

28459

$g_1 u$ VE $h_1 u$ ELİPTİK FONKSİYONLARI

ÜZERİNE

OKTAY AYDIN

Ç. Ü.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA

SUBAT 1993

Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma, Jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç.Dr.Veli KURT

Veli Kurt

Üye Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

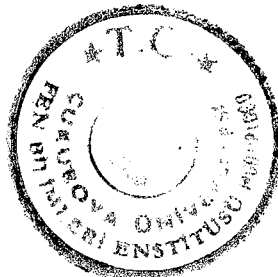
Fikri Akdeniz

Üye Yard.Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ

Doğan Dönmez

Kod No : 795

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait
olduğunu onaylarım.



Ural Dinç
Prof.Dr. Ural DİNÇ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO:

ÖZ.....	II
ABSTRACT.....	III
GİRİŞ	
1. Latisler.....	1
2. Eliptik Fonksiyonlar.....	2
3. $\wp$ Fonksiyonu.....	2
4. Kök Fonksiyonları.....	4
5. Zeta Fonksiyonu.....	5
6. Sigma Fonksiyonu.....	6
I. BÖLÜM $\wp$ FONKSİYONUNUN NORMALLEŞTİRİLMİŞ LATİSLERDE ALDIĞI DEĞERLER	
1.1. s_n, d_n, c_n Fonksiyonları	9
1.2. $2\Omega^*$ latisinin yarı periyotlarında $\wp$ 'nun aldığı değerler ¹	15
1.3. $2\Omega^*$ latisinin çeyrek periyotlarında $\wp$ 'nun aldığı değerler ¹	16
1.4. $2\Omega^*$ latisinin yarı periyotlarında $\wp$ 'nun aldığı değerler ²	19
1.5. $2\Omega^*$ latisinin çeyrek periyotlarında $\wp$ 'nun aldığı değerler ²	22
II. BÖLÜM $g(u 2\Omega^*)$ ve $h(u 2\Omega^*)$ ELİPTİK FONKSİYONLARI	
2.1. $g(u 2\Omega^*)$ fonksiyonları ve özdeşlikler.....	26
2.2. $g(u 2\Omega^*)$ fonksiyonlarının yarı periyot dönüşümleri ve yarı periyot noktalarında aldığı değerler.....	27
2.3. $g(u 2\Omega^*)$ fonksiyonlarının çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler.....	29
2.4. $h(u 2\Omega^*)$ fonksiyonları.....	36
2.5. $h(u 2\Omega^*)$ fonksiyonlarının yarı periyot dönüşümleri ve yarı periyot noktalarında aldığı değerler.....	37
2.6. $h(u 2\Omega^*)$ fonksiyonlarının çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler.....	39
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	VII
KAYNAKLAR.....	X
ÖZGEÇMİŞ.....	XI
TEŞEKKÜR.....	XII

ÖZ

Bu çalışmanın giriş kısmında, çalışmanın diğer kısmına bir temel oluşturmak için, latisler, çifte periyodik fonksiyonlar ve memomorf fonksiyonların bazı tanımları verilip, Weiertrass 'ın p_u , ζ_u , σ_u fonksiyonları tanıtıldı.

I. kısımda p_u 'nun normallaştırılmış latislerde aldığı değerler verildi. İkinci kısımda g_u ve h_u eliptik fonksiyonları tanıtıldı, buna ilaveten, bu fonksiyonların yarı ve çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler hesaplandı.

ABSTRACT

In introduction of this study, some definitions of lattices, first order and meromorphic functions are given to construct a base for the rest of the study and Weierstrass $\wp u$, ζu and σu functions are introduced.

In chapter one, the values of $\wp u$ function, which takes on the normalized lattices, are given. In chapter two, $g_2 u$ and $h_2 u$ elliptic functions are introduced. In addition, the values of these functions which take on the half period points and on the quarter period points, are calculated.

GİRİŞ

1. Latisler:

Aşağıdaki iki özelliği sağlayan karmaşık sayıların bir Ω alt kümesine latis denir.[2].

1. Ω , toplama işlemine göre bir gruptur.
2. Ω 'daki her $w \neq 0$ için $|w| \geq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır.

Latisler 0,1,2 boyutlu olmak üzere üç gruba ayrılabilir:

1. Basit latis: $\langle mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \rangle$
2. 1 boyutlu latis: $\langle mw \mid w \neq 0, m \in \mathbb{Z} \rangle$
3. 2 boyutlu latis: $\langle mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \rangle$

Buradaki w_1 ve w_2 'ye latisin doğuranları denir. Periyot latisi bir boyutlu olan fonksiyona basit periyodik fonksiyon, iki boyutlu olana çifte periyodik fonksiyon denir.

Ω herhangi bir latis $m \neq 0$ herhangi bir kompleks sayı olmak üzere $m\Omega$, Ω 'daki her w için mw şeklindeki sayıların bir kümesidir. Bu da Ω 'ya benzer bir latistir. Buradaki benzerlik bir denklik bağıntısıdır.[2]

Toplamaya göre bir grup olan Ω latisinin sonlu indisli bir alt grubuna alt latis denir.

Ω bir latis olmak üzere $u - u_0 \in \Omega$ ise u ve u_0 kompleks sayıları Ω modülüne göre denktir denir ve $u \equiv u_0 \pmod{\Omega}$ olarak yazılır. Herhangi bir $a \in \mathbb{C}$ verildiğinde her $w \in \Omega$ için $a + \Omega = \{a + w\}$ kümesi, a 'ya denk olan bütün noktaların kalan sınıfıdır.

Eliptik fonksiyonlar teorisinde,

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} \text{ , ye modül } \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} \text{ ye de tamamlayıcı}$$

modül denir.[2]

$2w_1, 2w_2$ doğuranları ile verilen bir 2Ω latisi için $h^2 = e_1 - e_2 = 1$ alınarak bulunan latise normal latise denir ve $2\Omega^*$ ile gösterilir. Herhangi bir Ω latisinin doğuranları w_1 ve w_2 ise

$$\Omega_1: w_1, 2w_2$$

$$\Omega_2: 2w_1, w_2$$

$$\Omega_3: w_1 - w_2, w_1 + w_2$$

şeklinde üç yarı latise tanımlanabilir[2].

$(\Omega_1)_2 = (\Omega_2)_1 = (\Omega_3)_3 = 2\Omega$ olduğundan $2\Omega_1^*, 2\Omega_2^*$ ve $2\Omega_3^*$ sırasıyla dnu, snu ve cnu nun periyot latisleridir.

2. Eliptik Fonksiyonlar:

Sabit olmayan, çifte periyodik ve meromorf bir fonksiyona eliptik fonksiyon denir. Bir eliptik fonksiyonun kutupları sayısının toplamına da fonksiyonun mertebesi denir. Eliptik fonksiyonlar en az ikincimertebeden fonksiyonlardır[1].

Eliptik fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem-1(Liouville): Çifte periyodik her tam fonksiyon sabittir.

Teorem-2 : Periyot latisleri ortak olan $f(z)$ ve $f_1(z)$ gibi iki eliptik fonksiyonun,

1. Kutupları ve sıfırları, katlılıkları ile birlikte aynı ise oranları sıfırdan farklı bir sabittir.

2. Kutupları ve her kutbu için esas kısımları aynı ise farkları sabittir.

Teorem-3 : Bir eliptik fonksiyonun türevide aynı periyotlarla eliptik bir fonksiyondur.

3. $\wp$ u Fonksiyonu:

Weierstrass $\wp$ u fonksiyonu

$$\wp(u|2\Omega) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\Omega} \left((u-2w)^{-2} - (2w)^{-2} \right)$$

ifadesi ile tanımlanır. [2] Bu fonksiyon, $2w=2mw_1+2nw_2$ noktaları dışında bütün düzlemde holomorf ve çifte periyodiktir. Özellikleri aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir.

Teorem-1 : $p(w_1)=e_1$, $p(w_2)=e_2$ ve $p(w_1+w_2)=e_3$ 'dir.

Teorem-2 : p u fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

Teorem-3 : p u fonsiyonu $p'^2 u = 4(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)$ bağıntısını sağlar.

Teorem-4 : p u fonksiyonu için

$$p(u \pm w_i) = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{pu - e_i} + e_i = \frac{e_i \cdot pu + (2e_i^2 - 1/4 \cdot g_2)}{pu - e_i}$$

ifadesi vardır.

İspat: $pu - e_i$ fonksiyonunun 2Ω kalan sınıfında katlı kutbu, $w+2\Omega_i$ kalan sınıfında da katlı sıfırı vardır. Aynı şekilde $p(u - w_i) - e_i$ fonksiyonu da $w_i + 2\Omega$ da katlı kutba, 2Ω da katlı sıfıra sahiptir. Böylece $[pu - e_i] \cdot [p(u - w_i) - e_i]$ fonksiyonunun kutbu yoktur. 2.2.1 teoreminden bu fonksiyon sabittir. Bu sabit çarpımın değeri w_j, w_k yarı periyotlarının yerine u konarak bulunabilir. Bir çarpan $e_j - e_i$ olduğunda diğeri $e_k - e_i$ dir. Böylece $[pu - e_i][p(u - w_i) - e_i] = d_i^2$ yazılabilir. Burada d_i^2 ,

$$d_i^2 = (e_i - e_j)(e_i - e_k) = 3e_i^2 - 1/4 g_2$$

olarak bulunur. [2] Buradan

$$p(u - w_i) = \frac{d_i^2}{pu - e_i} + e_i = \frac{e_i \cdot pu + (d_i^2 - e_i^2)}{pu - e_i}$$

elde edilir. p u 'nun periyodikliğinden $p(u + w_i) = p(u - w_i)$ olduğu söylenebilir.

