

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Gg-KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Sercan GÜLSU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sercan TURHAN

**Ocak 2022
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Gg-KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sercan GÜLSU

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 12/01/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Erhan SET
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Sercan GÜLSU
12/01/2022

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez çalışmalarım süresince, bilimsel ve manevi desteğini esirgemeyen, çalışmamın planlanması ve yürütülmesinde tecrübelerini ve bilgilerini benimle paylaşan tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Sercan TURHAN'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez çalışmamda katkılarından dolayı değerli hocalarım Prof. Dr. Mahir KADAKAL ve Prof. Dr. İmdat İŞCAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazma aşamamda her anlamda yanımda olan, beni destekleyen ve tecrübelerini paylaşan sevgili eşim Nagihan KURT GÜLSU'ya, sabır ve sevgiyle her an yanımda olan canım kızım Ece Sena'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
2.1. Ön Bilgiler.....	3
2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Tanım ve Özellikler.....	3
2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler	12
2.4 Bazı Özel Ortalamalar	13
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	16
3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler ve Elde Edilmiş Bazı Sonuçlar	16
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	28
4.1. Gg-Konveks Fonksiyonlar İçin Ana Sonuçlar.....	28
4.2. Gg-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri	31
4.3.Gg-Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler	34

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	50



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	: I aralığının içi
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
$\forall$	: Her
$\exists$	: En Az
$\ln$	: Doğal Logaritmik Fonksiyon
ω'	: ω fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
ω''	: ω fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Konveks Küme	4
Şekil 2.2.	Konveks Olmayan Küme	4
Şekil 2.3.	Konveks Fonksiyon Şekli	5
Şekil 2.4.	Konkav Fonksiyon Şekli	5
Şekil 2.5.	Konveks fonksiyonun geometrik yorumu	6
Şekil 2.6.	Bir aralıkta konveks fonksiyon	8

Gg-KONVEKS FONKSİYONLAR

ÖZET

Bu tezde Gg-konveks fonksiyonu adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Tezin birinci bölümünde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi ve konvekslik hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teoremler verilmiş ve ayrıca Ag-konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya kuramsal temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Gg-konveks fonksiyon isminde yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış, fonksiyon sınıfının literatürle olan ilişkisi verilmiş, fonksiyonların bu sınıfının bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve daha sonra yine literatürde olan bir özdeşlik yardımı ile Gg-konveks fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tipli bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İntegral Eşitsizlikleri, Ag-konveks Fonksiyonlar, Gg-konveks fonksiyonlar.

Gg-CONVEX FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, a new function class called Gg-convex functions is defined. Some new Hermite-Hadamard type inequalities are given.

The inequality information in the first part of the thesis is an introduction to the history of the convex function and convexity.

In the second part, the basic concepts, definitions and theorems required for the theoretical foundations of the thesis are given, and the relationship between Ag-convex function classes is explained, supported by the literature study.

In the third chapter, the theorems including classical inequalities used in the thesis, their proofs and some inequalities that form the theoretical basis of this study are given.

In the fourth chapter, with the definition of a new function class named Gg-convex function, the relationship of the function class with the literature is given, some algebraic properties of this class of functions are examined, and then, with the help of an identity in the literature, some new Hermite-Hadamard type for the class of Gg-convex functions. inequalities have been found.

Keywords: Convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Integral Inequalities, Gg-convex functions, Ag-convex functions

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konveksliğin temelini Arşimet'in π değerini hesaplamasıyla atıldığını söyleyebiliriz. Bu ise M.Ö. 3. yüzyıla kadar dayanmaktadır. Ancak 1881 yılında Hermite'in yaptığı çalışmaya kadar bu kavram pek gündeme gelmemiştir. 1905 yılından sonra Jensen 'in konvekslik alanda yaptığı çalışmalar ciddi kabul görmüştür. "Konvekslik" kavramı ilk olarak 1883 yılında Charles Hermite tarafından dile getirilmiştir[1]. Daha sonra devam eden süreçte Beckenbach ve Bellman (1961), Mitrovic (1970) gibi araştırmacılar konveks fonksiyonlar ile ilgili eşitsizliklere yazmış oldukları kitaplarında yer vermişlerse de konveks fonksiyonlar için eşitsizlik içeren ilk kaynağı 1987 yılında Pecaric'in yazdığı bilinmektedir [2].

Konvekslik teorisinin matematiksel finans, ekonomi, mühendislik, işletme bilimleri ve optimizasyon teorisi alanlarında merkezi ve temel bir rol oynadığı iyi bilinmektedir. Son yıllarda, konvekslik kavramı, yeni ve yenilikçi fikirler kullanılarak çeşitli yönlerde genişletildi ve geliştirildi[3][4].

Eşitsizlikler, matematiğin tüm dallarında geniş çalışma alanına sahip, sürekli gelişmekte olan bir konudur. Köklü bir tarihe sahip olup, 19. yüzyıldan beri bütün alanlarda kullanılmıştır. Bu konu, son yıllarda çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmektedir.

Eşitsizlikler teorisi içerisinde ön plana çıkmış birçok eşitsizlik vardır. Bunlardan biri de eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan konveks fonksiyonlar ile ilişkili olan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Ch. Hermite'nin Mathesis dergisine gönderdiği bir mektupta elde edilmesine rağmen uzun yıllar bu durum anlaşılmamıştır. Hatta 1948'de E.F. Beckenbach [5] bu eşitsizliğin 1893'de Hadamard tarafından ispatlandığını belirtmiştir. Fakat bu durum daha sonraki yıllarda ortaya çıkmış ve bu eşitsizlik literatüre ya Hadamard eşitsizliği ya da daha çok Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak girmiştir. Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser bu alanda verilen ilk

eserdir ve temel bir kaynaktır. Bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler, ispat yöntemleri ve sonuçları bulunur. [6] Eşitsizlikler teorisi için E.F.Beckenbach ve R.Bellman'ın birlikte yazdığı eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren “Inequalities” adlı eser[7], Mitrinovic tarafından yazılan "Analytic Inequalities"[5] ve “Classical and New Inequalities in Analysis”adlı iki eserler ve Pachpatte'nin “Mathematical Inequalities” [9] adlı eseri önemli kaynaklar arasında yer almıştır. Bu eserler birçok matematikçiyi etkilemiş ve daha sonraki dönemlerde bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap ve makale yazılmıştır.

Matematikçiler tarafından yakın zamanda eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonlar yakından takip edilmekte ve bunlarla ilgili birçok çalışmalar yapılmaktadır. Bilinen durumlardan bazı özel ve genel sonuçlar çıkarılmaya devam edilmektedir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda da bazı konvekslik türleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve yeni integral eşitsizlikleri inşa edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Süreklilik): $\omega: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|m - m_0| \text{ olan } \forall m \in S \text{ için } |\omega(m) - \omega(m_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta := \delta(\epsilon, m_0)$ sayısı varsa ω , m_0 da sürekli dir denir [10].

Tanım 2.1.2 (Düzgün Süreklilik): $\omega: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$m \rightarrow k \in S \text{ ve } |m_1 - m_2| < \delta \text{ şartını sağlayan } \forall m_1, m_2 \in S \text{ için} \\ |\omega(m_1) - \omega(m_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta := \delta(\epsilon)$ sayısı varsa ω , S de düzgün sürekli dir denir [10].

Tanım 2.1.3 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): ω , I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $m < m_2$ olan $\forall m_1, m_2 \in I$ için

- i. $\omega(m_2) > \omega(m_1)$ ise ω fonksiyonu I üzerinde artandır,
- ii. $\omega(m_2) < \omega(m_1)$ ise ω fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- iii. $\omega(m_2) \geq \omega(m_1)$ ise ω fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- iv. $\omega(m_2) \leq \omega(m_1)$ ise ω fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

denir[11].

2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.2.1 (Lineer Uzay) $L \neq \emptyset$ bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: K \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir [8].

A) L kümesi $+$ işlemine göre bir gruptur.

G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır.

G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır.

G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

L1. $a.x \in L$ dir.

L2. $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir.

L3. $(a + b).x = a.x + b.x$ dir.

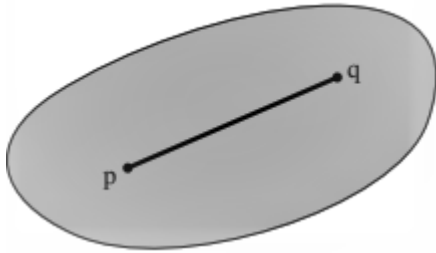
L4. $(ab).x = a.(b.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir. ($1, K$ cisminin birim elemanıdır)

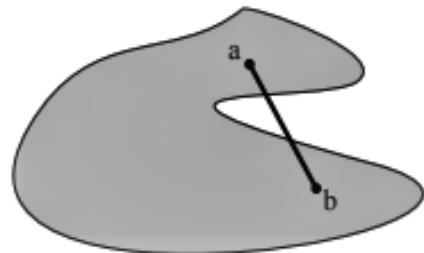
Tanım 2.2.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere $\forall m, n \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha m + (1 - \alpha)n, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha m + (1 - \alpha)n$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alınabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları m ve n olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [12].



Şekil 2.1. Konveks kümeler



Şekil 2.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 2.2.3. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $m, n \in I$ için ve $t \in [0,1]$ için,

$$\omega(\theta m + (1 - \theta)n) \leq \theta \omega(m) + (1 - \theta)\omega(n) \quad (2.2)$$

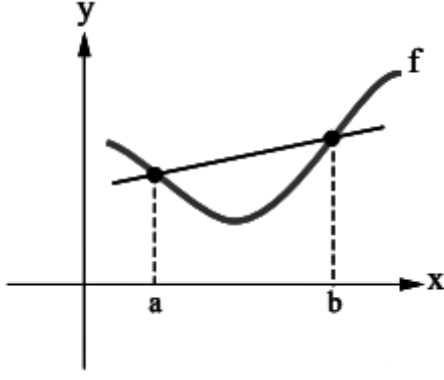
eşitsizliği geçerli ise ω fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir [13].

Konveks fonksiyonların kümesi I aralığında $\mathcal{C}(I)$ ile belirtilir.

