots, e_{k+1}$ noktalarının tamamını korur.

Eğer $a_{k+1} \neq 0$ ise $\psi_{k+1}, \mathcal{P}(a_{k+1}, 0)$ düzlemine göre yansıma olsun. Yukarıda olduğu gibi $\psi_{k+1} \circ \phi_k, 0$ ve e_{k+1} noktalarını korur. Şimdi bu bileşke dönüşümünün $e_1, \dots, e_k$ noktalarını da koruduğunu gösterelim. e_i vektörleri ortonormal ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\phi_k(e_i) = e_i$ olduğundan (6.1)'den dolayı

$$\begin{aligned} \langle\phi_k(e_i), a_{k+1}\rangle &= \langle e_i, \phi_k(e_{k+1}) - e_{k+1}\rangle = \langle e_i, \phi_k(e_{k+1})\rangle - \langle e_i, e_{k+1}\rangle \\ &= \langle\phi_k(e_i), \phi_k(e_{k+1})\rangle \\ &= \langle e_i, e_{k+1}\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır ve

$$\psi_{k+1} \circ \phi_k(e_i) = \psi_{k+1}(e_i) = e_i - 2\langle e_i, a_{k+1} \rangle a_{k+1}^* = e_i$$

olur. Yani $\phi_{k+1} = \psi_{k+1} \circ \phi_k$ dönüşümü $0, e_1, \dots, e_{k+1}$ noktalarının tamamını korur.

Sonuç olarak $\psi_1, \dots, \psi_n$ düzleme göre yansıma ya da Id olmak üzere $0, e_1, \dots, e_n$ noktalarının tamamını koruyan bir

$$\phi_n = \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \dots \circ \psi_1 \circ \phi$$

izometrisi bulunabilir. Önsav 5.12'den ϕ_n doğrusaldır. ϕ_n 'nin standart tabanlara göre matrisinin i 'yinci sütunu $\phi_n(e_i) = e_i$ olduğundan ϕ_n 'nin matrisi birim matristir. Dolayısıyla ϕ_n birim dönüşümdür ve

$$\phi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n$$

dir, yani ϕ en fazla n tane yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir. $\square$

Teorem 6.8. Her $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometrisi en fazla $n + 1$ tane (hiperdüzleme göre) yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir.

Kanıt. $\phi(0) = x_0$ olsun. x_0 vektörüne dik olan ve 0 ile x_0 'ın orta noktası olan $x_0/2$ 'den geçen düzlem $\mathcal{P}(x_0, |x_0|^2/2)$ düzlemidir. Bu düzleme göre yansımaya ϕ_0 dersek $\phi_0(x_0) = 0$ 'dır. $\tilde{\phi} = \phi_0 \circ \phi$ olsun. $\tilde{\phi}$ bir izometri ve $\tilde{\phi}(0) = 0$ olduğundan Önsav 6.7'den $\tilde{\phi}$ en fazla n tane yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\phi = \phi_0 \circ \tilde{\phi}$ en fazla $n + 1$ tane yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir. $\square$

Her $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometrisi $\phi(\infty) = \infty$ alınarak $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'de tanımlı olarak düşünülebilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.9. $\hat{\mathbb{R}}^n$ 'nin tüm izometrilere Möbius dönüşümüdür.

7. AÇI KORUNUMU

Bu bölümde Möbius dönüşümlerinin açı koruyan dönüşümler olduklarını göstereceğiz. Möbius dönüşümleri sonlu tane yansımanın (düzlem ya da küreye göre) bileşkeleri oldukları için önce yansımaları inceleyeceğiz.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli türevlenebilir fonksiyonuna bir eğri denir. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise $\gamma'(t)$ vektörüne γ eğrisinin t anındaki ya da $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörü denir.

Örnek 7.1. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ olsun. γ 'nın görüntüsü birim çemberdir ya da γ birim çemberin bir parametrizasyonudur. $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ vektörü $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörüdür. Mesela $t = \pi/2$ alınırsa $\gamma'(\pi/2) = (-1, 0)$ vektörü $\gamma(\pi/2) = (0, 1)$ noktasında birim çembere teğettir.

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı iki vektör olsun. Bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{|u_1||u_2|}$$

eşitliğini sağlayan $0 \leq \theta \leq \pi$ açısı olarak tanımlanır. γ_1 ve γ_2 eğrileri x_0 noktasında kesişiyorsa bu iki eğri arasındaki açı eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açıdır.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

eşitliğini sağlayan $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümüdür ve $T = Df(x_0)$ şeklinde gösterilir. $Df(x_0)$ doğrusal dönüşümünün standart tabana göre matrisi Jacobi matrisi olarak adlandırılır ve $J_f(x_0)$ ile gösterilir. $J_f(x_0)$ matrisinin terimleri kısmi türevlerdir:

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri ve $\gamma(t_0) = x_0$ olsun. $f \circ \gamma$ eğrisinin t_0 anındaki teğet vektörü,

zincir kuralından,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t_0} = Df(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = J_f(x_0)\gamma'(t_0)$$

vektörüdür.

γ_1 ve γ_2 , x_0 noktasında kesişen herhangi iki eğri olsun. Eğer x_0 noktasında γ_1 ve γ_2 eğrileri arasındaki açı ile $f(x_0)$ noktasında $f \circ \gamma_1$ ve $f \circ \gamma_2$ eğrileri arasındaki açı aynı ise f dönüşümüne x_0 noktasında açıkorur dönüşüm denir. Eğer f tanım kümesindeki her noktada açıları koruyor ise f 'ye açıkorur dönüşüm denir. Eğer Jacobi matrisi $J_f(x_0)$ ortogonal ise f , x_0 noktasında açı korur. Daha genel olarak Jacobi matrisi ortogonal bir matrisin bir katı ise f açı korur.

Önsav 7.2. *Eğer $J_f(x_0) = kA$, $k \in \mathbb{R}$, $A \in O(n)$ ise f , x_0 noktasında açı korur.*

Kanıt. γ_1 ve γ_2 , x_0 noktasında kesişen iki eğri ve γ_1 'in x_0 noktasında teğet vektörü u_1 , γ_2 'nin teğet vektörü u_2 olsun. γ_1 ve γ_2 arasındaki θ açısı

$$\cos \theta = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{|u_1||u_2|}$$

eşitliği ile belirlenir. $J_f(x_0)$ matrisini kısaca J ile gösterirsek $f \circ \gamma_1$ eğrisinin $f(x_0)$ noktasındaki teğet vektörü Ju_1 ve $f \circ \gamma_2$ eğrisinin teğet vektörü Ju_2 'dir. Bu iki vektör arasındaki açı η ise A ortogonal matris olduğundan, Önsav 5.10'dan

$$\cos \eta = \frac{\langle Ju_1, Ju_2 \rangle}{|Ju_1||Ju_2|} = \frac{\langle kAu_1, kAu_2 \rangle}{|kAu_1||kAu_2|} = \frac{\langle Au_1, Au_2 \rangle}{|Au_1||Au_2|} = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{|u_1||u_2|} = \cos \theta$$

olur ve $\eta = \theta$ 'dir. Yani f , x_0 noktasında açı korur. □

Sonuç 7.3. *Benzerlik dönüşümleri açı korur. Özel olarak izometrilere açı korur.*

Kanıt. $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ benzerlik dönüşümü ise Önsav 5.15'den $r > 0$, $A \in O(n)$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\phi(x) = rAx + x_0$$

formundadır. Dolayısıyla $J_\phi(x) = rA$ 'dır ve ϕ açı korur. □

Şimdi düzlem ve küreye göre yansımaların açı koruduklarını gösterelim. Düzleme

göre yansımanın açı koruduğu geometrik olarak açıktır. Bunu analitik olarak da göstereyim.