Teorem-5 : 0 'ın komşuluğunda p u fonksiyonu

$$a_{2k} = (2k+1) \sum \sum' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

olmak üzere,

$$p_u = \frac{1}{u^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} u^{2k}$$

şeklinde bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir[1].

4 Kök Fonksiyonları:

p_{u-e_i} ($i=1,2,3$) fonksiyonları, bütün kutupları 2Ω kalan sınıfında ve bütün sıfırları $w_i + 2\Omega$ kalan sınıfında olan ikinci mertebeden eliptik birer fonksiyondur.

$(p_{u-e_i})^{1/2}$ fonksiyonunun dallanma noktası yoktur[5]. Bu fonksiyonun $u = 0$ kutbundaki rezidüsü $+1$ olan fonksiyon, kök fonksiyonu olarak tanımlanır ve

$$f_i^2 u = p_{u-e_i} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir.

$f_i u = (p_{u-e_i})^{1/2}$ fonksiyonunun $u = 0$ 'ın komşuluğundaki serisinin ilk terimi u^{-1} olacağından $f_i u$ 'nın $w_i + 2\Omega$ kalan sınıfında birer asit sıfırı vardır.

Bu fonksiyon açık olarak 2Ω periyot latisinde eliptik fonksiyon değildir. p_{u-e_i} , sadece u 'nın değil, $u-w_i$ 'nin ya da $i \neq j$ için $-w_j$ 'nin çift fonksiyonudur. $f_i u$ fonksiyonu da u ve $u-w_i$ 'nin tek fonksiyonu, fakat $i \neq j$ için $u-w_j$ 'nin çift fonksiyonudur.

$$f_i(2w_i - u) = -f_i u = f_i(-u)$$

$$f_i(2w_j - u) = f_i u = -f_i(-u) \text{ eşitliklerinde } u \text{ yerine } -u \text{ alınırsa}$$

$$f_i(u + 2w_i) = f_i u$$

(2)

$$f_i(u + 2w_j) = -f_i(u) \quad (i \neq j)$$

de edilir. (2) 'den $f_i(u + 4w_j) = f_i u$ yazılabilir. Böylece $f_i u$ fonksiyonu $2w_i$, $4w_j$ ile çifte periyodiktir[2].

(1) den türev alırsak,

$\wp'u = 2f_1'u.f_1'u$ ya da $(2f_1'u.f_1'u)^2 = 4f_1^2'u.f_2^2'u.f_3^2'u$ bulunur.

(i,j,k =1,2,3) olmak üzere $f_1'u = \pm f_j'u.f_k'u$ 'dır.

$f_1'u$ 'nun ilk terimi $-u^{-2}$ olduğundan $f_1'u = -f_j'u.f_k'u$ 'dır[2].

Böylece $f_1'u$ fonksiyonu $2w_1, 4w_2, 4w_3$ ile periyodik bir fonksiyondur.

Benzer olarak $f_2'u$ ve $f_3'u$ için sırasıyla $4w_1, 2w_2, 4w_3$; $4w_1, 4w_2, 2w_3$ noktaları periyot noktalarıdır.

5. Zeta Fonksiyonu:

2Ω latisinde Weierstrass Zeta Fonksiyonu,

$$\zeta(u) = \zeta(u|2\Omega) = \frac{1}{u} + \sum' \left[\frac{1}{(u-2w)} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{4w^2} \right]$$

ifadesi ile tanımlanır [2]. Zeta fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir.

Teorem-1 : ζu fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

Teorem-2 : $\wp u$ ile ζu arasında $\wp u = -\zeta' u$ bağıntısı vardır.

Teorem-3 : $\eta_1 = \zeta(w_1)$ ve $\eta_2 = \zeta(w_2)$ olmak üzere

$$\zeta(u+2w_1) = \zeta(u) + 2\eta_1$$

$$\zeta(u+2w_2) = \zeta(u) + 2\eta_2 \text{ dir.}$$

Teorem-4 : η_1 ve η_2 sabitleri arasında

$$\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = \frac{i\pi}{2}$$

Legendre bağıntısı vardır[1].

6. Sigma Fonksiyonu:

$$\frac{d}{du} [\log(\sigma u)] = \zeta u \quad (3)$$

bağıntısı ile verilen bir fonksiyona sigma fonksiyonu denir[2]. Bu fonksiyonla ilgili, aşağıdaki teoremler ve sonuçlar verilebilir.

Teorem-1 : σu fonksiyonu,

$$\sigma u = u \cdot \prod'_{m,n} \left(1 - \frac{u}{\Omega_{mn}}\right) e^{\left(\frac{u}{\Omega_{mn}} + \frac{u^2}{2 \cdot \Omega_{mn}^2}\right)}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir.

İspat: (3) 'ten

$$\frac{d}{du} (\log(\sigma u)) - \frac{1}{u} = \zeta u - \frac{1}{u}$$

eşitliği yazılır. Buradan da

$$\log \frac{\sigma u}{Au} = \int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) du$$

$$= \int_0^u \sum'_{\Omega} \left(\frac{1}{u-2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{4w^2} \right) du$$

$$= \sum'_{\Omega} \left(\log \frac{u-2w}{-2w} + \frac{u}{2w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{4w^2} \right)$$

veya

$$\sigma u = Au \prod'_{\Omega} \left(1 - \frac{u}{2w}\right) e^{\left(\frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}\right)}$$

olur[1].

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma u}{u} = 1$ olduğu için $A = 1$ elde edilir.

Kolayca görülebileceği gibi $u = 2m.w_1 + 2n.w_2$ noktalarında σu sıfır olur. Bu sıfırlar, her periyot paralel kenarında basit ve bir tanedir. Diğer taraftan σu tek bir fonksiyondur.

Teorem-2 : $2.\eta_{mn} = 2m\eta_1 + 2n\eta_2$ olmak üzere

$$\sigma(u + \Omega_{mn}) = (-1)^{m+n+mn} e^{\frac{2\eta_{mn}}{2}(u + \frac{\Omega_{mn}}{2})} \cdot \sigma u \quad \text{'dır'} [1].$$

Teorem-3 : $f(z)$, bir periyot paralel kenarında sırasıyla α_i ve β_i ($i=1,2,\dots,r$) de r . mertebeden sıfırları ve kutupları olan bir eliptik fonksiyon ise

$$f(z) = c \frac{\prod_{i=1}^r \sigma(z - \alpha_i)}{\prod_{j=1}^r \sigma(z - \beta_j)}$$

şeklinde ifade edilir[1].

Bu teorem kullanılırsa, aşağıdaki önemli sonuçlar sıralanabilir.

Sonuç-1: $p'u$ nun orijinde 3. mertebeden kutbu ve w_1, w_2, w_3 de sıfırları olduğundan,

$$p'u = 2 \frac{\sigma(u-w_1) \cdot \sigma(u-w_2) \cdot \sigma(u-w_3)}{\sigma^3 u \cdot \sigma(w_1) \cdot \sigma(w_2) \cdot \sigma(w_3)}$$

ifadesi vardır.[1]

Sonuç-2: $p u - p(\alpha)$ nin σu ya bağlı ifadesi

$$(p u - p(\alpha)) = - \frac{\sigma(u-\alpha) \cdot \sigma(u+\alpha)}{\sigma^2(u) \cdot \sigma^2(\alpha)}$$

dır.

Sonuç-3: Sonuç-2 den

$$p u - e_i = - \frac{\sigma(u-w_i) \cdot \sigma(u+w_i)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2(w_i)}$$

$$= e^{-2\eta_i u} \cdot \frac{\sigma^2(u+w_i)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2(w_i)}$$

yazılır.

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \sqrt{p u - e_i} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma u}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} e^{-\eta_i u} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u+w_i)}{\sigma(w_i)} = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa ,

$$\sqrt{p u - e_i} = e^{-\eta_i u} \cdot \frac{\sigma(u+w_i)}{\sigma u \cdot \sigma(w_i)}$$

elde olur.

Birleştirilmiş sigma fonksiyonları,

$$\sigma_r u = e^{-\eta_r u} \cdot \frac{\sigma(u+w_r)}{\sigma(w_r)}$$

şeklinde tanımlanır[1].

Sonuç-3 ile bu fonksiyonların tanımı birlikte düşünülürse,

$$\sqrt{p u - e_r} = \frac{\sigma_r u}{\sigma u} \quad \text{ya da} \quad f_r u = \frac{\sigma_r u}{\sigma(u)} \quad (r=1,2,3) \quad (4)$$

eşitlikleri vardır[4].

(4) ve Jacobi-Glaisher fonksiyonlarının tanımından $2\Omega^*$ normal latisinde,

$$csu = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \quad nsu = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \quad \text{ve} \quad dsu = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} \quad (5)$$

ifadeleri vardır[6].

(5) yardımıyla da cnu , dnu ve snu fonksiyonları $\sigma_i u$ cinsinden ifade edilebilir.