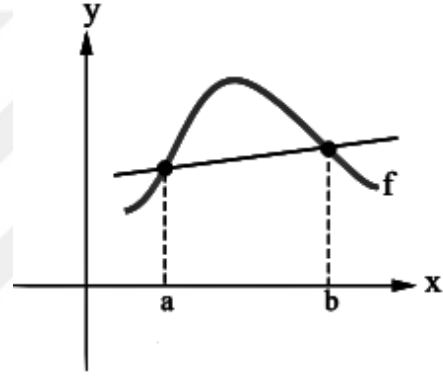
Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise

$$\omega(\theta m + (1 - \theta)n) \geq \theta \omega(m) + (1 - \theta)\omega(n) \quad (2.3)$$

ω fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.



Şekil 2.3 Konveks fonksiyon şekli



Şekil 2.4 Konkav fonksiyon şekli

Eğer ω fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise ω afin dönüşüm olur. (2.10) eşitsizliğinde $\theta \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir, yani ;

$$f(\theta m + (1 - \theta)n) < \theta \omega(m) + (1 - \theta)\omega(n) \quad (2.4)$$

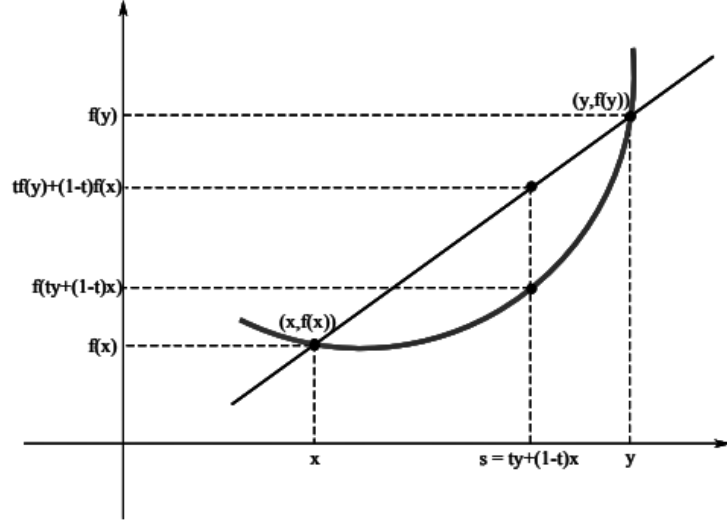
olur. Bu durumda ω fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir.

Sonuç 2.2.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir ω fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $m, n \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

$$\omega\left(\frac{pm + qn}{p + q}\right) \leq \frac{p\omega(m) + q\omega(n)}{p + q} \quad (2.5)$$

olmasıdır [7].

Geometrik olarak $\theta m + (1 - \theta)n$ noktasında ω 'nın eğri üzerinde aldığı değer $(m, \omega(m))$ ve $(n, \omega(n))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[m, n]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.



Şekil 2.5 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Gerçekten, $(m, \omega(m))$ ve $(n, \omega(n))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$L(s) = \omega(m) + \frac{\omega(n) - \omega(m)}{n - m}(s - m)$$

dir. Burada $s = \theta n + (1 - \theta)m$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L(\theta n + (1 - \theta)m) &= \omega(m) + \frac{\omega(n) - \omega(m)}{n - m}(\theta(n - m)) \\ &= \omega(m) + \theta(\omega(n) - \omega(m)) \\ &= \theta\omega(n) + (1 - \theta)\omega(m) \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.10) eşitsizliği

$$\omega(\theta n + (1 - \theta)m) \leq L(\theta n + (1 - \theta)m) = \theta\omega(n) + (1 - \theta)\omega(m) \quad (2.6)$$

elde edilir.

Şekil 2.5'ten de görüldüğü üzere, eğer $\omega(m) \leq \omega(n)$ ise her $\theta \in [0,1]$ için

$$\omega(m) \leq \theta\omega(m) + (1 - \theta)\omega(n) \leq \omega(n)$$

dır. Konkav fonksiyon için doğru parçası ω 'nin grafiğinin $[m, n]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Eğer ω fonksiyonu, $[\mu, \gamma]$ aralığında tanımlı ve konveks (konkav) ve m_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $m \in (\mu, \gamma)$ için,

$$\omega(m) - \omega(m_0) \leq (\geq) \omega'(m_0)(m - m_0) \quad (2.7)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (μ, γ) aralığında diferansiyellenebilen konveks fonksiyon (2.7) eşitsizliğini sağlar [14].

Teorem 2.2.1 ω fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, ω fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $m \in I$ için

$$\omega''(m) \geq 0$$

olmasıdır [2].

Örnek 2.2.1 $\omega(m) = e^m$ üstel fonksiyonu $\forall m \in \mathbb{R}$ için $\omega''(m) = e^m > 0$ olduğundan konvektir.

Örnek 2.2.2 $n \geq 1$ için $\omega(m) = m^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da konveks iken n çift olmak şartıyla $\omega(m) = m^n$ fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerinde konvektir. Gerçekten de $\omega''(m) = n(n-1)m^{n-2} > 0$ olduğundan her iki durumda da ω konvektir.

Örnek 2.2.3 Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için $\omega(m) = am + b$ afin fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- b. $|m|^p$ mutlak değer fonksiyonu $p \geq 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- c. $\omega(m) = m^t$ fonksiyonu $\theta \geq 1$ veya $\theta \leq 0$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- d. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $\omega(m) = e^{am}$ üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Örnek 2.2.4 $\omega: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(m) = |m|$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Çözüm: ω fonksiyonu konveks ise $m, n \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

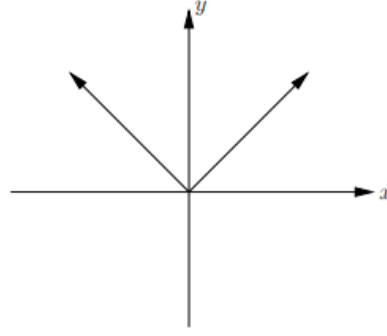
$$f(\theta m + (1 - \theta)n) \leq \theta \omega(m) + (1 - \theta)\omega(n)$$

olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\theta m + (1 - \theta)n) &= |\theta \omega(m) + (1 - \theta)\omega(n)| \\ &\leq |\theta \omega(m)| + |(1 - \theta)\omega(n)| \\ &\leq |\theta| \omega(m) + |(1 - \theta)| \omega(n) \end{aligned}$$

$$\leq \theta \omega(m) + (1 - \theta) \omega(n)$$

elde edilir ve ω fonksiyonunun konveks olduğu ispatlanmış olur. $\omega(m) = |m|$ mutlak değer fonksiyonu $m = 0$ 'da türeve sahip olmamasına rağmen konveks bir fonksiyondur.



Şekil 2.6 Bir aralıkta konveks fonksiyon

Örnek 2.2.5 Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konkav fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) = ax + b$ afin fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- b. $\omega(m) = \log(m)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- c. $\omega(m) = m^t$ fonksiyonu $0 \leq t \leq 1$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.

Teorem 2.2.2 ω fonksiyonu $[\mu, \gamma]$ aralığında konveks ise

- a. ω , (μ, γ) aralığında süreklidir.
- b. ω , $[\mu, \gamma]$ aralığında sınırlıdır [15].

İspat: a) $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (\mu, \gamma)$, $\delta > 0$ ve $M = \max \{\omega(x_0 - \delta), \omega(x_0 + \delta)\}$ olsun. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $t \in (0, 1)$ öyle ki $x = (1 - t)x_0 + t(x_0 + \delta)$ ve bu nedenle

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta)$$

elde edilir.

ω 'nın konveksliğinden ve bu iki eşitlikten ve M 'nin tanımından

$$f(x) \leq (1-t)\omega(x_0) + t\omega(x_0 + \delta) \leq (1-t)\omega(x_0) + tM \quad (2.8)$$

ve

$$\omega(x_0) = \frac{1}{1+t}\omega(x) + \frac{t}{1+t}\omega(x_0 - \delta) \leq \frac{\omega(x) + tM}{1+t} \quad (2.9)$$

elde edilir.

(2.8) ve (2.9) den ardı ardına

$$t(M - \omega(x_0)) \geq \omega(x) - \omega(x_0) \geq t(\omega(x_0) - M)$$

elde edilir ve $x - x_0 = \delta T$ için

$$|\omega(x) - \omega(x_0)| \leq |t(M - \omega(x_0))| = \frac{(M - \omega(x_0))|x - x_0|}{\delta} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Aynı ispat gösterir ki eğer $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ise (2.10) geçerlidir.

Öyleyse artımlı bölüm

$$\frac{|\omega(x) - \omega(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Her $x \in I, x \neq x_0$ için sınırlıdır. Bu (μ, γ) aralığının herhangi bir x_0 noktasında ω 'nın sürekliliğini ifade eder.

b) Sınırlılığı kanıtlamak için önce, kapalı bir aralıkta konveksliğin tanımı nedeniyle ω 'nın açıkça yukarıda sınırlı olduğuna dikkat edelim. Sonra, $[p, q] \subset (\mu, \gamma)$ olacak şekilde herhangi bir $p < q$ düşünelim. (a) kısmında kanıtlanan süreklilik, ω 'nın $[p, q]$ da sınırlı olduğunu ifade eder. Şimdi ise ω fonksiyonunun $[\mu, p]$ ve $[q, \gamma]$ aralığında ispatı yapılmalıdır. Her iki durum içinde aynı olan ispat aşağıdaki şekilde verilebilir. Eğer $x \in [\mu, p] \subset [\mu, q]$ ise sonra

$$P = \theta x + (1 - \theta)q \text{ ile } \frac{q - p}{q - \mu} \leq \theta \leq 1 \quad (2.11)$$

olur. (2.11) eşitliğinde $x = \mu$ alınırsa

$$\theta = \frac{q - p}{q - \mu} > 0$$

olur. Şimdi, ω nın konveksliğinden

$$\omega(p) \leq \theta \omega(x) + (1 - \theta) \omega(q)$$

ve

$$\omega(x) \geq \frac{1}{\theta} \omega(p) + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \omega(q) \quad (2.12)$$

$(q - \mu) / (q - p) \geq 1 / \theta \geq 1$ olduğu için (6) eşitsizliğinin sağ tarafı $[\mu, p]$ aralığındaki ω fonksiyonu için bir alt sınır olur. Böylece ispat tamamlanır [30], [31].

[16]' da Cristescu, konveks fonksiyonların önemli bir eşitsizliği aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

Teorem 2.2.3. ω ve g fonksiyonlarının $[\mu, \gamma]$ aralığında gerçekteğerli, negatif olmayan ve konveks fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{1}{(\gamma - \mu)^2} \int_{\mu}^{\gamma} \int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega(\theta x + (1 - \theta)y) g(\omega(\theta x + (1 - \theta)y)) d\theta dy dx \\ & \leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega(x) g(x) dx + \frac{1}{8} [M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) d\theta dx \\ & \leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) g(x) dx + \frac{1}{2} [M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitsizlikleri geçerlidir, burada

$$M(a, b) = \omega(a)g(a) + \omega(b)g(b)$$

ve

$$N(a, b) = \omega(a)g(b) + \omega(b)g(a)$$

gösterimleri kullanılmıştır.