$a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun. (3.4)'den $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemine göre yansıma dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}(x) &= x - 2(\langle x, a \rangle - t) \frac{a}{|a|^2} \\ &= x - 2\langle x, a \rangle \frac{a}{|a|^2} + \frac{2ta}{|a|^2}\end{aligned}$$

dir. Burada x ve a vektörleri sütun matrisleri olarak alınırsa, $\langle x, a \rangle = a^t x$ olduğundan ve matris çarpımının birleşme özelliğinden $\langle x, a \rangle a = a \langle x, a \rangle = a(a^t x) = (aa^t)x$ olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}(x) = \left(I - \frac{2}{|a|^2} aa^t \right) x + \frac{2ta}{|a|^2} \quad (7.1)$$

ve her $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında

$$J_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}}(x) = I - \frac{2}{|a|^2} aa^t \quad (7.2)$$

olur. Bu matrisin ortogonal olduğunu görmek için şu tanımlı yapalım.

Tanım 7.4. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a \neq 0$ için

$$Q_a := \frac{aa^t}{|a|^2} = \frac{1}{|a|^2} \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n a_n \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (7.3)$$

olsun.

Q_a matrisinin i 'yinci satır, j 'yinci sütundaki terimi

$$[Q_a]_{ij} = \frac{a_i a_j}{|a|^2}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (7.4)$$

dir. Şimdi bu matrisin özelliklerine bakalım.

Önsav 7.5. $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ için Q_a matrisi (7.3)'teki gibi tanımlansın.

(i) Q_a simetriktir, yani $Q_a^t = Q_a$ 'dır.

(ii) $Q_a^2 = Q_a$ 'dır.

(iii) $I - 2Q_a$ matrisi ortogonaldır.

Kanıt. (7.4)'dan $[Q_a]_{ji} = [Q_a]_{ij}$ 'dir ve Q_a simetriktir. (ii) için ise $Q_a = (aa^t)/|a|^2$ ve $a^t a = |a|^2$ eşitlikleri kullanılırsa

$$Q_a^2 = \frac{1}{|a|^4} aa^t aa^t = \frac{1}{|a|^2} aa^t = Q_a$$

olduğu görülür. (iii) için $Q_a^t = Q_a$ ve $Q_a^2 = Q_a$ eşitliklerinden

$$(I - 2Q_a)^t(I - 2Q_a) = (I - 2Q_a)(I - 2Q_a) = I - 4Q_a + 4Q_a^2 = I$$

olur. Yani $I - 2Q_a$ matrisi ortogonaldır. $\square$

Sonuç 7.6. $\mathcal{P}(a, t)$ düzlemine göre yansıma dönüşümü $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$ bir izometridir, dolayısıyla açı korur.

Kanıt. $x_0 = 2ta/|a|^2$ alınrsa (7.1)'den $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}(x) = (I - 2Q_a)x + x_0$ olur ve $I - 2Q_a$ ortogonal matris olduğundan $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$ bir izometridir ve dolayısıyla açı korur. $\square$

Şimdi küreye göre yansıma dönüşümlerini inceleyelim. İlk olarak birim küre $\mathbb{S}$ 'ye göre yansımaya bakalım ve kısalık açısından $\phi = \mathcal{I}_{\mathbb{S}}$ diyelim. (3.2)'den $\phi(x) = x^* = x/|x|^2$, yani

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \dots, \frac{x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

dir ve Jacobi matrisi hesaplanırsa, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için

$$J_{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_1^2}{|x|^4} & -\frac{2x_1x_2}{|x|^2} & \dots & -\frac{2x_1x_n}{|x|^2} \\ -\frac{2x_2x_1}{|x|^2} & \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_2^2}{|x|^4} & \dots & -\frac{2x_2x_n}{|x|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2x_nx_1}{|x|^2} & -\frac{2x_nx_2}{|x|^2} & \dots & \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_n^2}{|x|^4} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. (7.3)'deki gösterim kullanılırsa

$$J_\phi(x) = \frac{1}{|x|^2}(I - 2Q_x) \quad (7.5)$$

yazılabilir. Yani $J_\phi(x)$ ortogonal bir matris olan $(I - 2Q_x)$ 'in bir katıdır. Dolayısıyla Önsav 7.2'den, birim küreye göre yansıma ϕ , açı korur.

Şimdi bir $S(a, r)$ küresine göre yansımaya bakalım. $\phi = \mathcal{I}_S$ gösterimini kullanmaya devam edersek Önsav 3.1'den $x \neq a$ için $\mathcal{I}_{S(a,r)}(x) = a + r^2(x - a)^* = a + r^2\phi(x - a)$ 'dir ve zincir kuralı ve (7.5)'den

$$J_{\mathcal{I}_{S(a,r)}}(x) = r^2 J_\phi(x - a) = \frac{r^2}{|x - a|^2}(I - 2Q_{(x-a)}) \quad (7.6)$$

olduğu görülür. Yani Jacobi matrisi ortogonal bir matrisin katıdır ve aşağıdaki sonuç gösterilmiş olur.

Önsav 7.7. $S(a, r)$ küresine göre yansıma dönüşümü açı koruyan bir dönüşümdür.

Ek olarak ortogonal matrislerin determinantı ± 1 olduğundan (7.6)'dan küreye göre evirtimin Jacobi matrisinin determinantının mutlak değerinin

$$|\det J_{\mathcal{I}_{S(a,r)}}(x)| = \frac{r^{2n}}{|x - a|^{2n}} \quad (7.7)$$

olduğu da görülür.

Sonuç olarak Möbius dönüşümleri sonlu tane yansımanın bileşkesi olduğundan ve yansımalar açı koruduklarından aşağıdaki sonucu göstermiş olduk.

Teorem 7.8. *Möbius dönüşümleri açı korur.*

7.1. Simetri İlkesi

Σ genelleştirilmiş bir küre olsun. Eğer $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ noktasının Σ 'ya göre yansıması y ise x ve y noktaları Σ 'ya göre simetriktir denir. Şimdi Möbius dönüşümlerinin simetriyi koruduğunu gösterelim. Öncelikle bir hiperdüzlem ya da kürenin Möbius dönüşümleri altında görüntüsünün yine bir hiperdüzlem ya da küre olduğunu belirtelim.

Önsav 7.9. $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ bir Möbius dönüşümü ve Σ bir genelleştirilmiş küre olsun. $\phi(\Sigma)$ bir genelleştirilmiş küredir.