1. BÖLÜM

p_u FONKSİYONUNUN NORMALLEŞTİRİLMİŞ LATİSLERDE ALDIĞI DEĞERLER

1.1. snu, dnu, cnu Fonksiyonları :

$2\Omega^*$ normalleştirilmiş latisinde Jacobinin snu, dnu ve cnu fonksiyonları ,

$$\begin{aligned} \text{sn}(u|2\Omega^*) &= \frac{f_2(u+w_1+w_3|2\Omega^*)}{f_2(w_1+w_3)} \\ \text{cn}(u|2\Omega^*) &= \frac{f_3(u+w_1+w_3|2\Omega^*)}{f_3(w_1+w_3)} \\ \text{dn}(u|2\Omega^*) &= \frac{f_1(u+w_1+w_3|2\Omega^*)}{f_1(w_1+w_3)} \end{aligned} \quad (6)$$

olarak tanımlanır [3].

Bu tanımlarla , f_i kök fonksiyonları göz önüne alınırsa snu, cnu ve dnu nun periyotlarının

$$4w_1, 2w_2, 4w_3 ; 4w_1, 4w_2, 2w_3 ; 2w_1, 4w_2, 4w_3$$

olduğu görülür. (6) dan dnu nun yarı periyotlarda aldığı değerler bulunabilir.

$$\begin{aligned} \text{dn}0 &= \frac{f_1(w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} \\ \text{dn}(u+K) &= \frac{f_1(u+K+w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} = \frac{f_1(u+2w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} \\ \text{dn}(u+K) &= \frac{f_1(u+w_3)}{f_1(2w_1+w_2)} = \frac{f_1(u+w_3)}{f_1(w_2)} \end{aligned}$$

eşitliğinde u yerine sıfır alınırsa,

$$\operatorname{dn}K = \frac{\sqrt{\wp(w_3) - e_1}}{\sqrt{\wp(w_2) - e_1}} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2}} = k' \quad (7)$$

değeri bulunur. Benzer şekilde

$$\operatorname{dn}(u+2iK') = \frac{f_1(u+2iK'+w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} = \frac{f_1(u+2iK'+w_2)}{f_1(w_2)}$$

eşitliğinde u yerine sıfır alınırsa,

$$\operatorname{dn}(2iK') = \frac{-f_1(w_2)}{f_1(w_2)} = -1 \quad (8)$$

bulunur.

$$\operatorname{dn}(u+K+2iK') = \frac{f_1(u+K+2iK'+w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} = \frac{f_1(u+2w_2+w_3)}{f_1(w_2)}$$

$$\operatorname{dn}(u+K+2iK') = \frac{f_1(u+4w_2+w_1-w_2)}{f_1(w_2)}$$

eşitliğinde yine u yerine sıfır alınırsa

$$\operatorname{dn}(K+2iK') = \frac{f_1(4w_2+w_1-w_2)}{f_1(w_2)} = \frac{f_1(w_1-w_2)}{f_1(w_2)} = \frac{-f_1(w_3)}{f_1(w_2)} = -k' \quad (9)$$

olur. Aynı şekilde ,

$$\operatorname{dn}(u+K-2iK') = \frac{f_1(u+K-2iK'+w_1+w_3)}{f_1(w_1+w_3)} = \frac{f_1(u-w_2)}{f_1(w_2)}$$

da u yerine sıfır alınırsa ,

$$\operatorname{dn}(K-2iK') = \frac{f_1(-w_2)}{f_1(w_2)} = -1 \quad (10)$$

elde edilir. $\operatorname{dn}u$ 'nun çift fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(-K) &= k' \\ \operatorname{dn}(-K-2iK') &= -k' \\ \operatorname{dn}(-K+2iK') &= -1 \\ \operatorname{dn}(-2iK') &= -1 \end{aligned} \quad (11)$$

değerleri bulunur. Benzer olarak $\operatorname{sn}u$ ve $\operatorname{cn}u$ 'nun yarı periyotlardaki değerleri bulunabilir.

a ve b harfleri s, c, n, d lerden herhangi ikisi olsun. abu ile bau arasında $2w_1$, abu 'nun periyodu olmak üzere

$$ab(u+w_1) = A.bau$$

bağıntısı vardır.[5]

$2w_3, 2w_2, 2w_1$ sırasıyla $\operatorname{cn}u, \operatorname{dn}u, \operatorname{sn}u$ 'nun periyotları olduğundan,

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u+w_2) &= A_1 . \operatorname{dn}u \\ \operatorname{cn}(u+w_3) &= A_2 . \operatorname{cn}u \\ \operatorname{sn}(u+w_1) &= A_3 . \operatorname{sn}u \end{aligned} \quad (12)$$

eşitlikleri vardır.[5] Bu fonksiyonların w_2, w_3 ve w_1 deki aldığı değerler göz önüne alınarak u yerine sıfır alınır,

$$\begin{aligned} A_1 &= k' \\ A_2 &= \frac{ik'}{k} \\ A_3 &= \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (13)$$

değerleri elde edilir. (13) değerleri (12) de yazılırsa ,

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u+iK') &= k' . \operatorname{dn}u \\ \operatorname{cn}(u+K+iK') &= \frac{ik'}{k} . \operatorname{cn}u \\ \operatorname{sn}(u+K) &= \frac{1}{k} . \operatorname{sn}u \end{aligned} \quad (14)$$

bulunur.

dn u , cn u ve sn u arasındaki bağıntılar kullanılarak,

$$\operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad \operatorname{cn}(u+K) = -k' \cdot \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}$$

$$\operatorname{dn}(u+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}u}, \quad \operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k} \operatorname{sn}u$$

$$\operatorname{cn}(u+iK') = -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}, \quad \operatorname{dn}(u+iK') = -i \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u} \quad (15)$$

$$\operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{\operatorname{dn}u}{k \operatorname{cn}u}, \quad \operatorname{cn}(u+K+iK') = -\frac{ik'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn}u}$$

$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = ik' \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u}$$

değerleri elde olur. (14) ve (15) bağıntılarından

$$\operatorname{cd}(u+iK') = \frac{\operatorname{cn}(u+iK')}{\operatorname{dn}(u+iK')} = \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}$$

olur. u yerine sıfır alınırsa,

$$\operatorname{cd}iK' = \frac{1}{k}$$

eşitliği yazılır.

(15) den $\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k} \operatorname{sn}u$ yazılabilir. Buradan $\operatorname{sn}u$ 'nun $iK' + 2\Omega^*$

daki rezidüsü, $\operatorname{sn}u$ 'nun $u=0$ daki rezidüsünün $1/k$ katı olduğu söylenir. Buna göre $\operatorname{sn}u$ 'nun $iK' + 2\Omega^*$ daki rezidüsü $1/k$, $2K+iK' + 2\Omega^*$ daki rezidüsü $-1/k$ olur. Benzer şekilde,

$$\operatorname{cn}(u+iK') = -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u} = \frac{-i}{k} \operatorname{dn}u \cdot \operatorname{nsu}$$

dan $\operatorname{cn}u$ 'nun $iK' + 2\Omega^*$ kutbundaki rezidüsü $-i/k$, ikinci $-iK' + 2\Omega$ daki rezidüsü i/k 'dir.

Aynı düşünce ile $\operatorname{dn}u$ 'nun $iK' + 2\Omega^*$ kutbundaki rezidüsü $-i$, diğer $-iK' + 2\Omega^*$ kutbundaki rezidüsünün $+i$ olduğu bulunur.

dn , cd , cn fonksiyonlarının periyot latisleri sırasıyla, $2\Omega_1^*$, $2\Omega_2^*$ ve $2\Omega_3^*$ latisleridir. [2] Her üçü de orijinde 1 sabit değerine sahiptir. Türevlerinin orijinde aldığı değerler

$$\begin{aligned}\text{dn}'(0) &= -k^2 \\ \text{cd}'(0) &= -k'^2 \\ \text{cn}'(0) &= -1\end{aligned}$$

dir. $1-\text{dn}$, $1-\text{cd}$ ve $1-\text{cn}$ fonksiyonları orijinde 0 sabit değerini alırlar. Bu fonksiyonların sıfırın komşuluğunda seriye açılımları sırasıyla,

$$\frac{1}{2}k^2 \cdot u^2, \quad \frac{1}{2}k'^2 \cdot u^2, \quad \frac{1}{2}u^2$$

terimleri ile başlar.

$$\frac{1}{4}k^2 \frac{1+\text{dn}}{1-\text{dn}}, \quad \frac{1}{4}k'^2 \frac{1+\text{cd}}{1-\text{cd}}, \quad \frac{1}{4} \frac{1+\text{cn}}{1-\text{cn}}$$

fonksiyonları $2\Omega_i^*$ ($i=1,2,3$) periyot latisleriyle ikinci mertebeden fonksiyonlardır. Herbiri orijin civarında seriye açılımları u^{-2} terimiyle başlar.

$$\text{Dolayısıyla } \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\text{dn}}{1-\text{dn}} \text{ fonksiyonu ile } \wp(u|2\Omega_1^*)$$

fonksiyonu 2.2.2 den dolayı bir sabit farkı ile ayrılırlar.