Tanım 2.2.4. (Geometrik-Aritmetik (GA) Konveks Fonksiyon): $\omega: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer ω fonksiyonu $\forall m, n \in I, \lambda \in [0, 1]$ için,

$$\omega(m^\lambda n^{1-\lambda}) \leq \lambda \omega(m) + (1 - \lambda) \omega(n) \quad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ω fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir. Burada $m^\lambda n^{1-\lambda}$ ifadesi m ve n pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\omega(m) + (1 - \lambda) \omega(n)$ ifadesi ise $\omega(m)$ ve $\omega(n)$ sayılarının ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır [4].

Tanım 2.2.5. (Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $\omega: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer ω fonksiyonu $\forall m, n \in I, s \in (0, 1]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\omega(m^\lambda n^{1-\lambda}) \leq \lambda^s \omega(m) + (1 - \lambda)^s \omega(n)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ω fonksiyonuna GA - s konveks fonksiyon denir [19].

Tanım 2.2.6. $I \subset (0, \infty)$ bir aralık, $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$ olsun. Eğer

$$\omega(x^\theta y^{1-\theta}) \leq \theta g(\omega(x)) + (1 - \theta)g(\omega(y)) \quad (2.16)$$

eşitsizliği her $x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için tanımlı ise ω , Gg -konveks (veya (GA, g) -konveks) fonksiyondur. Eğer (2.16) eşitsizlik tersine çevrilirse fonksiyona Gg -konkav denir. $GgC(I)$ tarafından, I aralığındaki Gg -konveks fonksiyonların kümesini göstereceğiz.

[17]' da Kadakal ve İşcan yeni bir konvekslik sınıfı tanımlayıp bu konvekslik sınıfı ile ilgili çeşitli yeni özellikleri aşağıdaki şekilde belirtmiştir:

Tanım 2.2.7. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$ olsun. Eğer,

$$\omega(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta g(\omega(x)) + (1 - \theta)g(\omega(y)) \quad (2.17)$$

eşitsizliği her $x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için geçerli ise ω fonksiyonuna Ag -Konveks denir. I aralığı üzerindeki Ag -konveks fonksiyonların kümesi $AgC(I)$ ile gösterilir.

g fonksiyonu $g(x) \leq x$, $x \in \omega(I)$ şartını sağlıyorsa, o zaman ω fonksiyonu da konvektir.

Önerme 2.2.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ve $J \supset \omega(I)$ olsun. Eğer ω fonksiyonu Ag -konveks ise, o zaman her $y \in \omega(I)$ için $y \leq g(y)$ sağlanır.

Uyarı 2.2.1. i) Önerme 2.2.1'e göre her konveks fonksiyon Ag -konveks fonksiyondur. Gerçekten, her $\theta \in [0,1]$ ve her $\mu, \gamma \in I$ için

$$\begin{aligned} \omega(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) &\leq \theta\omega(\mu) + (1 - \theta)\omega(\gamma) \leq \theta g(\omega(\mu)) + (1 - \theta)g(\omega(\gamma)) \\ &\leq \theta(g\omega)(\mu) + (1 - \theta)(g\omega)(\gamma) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitsizlikler $C(I) \subseteq AgC(I)$ olduğunu gösterir.

ii) Ancak, yukarıdaki her zaman doğru değildir. Yani, her Ag -konveks fonksiyon, konveks fonksiyon olmayabilir. Örneğin, $\omega: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(x) = \frac{1}{x}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x$ olsun. Her $x, y \in (-\infty, 0)$ için,

$$\frac{1}{\theta x + (1 - \theta)y} \leq -\theta \frac{1}{x} - (1 - \theta) \frac{1}{y}$$

olduğundan, θ fonksiyonu Ag -konvektir. Ama bu fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında konveks değildir.

iii) $AgC(I) = C(I) \Leftrightarrow g(x) = x$ olduğu açıktır.

Teorem 2.2.4. $c \in [0, \infty)$ olsun. Eğer ω fonksiyonu Ag -konveks fonksiyon ve g lineer ise, $c\omega$ fonksiyonu Ag -konveks fonksiyondur.

Teorem 2.2.5. ω, h fonksiyonları Ag -konveks ve g lineer ise, $\omega + h$ fonksiyonu Ag -konveks fonksiyondur.

Teorem 2.2.6. ω fonksiyonu Ag -konveks ve monoton artan ve h konveks ise, ωh fonksiyonu Ag -konvektir.

Teorem 2.2.7. $\omega, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her ikisi de negatif olmayan, monoton (artan veya azalan) ve $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$ fonksiyonu monoton (artan veya azalan) ve $g(m)g(n) \leq g(mn)$ şartını sağlasın. Eğer ω, h Ag -konveks fonksiyon ise, o zaman ωh fonksiyonu Ag -konveks fonksiyondur.

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi m, n reel sayıları için

$$|m + n| \leq |m| + |n|$$

$$||m| - |n|| \leq |m - n|$$

$$||m| - |n|| \leq |m + n|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|m_1 + \dots + m_k| \leq |m_1| + \dots + |m_k|$$

eşitsizlikleri geçerlidir[27].

Teorem 2.3.2 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $\omega, [\gamma, \mu]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm \right| \leq \int_{\mu}^{\gamma} |\omega(m)| dm \quad (\mu < \gamma) \quad (2.18)$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

Teorem 2.3.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ω ve g , $[\mu, \gamma]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|\omega|^p$ ve $|g|^q$, $[\mu, \gamma]$ aralığında integrallebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\mu}^{\gamma} |\omega(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mu}^{\gamma} |\omega(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mu}^{\gamma} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

Tanım 2.3.1. (Power-Mean İntegral Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. ω ve g , $[\mu, \gamma]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|\omega|$ ve $|g|^q$, $[\mu, \gamma]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_{\mu}^{\gamma} |\omega(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mu}^{\gamma} |\omega(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\mu}^{\gamma} |\omega(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

2.4 Bazı Özel Ortalamalar

Bu başlık altında μ, γ gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir.

- Aritmetik ortalama:

$$A = A(\mu, \gamma) := \frac{\mu + \gamma}{2}$$

- Geometrik ortalama:

$$G = G(\mu, \gamma) := \sqrt{\mu\gamma}$$

- Harmonik ortalama:

$$H = H(\mu, \gamma) := \frac{2\mu\gamma}{\mu + \gamma}$$

- Logaritmik ortalama:

$$L = L(\mu, \gamma) := \begin{cases} \mu & , \mu = \gamma \\ \frac{\gamma - \mu}{\ln \gamma - \ln \mu} & , \mu \neq \gamma \end{cases}$$

- p –logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(\mu, \gamma) := \begin{cases} \mu & , \mu = \gamma \\ \left[\frac{\gamma^{p+1} - \mu^{p+1}}{(p+1)(\gamma - \mu)} \right]^{\frac{1}{p}} & , \mu \neq \gamma \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu bilinir. $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde yer almaktadır.

Verilen ortalamalarla arasındaki ilişkiyi veren bazı önermeler aşağıdaki gibidir:

Önerme 2.4.1. $\mu, \gamma \in \mathcal{R}^+$ ve $\theta \in [0, 1]$ keyfi olsun .

Ağırlıklı (genelleştirilmiş) Harmonik Ortalama: $H_{\theta} = H_{\theta}(\mu, \gamma) = \frac{\mu\gamma}{\theta\gamma + (1-\theta)\mu}$

Ağırlıklı Geometrik ortalama: $G_{\theta} = G_{\theta}(\mu, \gamma) = \mu^{\theta} \gamma^{1-\theta}$

Ağırlıklı Aritmetik ortalama: $A_\theta = A_\theta(\mu, \gamma) = \theta\mu + (1 - \theta)\gamma$ ise $H_t \leq G_t \leq A_t$ dir.

İspat: $\omega: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da konvektstir (Çünkü $\omega(x) = -\ln x$ fonsiyonunun ikinci türevi pozitiftir). Yani $\forall \mu, \gamma \in \mathcal{R}^+$ ve $\forall \theta \in [0, 1]$ için

$$\omega(\theta\mu + (1-\theta)\gamma) \leq \theta\omega(\mu) + \omega(\gamma) \quad (2.19)$$

$$-\ln(\theta\mu + (1-\theta)\gamma) \leq \theta \ln \mu - (1-\theta) \ln \gamma = -\ln(\mu^\theta \gamma^{1-\theta})$$

$$\ln A_t \geq \ln G_t \geq e^{\ln A_t} \geq e^{\ln G_t}$$

$$G_t \leq A_t$$

olur.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ H_t \leq G_t \leq A_t \\ \hline 2 \end{array}$$

(2) için : $\omega: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(x) = \frac{1}{x}$ konveks olup $\forall (\mu, \gamma) \in [0, \infty)$ ve $\forall \theta \in [0, 1]$ için (5)'ten

$$\frac{1}{\theta\mu + (1-\theta)\gamma} = \frac{1}{A_\theta} \leq \frac{\theta}{\mu} + \frac{1-\theta}{\gamma} = \frac{\theta\gamma + (1-\theta)\mu}{\mu\gamma} = \frac{1}{H_\theta} \Rightarrow H_\theta \leq A_\theta$$

(3) için; kabul edelim ki $\exists (\mu, \gamma) \in \mathcal{R}^+$ ve $\exists \theta \in [0, 1]$ için öyle ki $H_\theta > G_\theta$ olsun.

$$\Rightarrow \ln H_\theta > \ln G_\theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln(\mu, \gamma) - \ln(\theta\gamma + (1-\theta)\mu) &> \ln(\mu^\theta \gamma^{1-\theta}) = \theta \ln \mu + (1-\theta) \ln \gamma \\ \Rightarrow -\ln(\theta\gamma + (1-\theta)\mu) &> \theta \ln \mu + (1-\theta) \ln \gamma - \ln \mu\gamma \\ &= -(1-\theta) \ln \mu - \theta \ln \gamma \\ &= -\ln(\mu^{1-\theta} \gamma^\theta) \\ \Rightarrow -\ln(A_{1-\theta}) &> -\ln G_{1-\theta} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_{1-\theta} < G_{1-\theta}$ olur ki bu çelişkidir. O halde varsayım yapılmıştır. Yani $\forall \mu, \gamma \in \mathcal{R}^+$ ve $\forall \theta \in [0, 1]$ için $H_\theta \leq G_\theta$ dir.