Kanıt. Sonuç 3.5'ten bir genelleştirilmiş kürenin hiperdüzlem ya da küreye göre yansıması yine bir genelleştirilmiş küredir. Möbius dönüşümleri böyle yansımaların bileşkesi olduğundan $\phi(\Sigma)$ bir genelleştirilmiş küredir. $\square$

Teorem 7.10. $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ bir Möbius dönüşümü olsun. Eğer $x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$ noktaları Σ genelleştirilmiş küresine göre simetrik ise $\phi(x)$ ve $\phi(y)$ noktaları $\phi(\Sigma)$ genelleştirilmiş küresine göre simetriktir.

Kanıt. Möbius dönüşümleri yansımaların bileşkesi olduğu için yansımaların simetriyi koruduğunu göstermek yeterlidir. Bunun ispatı da düzlemdeki ispatın benzeridir. ϕ bir yansıma (küre ya da hiperdüzleme göre) olsun. Önerme 3.8 (iii)'ten $\phi(x)$ ve $\phi(y)$ noktalarının $\phi(\Sigma)$ küresine göre simetrik olduğunu göstermek için $\phi(x)$ noktasından geçen ve $\phi(\Sigma)$ 'ya dik olan her genelleştirilmiş kürenin $\phi(y)$ noktasından da geçtiği gösterilmelidir. $\mathcal{T}$, $\phi(x)$ noktasından geçen ve $\phi(\Sigma)$ 'ya dik olan herhangi bir genelleştirilmiş küre olsun. Önsav 7.9'dan $\phi^{-1}(\mathcal{T})$ bir genelleştirilmiş küredir ve $x \in \phi^{-1}(\mathcal{T})$ 'dir. Möbius dönüşümleri açı koruduğundan (Teorem 7.8), $\phi^{-1}(\mathcal{T})$ ve Σ genelleştirilmiş küreleri birbirine diktir. Dolayısıyla Önerme 3.8 (i)'den x noktasının Σ 'ya göre yansıması olan y noktası $\phi^{-1}(\mathcal{T})$ üzerindedir. Yani $\phi(y) \in \mathcal{T}$ 'dir. $\square$

8. BİRİM YUVARI KORUYAN MÖBIUS DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEKLERİ

Bu bölümde [1] ve [7] kaynaklarını kullanarak birim yuvar $\mathbb{B}$ 'yi ve birim küre $\mathbb{S}$ 'yi koruyan Möbius dönüşümü örnekleri vereceğiz.

Önsav 8.1. *A bir ortogonal matris olmak üzere $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$,*

$$\phi(x) = \begin{cases} Ax, & x \neq \infty, \\ \infty, & x = \infty, \end{cases}$$

$\mathbb{B}$ ve $\mathbb{S}$ 'yi koruyan bir Möbius dönüşümüdür.

Kanıt. A ortogonal olduğundan ϕ bir izometridir ve bundan dolayı Sonuç 6.9'dan ϕ bir Möbius dönüşümüdür. $\phi(0) = 0$ olduğundan $x \in \mathbb{S}$ için

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| = |x - 0| = |x| = 1$$

olur ve ϕ birim küreyi korur. □

Şimdi $\mathbb{B}$ 'yi koruyan yansımaları inceleyelim. Önce hiperdüzlemlere göre yansımalar bakalım.

Önsav 8.2. *Bir $\mathcal{P}(a, t)$ hiperdüzlemine göre yansımanın $\mathbb{B}$ ve $\mathbb{S}$ 'yi koruması için gerek ve yeter şart $t = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. (7.1)'den $A = I - 2Q_a$ ortogonal matris ve $x_0 = 2ta/|a|^2 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}(x) = Ax + x_0$ formundadır. A ortogonal olduğundan Önsav 8.1'den $x \mapsto Ax$ dönüşümü birim küreyi korur. Dolayısıyla $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}$ 'nin $\mathbb{S}$ 'yi koruması için gerek ve yeter şart öteleme olmaması, yani $x_0 = 0$ ya da denk olarak $t = 0$ olmasıdır. □

$\mathcal{P}(a, t)$ düzleminde $t = 0$ olması düzlemin orijinden geçmesi anlamına gelir. Yani yukarıdaki önsav yalnız ve ancak orijinden geçen düzlemlere göre yansımalar $\mathbb{B}$ 'yi korur olarak ifade edilebilir. Bu durumda $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,t)}(x) = (I - 2Q_a)x$ dönüşümü Önsav 8.1'nin özel bir halidir.

Şimdi hangi küreye göre yansımaların $\mathbb{B}$ ve $\mathbb{S}$ 'yi koruduğuna bakalım. Bu yansımalar Bölüm 5'de incelenmiş ve Önsav 4.2'de bunların sadece Tanım 4.1'de verilen

ψ_a dönüşümleri yani $a \in \mathbb{B}$, $a \neq 0$ ve $\rho = \sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ olmak üzere $S(a^*, \rho)$ küresine göre evritimler oldukları gösterilmişti.

ψ_a dönüşümü küreye göre yansıma olduğu için Önsav 7.7'den açı koruyan bir dönüşümdür ancak yönü ters çevirir. Yönü de korumak için ψ_a ile ikinci bir yansımanın bileşkesini alalım. $\mathcal{P}(a, 0)$ düzlemine göre yansıma $\mathbb{B}$ 'yi koruduğundan

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a \quad (8.1)$$

bileşkesi $\mathbb{B}$ 'yi korur ve iki yansımanın bileşkesi alındığından yönü de değiştirmez. ψ_a dönüşümü 0 ve a noktalarını birbirlerine götürür. Şimdi bu noktaların (8.1)'deki bileşke altında görüntülerine bakalım. $\psi_a(a) = 0$ ve $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}(0) = 0$ olduğundan

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a(a) = 0$$

olur. Diğer yandan $\psi_a(0) = a$ ve

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}(a) = a - 2\langle a, a \rangle \frac{a}{|a|^2} = -a$$

olduğundan

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a(0) = -a$$

dır. Yani $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a$ bileşkesi a 'yı 0'a götürürken 0'ı a 'ya değil ama $-a$ 'ya götürmektedir. Bu sorunu çözmek için (8.1)'deki bileşkeyi -1 ile çarpar ve

$$\varphi_a = (-\text{Id}) \circ \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a$$

dönüşümünü tanımlarsak φ_a dönüşümü hem $\mathbb{B}$ 'yi korur hem de 0 ve a 'yı birbirlerine götürür. Ayrıca Örnek 6.3'ten $\phi(x) = -x$ dönüşümü yansımaların bileşkesi olarak yazılabildiğinden φ_a bir Möbius dönüşümüdür.

Tanım 8.3. $a \in \mathbb{B}$, $a \neq 0$ ve ψ_a , Tanım 4.1'deki gibi olmak üzere $\varphi_a : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$,

$$\varphi_a := (-\text{Id}) \circ \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a$$

olsun. φ_a birim yuvarı koruyan ve a ile 0'ın yerlerini değiştiren standart Möbius

dönüşümü olarak adlandırılır. $a = 0$ için $\varphi_0(x) = -x$ olarak alınır.