Bu fonksiyonlar $2\Omega_1^*$, $2\Omega_2^*$ ve $2\Omega_3^*$ periyot latisleri için

$\wp u - e_2$, $\wp u - e_1$ ve $\wp u - e_3$ fonksiyonlarıdır. Doğuranları ise

$$\begin{aligned}(2K, 4iK') \\ (4K, 2iK') \\ (2K-2iK', 2K+2iK')\end{aligned}$$

olarak alınır.

$$\wp u - e_2 = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\text{dn}}{1-\text{dn}}$$

fonksiyonunda u yerine K alınırsa ve (7) kullanılırsa,

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{4} k^2 \frac{1+k'}{1-k'}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{4} (1+k')^2 \quad (16)$$

değerleri bulunur. Aynı şekilde u yerine $K+2iK'$ ve (9) kullanılırsa,

$$e_3 - e_2 = \frac{1}{4} k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(K+2iK')}{1-\operatorname{dn}(K+2iK')}$$

$$= \frac{1}{4} k^2 \frac{1-k'}{1+k'}$$

$$= \frac{1}{4} (1-k')^2 \quad (17)$$

elde olur. Benzer olarak,

$$e_2 - e_1 = -\frac{1}{4} (1+k)^2, \quad e_1 - e_3 = \frac{1}{4} (k+ik')^2$$

$$e_3 - e_1 = -\frac{1}{4} (1-k)^2, \quad e_2 - e_3 = \frac{1}{4} (k-ik')^2 \quad (18)$$

eşitlikleri bulunur.

Herhangi bir latis için $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ olduğundan (16), (17) ve (18) de bulunan değerlerle $2\Omega_1^*$, $2\Omega_2^*$ ve $2\Omega_3^*$ latisleri için sırasıyla,

$$e_2 = \frac{-(1+k'^2)}{6}, \quad e_1 = \frac{1+k^2}{6}, \quad e_3 = \frac{k'^2 - k^2}{6}$$

değerleri elde edilir. Böylece

$$p(u|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4} k^2 \cdot \frac{1+\operatorname{dn} u}{1-\operatorname{dn} u} - \frac{1+k'^2}{6}$$

$$p(u|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4} k^2 \cdot \frac{1+\operatorname{cd} u}{1-\operatorname{cd} u} + \frac{1+k^2}{6} \quad (19)$$

$$p(u|2\Omega_3^*) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\operatorname{cn} u}{1-\operatorname{cn} u} + \frac{k'^2 - k^2}{6}$$

ifadeleri yazılır.

1.2. $2\Omega_1^*$ Latisinin Yarı Periyotlarında $\wp$ u'nun Aldığı Değerleri:

(19) bağıntılarından

$$\wp(u+K|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \cdot \frac{1+\operatorname{dn}(u+K)}{1-\operatorname{dn}(u+K)} - \frac{1+k'^2}{6}$$

yazılabilir. Burada u yerine sıfır alınırsa,

$$\begin{aligned} \wp(K|2\Omega_1^*) &= \frac{1}{4}k^2 \frac{1+k'}{1-k'} - \frac{1+k'^2}{6} \\ &= \frac{k'^2 + 6k' + 1}{12} \end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$\wp(u+2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(u+2iK')}{1-\operatorname{dn}(u+2iK')} - \frac{1+k'^2}{6}$$

bağıntısında u yerine sıfır alınırsa,

$$\wp(2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(2iK')}{1-\operatorname{dn}(2iK')} - \frac{1+k'^2}{6} = -\frac{1+k'^2}{6}$$

olur.

$$\wp(u+K+2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(u+K+2iK')}{1-\operatorname{dn}(u+K+2iK')} - \frac{1+k'^2}{6}$$

bağıntısında u yerine sıfır alınırsa,

$$\wp(K+2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(K+2iK')}{1-\operatorname{dn}(K+2iK')} - \frac{1+k'^2}{6}$$

elde edilir. (9) kullanılırsa,

$$\wp(K+2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \cdot \frac{1-k'}{1+k'} - \frac{1+k'^2}{6}$$

$$\wp(K+2iK'|2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \cdot (1-k')(1+k') \frac{1-k'}{1+k'} - \frac{1+k'^2}{6}$$

$$\wp(K+2iK' | 2\Omega_1^*) = \frac{k'^2 - 6k' + 1}{12}$$

olur. Benzer şekilde ,

$$\wp(u+K-2iK' | 2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(u+K-2iK')}{1-\operatorname{dn}(u+K-2iK')} - \frac{1+k'^2}{6}$$

bağıntısında u yerine sıfır alınırsa,

$$\wp(K-2iK' | 2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1+\operatorname{dn}(K-2iK')}{1-\operatorname{dn}(K-2iK')} - \frac{1+k'^2}{6}$$

yada

$$\wp(K-2iK' | 2\Omega_1^*) = \frac{1}{4}k^2 \frac{1-1}{1+1} - \frac{1+k'^2}{6}$$

$$\wp(K-2iK' | 2\Omega_1^*) = - \frac{1+k'^2}{6}$$

değerleri bulunur. $\operatorname{dn}u$ 'nun çift fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\wp(-K | 2\Omega_1^*) = \frac{k'^2 + 6k' + 1}{12}$$

$$\wp(-2iK' | 2\Omega_1^*) = - \frac{1+k'^2}{6}$$

$$\wp(-K-2iK' | 2\Omega_1^*) = \frac{k'^2 - 6k' + 1}{12}$$

$$\wp(-K+2iK' | 2\Omega_1^*) = - \frac{1+k'^2}{6}$$

ifadeleri çıkar.

1.3. $2\Omega_1^*$ Latisinin Çeyrek Periyotlarında $\wp u$ 'nun Aldığı Değerler:

3.4 Teoreminde eğer $-u \equiv u-w \pmod{2\Omega}$ veya $u \equiv \frac{1}{2}w \pmod{\Omega}$ alınırsa ,

veya

$$(\wp u - e_i)^2 = d_i^2$$

$$\wp u = e_i \pm d_i$$

dir. Bu şartın sağlandığı $i \neq j$ için $\pm \frac{1}{2} w_i + 2\Omega$, $\pm (\frac{1}{2} w_i \pm w_j) + 2\Omega$ gibi dört kalan sınıfı vardır. Ancak

$$\frac{1}{2} w_i \pm w_j \equiv -\frac{1}{2} w_i \pm w_k \pmod{2\Omega}$$

gibi i den başka kullanılan ikisinin önemi yoktur. Böylece ,

$$p(\frac{1}{2} w_i) = e_i + d_i$$

$$p(\frac{1}{2} w_i + w_j) = e_i - d_i$$

olarak alınabilir. (1) göz önüne alınarak ,

$$f_i^2(\frac{1}{2} w_i) = d_i$$

$$f_i^2(\frac{1}{2} w_i + w_j) = -d_i$$

$$f_j^2(\frac{1}{2} w_i) = e_i - e_j + d_i$$

$$f_j^2(\frac{1}{2} w_i + w_j) = e_i - e_j - d_i$$

(20)

bağıntıları bulunur.

Jacobi-Glaisher fonksiyonları olarak

$$csu = f_1(u|2\Omega^*), \quad nsu = f_2(u|2\Omega^*), \quad dsu = f_3(u|2\Omega^*)$$

tanımlanır ki bunların periyot latisleri ve doğurayları sırasıyla $2\Omega_1^*, 2\Omega_2^*, 2\Omega_3^*$ ve $(2K, 4iK')$, $(4K, 2iK')$, $(2K-2iK', 2K+2iK')$ dir [2].

Bu fonksiyonlarla, p u fonksiyonu arasında

$$pu = cs^2u + e_1 = ns^2u + e_2 = ds^2u + e_3 \quad (21)$$

bağıntısı vardır [2]. $2\Omega^*$ latisinde k, k' değerleri hatırlanırsa $k' = d_1$, $d_2 = -k$, $d_3 = -ikk'$ dir. Bunlar ile (20) bağıntıları kullanılırsa,

$$f_2^2(\frac{1}{2} w_1) = e_1 - e_2 + d_1 = ns^2(\frac{1}{2} K) = 1 + k'$$

olur. Buradan da

$sn^2 \frac{1}{2} K = \frac{1}{1+k'}$ bulunur. snu , cnu ve dnu arasındaki bağıntılar kullanılarak,

$$cn^2 \frac{1}{2} K = \frac{k'}{1+k'}, \quad dn^2 \frac{1}{2} K = k' \quad (22)$$

bulunur.