Sonuç olarak $H_\theta \leq G_\theta \leq A_\theta$ ispatlanmış olur[28].

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği verilip sonrasında bu çalışmaya temel olan GA ve Ag konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler incelenmiştir.

3.1 Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler ve Elde Edilmiş Bazı Sonuçlar

Teorem 3.1.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $\mu, \gamma \in I, \mu < \gamma$ ise

$$\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm \leq \frac{\omega(\mu) + \omega(\gamma)}{2} \quad (3.1)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada ω fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir [13].

İspat. ω fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[\mu, \gamma]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından,

$$\omega(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) \leq \theta\omega(\mu) + (1 - \theta)\omega(\gamma)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında θ 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) d\theta &\leq \int_0^1 \theta\omega(\mu) d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)\omega(\gamma) d\theta \\ &= \int_0^1 \theta\omega(\mu) d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)\omega(\gamma) d\theta \\ &= \frac{\omega(\mu) + \omega(\gamma)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan,

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx = \int_0^1 \omega(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) d\theta$$

olur ki bu Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm$$

belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm = \frac{1}{\gamma - \mu} \left[\int_{\mu}^{\frac{\mu+\gamma}{2}} \omega(m) dm + \int_{\frac{\mu+\gamma}{2}}^{\gamma} \omega(m) dm \right]$$

olarak yazıp bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere sırasıyla $m = \mu + \theta(\gamma - \mu)/2$ ve $m = \gamma - \theta(\gamma - \mu)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\omega \left(\mu + \frac{\theta(\gamma - \mu)}{2} \right) + \omega \left(\gamma - \frac{\theta(\gamma - \mu)}{2} \right) \right] d\theta \\ &\geq \omega \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı da ispat edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

[18] de M. Avcı Ardiç ve arkadaşları çalışmalarında GA- konveks fonksiyonlar için yeni bir lemma ve bu lemmaya bağlı yeni teoremler verdiler:

Lemma 3.1.1. $\omega: I \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu < \gamma$ ile I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer her $x \in [\mu, \gamma]$ için $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ise

$$\begin{aligned} \gamma f(\gamma) - \mu f(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx &= (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} a^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \mu^{1-\theta}) d\theta \\ &\quad - (\ln x - \ln \gamma) \int_0^1 x^{2\theta} b^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta}) d\theta \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1 2. $\omega: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci anlamda GA - s konveks fonksiyon ve $\mu, \gamma \in I, \mu < \gamma$. Eğer $\omega \in L[\mu, \gamma]$ ise

$$2^{s-1} \omega(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{\omega(x)}{x} dx \leq \frac{\omega(\mu) + \omega(\gamma)}{s+1} \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Hipotezden ω ikinci anlamda $GA - s$ konveks fonksiyon olduğundan her $x, y \in I$

$$\omega(\sqrt{xy}) \leq \frac{\omega(x) + \omega(y)}{2^s} \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3) eşitsizliğinde her $\theta \in [0,1]$ için $x = \mu^{1-\theta}\gamma^\theta$ ve $y = \mu^\theta\gamma^{1-\theta}$ alınırsa

$$\omega(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{\omega(\mu^{1-\theta}\gamma^\theta) + \omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta})}{2^s}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının her $\theta \in [0,1]$ için integrali alınır (3.2) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

İkinci olarak her $\theta \in [0,1]$ için

$$\omega(\mu^{1-\theta}\gamma^\theta) \leq \theta^s \omega(\mu) + (1-\theta)^s \omega(\gamma)$$

olduğundan bu eşitsizliğin her $\theta \in [0,1]$ için integrali alınır

$$\int_0^1 \omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta}) d\theta \leq \frac{\omega(\mu) + \omega(\gamma)}{s+1}$$

olur. Burada son integralde $x = \mu^\theta\gamma^{1-\theta}$ şeklinde değişken değişimi uygulandığında

$$\int_0^1 \omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta}) d\theta = \frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_\mu^\gamma \frac{\omega(x)}{x} dx$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1. teorem de $s=1$ alındığında ([19]'de, $s = 1$ olması durumunda, geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilebilir)

$$\omega(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_\mu^\gamma \frac{\omega(x)}{x} dx \leq \frac{\omega(\mu) + \omega(\gamma)}{2}$$

elde edilir. Bu ise geometrik aritmetik (GA) konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğidir.

[19-26] da yazarlar tarafından Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğinin GA – ve GG -konveks fonksiyonlar üzerindeki çalışmaları kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır ve tezin temelini oluşturan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.3 $\omega: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$, I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|, [\mu, \gamma]$ aralığında GG-konveks fonksiyon ise, her $x \in [\mu, \gamma]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m)dm \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu)L(\mu^2|\omega'(\mu)|, x^2|\omega'(x)|) \\ & \quad + (\ln \gamma - \ln x)L(x^2|\omega'(x)|, \gamma^2|\omega'(\gamma)|) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır[29].

İspat: Lemma 3.1.1 ve $|\omega'(x)|$ 'in GG-konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m)dm \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \mu^{1-\theta}) d\theta \\ & \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta}) d\theta \\ & \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} [|\omega'(x)|^\theta |\omega'(\mu)|^{1-\theta}] d\theta \\ & \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} [|\omega'(x)|^\theta |\omega'(\mu)|^{1-\theta}] d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile aşağıdaki ifade çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\frac{x^2 |\omega'(x)| - \mu^2 |\omega'(\mu)|}{\ln(x^2 |\omega'(x)|) - \ln(\mu^2 |\omega'(\mu)|)} \right) \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\frac{\gamma^2 |\omega'(\gamma)| - x^2 |\omega'(x)|}{\ln(\gamma^2 |\omega'(\gamma)|) - \ln(x^2 |\omega'(x)|)} \right)
\end{aligned}$$

Elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4. $\omega: I \subseteq R_+ \rightarrow (0, \infty)$, I° ve $a, b \in I^\circ$ üzerinde, $a < b$ ve $\omega' \in L[a, b]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|, [a, b]$ aralığında GG-konveks fonksiyon ise her $x \in [a, b]$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) L^{1-\frac{1}{q}}(\mu^2, x^2) L^{\frac{1}{q}}(\mu^2 |\omega'(\mu)|^q, x^2 |\omega'(x)|^q) \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, \gamma^2) L^{\frac{1}{q}}(x^2 |\omega'(x)|^q, \gamma^2 |\omega'(\gamma)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [29]

İspat: Lemma 3.1.1 ve $|\omega'(x)|'$ in GG-konveksliğini ve Power Mean İntegral eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m) dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \mu^{1-\theta}) d\theta \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta}) d\theta \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} [|\omega'(x)|^{q\theta} |\omega'(\mu)|^{q(1-\theta)}] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} [|\omega'(x)|^{q\theta} |\omega'(\gamma)|^{q(1-\theta)}] d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadedeki integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m)dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{x^2 - \mu^2}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{x^2 |\omega'(x)|^q - \mu^2 |\omega'(\mu)|^q}{\ln x^2 |\omega'(x)|^q - \ln \mu^2 |\omega'(\mu)|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (\ln \gamma - \ln x)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\gamma^2 - x^2}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{\gamma^2 |\omega'(\gamma)|^q - x^2 |\omega'(x)|^q}{\ln \gamma^2 |\omega'(\gamma)|^q - \ln x^2 |\omega'(x)|^q} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5. $\omega: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$, I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|, [\mu, \gamma]$ aralığında GG-konveks fonksiyon ise her $x \in [\mu, \gamma]$ ve $q > 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m)dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) L^{1-\frac{1}{q}} \left(\mu^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{q}} (|\omega'(\mu)|^q, |\omega'(x)|^q) \\
& + (\ln \gamma - \ln x) L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}}, \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} L^{\frac{1}{q}} (|\omega'(x)|^q, |\omega'(\gamma)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Teorem 3.1.6. $\omega: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$, I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[a, b]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|, [\mu, \gamma]$ aralığında GG-konveks fonksiyon ise her $x \in [\mu, \gamma]$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(m)dm \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) L^{\frac{1}{q}} ((\mu^2 |\omega'(\mu)|)^q, (x^2 |\omega'(x)|)^q) \\
& + (\ln \gamma - \ln x) L^{\frac{1}{q}} ((x^2 |\omega'(x)|)^q, (\gamma^2 |\omega'(\gamma)|)^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

[17] Kadakal ve İşcan çalışmalarında Ag- Konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsiliğini elde edip yeni teoremler ve sonuçlar verdiler:

Teorem 3.1.7. $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$ Ag-konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$, $\mu < \gamma$ olacak şekilde $\mu, \gamma \in I$ ve $go\omega \in L[\mu, \gamma]$ ise

$$\omega\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(m) dm$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: ω fonksiyonu Ag-konveks olduğundan

$$\omega\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right) = \omega\left(\frac{[\theta\mu + (1 - \theta)\gamma] + [(1 - \theta)\mu + \theta\gamma]}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} (go\omega)(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) + \frac{1}{2} (go\omega)((1 - \theta)\mu + \theta\gamma)$$

elde edilir. Son ifadenin $\theta \in [0, 1]$ için her iki tarafın integrali alınırsa

$\theta \in [0, 1]$ de son eşitsizlikte integral alırsak,

$$\omega\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(m) dm$$

elde edilir.

Uyarı 3.1.1. Eğer Teorem 3.1.7 de $g(x) = x$ alırsak , o zaman konveks fonksiyonlar için Hermite-hadamard eşitsizliğinin sol tarafını elde edilir.