İlk olarak φ_a 'nın tersinin kendisi olduğunu gösterelim. Bunun için önce $-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}$ ve ψ_a dönüşümlerinin değişmeli olduklarını yani

$$-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)} \circ \psi_a = \psi_a \circ (-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)})$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak orijinden geçen düzlemlere göre yansıma ile ilgili geometrik olarak açık olan aşağıdaki özelliğe bakalım.

Önsav 8.4. $a \neq 0$, $\mathcal{P}(a,0)$ orijinden geçen ve a vektörüne dik düzlem, ve $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}$ olsun.

(i) $x \parallel a$ ise yani $x = ka$ ($k \in \mathbb{R}$) ise $\mathcal{R}(x) = -x$ 'tir.

(ii) $x \perp a$ ise $\mathcal{R}(x) = x$ 'tir.

Kanıt. (3.4) formülünden $\mathcal{R}(x) = x - 2\langle x, a \rangle a^*$ 'dır ve $x = ka$ ise

$$\mathcal{R}(x) = kx - 2\langle ka, a \rangle \frac{a}{|a|^2} = ka - 2ka = -ka = -x$$

olur. $x \perp a$ ise $\langle x, a \rangle = 0$ olduğundan $\mathcal{R}(x) = x$ 'tir. $\square$

$a, x \in \mathbb{R}^n$ ve $a \neq 0$ olsun. x vektörünü biri a 'ya paralel, diğeri a 'ya dik iki vektörün toplamı olarak yazabiliriz:

$$u = \langle x, a \rangle \frac{a}{|a|^2} \quad \text{ve} \quad v = x - u$$

alınırsa $u \parallel a$ ve $v \perp a$ 'dır. Burada u vektörüne x vektörünün a vektörü üzerine izdüşümü denir ve $u = \text{proj}_a x$ şeklinde gösterilir. Ek olarak $u \perp v$ olduğundan

$$|u + v|^2 = |u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \quad (8.2)$$

olur.

Önsav 8.5. $a \neq 0$ ve $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}$ ve ψ_a , Tanım 4.1'de verildiği gibi, a^* merkezli, $\rho = \sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ yarıçaplı küreye göre yansıma olsun.

$$(-\mathcal{R}) \circ \psi_a = \psi_a \circ (-\mathcal{R})$$

olur.

Kanıt. $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq a^*$ olsun. $(x - a^*)$ vektörünü biri a 'ya paralel, diğeri a 'ya dik iki vektörün toplamı olarak yazalım, yani

$$x - a^* =: u + v, \quad u \parallel a, \quad v \perp a \quad (8.3)$$

olsun. (3.3) formülünden

$$\psi_a(x) = a^* + \rho^2(x - a^*)^* = a^* + \rho^2 \frac{u + v}{|u + v|^2}$$

çıkar ve $\mathcal{R}$ doğrusal olduğundan

$$(-\mathcal{R})(\psi_a(x)) = -\mathcal{R}(a^*) + \frac{\rho^2}{|u + v|^2}(-\mathcal{R})(u + v)$$

olur. Önsav 8.4'ten

$$\mathcal{R}(a^*) = -a^*, \quad \mathcal{R}(u) = -u \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}(v) = v \quad (8.4)$$

bulunur ve dolayısıyla

$$(-\mathcal{R})(\psi_a(x)) = a^* + \frac{\rho^2}{|u + v|^2}(u - v) \quad (8.5)$$

olur.

Diğ er yandan $x = a^* + u + v$ eşitliği, $\mathcal{R}$ 'nin doğrusallığı, (8.4) ve (3.3) formülünden

$$\begin{aligned} \psi_a(-\mathcal{R}(x)) &= \psi_a(-\mathcal{R}(a^* + u + v)) = \psi_a(a^* + u - v) \\ &= a^* + \rho^2(u - v)^* = a^* + \frac{\rho^2(u - v)}{|u - v|^2} \end{aligned}$$

olur. (8.2)'den $|u + v| = |u - v|$ olduğundan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Şimdi φ_a 'nın tersinin kendisi olduğunu gösterelim.

Önsav 8.6. $\varphi_a \circ \varphi_a = \text{Id}$, yani $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$ 'dır.

Kanıt. $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}$ yerine kısaca $\mathcal{R}$ yazılırsa $\varphi_a = (-\mathcal{R}) \circ \psi_a$ olduğundan

$$\varphi_a \circ \varphi_a = (-\mathcal{R}) \circ \psi_a \circ (-\mathcal{R}) \circ \psi_a$$

olur. Önsav 8.5'ten $(-\mathcal{R}) \circ \psi_a = \psi_a \circ (-\mathcal{R})$ 'dir, ve $\psi_a \circ \psi_a = \text{Id}$ ve $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \text{Id}$ olduğundan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Şimdi φ_a 'nın formülünü belirleyelim.

Önsav 8.7. $a \in \mathbb{B}$ olsun. $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ için

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \frac{(1 - |a|^2)(a - x) + |x - a|^2 a}{[x, a]^2}, & x \neq a^*, \infty, \\ \infty, & x = a^*, \\ a^*, & x = \infty \end{cases}$$

olur.

Kanıt. Eğer $x = a^*$ ise Tanım 4.1'den $\psi_a(a^*) = \infty$ ve $-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}(\infty) = \infty$ olduğundan $\varphi_a(a^*) = \infty$ 'dur. $x = \infty$ ise $\psi_a(\infty) = a^*$ 'dır ve $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}(a^*) = a^* - 2\langle a^*, a \rangle a^* = -a^*$ olduğundan $\varphi_a(\infty) = a^*$ olur.

Şimdi $x \neq a^*, \infty$ olsun. u ve v , Önsav 8.5'in ispatında (8.3) eşitliğinde olduğu gibi tanımlanırsa, (8.5) eşitliğinden

$$\varphi_a(x) = (-\mathcal{R})(\psi_a(x)) = a^* + \frac{\rho^2(u - v)}{|u + v|^2}$$

olur. Burada $\rho = \sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ ve $|u + v| = |x - a^*|$ olduğundan

$$\frac{\rho^2}{|u + v|^2} = \frac{1 - |a|^2}{|a|^2|x - a^*|^2} = \frac{1 - |a|^2}{[x, a]^2}$$

ve

$$\varphi_a(x) = a^* + \frac{(1 - |a|^2)(u - v)}{[x, a]^2} \quad (8.6)$$

dir. Ayrıca $\langle a^*, a \rangle = 1$ olduğundan

$$u = \text{proj}_a(x - a^*) = \langle x - a^*, a \rangle a^* = \langle x, a \rangle a^* - a^*$$

olur ve $v = x - a^* - u$ yani $u - v = 2u - x + a^* = 2\langle x, a \rangle a^* - (x + a^*)$ olduğundan (8.6)'dan

$$\varphi_a(x) = \frac{a^*[x, a]^2 + (1 - |a|^2)[2\langle x, a \rangle a^* - (x + a^*)]}{[x, a]^2} \quad (8.7)$$

bulunur. Pay kısmındaki ilk terim $a^*[x, a]^2 = a|x - a^*|^2$ 'dir, ve

$$\begin{aligned} a|x - a^*|^2 - a|x - a|^2 &= -2\langle x, a \rangle a^* + 2\langle x, a \rangle a + a^* - a|a|^2 \\ (1 - |a|^2)2\langle x, a \rangle a^* &= 2\langle x, a \rangle a^* - 2\langle x, a \rangle a \end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa (8.7)'deki payın

$$a|x - a|^2 + a^* - a|a|^2 - (1 - |a|^2)(x + a^*) = a|x - a|^2 + (1 - |a|^2)(a - x)$$

olduğu görülür. Bu da istenen sonuçtur. $\square$

Şimdi daha önce ψ_a için gösterdiğimiz özelliklerin benzerlerinin φ_a için de doğru olduğunu gösterelim.