Yine (20) bağıntılarından ,

$$f_2^2 \left(\frac{1}{2} w_1 + w_2 \right) = e_1 - e_2 - d_1 = ns^2 \left(\frac{1}{2} K + iK' \right)$$

yazılabilir. Yada $ns^2 \left(\frac{1}{2} K + iK' \right) = 1 - k'$ 'dir. Buradan da

$$\operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} K + iK' \right) = \frac{1}{1-k'}$$

$$\operatorname{cn}^2 \left(\frac{1}{2} K + iK' \right) = - \frac{k'}{1-k'} \quad (23)$$

$$\operatorname{dn}^2 \left(\frac{1}{2} K + iK' \right) = - k'$$

değerleri elde olur. (15) bağıntılarında u yerine $-\frac{1}{2}K$ konulursa,

$$\operatorname{sn} \left(-\frac{1}{2} K + iK' \right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn} \left(-\frac{1}{2} K \right)} \quad (24)$$

$$\operatorname{sn}^2 \left(-\frac{1}{2} K + iK' \right) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \left(-\frac{1}{2} K \right)} \cdot \frac{1}{1-k'}$$

yazılır. (22) , (23) ve (24) 'teki bulunan değerler (21). de kullanılırsa φ 'nun aşağıdaki değerleri bulunur.

$$\varphi \left(\frac{1}{2} K | 2\Omega_1^* \right) = \operatorname{cs}^2 \frac{1}{2} K + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$\varphi \left(\frac{1}{2} K | 2\Omega_1^* \right) = \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{1}{2} K}{\operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} K} + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$\varphi \left(\frac{1}{2} K | 2\Omega_1^* \right) = \frac{\frac{k'}{1+k'}}{\frac{1}{1+k'}} + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$p\left(\frac{1}{2}K|2\Omega_1^*\right) = \frac{k'^2 + 18k' + 1}{12}$$

Benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$p\left(\frac{1}{2}K + iK'|2\Omega_1^*\right) = cs^2\left(-\frac{1}{2}K + iK'\right) + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$= \frac{cn^2\left(-\frac{1}{2}K + iK'\right)}{sn^2\left(-\frac{1}{2}K + iK'\right)} + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$= -k' + \frac{1+6k'+k'^2}{12} = \frac{k'^2 - 6k' + 1}{12}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}K + iK'|2\Omega_1^*\right) = cs^2\left(-\frac{1}{2}K + iK'\right) + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$= \frac{-k'}{1-k'} + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$= \frac{k'^2 - 6k' + 1}{12}$$

$$p(iK'|2\Omega_1^*) = cs^2 iK' + \frac{1+6k'+k'^2}{12}$$

$$= \frac{k'^2 + 6k' - 11}{12}$$

Bu nun çift bir fonksiyon olduğu düşünülürse $-\frac{1}{2}K$, $-iK'$, $\frac{1}{2}K - iK'$ ve $-\frac{1}{2}K - iK'$ deki aldığı değerler yukarıda hesaplanan değerlerle aynı olur.

1.4. $2\Omega_2^*$ Latisinin Yarı Periyotlarında p 'nun Aldığı Değerler:

(6) tanımı kullanılırsa,

$$cn(u+2K|2\Omega^*) = \frac{f_3(u+2K+w_1+w_3|2\Omega^*)}{f_3(w_1+w_3)}$$

$$= \frac{-f_3(u+w_1+w_3|2\Omega^*)}{f_3(w_1+w_3)} = -cnu$$

eşitliği yazılır. Burada u yerine sıfır alınırsa ,

$$cn(2K|2\Omega^*) = -1$$

olur. Aynı şekilde $dn(u+2K|2\Omega^*) = dnu$ bağıntısında u yerine sıfır alınırsa $dn(2K|2\Omega^*) = 1$ olur. Buna göre $cd2K = -1$ bulunur.

$$p(u|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + cdu}{1 - cdu} + \frac{1 + k^2}{6}$$

de u yerine $u+2K$ alırsak ,

$$p(u + 2K|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + cd(u+2K)}{1 - cd(u+2K)} + \frac{1 + k^2}{6}$$

eşitliği yazılır.

Burada u yerine sıfır alınırsa ,

$$p(2K|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + cd2K}{1 - cd2K} + \frac{1 + k^2}{6}$$

olur. $cd2K = -1$ olduğu düşünülürse ,

$$p(2K|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 - 1}{1 + 1} + \frac{1 + k^2}{6}$$

$$p(2K|2\Omega_2^*) = \frac{1 + k^2}{6}$$

değeri bulunur.

$$p(u+iK'|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + cd(u+iK')}{1 - cd(u+iK')} + \frac{1 + k^2}{6}$$

bağıntısından (15) kullanılır ve u yerine sıfır alınırsa

$$\begin{aligned}
 p(1K' | 2\Omega_2^*) &= \frac{1}{4} k'^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}} + \frac{1 + k^2}{6} \\
 &= \frac{1}{4} (1 - k^2) \cdot \frac{k + 1}{k - 1} + \frac{1 + k^2}{6} \\
 &= - \frac{k^2 + 6k + 1}{12}
 \end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$p(u+2K+1K' | 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4} k'^2 \cdot \frac{1 + cd(u+2K+1K')}{1 - cd(u+2K+1K')} + \frac{1 + k^2}{6}$$

de u yerine sıfır alınırsa,

$$p(2K+1K' | 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4} k'^2 \cdot \frac{1 + cd(2K+1K')}{1 - cd(2K+1K')} + \frac{1 + k^2}{6}$$

$$p(2K+1K' | 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4} k'^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} + \frac{1 + k^2}{6}$$

$$p(2K+1K' | 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4} (1 - k^2) \cdot \frac{k - 1}{k + 1} + \frac{1 + k^2}{6}$$

$$p(2K+1K' | 2\Omega_2^*) = - \frac{k^2 - 6k + 1}{12}$$

bulunur. cd nun çift fonksiyon olduğu bilindiğinden ,

$$p(-2K|2\Omega_2^*) = \frac{1 + k^2}{6}$$

$$p(-iK'|2\Omega_2^*) = - \frac{k^2 + 6k + 1}{12}$$

$$p(-2K-iK'|2\Omega_2^*) = - \frac{k^2 - 6k + 1}{12}$$

$$p[\pm(2K-iK'|2\Omega_2^*)] = - \frac{k^2 - 6k + 1}{12}$$

değerleri bulunabilir. (21) den

$$p(0|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 + \frac{1 + k^2}{6} = \frac{5 - k^2}{12}$$

eşitliği elde edilir.

1.5. $2\Omega_2^*$ Latisinin Çeyrek Periyotlarında p 'u'nun Aldığı Değerler:

(15) deki Jacobi fonksiyonlarının yarı periyot dönüşümlerinde u yerine ilk olarak $-u$, sonrada $\frac{1}{2}iK'$ yazılırsa,

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}iK'\right) \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}iK'\right) = - \frac{1}{k}$$

elde olur. Bunun sonucunda

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}iK'\right) = 1/\sqrt{k} \quad (25)$$

olarak yazılabilir.

$\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$ ve $\operatorname{dn}u$ fonksiyonlarının arasındaki bağıntılardan,

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2\left(\frac{1}{2}iK'\right) &= 1 + 1/k = \frac{k + 1}{k} \\ \operatorname{dn}^2\left(\frac{1}{2}iK'\right) &= 1 + k \end{aligned} \quad (26)$$

yazılır. Yine (15) bağıntılarında u yerine sıfır alınarak

$$\operatorname{sn}K = \operatorname{cn}0/\operatorname{dn}0 = 1, \operatorname{cn}K = 0 \text{ ve } \operatorname{dn}K = k' \quad (27)$$

değerleri bulunur.

$\text{sn}(u+K) = \text{cnu}/\text{dnu}$ bağıntılarında u yerine $\frac{1}{2}iK'$ alınırsa,

$$\text{sn}^2\left(K + \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{\text{cn}^2\left(\frac{1}{2}iK'\right)}{\text{dn}^2\left(\frac{1}{2}iK'\right)}$$

$$\text{sn}^2\left(K + \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{1+k}{k} = 1/k \quad (28)$$

bulunur. cnu , dnu ve snu fonksiyonları arasındaki bağıntılardan,

$$\text{cn}^2\left(K + \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{k-1}{k}$$

ve (29)

$$\text{dn}^2\left(K + \frac{1}{2}iK'\right) = 1-k$$

bulunur. $\text{sn}(u+K) = \text{cnu}/\text{dnu}$ da u yerine $-\frac{1}{2}iK'$ yazılır ve dnu , cnu nun çift fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \text{sn}^2\left(K - \frac{1}{2}iK'\right) &= 1/k \\ \text{cn}^2\left(K - \frac{1}{2}iK'\right) &= (k-1)/k \\ \text{dn}^2\left(K - \frac{1}{2}iK'\right) &= 1-k \end{aligned} \quad (30)$$

eşitlikleri bulunur. (25), (26), (27), (28), (29) ve (30) da bulunan değerler kullanılarak cd fonksiyonunun, aşağıdaki değerleri bulunur.

$$\text{cd}0 = \text{cn}K/\text{dn}K = 0$$

$$\text{cd}\left(\pm \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{\text{cn}\left(\pm \frac{1}{2}iK'\right)}{\text{dn}\left(\pm \frac{1}{2}iK'\right)} = \frac{\sqrt{(k+1)/k}}{\sqrt{(1+k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{cd}\left(K + \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{\text{cn}\left(K + \frac{1}{2}iK'\right)}{\text{dn}\left(K + \frac{1}{2}iK'\right)} = \frac{\sqrt{(k-1)/k}}{\sqrt{(1-k)}} = \frac{1}{i\sqrt{k}} \quad (31)$$

$$\operatorname{cd}\left(K - \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{\operatorname{cn}\left(K - \frac{1}{2}iK'\right)}{\operatorname{dn}\left(K - \frac{1}{2}iK'\right)} = \frac{\sqrt{(k-1)/k}}{\sqrt{1-k}} = \frac{1}{i\sqrt{k}}$$

$\operatorname{cd}u$ 'nun çift fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa ,

$$\operatorname{cd}\left(-K + \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{1}{i\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{cd}\left(-K - \frac{1}{2}iK'\right) = \frac{1}{i\sqrt{k}}$$

sonucuna varılır. Elde edilen bu değerler kullanılarak, $\wp(u|2\Omega_2^*)$ fonksiyonunun çeyrek periyotlarda aldığı değerler bulunabilir.