Teorem 3.1.8. $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Ag-konveks fonksiyon, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$, $\mu < \gamma$ olmak üzere $\mu, \gamma \in I$ ve $\omega \in L[\mu, \gamma]$ ise

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \leq \frac{(go\omega)(\mu) + (go\omega)(\gamma)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: ω fonksiyonunun Ag-konveksliğini kullanarak ve $x = \theta\mu + (1 - \theta)\gamma$ şeklinde değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^1 \omega(\theta\mu + (1 - \theta)\gamma) d\theta = \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx$$

$$\leq \int_0^1 [\theta g(\omega(\mu)) + (1 - \theta)(\omega(\gamma))] d\theta$$

$$= \frac{(go\omega)(\mu) + (go\omega)(\gamma)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.1.2. Eğer Teorem 3.1.8 de $g(x) = x$ alırsak, o zaman konveks fonksiyonlar için Hermite-hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

Teorem 3.1.9. ω ve h gerçekteğerli, negatif olmayan ve $[a, b]$ aralığında Ag-konveks fonksiyonlar olsun . O zaman, aşağıdaki eşitsizlikler her $x, y \in [\mu, \gamma]$ ve $\theta \in [0,1]$ için geçerlidir.

$$\frac{3}{2} \frac{1}{(\gamma - \mu)^2} \int_{\mu}^{\gamma} \int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega(\theta x + (1 - \theta)y) h(\theta x + (1 - \theta)y) d\theta dy dx \quad (3.4)$$

$$\leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x)(goh)(x) dx + \frac{1}{8} [M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma)]$$

$$\frac{3}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) h \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) d\theta dx \quad (3.5)$$

$$\leq \frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x)(goh)(x) dx + \frac{1}{2} [M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma)]$$

burada

$$M(\mu, \gamma) = (go\omega)(\mu)(goh)(\mu) + (go\omega)(\gamma)(goh)(\gamma)$$

$$N(\mu, \gamma) = (go\omega)(\mu)(goh)(\gamma) + (go\omega)(\gamma)(goh)(\mu)$$

elde edilir.

İspat: Her iki ω ve g Ag-konveks olduğundan, her iki nokta $x, y \in [\mu, \gamma]$ ve $\theta \in [0,1]$ için,

$$\omega(tx + (1 - t)y) \leq t(\text{gof})(x) + (1 - t)(\text{gof})(y)$$

$$h(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta(\text{goh})(x) + (1 - \theta)(\text{goh})(y)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yukarıdaki eşitsizlikleri çarparsak,

$$\begin{aligned} & \omega(\theta x + (1 - \theta)y)h(\theta x + (1 - \theta)y) \\ & \leq \theta^2(\text{go}\omega)(x)(\text{goh})(x) + (1 - \theta)^2(\text{go}\omega)(y)(\text{goh})(y) \\ & \quad + \theta(1 - \theta)[(\text{go}\omega)(x)(\text{goh})(y) + (\text{go}\omega)(y)(\text{goh})(x)]. \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında θ ye göre integrallenebilir, Ag-konveks fonksiyonunun bilinen özellikleriyle birlikte. O zaman, bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığında integrallersek Ag-konveks fonksiyon özelliği ile birlikte ifadenin $[0,1]$ aralığında θ 'ya göre integrali alınır

$$\int_0^1 \omega(\theta x + (1 - \theta)y)h(\theta x + (1 - \theta)y)d\theta \quad (3.6)$$

$$\leq \frac{2(\gamma - \mu)}{3} \int_{\mu}^{\gamma} (\text{go}\omega)(x)(\text{goh})(x) + \frac{1}{3} \left(\int_{\mu}^{\gamma} (\text{go}\omega)(x)dx \right) \left(\int_{\mu}^{\gamma} (\text{goh})(y)dy \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

ω ve g fonksiyonları konveks olduğundan,

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x)dx \leq \frac{(\text{go}\omega)(\mu) + (\text{go}\omega)(\gamma)}{2} \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{\gamma - \mu} \int_{\mu}^{\gamma} h(x)dx \leq \frac{(\text{goh})(\mu) + (\text{goh})(\gamma)}{2} \quad (3.8)$$

olur.

(3.5) nin sağ tarafından son iki integralde (3.7) ve (3.8) nin değiştirilmesiyle, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_0^1 \omega(\theta x + (1 - \theta)y)h(\theta x + (1 - \theta)y)d\theta \quad (3.9)$$

$$\leq \frac{2(\gamma - \mu)}{3} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x)(goh)(x)dx$$

$$+ \frac{(\gamma - \mu)^2}{12} [(go\omega)(\gamma) + (go\omega)(\mu)][(goh)(\gamma) + (goh)(\mu)].$$

Doğrudan hesaplar gösteriyor ki

$$[(go\omega)(\gamma) + (go\omega)(\mu)][(goh)(\gamma) + (goh)(\mu)] = M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma) \quad (3.10)$$

(3.10) i (3.9) de yerine yazarsak ve (3.9) nin her iki tarafını $\frac{3}{(\gamma - \mu)^2}$ ile çarparsak (3.3) nin ispatı tamamlanır.

(3.4) eşitsizliğini ispatlayalım. ω ve g fonksiyonlarının Ag-konveksliği

$$\omega\left(\theta x + (1 - \theta)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)\right) \leq \theta(go\omega)(x) + (1 - \theta)(go\omega)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right),$$

$$h\left(\theta x + (1 - \theta)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)\right) \leq \theta(goh)(x) + (1 - \theta)(goh)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)$$

eşitsizliklerini verir.

Yukarıdaki gibi, bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\omega\left(\theta x + (1 - \theta)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)\right)h\left(\theta x + (1 - \theta)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)\right) \quad (3.11)$$

$$\leq \theta^2(go\omega)(x)(goh)(x) + (1 - \theta)^2(go\omega)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)(goh)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)$$

$$+ \theta(1 - \theta)\left[(go\omega)(x)(goh)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right) + (go\omega)\left(\frac{\mu + \gamma}{2}\right)(goh)(x)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İlk eşitsizliğin ispatına benzer olarak, (3.11) un her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integralini alınırsa,

$$\int_0^1 \omega \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) h \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) d\theta \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{3} \left[(go\omega)(x)(goh)(x) + (go\omega) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) (goh) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right] \\ + \frac{1}{6} \left[(go\omega)(x)(goh) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) + (go\omega) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) (goh)(x) \right]$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi, ω ve h fonksiyonlarının Ag-konveksliğini kullanarak ve $[\mu, \gamma]$ aralığı üzerinden (3.12) un her iki tarafının integralini alarak,

$$\int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \omega \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) h \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) d\theta dx \quad (3.13)$$

$$\leq \frac{1}{3} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x)(goh)(x) dx \\ + \frac{\gamma - \mu}{12} [(go\omega)(\mu) + (go\omega)(\gamma)][(goh)(\mu) + (goh)(\gamma)] \\ + \frac{(goh)(\mu) + (goh)(\gamma)}{12} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x) dx \\ + \frac{(go\omega)(\mu) + (go\omega)(\gamma)}{12} \int_{\mu}^{\gamma} (goh)(x) dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Bir kez daha, son eşitsizliğin sağ tarafındaki son iki integralde (3.4) ve (3.5)'i değiştirir ve (3.7) yı kullanırsak,

$$\int_{\mu}^{\gamma} \int_0^1 \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) h \left(\theta x + (1 - \theta) \left(\frac{\mu + \gamma}{2} \right) \right) d\theta dx \quad (3.14)$$

$$\leq \frac{1}{3} \int_{\mu}^{\gamma} (go\omega)(x)(goh)(x)dx + \frac{\gamma - \mu}{6} [M(\mu, \gamma) + N(\mu, \gamma)]$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer (3.14) eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{3}{\gamma - \mu}$ ile çarparsak (3.4) ün ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.1.3. Eğer $g(x) = x$ alırsak, o zaman Teorem 2.2.2 nin (2.11) ve (2.12) eşitsizlikleri elde edilir . Yani, sonuçlarımız [2] deki sonuçlarla çakışır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün temel amacı, Gg -konveks fonksiyon (veya (GA, g) -konveks) adı verilen yeni bir konveks fonksiyon sınıfı vermek ve hem Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri hem de Gg -konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikleri oluşturmaktadır. Özel durumlarda elde edilen sonuçlar literatürde elde edilen sonuçlarla çalışmaktadır.

4.1. Gg -Konveks Fonksiyonlar İçin Ana Sonuçlar

Tanım 4.1.1 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık, $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ve $J \supset \omega(I)$ olsun. Eğer ω , Gg -konveks ise sonra her $y \in \omega(I)$ için $y \leq g(y)$ olur.

İspat Keyfi $y \in \omega(I)$ alalım. Sonra, $y = \omega(x)$ olacak şekilde bir $x \in I$ vardır. Eğer $\mu \in I \setminus \{x\}$ sabit olarak alırsak, sonra ω fonksiyonu Gg -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için

$$\omega(x^\theta \mu^{1-\theta}) \leq \theta(g \circ \omega)(x) + (1 - \theta)(g \circ \omega)(\mu).$$

$\theta = 1$, $\omega(x) \leq g(\omega(x))$ için, $y \leq g(y)$ dir. Bu bize her $y \in \omega(I)$ için $y \leq g(y)$ olduğunu gösterir.

Uyarı 4.1.1. $I \subset (0, \infty)$ bir aralık, $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$ olsun.

i) Eğer g fonksiyonu $y \leq g(y)$, $y \in \omega(I)$ koşulunu sağlarsa ve ω fonksiyonu GA -konveks ise, ω Gg -konveks fonksiyondur. Aslında, her $\theta \in [0, 1]$ ve her $\mu, \gamma \in I$ için

$$\omega(\mu^\theta \gamma^{1-\theta}) \leq \theta \omega(\mu) + (1 - \theta) \omega(\gamma)$$

$$\leq \theta g(\omega(\mu)) + (1 - \theta) g(\omega(\gamma))$$

$$\leq \theta (g \circ \omega)(\mu) + (1 - \theta) (g \circ \omega)(\gamma).$$

ii) Eğer g fonksiyonu $g(y) \leq y$, $y \in \omega(I)$ koşulunu sağlarsa ve ω fonksiyonu Gg -konveks ise, ω GA -konveks fonksiyondur. Aslında, her $\theta \in [0,1]$ ve her $\mu, \gamma \in I$ için

$$\begin{aligned}\omega(\mu^\theta \gamma^{1-\theta}) &\leq \theta g(\omega(\mu)) + (1-\theta)g(\omega(\gamma)) \\ &\leq \theta \omega(\mu) + (1-\theta)\omega(\gamma).\end{aligned}$$

iii) Belli ki $GgC(I) = GAC(I) \Leftrightarrow g(x) = x$ dir.

Teorem 4.1.1 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık ve $c \in [0, \infty)$ olsun. Eğer $\omega \in GgC(I)$ ve g lineer ise, ωc Gg -konveks fonksiyondur.