Önsav 8.8. $a \in \mathbb{B}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ $x, y \neq a^*$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i)

$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]}|x - y|,$$

(ii)

$$[\varphi_a(x), \varphi_a(y)] = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]}[x, y],$$

(iii)

$$|\varphi_a(x)| = \frac{|x - a|}{[x, a]},$$

(iv)

$$1 - |\varphi_a(x)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2}.$$

Kanıt. $\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}$ ve $\phi(x) = -x$ dönüşümleri doğrusal ve izometri olduklarından

$$|\varphi_a(x)| = |(-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)})(\psi_a(x))| = |\psi_a(x)|$$

ve

$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)| = |(-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)})(\psi_a(x)) - (-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)})(\psi_a(y))| = |\psi_a(x) - \psi_a(y)|$$

olur. Dolayısıyla (i), (iii) ve (iv) kısımları Önsav 4.7, 4.8 ve 4.9'dan hemen elde edilir. (Bu önsavlarda $a \neq 0$ alınmıştı ama $a = 0$ durumu kolaylıkla kontrol edilebilir.) Şimdi (ii)'yi gösterelim. Önsav 4.4 (iii) özelliğinden

$$[\varphi_a(x), \varphi_a(y)]^2 = |\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|^2 + (1 - |\varphi_a(x)|^2)(1 - |\varphi_a(y)|^2)$$

dir ve önsavın (i) ve (iv) kısımları kullanılırsa

$$[\varphi_a(x), \varphi_a(y)]^2 = \frac{(1 - |a|^2)^2}{[x, a]^2 [y, a]^2} \left(|x - y|^2 + (1 - |x|^2)^2 (1 - |y|^2)^2 \right)$$

elde edilir ve bu da, yine Önsav 4.4 (iii)'ten, istenen sonuçtur. $\square$

Özel olarak yukarıdaki önsavın (i) ve (ii) kısmında $y = 0$ alınır ve Önsav 4.4 (ii) kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 8.9. $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq a^*$ için

$$(i) \quad |\varphi_a(x) - a| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a]} |x|,$$

$$(ii) \quad [\varphi_a(x), a] = \frac{1 - |a|^2}{[x, a]}$$

olur.

φ_a dönüşümü bir küreye göre evritim içerdiği için Öklid izometrisi değildir yani $|x - y|$ uzaklığı φ_a altında invaryant değildir. Ancak Önsav 8.8 (i) kısmında görüldüğü gibi $|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|$ ve $|x - y|$ arasında bir ilişki vardır. Önsav 8.8 (iv) kısmını kullanarak bu ilişkiyi şu şekilde ifade edebiliriz.

Önsav 8.10. $a \in \mathbb{B}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x, y \neq a^*$ için

(i)

$$\frac{|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|^2}{(1 - |\varphi_a(x)|^2)(1 - |\varphi_a(y)|^2)} = \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

(ii)

$$\frac{[\varphi_a(x), \varphi_a(y)]^2}{(1 - |\varphi_a(x)|^2)(1 - |\varphi_a(y)|^2)} = \frac{[x, y]^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt. Önsav 8.8 (i) ve (iv) özelliklerinden

$$\frac{|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|^2}{|x - y|^2}$$

ve

$$\frac{(1 - |\varphi_a(x)|^2)(1 - |\varphi_a(y)|^2)}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

oranlarının ikisi de

$$\frac{(1 - |a|^2)^2}{[x, a]^2[y, a]^2}$$

oranına eşittir. Buradan (i)'e ulaşılır. Önsav 4.4 (iii) özelliğinden $[x, y]^2 = |x - y|^2 + (1 - |x|^2)(1 - |y|^2)$ olduğu için (i) kısmında her iki tarafa 1 eklenirse (ii) elde edilir. $\square$

Önsav 8.10, her iki

$$\frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \quad \text{ve} \quad \frac{[x, y]^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

oranın φ_a altında değişmez olduğunu göstermektedir. Şimdi başka bir değişmez bulalım.

Önsav 8.11. $a \in \mathbb{B}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x, y \neq a^*$ için

$$\frac{|\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|}{[\varphi_a(x), \varphi_a(y)]} = \frac{|x - y|}{[x, y]}$$

olur.

Kanıt. Önsav 8.10'da (i) ve (ii) eşitlikleri oranlanırsa istenen sonuç elde edilir. $\square$

Önsav 8.8,

$$\frac{|x - y|}{[x, y]}$$

oranının φ_a altında değişmez olduğunu göstermektedir.

Son olarak φ_a 'nın Jacobi matrisinin determinantına bakalım.

Önsav 8.12. Her $a, x \in \mathbb{B}$ için

$$|\det J_{\varphi_a}(x)| = \frac{(1 - |a|^2)^n}{[x, a]^{2n}}$$

olur.

Kanıt. $\rho = \sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ olmak üzere $\psi_a, S(a^*, \rho)$ küresine göre evirtim olduğundan (7.7) eşitliğinden ve Önsav 4.4 (iv)'ten

$$|\det J_{\psi_a}(x)| = \frac{\rho^{2n}}{|x - a^*|^{2n}} = \frac{(1 - |a|^2)^n}{|a|^{2n}|x - a^*|^{2n}} = \frac{(1 - |a|^2)^n}{[x, a]^{2n}}$$

olur. $\varphi_a = (-\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}) \circ \psi_a$ ve $J_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}(a,0)}}(x) = I - 2Q_a =: A$ olduğundan

$$J_{\varphi_a}(x) = -AJ_{\psi_a}(x)$$

sağlanır. Son olarak A ortogonal matris olduğundan $|\det A| = 1$ 'dir ve

$$|\det J_{\varphi_a}(x)| = |\det J_{\psi_a}(x)| = \frac{(1 - |a|^2)^n}{[x, a]^{2n}}$$

olur. □

9. ÇİFTE ORAN

Çifte oran projektif dönüşümler tarafından korunan ve bu nedenle projektif geometride temel bir rol oynayan bir değişmezdir. Bu bölümde Möbius dönüşümlerinin çifte oranı koruduğunu göstereceğiz.

Tanım 9.1. $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{R}}^n$ birbirinden farklı dört nokta olsun. Eğer noktaların hepsi ∞ 'dan farklı ise $[x, y, u, v]$ çifte oranı

$$[x, y, u, v] = \frac{|x - u|/|x - v|}{|y - u|/|y - v|} = \frac{|x - u| |y - v|}{|x - v| |y - u|} \quad (9.1)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer noktalardan birisi ∞ ise (9.1)'de o noktayı içeren iki terim silinir.