(19) bağıntılarında u yerine $u+K$ alınırsa,

$$\wp(u+K|2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{cd}(u+K)}{1 - \operatorname{cd}(u+K)} + \frac{1 + k^2}{6}$$

değeri elde olur. Burada da u yerine sıfır alıp (31) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \wp(K|2\Omega_2^*) &= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{cd}K}{1 - \operatorname{cd}K} + \frac{1 + k^2}{6} \\ &= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + 0}{1 - 0} + \frac{1 + k^2}{6} \\ &= \frac{5 - k^2}{12} \end{aligned}$$

değeri bulunur.

$$\wp\left(u + \frac{1}{2}iK' | 2\Omega_2^*\right) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{cd}\left(u + \frac{1}{2}iK'\right)}{1 - \operatorname{cd}\left(u + \frac{1}{2}iK'\right)} + \frac{1 + k^2}{6}$$

bağıntısında u yerine sıfır alıp, (31) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{1}{2}iK' \mid 2\Omega_2^*\right) &= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{k}/k}{1 - \sqrt{k}/k} + \frac{1 + k^2}{6} \\
&= \frac{1}{4}(1-k^2) \cdot \frac{k + \sqrt{k}}{k - \sqrt{k}} + \frac{1 + k^2}{6} \\
&= \frac{1}{4}(1-k^2) \cdot \frac{1 + \sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1} + \frac{1 + k^2}{6} \\
&= \frac{k^2 + 1}{6} - \frac{(1 + \sqrt{k})(k^2 - 1)}{4}
\end{aligned}$$

değerleri bulunur. Aynı şekilde,

$$p(u+K + \frac{1}{2}iK' \mid 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{cd}(u+K + \frac{1}{2}iK')}{1 - \operatorname{cd}(u+K + \frac{1}{2}iK')} + \frac{1 + k^2}{6}$$

bağıntısında u yerine sıfır alıp, cdu fonksiyonunun değeri düşünülürse,

$$p(K + \frac{1}{2}iK' \mid 2\Omega_2^*) = \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{cd}(K + \frac{1}{2}iK')}{1 - \operatorname{cd}(K + \frac{1}{2}iK')} + \frac{1 + k^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{(k-1)/k}}{\sqrt{1-k}}}{1 - \frac{\sqrt{(k-1)/k}}{\sqrt{1-k}}} + \frac{1 + k^2}{6} \\
&= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{1 + 1/i\sqrt{k}}{1 - 1/i\sqrt{k}} + \frac{1 + k^2}{6} \\
&= \frac{1}{4}k'^2 \cdot \frac{i\sqrt{k} + 1}{i\sqrt{k} - 1} + \frac{1 + k^2}{6}
\end{aligned}$$

değeri bulunur. cdu nun çift fonksiyon olduğu düşünülürse negatif değerlerinde aynı olduğu görülür.

2. BÖLÜM

$g_i(u|2\Omega^*)$ VE $h_i(u|2\Omega^*)$ ELİPTİK FONKSİYONLARI:

2.1. $g_i(u|2\Omega^*)$ Fonksiyonları ve Özdeşlikler :

Daha önce kök fonksiyonlarını $f_i u = (p u - e_i)^{1/2}$ ($i=1,2,3$) şeklinde tanımlamıştık. Bu bölümde $g_i u$ fonksiyonları ($ijk=123$)

$$g_i(u|2\Omega^*) = \frac{f_j u \cdot f_k u}{f_i u} \quad (32)$$

ifadeleriyle verilir [2].

Bu fonksiyon $f_i u$ 'nun basit sıfırları olan $w_i + 2\Omega^*$ kalan sınıfında basit kutuplara, $w_j + 2\Omega^*$ ($j \neq i$) kalan sınıflarında ise basit sıfırlara sahiptir. $g_i u$ fonksiyonu tek fonksiyondur, çünkü $f_i u$ fonksiyonları tek fonksiyonlardır.

Kök fonksiyonlarının homojenliğinden $g_i u$ fonksiyonlarında homojenlik özelliği vardır. Yani

$$g_i(mu|2m\Omega^*) = f_j(mu) \cdot f_k(mu) / f_i(mu) = m^{-1} \cdot g_i(u|2\Omega^*) \quad (33)$$

dir. $g_i u$ fonksiyonlarının türevlerini aldığımızda

$$g'_i u = g_i^2 u - f_j^2 u - f_k^2 u \quad (i=1,2,3) \quad (34)$$

eşitliğini buluruz.

$g_i u$ 'nun $u = w_j + 2\Omega^*$ ($i \neq j$) sıfırlarındaki türevleri ($ijk=123$),ün herhangi bir permütasyonu olmak üzere

$$g'_i w_j = -g'_i w_k = e_k - e_j$$

eşitliği vardır.

$g_i u$, $f_i u$ fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

$f_j u + f_k u$, $g_i(u|4\Omega^*)$ fonksiyonlarının sıfırları ve kutupları aynı

kalan sınıflarındadır ve bunlar birer basit sıfır yada kutuptur. Bu nedenle teorem 2.2.1 gereğince

$$f_j u + f_k u = A. g_i(u|4\Omega) \quad (35)$$

eşitliği yazılır.

Kök fonksiyonlarının 4Ω kalan sınıfında ki kutuplarında rezidü değeri +1 dir. Dolayısıyla $f_j u + f_k u$ 'nun 4Ω kalan sınıfındaki rezidüsü +2 dir. (35) denklemi

$$f_j u + f_k u = 2 g_i(u|4\Omega) \quad (36)$$

şeklinde yazılır. $g_i u$ fonksiyonlarının homojenliğinden

$$2 g_i(u|4\Omega) = g_i\left(\frac{1}{2}u|2\Omega\right) \quad (37)$$

olur ve (36) denklemi

$$f_j u + f_k u = g_i\left(\frac{1}{2}u|2\Omega\right) \quad (38)$$

şeklını alır. (38) de u yerine $2u$ alırsak

$$f_j(2u) + f_k(2u) = g_i(u|2\Omega) \quad (39)$$

eşitliğini buluruz.

2.2. $g_i u$ Fonksiyonlarının Yarı Periyot Dönüşümleri ve Yarı Periyot Noktalarında Aldığı Değerler:

$2\Omega^*$ da $g_i u$, $g_i(u+w_i)$ fonksiyonlarının kutupları ve kutuplardaki esas kısımları aynı olduğundan teorem 2.2.2 gereğince

$$g_i u + g_i(u+w_i) = 0 \quad (40)$$

yazılabilir. Aynı düşünüşle $g_j u + g_j(u+w_j) = 0$ ve $g_k u + g_k(u+w_k) = 0$

yazılır. $g_i u$ ($i=1,2,3$) fonksiyonları (32) den

$$\begin{aligned} g_1 u &= (f_2 u) \cdot (f_3 u) / (f_1 u) \\ g_2 u &= (f_1 u) \cdot (f_3 u) / (f_2 u) \\ g_3 u &= (f_1 u) \cdot (f_2 u) / (f_3 u) \end{aligned} \quad (41)$$

şeklinde yazılır. (41) deki fonksiyonlarda u yerine $u + w_1$, $u + w_2$ ve $u + w_1 + w_2$ koyarsak

$$g_1(u+w_1) = \frac{f_2(u+w_1) \cdot f_3(u+w_1)}{f_1(u+w_1)} = -g_1 u, \quad g_2(u+w_1) = \frac{f_1(u+w_1) \cdot f_3(u+w_1)}{f_2(u+w_1)}$$

$$g_1(u+w_2) = \frac{f_2(u+w_2) \cdot f_3(u+w_2)}{f_1(u+w_2)}, \quad g_2(u+w_2) = \frac{f_1(u+w_2) \cdot f_3(u+w_2)}{f_2(u+w_2)} = -g_2 u$$

$$g_1(u+w_1+w_2) = \frac{f_2(u+w_1+w_2) \cdot f_3(u+w_1+w_2)}{f_1(u+w_1+w_2)}, \quad g_2(u+w_1+w_2) = \frac{f_1(u+w_1+w_2) \cdot f_3(u+w_1+w_2)}{f_2(u+w_1+w_2)}$$

$$g_3(u+w_1) = \frac{f_1(u+w_1) \cdot f_2(u+w_1)}{f_3(u+w_1)}$$

(42)

$$g_3(u+w_2) = \frac{f_1(u+w_2) \cdot f_2(u+w_2)}{f_3(u+w_2)}$$

$$g_3(u+w_1+w_2) = \frac{f_1(u+w_1+w_2) \cdot f_2(u+w_1+w_2)}{f_3(u+w_1+w_2)} = -g_3 u$$

dönüşümlerini yazarız. (42) dönüşümlerinde $u=0$ yazarsak

$$g_1(w_1) = \frac{f_2(w_1) \cdot f_3(w_1)}{f_1(w_1)} = \infty$$

$$g_2(w_1) = \frac{f_1(w_1) \cdot f_3(w_1)}{f_2(w_1)} = 0$$

$$g_1(w_2) = \frac{f_2(w_2) \cdot f_3(w_2)}{f_1(w_2)} = 0$$

$$g_2(w_2) = \frac{f_1(w_2) \cdot f_3(w_2)}{f_2(w_2)} = \infty$$

$$g_1(w_1+w_2) = \frac{f_2(w_1+w_2) \cdot f_3(w_1+w_2)}{f_1(w_1+w_2)} = 0$$

$$g_2(w_1+w_2) = \frac{f_1(w_1+w_2) \cdot f_3(w_1+w_2)}{f_2(w_1+w_2)} = 0$$

$$g_3(w_1) = \frac{f_1(w_1) \cdot f_2(w_1)}{f_3(w_1)} = 0$$

$$g_3(w_2) = \frac{f_1(w_2) \cdot f_2(w_2)}{f_3(w_2)} = 0$$

(43)

$$g_3(w_1 + w_2) = \frac{f_1(w_1 + w_2) \cdot f_2(w_1 + w_2)}{f_3(w_1 + w_2)} = \infty$$

değerlerini elde ederiz. g_i fonksiyonlarının periyotlarını bulalım, (41) den,

$$g_1(u + 2w_1) = \frac{f_2(u + 2w_1) \cdot f_3(u + 2w_1)}{f_1(u + 2w_1)} = \frac{-f_2 u \cdot -f_3 u}{f_1 u} = \frac{f_2 u \cdot f_3 u}{f_1 u} = g_1 u$$

$$g_1(u + 4w_2) = \frac{f_2(u + 4w_2) \cdot f_3(u + 4w_2)}{f_1(u + 4w_2)} = \frac{f_2 u \cdot f_3 u}{f_1 u} = g_1 u$$