İspat 4.1.1 $c \in [0, \infty)$ için, ω Gg -konveks olduğundan ve g lineer olduğundan

$$\begin{aligned}(c\omega)(x^\theta y^{1-\theta}) &\leq c[\theta g(\omega(x)) + (1-\theta)g(\omega(y))] \\ &= \theta g(c\omega(x)) + (1-\theta)g(c\omega(y)) \\ &= \theta(g \circ (c\omega))(x) + (1-\theta)(g \circ (c\omega))(y)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık olsun. Eğer $\omega, h \in GgC(I)$ fonksiyonları ve g lineer ise, $\omega + h \in GgC(I)$ dir.

İspat 4.1.2 $x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için, $\omega, h \in GgC(I)$ ve g lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}(\omega + h)(x^\theta y^{1-\theta}) &= \omega(x^\theta y^{1-\theta}) + h(x^\theta y^{1-\theta}) \\ &\leq [\theta g(\omega(x)) + (1-\theta)g(\omega(y))] + [\theta g(h(x)) + (1-\theta)g(h(y))] \\ &= \theta[g(\omega(x)) + g(h(x))] + (1-\theta)[g(\omega(y)) + g(h(y))] \\ &= \theta g(\omega(x) + h(x)) + (1-\theta)g(\omega(y) + h(y)) \\ &= \theta(g \circ (\omega + h))(x) + (1-\theta)(g \circ (\omega + h))(y).\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık olsun. Eğer $\omega \in \text{GgC}(I)$ fonksiyonu monoton artan, ve h GG-konveks ise $\omega \circ h \in \text{GgC}(I)$ dır.

İspat 4.1.3 $x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için, $\omega, h \in \text{GgC}(I)$ ve g lineer olduğundan,

$$(\omega \circ h)(x^\theta y^{1-\theta}) = \omega(h(x^\theta y^{1-\theta}))$$

$$\leq \omega(h^\theta(x)h^{1-\theta}(y))$$

$$\leq \theta g(\omega(h(x))) + (1 - \theta)g(\omega(h(y)))$$

$$\leq \theta(g \circ (\omega(h)))(x) + (1 - \theta)(g \circ (\omega(h)))(y).$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık, $\omega, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ hem negatif olmayan, monoton (artan veya azalan) olsun ve $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$, monoton (artan veya azalan) ve $g(m)g(n) \leq g(mn)$ şartını sağlar. Eğer $\omega, h \in \text{GgC}(I)$ ise $\omega h \in \text{GgC}(I)$ dır.

İspat 4.1.4 Eğer $x \leq y$ ise

$$[g(\omega(x)) - g(\omega(y))][g(h(y)) - g(h(x))] \leq 0$$

demektir

$$\begin{aligned} & g(\omega(x))g(h(y)) + g(\omega(y))g(h(x)) \\ & \leq g(\omega(x))g(h(x)) + g(\omega(y))g(h(y)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Diğer taraftan $x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için, $\omega, h \in \text{GgC}(I)$ ve g lineer olduğundan,

$$(\omega h)(x^\theta y^{1-\theta}) = \omega(x^\theta y^{1-\theta})h(x^\theta y^{1-\theta})$$

$$\leq [\theta g(\omega(x)) + (1 - \theta)g(\omega(y))][\theta g(h(x)) + (1 - \theta)g(h(y))]$$

$$= \theta^2 g(\omega(x))g(h(x)) + (1 - \theta)g(\omega(x))g(h(y))$$

$$+ \theta(1 - \theta)g(\omega(y))g(h(x)) + (1 - \theta)^2g(\omega(y))g(h(y)).$$

(4.1) i kullanırsak,

$$\begin{aligned} & (\omega h)(x^\theta y^{1-\theta}) \\ & \leq t^2 g(\omega(y))g(h(x)) + (1 - \theta)^2 g(\omega(y))g(h(y)) \\ & \quad + \theta(1 - \theta)[g(\omega(x))g(h(x)) + g(\omega(y))g(h(y))] \\ & \leq \theta[\theta + (1 - \theta)]g(\omega(x))g(h(x)) + (1 - \theta)[\theta + (1 - \theta)]g(\omega(y))g(h(y)) \\ & = \theta g(\omega(x))g(h(x)) + (1 - \theta)g(\omega(y))g(h(y)) \\ & \leq \theta g(\omega h)(x) + (1 - \theta)g(\omega h)(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.2 Gg -Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Teorem 4.2.1 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık olsun. Eğer $\omega \in GgC(I)$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$, $\mu < \gamma$ ile $\mu, \gamma \in I$ ve $g \circ \omega \in L[a, b]$. Aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{f(m)}{m} dm \leq \frac{(g \circ \omega)(\mu) + (g \circ \omega)(\gamma)}{2}.$$

İspat 4.2.1 $[\mu, \gamma]$ aralığındaki ω fonksiyonunun Gg -konveksliği tanımından,

$$\omega(\mu^\theta \gamma^{1-\theta}) \leq \theta g(\omega(a)) + (1 - \theta)g(\omega(b))$$

yazarız.

Şimdi, eğer $\theta \in [0, 1]$ aralığında son eşitsizliğin integralini alırsak,

$$\int_0^1 \omega(\mu^\theta \gamma^{1-\theta}) d\theta \leq \int_0^1 [\theta g(\omega(\mu)) + (1 - \theta)g(\omega(\gamma))] d\theta$$

elde ederiz. $m = \mu^\theta \gamma^{1-\theta}$ değişken değiştirirsek,

$$\frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{\omega(m)}{m} dm \leq \frac{(g \circ \omega)(\mu) + (g \circ \omega)(\gamma)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Uyarı 4.2.1. Eğer Teorem 4.2.1 de $g(x) = x$ alırsak , GA-konveks fonksiyonları için Hermite-hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

Teorem 4.2.2 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık olsun. Eğer $\omega \in GgC(I)$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \supset \omega(I)$, $\mu, \gamma \in I$ ile $\mu < \gamma$ ve $\omega \in L[\mu, \gamma]$ ise,

$$\omega(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{g(\omega(m))}{m} dm$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat 4.2.2 ω fonksiyonunun Gg -konveksliği ile , $\theta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \omega(\sqrt{\mu\gamma}) &= \omega\left(\sqrt{\mu^{1-\theta}\gamma^\theta\mu^\theta\gamma^{1-\theta}}\right) \\ &\leq \frac{g(\omega(\mu^{1-\theta}\gamma^\theta)) + g(\omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta}))}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, $\theta \in [0,1]$ aralığında son eşitsizliğin integralini alırsak,

$$\omega(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(\omega(\mu^{1-\theta}\gamma^\theta)) d\theta + \int_0^1 g(\omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta})) d\theta \right]$$

ve

$$\int_0^1 g(\omega(\mu^{1-\theta}\gamma^\theta)) d\theta = \int_0^1 g(\omega(\mu^\theta\gamma^{1-\theta})) d\theta = \frac{1}{\ln \gamma - \ln \mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{g(\omega(m))}{m} dm$$

eşitliğinden istenen sonucu elde ederiz. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 4.2.2. Eğer Teorem 4.2.2 de $g(x) = x$ alırsak , GA-konveks fonksiyonları için Hermite-hadamard eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Teorem 4.2.3. ω ve h fonksiyonları $[\mu, \gamma]$ aralığı üzerinde, reel değerli, negatif olmayan ve Gg-konveks fonksiyonlar ve g negatif olmayan fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [\mu, \gamma]$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$4\omega(\sqrt{\mu\gamma})h(\sqrt{\mu\gamma}) \quad (4.2)$$

$$\leq \frac{2}{\ln\gamma - \ln\mu} \left[\int_{\mu}^{\gamma} \frac{(g \circ \omega)(x)(g \circ h)(x)}{x} dx + \int_{\mu}^{\gamma} \frac{(g \circ \omega)(x)(g \circ h)(\frac{\mu\gamma}{x})}{x} dx \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat 4.2.3 Her $x, y \in [\mu, \gamma]$ iki noktası için, ω ve g fonksiyonlarının Gg-konveksliğinden,

$$\omega(\sqrt{xy}) \leq \frac{(g \circ \omega)(x) + (g \circ \omega)(y)}{2}$$

$$h(\sqrt{xy}) \leq \frac{(g \circ h)(x) + (g \circ h)(y)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yukarıdaki eşitsizlikleri çarparsak,

$$4\omega(\sqrt{xy})h(\sqrt{xy}) \leq (g \circ \omega)(x)(g \circ h)(x) + (g \circ \omega)(y)(g \circ h)(y) \\ + (g \circ \omega)(x)(g \circ h)(y) + (g \circ \omega)(y)(g \circ h)(x)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$x = \mu^{\theta}\gamma^{1-\theta} \text{ ve } y = \gamma^{\theta}\mu^{1-\theta} \text{ alırsak.}$$

$$4\omega(\sqrt{\mu\gamma})h(\sqrt{\mu\gamma}) \\ \leq (g \circ \omega)(\mu^{\theta}\gamma^{1-\theta})(g \circ h)(\mu^{\theta}\gamma^{1-\theta}) + (g \circ \omega)(\gamma^{\theta}\mu^{1-\theta})(g \circ h)(\gamma^{\theta}\mu^{1-\theta}) \\ + (g \circ \omega)(\mu^{\theta}\gamma^{1-\theta})(g \circ h)(\gamma^{\theta}\mu^{1-\theta}) + (g \circ \omega)(\gamma^{\theta}\mu^{1-\theta})(g \circ h)(\mu^{\theta}\gamma^{1-\theta})$$

eşitsizliği elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında θ ya göre integrallenebilir ve

$$4\omega(\sqrt{\mu\gamma})h(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{2}{\ln\gamma - \ln\mu} \left[\int_{\mu}^{\gamma} \frac{(g \circ \omega)(x)(g \circ h)(x)}{x} dx + \int_{\mu}^{\gamma} \frac{(g \circ \omega)(x)(g \circ h)(\frac{\mu\gamma}{x})}{x} dx \right] \quad (4.3)$$

elde edilir.

Uyarı 4.2.3. Yukarıdaki Teoremden, eğer her $x \in [\mu, \gamma]$ için $g \circ h \sqrt{\mu\gamma}$ ye göre simetrik ise (i.e. $(g \circ h)(\frac{\mu\gamma}{x}) = (g \circ h)(x)$), sonra

$$4\omega(\sqrt{\mu\gamma})h(\sqrt{\mu\gamma}) \leq \frac{1}{\ln\gamma - \ln\mu} \int_{\mu}^{\gamma} \frac{(g \circ \omega)(x)(g \circ h)(x)}{x} dx \quad (4.4)$$

elde edilir.

4.3 Gg -Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler

Bu makalenin temel amacı yukarıdaki integral özdeşliğini kullanarak Gg -konveks fonksiyonlar için bazı yeni integral eşitsizlikleri ispatlamaktır.