Örnek olarak $x = \infty$ ise

$$[\infty, y, u, v] = \frac{|y - v|}{|y - u|}$$

olur.

Teorem 9.2. Möbius dönüşümleri çifte oranı korur. Yani $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ Möbius dönüşümü ve $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{R}}^n$ dört farklı nokta ise

$$[\phi(x), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] = [x, y, u, v]$$

olur.

Kanıt. Möbius dönüşümleri hiperdüzlem ve kürelere göre yansımaların bileşkesi olduğundan bu yansımaların çifte oranı koruduğunu göstermek yeterlidir.

1) Önce hiperdüzlemlere göre yansımalara bakalım. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, t)$ bir hiperdüzlem ve $\phi = \mathcal{R}_{\mathcal{P}(a, t)}$, $\mathcal{P}$ hiperdüzlemine göre yansıma olsun. Sonuç 7.6'dan ϕ bir izometridir, yani $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|$ 'dir. ∞ noktası özel olduğu için iki duruma bakmalıyız.

1.(i) Eğer x, y, u, v noktalarının hepsi ∞ 'dan farklı ise

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] &= \frac{|\phi(x) - \phi(u)| |\phi(y) - \phi(v)|}{|\phi(x) - \phi(v)| |\phi(y) - \phi(u)|} \\ &= \frac{|x - u| |y - v|}{|x - v| |y - u|} = [x, y, u, v] \end{aligned}$$

1.(ii) Noktalardan biri ∞ , örnek olarak $x = \infty$ olsun. $\phi(\infty) = \infty$ olduğundan

$$[\phi(\infty), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] = \frac{|\phi(y) - \phi(v)|}{|\phi(y) - \phi(u)|} = \frac{|y - v|}{|y - u|} = [\infty, y, u, v]$$

olur ve ϕ çifte oranı korur.

2) Şimdi kürelere göre yansımanın çifte oranı koruduğunu gösterelim. $S(a, r)$ bir küre ve $\phi = \mathcal{I}_{S(a, r)}$, $S(a, r)$ küresine göre yansıma olsun. ∞ noktası yine özel olduğu için noktaların a ya da ∞ olup olmamasına göre dört durumu incelemeliyiz. Öncelikle şu iki eşitliği not edelim. Eğer $x \neq a, \infty$ ise (3.1) eşitliğinden

$$|\phi(x) - a| = \frac{r^2}{|x - a|} \quad (9.2)$$

ve $x, y \neq a, \infty$ ise Önsav 3.3'ten

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \frac{r^2}{|x - a| |y - a|} |x - y| \quad (9.3)$$

olduğunu biliyoruz.

2.(i) Önce x, y, u, v noktalarının hepsinin a ve ∞ 'dan farklı olduğu duruma bakalım. Bu durumda (9.3)'ten

$$\begin{aligned} [\phi(\infty), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] &= \frac{|\phi(x) - \phi(u)| |\phi(y) - \phi(v)|}{|\phi(x) - \phi(v)| |\phi(y) - \phi(u)|} \\ &= \frac{\frac{r^2}{|x - a| |u - a|} |x - u| \frac{r^2}{|y - a| |v - a|} |y - v|}{\frac{r^2}{|x - a| |v - a|} |x - v| \frac{r^2}{|y - a| |u - a|} |y - u|} \\ &= \frac{|x - u| |y - v|}{|x - v| |y - u|} = [x, y, u, v] \end{aligned}$$

olur.

2.(ii) Noktaların hepsi a 'dan farklı ama birisi ∞ , örnek olarak $x = \infty$ olsun. $\phi(\infty) = a$ olduğundan (9.2) ve (9.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} [\phi(\infty), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] &= [a, \phi(y), \phi(u), \phi(v)] = \frac{|a - \phi(u)| |\phi(y) - \phi(v)|}{|a - \phi(v)| |\phi(y) - \phi(u)|} \\ &= \frac{\frac{r^2}{|u - a|} \frac{r^2}{|y - a| |v - a|} |y - v|}{\frac{r^2}{|v - a|} \frac{r^2}{|y - a| |u - a|} |y - u|} = \frac{|y - v|}{|y - u|} \\ &= [\infty, y, u, v] \end{aligned}$$

olur.

2.(iii) Noktaların hepsi ∞ 'dan farklı ama birisi a , örnek olarak $x = a$ olsun. $\phi(a) = \infty$ olduğundan (9.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} [\phi(a), \phi(y), \phi(u), \phi(v)] &= [\infty, \phi(y), \phi(u), \phi(v)] = \frac{|\phi(y) - \phi(v)|}{|\phi(y) - \phi(u)|} \\ &= \frac{\frac{r^2}{|y - a| |v - a|} |y - v|}{\frac{r^2}{|y - a| |u - a|} |y - u|} = \frac{|a - u| |y - v|}{|a - v| |y - u|} = [a, y, u, v] \end{aligned}$$

olur.

2.(iv) Noktalardan birisi a , birisi ∞ , örnek olarak $x = a, y = \infty$ olsun. $\phi(a) = \infty$, $\phi(\infty) = a$ olduğundan

$$\begin{aligned} [\phi(a), \phi(\infty), \phi(u), \phi(v)] &= [\infty, a, \phi(u), \phi(v)] = \frac{|a - \phi(v)|}{|a - \phi(u)|} = \frac{\frac{r^2}{|a - v|}}{\frac{r^2}{|a - u|}} \\ &= \frac{|a - u|}{|a - v|} = [a, \infty, u, v] \end{aligned}$$

olur. Yani her durumda ϕ yansıması çifte oranı korur. □

10. BİRİM YUVARI KORUYAN TÜM MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

ϕ birim yuvar $\mathbb{B}$ 'yi koruyan bir Möbius dönüşümü ise ϕ^{-1} 'de $\mathbb{B}$ 'yi koruyan bir Möbius dönüşümüdür. Ayrıca ϕ_1 ve ϕ_2 , $\mathbb{B}$ 'yi koruyan Möbius dönüşümleri ise bileşkeleri $\phi_2 \circ \phi_1$ 'de $\mathbb{B}$ 'yi korur. Yani $\mathbb{B}$ 'yi koruyan Möbius dönüşümleri $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ 'nin bir alt grubudur. Bu alt grup $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ ile gösterilir.

Bu bölümde $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ grubunun tüm elemanlarını belirleyeceğiz. Bölüm 8'de $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'nin elemanlarına örnekler bulmuştuk. A bir ortogonal matris ve $\phi(x) = Ax$ ise Önsav 8.1'den $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'dir. Ayrıca $a \in \mathbb{B}$ için Tanım 8.3'te verilen φ_a dönüşümleri de $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'dedir. Bu bölümde $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'nin bu iki tür Möbius dönüşümleri tarafından üretildiğini göstereceğiz.

Öncelikle $\mathbb{B}$ 'yi koruyan ve ek olarak 0 noktasını kendisine götüren Möbius dönüşümlerini belirleyelim.

Teorem 10.1. $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ bir Möbius dönüşümü, $\phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$ ve $\phi(0) = 0$ olsun. Bu durumda $\phi(\infty) = \infty$ 'dur ve öyle bir A ortogonal matrisi vardır ki her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\phi(x) = Ax$$

olur.