(44)

$g_1(u + 4w_3) = g_1 u$ dır. Benzer şekilde

$$g_2(u + 4w_1) = g_2 u \quad g_3(u + 4w_1) = g_3 u$$

$$g_2(u + 2w_2) = g_2 u \quad g_3(u + 4w_2) = g_3 u$$

$$g_2(u + 4w_3) = g_2 u \quad g_3(u + 2w_3) = g_3 u$$

olarak elde edilir. Buradan g_1, g_2, g_3 fonksiyonlarının periyotları sırasıyla $(2w_1, 4w_2, 4w_3)$; $(4w_1, 2w_2, 4w_3)$; $(4w_1, 4w_2, 2w_3)$ dır. Buradan g_i fonksiyonları ikinci mertebeden eliptik fonksiyonlardır.

2.3. g_i Fonksiyonlarının Çeyrek Periyot Noktalarında Aldığı Değerler:

g_i ($i=1,2,3$) fonksiyonlarının $\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1 + w_2, w_1 + \frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$ çeyrek periyot noktalarındaki aldığı değerler şu şekilde hesaplanır.

(41) deki eşitliklerde u yerine $u + \frac{1}{2}w_1$ yazıp $u=0$ alırsak

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{f_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right)}{f_1\left(\frac{1}{2}w_1\right)}$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right)}{f_2\left(\frac{1}{2}w_1\right)}$$

(45)

$$g_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) f_2\left(\frac{1}{2}w_1\right)}{f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right)}$$

elde ederiz.

$f_1\left(\frac{1}{2}w_1\right)$, $f_2\left(\frac{1}{2}w_1\right)$ ve $f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right)$ değerlerini (20) den hesaplarsak,

$$f_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \sqrt{d_1} = \sqrt{k'}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = (e_1 - e_2 + d_1)^{1/2} = \sqrt{1+k'}$$

dir.

$f_1^2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = p\left(\frac{1}{2}w_1\right) - e_1$ eşitliğinden $p\left(\frac{1}{2}w_1\right) = k' + e_1$ olarak bulunur.

Bu değeri $f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = (p\left(\frac{1}{2}w_1\right) - e_3)^{1/2}$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$f_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = (k' + e_1 - e_3)^{1/2} = \sqrt{k' + k'^2}$$

elde ederiz. Bu değerleri (45) eşitliklerinde yerine yazarsak

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{\sqrt{1+k'} \sqrt{k' + k'^2}}{\sqrt{k'}} = 1+k'$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k'^2}}{\sqrt{1+k'}} = k'$$

$$g_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \frac{\sqrt{k'} \sqrt{1+k'}}{\sqrt{k' + k'^2}} = \pm 1$$

değerlerini buluruz.

(41) deki eşitliklerde u yerine önce $u + \frac{1}{2}w_2$ yazıp $u=0$ alırsak

$$\begin{aligned}
g_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) &= \frac{f_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right)}{f_1\left(\frac{1}{2}w_2\right)} \\
g_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) &= \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right)}{f_2\left(\frac{1}{2}w_2\right)} \\
g_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) &= \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) f_2\left(\frac{1}{2}w_2\right)}{f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right)}
\end{aligned} \tag{46}$$

eşitlikleri elde olur.

$f_1\left(\frac{1}{2}w_2\right)$, $f_2\left(\frac{1}{2}w_2\right)$ ve $f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right)$ değerlerini (20) den hesaplırsak

$$\begin{aligned}
f_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) &= (e_2 - e_1 + d_2)^{1/2} = \sqrt{-1-k} \\
f_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) &= \sqrt{d_2} = \sqrt{-k} \quad \text{dır.}
\end{aligned}$$

$f_2^2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = p\left(\frac{1}{2}w_2\right) - e_2$ ise $p\left(\frac{1}{2}w_2\right) = -k + e_2$ olarak bulunur. Bu değeri

$f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = (p\left(\frac{1}{2}w_2\right) - e_3)^{1/2}$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$f_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = (-k + e_2 - e_3)^{1/2} = \sqrt{-k-k^2}$$

değerini buluruz. Bu değerleri (46) eşitliklerinde yerine yazarsak

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{-k} \sqrt{-k-k^2}}{\sqrt{-1-k}} = ik$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{-1-k} \sqrt{-k-k^2}}{\sqrt{-k}} = i+ik$$

$$g_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{-1-k} \sqrt{-k}}{\sqrt{-k-k^2}} = i$$

değerlerini elde ederiz.

(41) de u yerine önce $u + \frac{1}{2}w_1 + w_2$ alıp daha sonra $u=0$ yazdığımızda

$$\begin{aligned}
 g_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) &= \frac{f_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) \cdot f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)}{f_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)} \\
 g_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) &= \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) \cdot f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)}{f_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)} \\
 g_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) &= \frac{f_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) \cdot f_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)}{f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)}
 \end{aligned} \tag{47}$$

eşitliklerini yazarız. Buradaki,

$f_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)$, $f_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)$ ve $f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right)$ değerlerini hesaplırsak (20) den

$$f_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = \sqrt{-d_1} = \sqrt{-k'}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = (e_1 - e_2 - d_1)^{1/2} = \sqrt{1 - k'} \quad \text{dir.}$$

$$f_1^2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = p\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) - e_1 \text{ ise } p\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = -k' + e_1 \text{ olarak bulunur.}$$

Bu değeri , $f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = (p\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) - e_2)^{1/2}$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$f_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = (-k' + e_1 - e_2)^{1/2} = \sqrt{-k' + k'^2}$$

olarak hesaplanır. Bulunan bu değerleri (47) de yerine yazdığımızda,

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = \frac{\sqrt{1 - k'} \cdot \sqrt{-k' + k'^2}}{\sqrt{-k'}} = 1 - k'$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = \frac{\sqrt{-k'} \cdot \sqrt{-k' + k'^2}}{\sqrt{1 - k'}} = k'$$

$$g_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = \frac{\sqrt{-k'} \cdot \sqrt{1-k'}}{\sqrt{-k' + k'^2}} = 1$$

sonuçlarını buluruz.

Yine (41) de u yerine $u + w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazıp $u=0$ aldığımızda

$$g_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{f_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) \cdot f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)}{f_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)}$$

$$g_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{f_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) \cdot f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)}{f_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)} \quad (48)$$

$$g_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{f_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) \cdot f_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)}{f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)}$$

ifadeleri bulunur. Bu eşitliklerdeki

$$f_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right), f_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) \text{ ve } f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right)$$

değerlerini hesaplayalım. (20) den bu ifadeler,

$$f_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = (e_2 - e_1 - d_2)^{1/2} = \sqrt{-1+k}$$

$$f_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \sqrt{-d_2} = \sqrt{k}$$

dir,

$$f_2^2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = p\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) - e_2 \text{ den } p\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = k + e_2$$

olarak bulunur. Bu değeri

$$f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = (p\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) - e_3)^{1/2}$$

de yerine yazarsak

$$f_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \sqrt{k - k^2}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değerleri (48) de yerine yazdığımızda

$$g_1(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{k} \sqrt{k-k^2}}{\sqrt{-1+k}} = ik$$

$$g_2(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-1+k} \sqrt{k-k^2}}{\sqrt{k}} = i(k-1)$$

$$g_3(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-1+k} \sqrt{k}}{\sqrt{k-k^2}} = -i$$

sonuçlarını buluruz.

(41) de u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazıp $u = 0$ alırsak,

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) \cdot f_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}{f_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) \cdot f_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}{f_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}$$

(49)

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) \cdot f_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}{f_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)}$$

değerlerini buluruz. Buradaki

$$f_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2), f_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) \text{ ve } f_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

değerlerini (20) den bulabiliriz.