Teorem 4.3.1 $\omega: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\mu, \gamma \in I^\circ$, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ olsun. $|\omega'(x)|$, $[\mu, \gamma]$ aralığında Gg -konveks fonksiyon ve g negatif olmayan fonksiyon ise, her $x \in [\mu, \gamma]$

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (x^2 - A(\mu, x)L(\mu, x)) + |g(\omega'(\mu))| (A(x, \mu)L(\mu, x) - \mu^2)] \\ & \quad + \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2) + |g(\omega'(\gamma))| (\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 4.3.1 Öncelikle $|\omega'(x)|$ ' in Gg -konvekslikten

$$|\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})| \leq \theta |g(\omega'(x))| + (1 - \theta) |g(\omega'(\mu))|$$

$$|\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})| \leq \theta |g(\omega'(x))| + (1-\theta) |g(\omega'(\gamma))|$$

yazılıp bu ifadeler Lemma 3.1.1 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\
& \leq \left| (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \mu^{1-\theta}) d\theta \right. \\
& \quad \left. - (\ln x - \ln \gamma) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} \omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta}) d\theta \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})| d\theta + (\ln \gamma \\
& \quad - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})| d\theta \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))| + (1-\theta) |g(\omega'(\mu))|] d\theta \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))| + (1-\theta) |g(\omega'(\gamma))|] d\theta \\
& = (\ln x - \ln \mu) \left[|g(\omega'(x))| \int_0^1 \theta x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta + x^{2\theta} |g(\omega'(\gamma))| \int_0^1 (1 \right. \\
& \quad \left. - \theta) x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right] \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left[|g(\omega'(x))| \int_0^1 \theta x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta + |g(\omega'(\gamma))| \int_0^1 (1 \right. \\
& \quad \left. - \theta) x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right] \\
& = \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (x^2 - A(\mu, x) L(\mu, x)) + |g(\omega'(\mu))| (A(x, \mu) L(\mu, x) - \mu^2)]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2) + |g(\omega'(\gamma))| (\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma))],$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 \theta x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta = \frac{x^2}{2(\ln x - \ln \mu)} - \frac{x^2 - \mu^2}{4(\ln x - \ln \mu)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^2 - A(\mu, x)L(\mu, x)}{\ln x - \ln \mu}$$

$$\int_0^1 (1 - \theta) x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta = \frac{x^2 - \mu^2}{4(\ln x - \ln \mu)^2} - \frac{\mu^2}{2(\ln x - \ln \mu)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{A(\mu, x)L(\mu, x) - \mu^2}{\ln x - \ln \mu}$$

$$\int_0^1 \theta x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta = \frac{\gamma^2 - x^2}{4(\ln \gamma - \ln x)^2} - \frac{x^2}{2(\ln \gamma - \ln x)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2}{\ln \gamma - \ln x}$$

$$\int_0^1 (1 - \theta) x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta = \frac{\gamma^2}{2(\ln \gamma - \ln x)} - \frac{\gamma^2 - x^2}{4(\ln \gamma - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma)}{\ln \gamma - \ln x}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3.1.: Teorem 4.3.1 de $g(x) = x$ alınırsa,

$$\left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} |\omega'(x)| [A(x, \gamma)L(x, \gamma) - A(\mu, x)L(\mu, x)]$$

$$+ \frac{1}{2} ([|\omega'(\mu)|(A(x, \mu)L(\mu, x) - \mu^2)] + [|\omega'(\gamma)(\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma))])$$

eşitsizliği elde edilir. Bu GA -konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard tipli eşitsizliği ifade eder.

Teorem 4.3.2 $\omega: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|^q$, $[\mu, \gamma]$ aralığında Gg -konveks fonksiyon ise, her $x \in [\mu, \gamma]$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x)dx \right| \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(\mu^2, x^2) \\ & \times \left(|g(\omega'(x))|^q \left[\frac{x^2 - A(x, \mu)L(x, \mu)}{\ln x - \ln \mu} \right] + |g(\omega'(\mu))|^q \left[\frac{A(x, \mu)L(x, \mu) - \mu^2}{\ln x - \ln \mu} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + (\ln \gamma - \ln x) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, \gamma^2) \\ & \times \left(|g(\omega'(x))|^q \left[\frac{A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2}{\ln \gamma - \ln x} \right] + |g(\omega'(\gamma))|^q \left[\frac{\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma)}{\ln \gamma - \ln x} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizlik sağlanır.

İspat 4.3.2 Lemma 3.1.1' de $|\omega'(x)|^q$, in Gg -konveksliği ve Power-Mean eşitsizliğini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x)dx \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})| d\theta \\ & + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})| d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1-\theta) |g(\omega'(\mu))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1-\theta) |g(\omega'(\gamma))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(|g(\omega'(x))|^q \int_0^1 \theta x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta + |g(\omega'(\mu))|^q \int_0^1 (1-\theta) x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(|g(\omega'(x))|^q \int_0^1 \theta x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta + |g(\omega'(\gamma))|^q \int_0^1 (1-\theta) x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&= (\ln x - \ln \mu) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(\mu^2, x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(|g(\omega'(x))|^q \left[\frac{x^2 - A(x, \mu)L(x, \mu)}{\ln x - \ln \mu} \right] + |g(\omega'(\mu))|^q \left[\frac{A(x, \mu)L(x, \mu) - \mu^2}{\ln x - \ln \mu} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (\ln \gamma - \ln x) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, \gamma^2) \\
& \times \left(|g(\omega'(x))|^q \left[\frac{A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2}{\ln \gamma - \ln x} \right] + |g(\omega'(\gamma))|^q \left[\frac{\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma)}{\ln \gamma - \ln x} \right] \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} d\theta &= \frac{x^2 - \mu^2}{2(\ln x - \ln \mu)} = L(\mu^2, x^2), \\
\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} d\theta &= \frac{\mu^2 - \gamma^2}{2(\ln \gamma - \ln \mu)} = L(x^2, \gamma^2)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3.2. Teorem 4.3.2 de $g(x) = x$ alırsak,

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(\mu^2, x^2) \\
& \times \left(|\omega'(x)|^q \left[\frac{x^2 - A(x, \mu)L(x, \mu)}{\ln x - \ln \mu} \right] + |\omega'(\mu)|^q \left[\frac{A(x, \mu)L(x, \mu) - \mu^2}{\ln x - \ln \mu} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (\ln \gamma - \ln x) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} L^{1-\frac{1}{q}}(x^2, \gamma^2)
\end{aligned}$$

$$\times \left(|\omega'(x)|^q \left[\frac{A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2}{\ln \gamma - \ln x} \right] + |\omega'(\gamma)|^q \left[\frac{\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma)}{\ln \gamma - \ln x} \right] \right)^{\frac{1}{q}}$$

GA-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.1. Teorem 4.3.2 de $q = 1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (x^2 - A(x, \mu)L(x, \mu)) + |g(\omega'(\mu))| (A(x, \mu)L(x, \mu) - \mu^2)] \\ & + \frac{1}{2} [|g(\omega'(x))| (A(x, \gamma)L(x, \gamma) - x^2) + |g(\omega'(\gamma))| (\gamma^2 - A(x, \gamma)L(x, \gamma))]. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik Teorem 4.3.1' deki (4.1) eşitsizliği ile örtüşmektedir.

Teorem 4.3.3 $\omega: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|^q$, $[\mu, \gamma]$ aralığında Gg-konveks fonksiyon ise, her $x \in [\mu, \gamma]$ ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu) L^{1-\frac{1}{q}} \left(\mu^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|g(\omega'(\mu))|^q, |g(\omega'(x))|^q) \\ & + (\ln \gamma - \ln x) L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}}, \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|g(\omega'(x))|^q, |g(\omega'(\gamma))|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat 4.3.3 Lemma 3.1.1 ve Gg-konveksliği ile bilinen Hölder integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^{\theta} \mu^{1-\theta})| d\theta \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^{\theta} \gamma^{1-\theta})| d\theta \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 \mu^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\omega'(x^{\theta} \mu^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\gamma} \right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\omega'(x^{\theta} \gamma^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 \mu^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1 \right. \\
& \quad \left. - \theta) |g(\omega'(\mu))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\gamma} \right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1 \right. \\
& \quad \left. - \theta) |g(\omega'(\gamma))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln x - \ln \mu) L^{1-\frac{1}{q}} \left(\mu^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|g(\omega'(\mu))|^q, |g(\omega'(x))|^q) \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}}, \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|g(\omega'(x))|^q, |g(\omega'(\gamma))|^q),
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\int_0^1 \mu^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta = \frac{x^{\frac{2q}{q-1}} - \mu^{\frac{2q}{q-1}}}{\ln x^{\frac{2q}{q-1}} - \ln \mu^{\frac{2q}{q-1}}} = L\left(\mu^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}}\right)$$

$$\int_0^1 \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{2q\theta}{q-1}} d\theta = \frac{\gamma^{\frac{2q}{q-1}} - x^{\frac{2q}{q-1}}}{\ln \gamma^{\frac{2q}{q-1}} - \ln x^{\frac{2q}{q-1}}} = L\left(x^{\frac{2q}{q-1}}, \gamma^{\frac{2q}{q-1}}\right)$$