Kanıt. İlk olarak simetri ilkesini kullanarak $\phi(\infty) = \infty$ olduğunu gösterelim. 0 ve ∞ noktaları birim küre $\mathbb{S}$ 'ye göre simetriktir. Simetri ilkesinden $\phi(0)$ ve $\phi(\infty)$ noktaları $\phi(\mathbb{S})$ 'ye göre simetriktir. $\phi(0) = 0$ ve $\phi(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ olduğundan 0 ve $\phi(\infty)$, $\mathbb{S}$ 'ye göre simetriktir. 0'ın $\mathbb{S}$ 'ye göre simetriği ∞ olduğundan $\phi(\infty) = \infty$ 'dur.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'nin elemanlarının ϕ altındaki görüntülerine bakalım. Bunun için ϕ 'nin çifte oranı korumasını kullanacağız. $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ birbirinden farklı dört nokta olsun. Şu iki çifte orana bakalım: $[\infty, x, y, u]$ ve $[\infty, u, v, x]$. ϕ çifte oranı koruduğundan ve $\phi(\infty) = \infty$ olduğundan

$$[\infty, \phi(x), \phi(y), \phi(u)] = [\phi(\infty), \phi(x), \phi(y), \phi(u)] = [\infty, x, y, u]$$

olur. Bu eşitliği açık olarak yazarsak

$$\frac{|\phi(x) - \phi(u)|}{|\phi(x) - \phi(y)|} = \frac{|x - u|}{|x - y|} \quad (10.1)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$[\infty, \phi(u), \phi(v), \phi(x)] = [\infty, u, v, x]$$

eşitliği açık olarak yazılırsa

$$\frac{|\phi(x) - \phi(u)|}{|\phi(u) - \phi(v)|} = \frac{|x - u|}{|u - v|} \quad (10.2)$$

bulunur. (10.1) ve (10.2) eşitlikleri oranlanırsa her $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} = \frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|u - v|}$$

olduğu görülür. Yani hangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ nokta çifti alınır alınsın

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}$$

oranı hep aynıdır. Bu orana r denirse

$$|\phi(x) - \phi(y)| = r|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

olduğu, yani ϕ 'nin bir benzerlik dönüşümü olduğu görülür.

Şimdi r sayısını belirleyelim. $y = 0$ alınırsa $\phi(y) = \phi(0) = 0$ ve $x \in \mathbb{S}$ alınırsa $\phi(x) \in \mathbb{S}$ olduğundan $|\phi(x)| = |x| = 1$ olur ve dolayısıyla $r = 1$ 'dir. Yani ϕ aslında bir izometridir. ϕ bir izometri ve $\phi(0) = 0$ olduğundan Önsav 5.12'den öyle bir A ortogonal matrisi vardır ki $\phi(x) = Ax$ 'dir. $\square$

Burada $x = \infty$ noktasını özel olarak belirtmektense her A matrisi için $A\infty = \infty$ tanımını yapalım. Böylece yukarıdaki teoremi her $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ için $\phi(x) = Ax$ olur şeklinde yazabiliriz.

Şimdi yukarıdaki teoremden $\phi(0) = 0$ şartını kaldıralım ve genel bir $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ Möbius dönüşümünü karakterize edelim.

Teorem 10.2. $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ ve $\phi^{-1}(0) = a$ olsun. Öyle A ortogonal matrisi vardır ki her $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ için

$$\phi(x) = A\varphi_a(x) \quad (10.3)$$

olur.

Kanıt. ϕ ve φ_a , $\mathbb{B}$ 'yi koruduğundan

$$\psi = \phi \circ \varphi_a$$

bileşkesi $\mathbb{B}$ 'yi koruyan bir Möbius dönüşümüdür ve $\varphi_a(0) = a$ olduğundan

$$\psi(0) = \phi(\varphi_a(0)) = \phi(a) = 0$$

olur. Teorem 10.1'dan bir A ortogonal matrisi için

$$\psi(x) = Ax$$

dir ve $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$ olduğundan

$$\phi = \psi \circ \varphi_a^{-1} = \psi \circ \varphi_a = A\varphi_a$$

olur. □

Sonuç olarak $\mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'nin tüm elemanları ortogonal dönüşümler ve φ_a ($a \in \mathbb{B}$) dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir.

Son olarak (10.3) eşitliğinde ortogonal matris ve φ_a 'nın sırasının değiştirebileceğini gösterelim.

Teorem 10.3. $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ ve $\phi(0) = b$ ise

$$\phi(x) = \varphi_b(Bx) \quad (x \in \hat{\mathbb{R}}^n)$$

olacak şekilde B ortogonal matrisi vardır.

Kanıt. İspat önceki ispatın benzeridir.

$$\psi(x) = \varphi_b \circ \phi$$

denirse $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ 'dir ve $\varphi_b(b) = 0$ olduğundan $\psi(0) = 0$ 'dır. Teorem 10.1'den

$\psi(x) = Bx$ olacak şekilde $B \in O(n)$ vardır. Dolayısıyla, $\varphi_b^{-1} = \varphi_b$ olduğundan,

$$\phi(x) = \varphi_b^{-1}(\psi(x)) = \varphi_b(Bx)$$

olur. □

10.1. Möbius Değişmezlik

Teorem 10.2'yi kullanarak Önsav 8.8, 8.10 ve 8.11'de φ_a için gösterilen özelliklerin benzerlerinin tüm $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ dönüşümleri için geçerli olduğu gösterilebilir. Önce $[x, y]$ 'nin ortogonal dönüşümler altında değişmez olduğunu gösterelim.

Önsav 10.4. $A \in O(n)$ ise her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$[Ax, Ay] = [x, y]$$

olur.

Kanıt. $A \in O(n)$ olduğundan Önsav 5.10'dan $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ ve $|Ax| = |x|$ 'dir. Dolayısıyla

$$[Ax, Ay] = \sqrt{1 - 2\langle Ax, Ay \rangle + |Ax|^2|Ay|^2} = \sqrt{1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2} = [x, y]$$

olur. □

Teorem 10.5. $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ ve $\phi^{-1}(0) = a$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq a^*$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i)

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]} |x - y|,$$

(ii)

$$[\phi(x), \phi(y)] = \frac{1 - |a|^2}{[x, a][y, a]} [x, y],$$

(iii)

$$|\phi(x)| = \frac{|x - a|}{[x, a]},$$

(iv)

$$1 - |\phi(x)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2},$$

(v)

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{(1 - |\phi(x)|^2)(1 - |\phi(y)|^2)} = \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)},$$

(vi)

$$\frac{[\phi(x), \phi(y)]^2}{(1 - |\phi(x)|^2)(1 - |\phi(y)|^2)} = \frac{[x, y]^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)},$$

(vii)

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{[\phi(x), \phi(y)]} = \frac{|x - y|}{[x, y]}.$$