elde edilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 4.3.3. Teorem 4.3.3 de $g(x) = x$ alırsak, GA-konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x)dx \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu) L^{1-\frac{1}{q}} \left(\mu^{\frac{2q}{q-1}}, x^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|\omega'(\mu)|^q, |\omega'(x)|^q) \\ & \quad + (\ln \gamma - \ln x) L^{1-\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{2q}{q-1}}, \gamma^{\frac{2q}{q-1}} \right) A^{\frac{1}{q}} (|\omega'(x)|^q, |\omega'(\gamma)|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.4 $\omega: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° ve $\mu, \gamma \in I^\circ$ üzerinde, $\mu < \gamma$ ve $\omega' \in L[\mu, \gamma]$ ile türevlenebilir olsun. $|\omega'(x)|^q$, $[\mu, \gamma]$ aralığında Gg-konveks fonksiyon ise, her $x \in [\mu, \gamma]$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \gamma\omega(\gamma) - \mu\omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x)dx \right| \\ & \leq (\ln x - \ln \mu)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times (|g(\omega'(x))|^q [x^{2q} - L(\mu^{2q}, x^{2q})] + |g(\omega'(\mu))|^q [x^{2q} - \mu^{2q} + L(\mu^{2q}, x^{2q})])^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + (\ln \gamma - \ln x)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times (|g(\omega'(x))|^q [L(x^{2q}, \gamma^{2q}) - x^{2q}] + |g(\omega'(\gamma))|^q [\gamma^{2q} - x^{2q} - L(x^{2q}, \gamma^{2q})])^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 4.3.4 Teorem 4.3.3'un ispatına benzer şekilde, Lemma 3.1.1' de $|\omega'(x)|^q$ 'nin , $[\mu, \gamma]$ aralığında Gg-konveks fonksiyon olduğu ve Power mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})| d\theta \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})| d\theta \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \mu^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \mu^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{2\theta} \gamma^{2(1-\theta)} |\omega'(x^\theta \gamma^{1-\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq (\ln x - \ln \mu) \left(\int_0^1 x^{2q\theta} \mu^{2q(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1-\theta) |g(\omega'(\mu))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x) \left(\int_0^1 x^{2q\theta} \gamma^{2q(1-\theta)} [\theta |g(\omega'(x))|^q + (1-\theta) |g(\omega'(\gamma))|^q] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln x - \ln \mu) \left(|g(\omega'(x))|^q \int_0^1 \theta x^{2q\theta} \mu^{2q(1-\theta)} d\theta \right. \\
& \quad \left. + |g(\omega'(\mu))|^q \int_0^1 (1-\theta) x^{2q\theta} \mu^{2q(1-\theta)} d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\ln \gamma - \ln x) \left(\begin{aligned} & |g(\omega'(x))|^q \int_0^1 \theta x^{2q\theta} \gamma^{2q(1-\theta)} d\theta \\ & + |g(\omega'(\gamma))|^q \int_0^1 (1-\theta) x^{2q\theta} \gamma^{2q(1-\theta)} d\theta \end{aligned} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln x - \ln \mu) \left(\begin{aligned} & |g(\omega'(x))|^q \left[\frac{x^{2q} - L(\mu^{2q}, x^{2q})}{2q(\ln x - \ln \mu)} \right] \\ & + |g(\omega'(\mu))|^q \left[\frac{x^{2q} - \mu^{2q} + L(\mu^{2q}, x^{2q})}{2q(\ln x - \ln \mu)} \right] \end{aligned} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(\ln \gamma - \ln x) \left(\begin{aligned} & |g(\omega'(x))|^q \left[\frac{L(x^{2q}, \gamma^{2q}) - x^{2q}}{2q(\ln \gamma - \ln x)} \right] \\ & + |g(\omega'(\gamma))|^q \left[\frac{\gamma^{2q} - x^{2q} - L(x^{2q}, \gamma^{2q})}{2q(\ln \gamma - \ln x)} \right] \end{aligned} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (\ln x - \ln \mu)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\begin{aligned} & |g(\omega'(x))|^q [x^{2q} - L(\mu^{2q}, x^{2q})] \\ & + |g(\omega'(\mu))|^q [x^{2q} - \mu^{2q} + L(\mu^{2q}, x^{2q})] \end{aligned} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(\ln \gamma - \ln x)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\begin{aligned} & |g(\omega'(x))|^q [L(x^{2q}, \gamma^{2q}) - x^{2q}] \\ & + |g(\omega'(\gamma))|^q [\gamma^{2q} - x^{2q} - L(x^{2q}, \gamma^{2q})] \end{aligned} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki integralleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \theta x^{2q\theta} \mu^{2q(1-\theta)} d\theta &= \frac{x^{2q} - L(\mu^{2q}, x^{2q})}{2q(\ln x - \ln \mu)} \\
\int_0^1 (1-\theta) x^{2q\theta} \mu^{2q(1-\theta)} d\theta &= \frac{x^{2q} - \mu^{2q} + L(\mu^{2q}, x^{2q})}{2q(\ln x - \ln \mu)} \\
\int_0^1 \theta x^{2q\theta} \gamma^{2q(1-\theta)} d\theta &= \frac{L(x^{2q}, \gamma^{2q}) - x^{2q}}{2q(\ln \gamma - \ln x)} \\
\int_0^1 (1-\theta) x^{2q\theta} \gamma^{2q(1-\theta)} d\theta &= \frac{\gamma^{2q} - x^{2q} - L(x^{2q}, \gamma^{2q})}{2q(\ln \gamma - \ln x)}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3.4. Teorem 4.3.4' de $g(x) = x$ alırsak, GA-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \\
& \leq (\ln \gamma - \ln \mu)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(|\omega'(x)|^q [x^{2q} - L(\mu^{2q}, x^{2q})] + |\omega'(\mu)|^q [x^{2q} - \mu^{2q} + L(\mu^{2q}, x^{2q})] \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\ln \gamma - \ln x)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(|\omega'(x)|^q [L(x^{2q}, \gamma^{2q}) - x^{2q}] + |\omega'(\gamma)|^q [\gamma^{2q} - x^{2q} - L(x^{2q}, \gamma^{2q})] \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.3.4'de $q = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma \omega(\gamma) - \mu \omega(\mu) - \int_{\mu}^{\gamma} \omega(x) dx \right| \leq \frac{L(x^2, \gamma^2) - L(\mu^2, x^2)}{2} |g(\gamma'(x))| \\
& + \frac{1}{2} (|g(\gamma'(\mu))| [x^2 - \mu^2 + L(\mu^2, x^2)] + |g(\omega'(\gamma))| [\gamma^2 - x^2 - L(x^2, \gamma^2)])
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $g(x) = x$ koşulu altında Teorem 4.3.1' deki (4.5) eşitsizliği ile örtüşmektedir.

BÖLÜM 5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının araştırma bulgular bölümünde Gg-konveks fonksiyon olarak adlandırılan yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış, bu fonksiyon sınıfına bazı örnekler verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Gg-konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri elde edilip, daha önce literatürde mevcut olan bir özdeşlik yardımı ile Gg-konveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Böylece literatüre yeni bir fonksiyon sınıfı ve Gg-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kazandırılmıştır, fonksiyonların bu sınıfı için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Kullanılan ispat yöntemi konveks fonksiyonlarla ilgili daha önceki çalışmalara benzer olarak yapılmıştır. Bulgular kısmında elde edilen sonuçlar yeni olup özel durumlarda GA konveks fonksiyonlarla ilgili sonuçlara indirgenmektedir. Bu anlamda da bu alanda çalışan araştırmacılar için yeni bir kaynak oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Hermite, C., Sur deux limites d'une integrale, Mathesis, 3, 82-83, 1883.
- [2] Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A.M., Classical and new inequalities in analysis (Vol. 61). Springer Science & Business Media. *Dordrecht/Boston/London*, 1993.
- [3] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P., On Simpson's Inequality and Applications. *J. of Inequal. & Appl*, 5, 533-579, 2000
- [4] Niculescu, C. P., Convexity according to the geometric mean, *Math. Inequal. Appl.* 3 (2), Available online at <http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19>, 155–167, 2000.
- [5] Mitrović, D. S., *Analytic Inequalities* , Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [6] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., *Inequalities* 2nd Ed., Cambridge, 1952.
- [7] Beckenbach, E.F., Bellman, R., *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 198, 1961.
- [8] Anton, *Elementary Linear Algebra*, Wiley, 10th Ed. USA, 2010
- [9] Pachpatte, B.G., *Mathematical inequalities*, Elsevier B.V., Volume 67, Amsterdam, The Netherlands, 591, 2005.
- [10] Bayraktar, M., *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5, 2010.
- [11] Adams, R. A., Essex, C., *Calculus A Complete Course*, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp 934, 2010.
- [12] Bayraktar, M., *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [13] Pečarić, J. , Proschan, F. and Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. . Academic Press, Inc. , 469 pp, Boston, Y.L. 1992.

- [14] Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York. 1973.
- [15] Azpeitia, A. G., Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12, 1994.
- [16] Cristescu G. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics Volume 6, Issue 2, Article 35, 2005
- [17] Kadakal H., İşcan İ., Ag-Convex Functions, Journal of Abstract and Computational Mathematics 4, No.1, 11-17, 2019.
- [18] M.Avcı Ardiç, A.O.Akdemir and E. Set, New integral inequalities via GA-convex functions, Mathematical Inequalities and Applications, 19(4) (2016), 1159-1168.
- [19] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions, Le Matematiche, Vol. LXIX, Fasc. II, pp. 129-146, 2014.
- [20] Çoban, H.A. İşcan, İ. and Kunt, M., New Ostrowski type inequalities for GA-convex functions, New Trends in Mathematical Sciences, 4(4), 1-11, 2016.
- [21] Kadakal, H., Multiplicatively P-functions, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu University, Ordu, 27-29 June 2018.
- [22] Kadakal, H., Hermite-Hadamard type inequalities for subadditive functions, AIMS Mathematics, 5(2): 930, 2020.
- [23] İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable P-GA functions, International Journal of Analysis, 6 pages, 2014.
- [24] İşcan, İ. and Aydın, M., Some new generalized integral inequalities for GA-s-convex functions via Hadamard fractional integrals, Chinese Journal of Mathematics, Volume 2016, 8 pages, 2016.
- [25] İşcan, İ. and Turhan, S., Generalized Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions via Fractional integral, Moroccan J. Pure and Appl. Anal.(MJPA), 2(1), 34-46, 2016.
- [26] Kunt, M. and İşcan, İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-s-convex functions via fractional integrals, Konuralp journal of Mathematics, 4 (1), 130-139, 2016.

- [27] Mitrović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.
- [28] İşcan, İ, (2022) On Weighted means and MN-convex functions, Turkish Journal of inequalities, 5(2), 70-81.
- [29] Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç F. 2018. Turkish Journal of inequalities, Pages 78-86.
- [30] Fleming (1977), W., Functions of Several Variables, Springer-Verlag, 2nd edition,.
- [31] Rockafellar (1970), T., Convex Analysis, Princeton University Press,.

ÖZ GEÇMİŞ

Sercan GÜLSU İlk, orta ve lise eğitimini Giresun'da tamamladı. 2001 yılında Giresun HBAL'den mezun oldu. 2002 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2006 yılında bitirdi. Aynı yıl Kocaeli ilinde bir devlet okuluna atanarak öğretmenliğe başladı. Daha sonra Gümüşhane Kürtün'de doğu görevini tamamladı. Son olarak 2010 yılında Giresun iline atandı. Giresun Üniversitesi'nde Matematik bölümünü tamamladı ve Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun'da bir devlet okulunda öğretmenlik yapmaktadır. Bir kız çocuğu babasıdır.