(viii)

$$|\det J_\phi(x)| = \frac{(1 - |a|^2)^n}{[x, a]^{2n}}$$

Kanıt. Teorem 10.2'den $\phi(x) = A\varphi_a(x)$ olacak şekilde $A \in O(n)$ vardır. Önsav 5.10'dan $|Ax| = |x|$ ve $|Ax - Ay| = |A(x - y)| = |x - y|$, ve $|\det A| = 1$ olduğundan

$$|\phi(x)| = |A\varphi_a(x)| = |\varphi_a(x)|$$

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |A\varphi_a(x) - A\varphi_a(y)| = |\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|$$

$$|\det J_\phi(x)| = |\det J_{\varphi_a}(x)|$$

olur. Ayrıca Önsav 10.4'ten

$$[\phi(x), \phi(y)] = [A\varphi_a(x), A\varphi_a(y)] = [\varphi_a(x), \varphi_a(y)]$$

olduğundan istenen eşitlikler Önsav 8.8, 8.10, 8.11 ve 8.12'nin sonucudur. $\square$

Bu teoremin (v), (vi) ve (vii) kısımları

$$\frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}, \quad \frac{[x, y]^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \quad \text{ve} \quad \frac{|x - y|}{[x, y]}$$

oranlarının tüm $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ dönüşümleri altında invariant olduğunu göstermektedir.

11. SÖZDE HİPERBOLİK METRİK

Bu bölümde Tanım 8.3'te verilen φ_a dönüşümünün birim yuvar üzerinde bir metrik belirlediğini göstereceğiz. Öncelikle Önsav 8.8 (iii) kısmından

$$|\varphi_a(x)| = \frac{|x - a|}{[x, a]} \quad (11.1)$$

olduğunu not edelim.

Tanım 11.1. $d_{\text{ph}} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_{\text{ph}}(x, y) = |\varphi_x(y)| = \frac{|x - y|}{[x, y]}$$

fonksiyonuna $\mathbb{B}$ üzerinde sözde hiperbolik metrik denir.

Şimdi d_{ph} fonksiyonunun gerçekten de bir metrik olduğunu gösterelim. İlk olarak bu fonksiyonun Möbius değişmez olduğunu belirtelim.

Önerme 11.2. Her $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ ve $x, y \in \mathbb{B}$ için

$$d_{\text{ph}}(\phi(x), \phi(y)) = d_{\text{ph}}(x, y)$$

olur.

Kanıt. Teorem 10.5 (vii) kısmından

$$d_{\text{ph}}(\phi(x), \phi(y)) = \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{[\phi(x), \phi(y)]} = \frac{|x - y|}{[x, y]} = d_{\text{ph}}(x, y)$$

dir. □

Teorem 11.3. $d_{\text{ph}} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ bir metriktir.

Kanıt. $d_{\text{ph}}(x, y) \geq 0$ eşitsizliği ve $d_{\text{ph}}(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ olduğu açıktır. Ayrıca Önsav 4.4 (i) kısmından $[x, y] = [y, x]$ olduğundan $d_{\text{ph}}(x, y) = d_{\text{ph}}(y, x)$ olduğu (11.1)'den hemen görülür.

Şimdi üçgen eşitsizliğini, yani her $x, y, z \in \mathbb{B}$ için

$$d_{\text{ph}}(x, y) \leq d_{\text{ph}}(x, z) + d_{\text{ph}}(y, z) \quad (11.2)$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak $z = 0$ durumuna bakalım ve

$$d_{\text{ph}}(x, y) \leq d_{\text{ph}}(x, 0) + d_{\text{ph}}(y, 0) \quad (11.3)$$

olduğunu gösterelim. Bu durumda $d_{\text{ph}}(x, 0) = |\varphi_x(0)| = |x|$ ve benzer şekilde $d_{\text{ph}}(y, 0) = |y|$ olduğundan gösterilmesi gereken

$$d_{\text{ph}}(x, y) \leq |x| + |y|$$

eşitsizliğidir. $d_{\text{ph}}(x, y) = |\varphi_x(y)|$ olduğundan Önsav 8.8 (iv) kısmından

$$1 - d_{\text{ph}}^2(x, y) = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{[x, y]^2}$$

dir. Burada Önsav 4.5 (iii)'teki $[x, y] \leq 1 + |x||y|$ eşitsizliği kullanılırsa

$$1 - d_{\text{ph}}^2(x, y) \geq \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{(1 + |x||y|)^2}$$

yani

$$d_{\text{ph}}^2(x, y) \leq 1 - \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{(1 + |x||y|)^2}$$

olduğu görülür. Sağ taraftaki çıkarma işlemi yapılırsa,

$$d_{\text{ph}}^2(x, y) \leq \frac{(|x| + |y|)^2}{(1 + |x||y|)^2}$$

ve son olarak $1 + |x||y| \geq 1$ eşitsizliği kullanılırsa aranan $d_{\text{ph}}(x, y) \leq |x| + |y|$ elde edilir.

Şimdi genel duruma bakalım. $x, y, z \in \mathbb{B}$ olsun. (11.3)'ten

$$d_{\text{ph}}(\varphi_z(x), \varphi_z(y)) \leq d_{\text{ph}}(\varphi_z(x), 0) + d_{\text{ph}}(\varphi_z(y), 0)$$

dır. Burada Önerme 11.2'den

$$d_{\text{ph}}(\varphi_z(x), \varphi_z(y)) = d_{\text{ph}}(x, y)$$

dir. Ayrıca $0 = \varphi_z(z)$ olduğundan aynı önermeden

$$d_{\text{ph}}(\varphi_z(x), 0) = d_{\text{ph}}(\varphi_z(x), \varphi_z(z)) = d_{\text{ph}}(x, z)$$

ve benzer şekilde $d_{\text{ph}}(\varphi_z(y), 0) = d_{\text{ph}}(y, z)$ 'dir. Dolayısıyla (11.2) eşitsizliği doğrudur ve d_{ph} bir metriktir. $\square$



KAYNAKÇA

- [1] Ahlfors, L.A. (1981). *Möbius Transformations in Several Dimensions*. Minneapolis: Univ. Minnesota.
- [2] Beardon, A.F. (1983). *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Graduate Texts in Mathematics, Vol. 91, Springer-Verlag.
- [3] Blair, D.E. (2000). *Inversion Theory and Conformal Mapping*. Providence: Student Mathematical Library, Vol. 9, American Mathematical Society.
- [4] Brannan, D.A., Esplen, M.F. and Gray, J.J. (2012). *Geometry, Second Edition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] Kutuzov, B.V. (1963). *Geometri, Cilt II*. İstanbul: Sayı 20, Türk Matematik Derneği Yayınları.
- [6] Needham, T. (1997). *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- [7] Stoll, M. (2016). *Harmonic and Subharmonic Function Theory on the Hyperbolic Ball*. Cambridge: London Math. Soc. Lect. Note Series, Vol. 431, Cambridge University Press.
- [8] Tezer, C. (1992). Evritim I. *Matematik Dünyası*, Sayı 6, 12–16.
- [9] Tezer, C. (1992). Evritim II. *Matematik Dünyası*, Sayı 7, 8–12.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID : 0009-0006-0329-718X

Adı-Soyadı : Beyzanur AYAS

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2017-2021, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2022-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Yüksek Lisans