$w_1 + w_2 \equiv -w_3 \pmod{2\Omega^*}$ alınıp, f_i fonksiyonlarının tekliği göz önüne alındığında ,

$$f_2(\frac{1}{2}w_3) = (e_3 - e_2 + d_3)^{1/2} = \sqrt{k^2 - ikk'}$$

$$f_3(\frac{1}{2}w_3) = \sqrt{d_3} = \sqrt{-ikk'}$$

$f_3^2(\frac{1}{2}w_3) = f(\frac{1}{2}w_3) - e_3$ ise $f(\frac{1}{2}w_3) = -ikk' + e_3$ dir. Bunu

$f_1(\frac{1}{2}w_3) = (f(\frac{1}{2}w_3) - e_1)^{1/2}$ de yerine yazarsak

$$f_1(\frac{1}{2}w_3) = (-ikk' + e_3 - e_1)^{1/2} = \sqrt{-ikk' - k'^2}$$

olarak hesaplanır. Bu değerleri (49) da yazdığımızda

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{k^2 - ikk'} \sqrt{-ikk'}}{\sqrt{-ikk' - k'^2}} = k$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-ikk' - k'^2} \sqrt{-ikk'}}{\sqrt{k^2 - ikk'}} = -ik'$$

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-ikk' - k'^2} \sqrt{k^2 - ikk'}}{\sqrt{-ikk'}} = \frac{\sqrt{2kk' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

sonuları bulunur.

Yine (41) de u yerine nce $u + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$ yazıp sonra $u=0$ aldığımızda

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) \cdot f_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}{f_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) \cdot f_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}{f_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}$$

(50)

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = \frac{f_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) \cdot f_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}{f_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)}$$

olarak yazılır. Buradaki

$$f_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2), f_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) \text{ ve } f_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2)$$

değerlerini hesaplayalım

$$\rho\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = \rho\left(-\left(w_2 + \frac{1}{2}w_3\right)\right) = \rho\left(\frac{1}{2}w_3 + w_2\right) = e_{\frac{1}{2}w_3 - d_3}$$

eşitliğinden faydalanarak (20) den

$$f_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = (e_{\frac{1}{2}w_3 - d_3} - e_{\frac{1}{2}w_2})^{1/2} = \sqrt{k^2 + i k k'}$$

$$f_3\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = (e_{\frac{1}{2}w_3 - d_3} - e_{\frac{1}{2}w_3})^{1/2} = \sqrt{i k k'}$$

$$f_1\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = (e_{\frac{1}{2}w_3 - d_3} - e_{\frac{1}{2}w_1})^{1/2} = \sqrt{-k'^2 + i k k'}$$

elde olur. Bu değerleri (50) de yerine yazdığımızda

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{k^2 + i k k'} \cdot \sqrt{i k k'}}{\sqrt{i k k' - k'^2}} = k$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{i k k' - k'^2} \cdot \sqrt{i k k'}}{\sqrt{k^2 + i k k'}} = i k'$$

$$g_3\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = \frac{\sqrt{i k k' - k'^2} \cdot \sqrt{k^2 + i k k'}}{\sqrt{i k k'}} = \frac{\sqrt{-2 k k' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

sonuçlarını buluruz.

2.4. h_i u Fonksiyonları:

h_i u ($i=1,2,3$) fonksiyonları normalleştirilmiş Ω^* latisinde aşağıdaki gibi tanımlanır. [2]

$$h_i u = \frac{1}{k} g_i(u + w_i)$$

$$h_2 u = \frac{1}{k'} g_2(u+w_2) \quad (51)$$

$$h_3 u = g_3(u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

$g_i u$ fonksiyonlarının tekliğiinden , $h_i u$ ($i=1,2,3$) fonksiyonlarının tekliğiinden bahsedebiliriz. Bunların $\frac{1}{2}\Omega^*$ çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler $g_1 u$, $g_2 u$ ve $g_3 u$ fonksiyonlarının çeyrek periyot noktalarında aldığı değerlerden elde edilir.

2.5. $h_i u$ Fonksiyonlarının Yarı Periyot Dönüşümleri ve Yarı Periyot Noktalarında Aldığı Değerler:

(51) de tanımlanan $h_1 u$ fonksiyonunda u yerine sırasıyla $u+w_1$, $u+w_2$ ve $u+w_1+w_2$ değerlerini yazdığımızda,

$$h_1(u+w_1) = \frac{1}{k} g_1(u+2w_1) = \frac{1}{k} g_1 u$$

$$h_1(u+w_2) = \frac{1}{k} g_1(u+w_1+w_2) \quad (52)$$

$$h_1(u+w_1+w_2) = \frac{1}{k} g_1(u+2w_1+w_2) = \frac{1}{k} g_1(u+w_2)$$

eşitliklerini elde ederiz. Benzer olarak bu değerleri $h_2 u$ fonksiyonun da yazarsak,

$$h_2(u+w_1) = \frac{1}{k'} g_2(u+w_1+w_2)$$

$$h_2(u+w_2) = \frac{1}{k'} g_2(u+2w_2) = \frac{1}{k'} g_2 u \quad (53)$$

$$h_2(u+w_1+w_2) = \frac{1}{k'} g_2(u+w_1+2w_2) = \frac{1}{k'} g_2(u+w_1)$$

bulunur. Yine h_3 u fonksiyonu için aynı işlemi yaptığımızda,

$$h_3(u+w_1) = g_3(u+w_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

$$h_3(u+w_2) = g_3(u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + w_2)$$

$$h_3(u+w_1+w_2) = g_3(u+w_1 + \frac{1}{2}w_1 + w_2 + \frac{1}{2}w_2)$$

buluruz.

(52) , (53) ve (54) dönüşümlerinde u yerine sıfır aldığımızda

$$h_1(w_1) = 1/k, \quad g_1(0) = \infty$$

$$h_1(w_2) = 1/k, \quad \frac{f_2(w_1+w_2) \cdot f_3(w_1+w_2)}{f_1(w_1+w_2)} = 0$$

$$h_1(w_1+w_2) = 1/k, \quad \frac{f_2(w_2) \cdot f_3(w_2)}{f_1(w_2)} = 0$$

$$h_2(w_1) = 1/k', \quad \frac{f_2(w_1+w_2) \cdot f_3(w_1+w_2)}{f_2(w_1+w_2)} = 0$$

$$h_2(w_2) = 1/k', \quad g_2(0) = \infty$$

$$h_2(w_1+w_2) = 1/k', \quad \frac{f_1(w_1) \cdot f_3(w_1)}{f_2(w_1)} = 0$$

$$h_3(w_1) = g_3(w_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = 0$$

$$h_3(w_2) = g_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + w_2) = 0$$

$$h_3(w_1+w_2) = g_3(w_1 + \frac{1}{2}w_1 + w_2 + \frac{1}{2}w_2) = \infty$$

değerlerini buluruz.

2.6. h_1 Fonksiyonlarının Çeyrek Periyot Noktalarında Aldığı Değerler:

$h_1 u$ ($i=1,2,3$) fonksiyonlarının $\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1+w_2, w_1+\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1+\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_1-\frac{1}{2}w_2$ çeyrek periyot noktalarındaki aldığı değerleri aşağıdaki şekilde hesaplarız.

(51) de tanımlanan $h_1 u$ fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1$ yazıp $u=0$ alırsak,

$$\begin{aligned} h_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) &= -h_1\left(-\frac{1}{2}w_1\right) = -1/k g_1\left(-\frac{1}{2}w_1+w_1\right) = -1/k g_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) \\ &= -1/k (1+k') = -(1+k')/k \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde u yerine $u + \frac{1}{2}w_2$ yazıp $u = 0$ alırsak,

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = 1/k g_1\left(\frac{1}{2}w_2+w_1\right) = ik/k = i$$

bulunur. Yine aynı şekilde u yerine $u+w_1+\frac{1}{2}w_2$ yazdığımızda,

$$h_1\left(u+w_1+\frac{1}{2}w_2\right) = 1/k g_1\left(u+w_1+\frac{1}{2}w_2+w_1\right) = 1/k g_1\left(u+\frac{1}{2}w_2+2w_1\right)$$

elde edilir. $g_1 u$ fonksiyonu $2w_1$ ile periyodik olduğundan

$$h_1\left(u+w_1+\frac{1}{2}w_2\right) = 1/k g_1\left(u+\frac{1}{2}w_2\right)$$

olur. Buradan da

$$h_1\left(w_1+\frac{1}{2}w_2\right) = 1/k g_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = ik/k = i$$

elde olur. $h_1 u$ fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 + w_2$ yazdığımızda

$$h_1\left(u+w_2+\frac{1}{2}w_1\right) = 1/k g_1\left(u+w_2+\frac{1}{2}w_1+w_1\right) = 1/k g_1\left(\frac{2u+w_1+2w_2+2w_1}{2}\right)$$

yazılır. $g_1 u$ 'nun homojenliğinden

$$\begin{aligned} h_1\left(u+w_2+\frac{1}{2}w_1\right) &= 1/k 2g_1(2u+2w_2+2w_1+w_1) = 1/k 2g_1(2u+w_1+2w_2) \\ &= 1/k g_1\left(u+\frac{1}{2}w_1+w_2\right) \end{aligned}$$

bulunur. u yerine sıfır alırsak

$$h_1(w_2 + \frac{1}{2}w_1) = 1/k \ g_1(w_2 + \frac{1}{2}w_1) = (1-k')/k$$

değerini buluruz.

h_1 u fonksiyonunda u yerine -u yazıp daha sonra $u = u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazarsak,

$$\begin{aligned} h_1(-u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) &= h_1(-u - \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = 1/k \ g_1(-u - \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + w_1) \\ &= 1/k \ g_1(-u + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) \end{aligned}$$

buluruz. $u = 0$ koyarsak

$$h_1(-\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = 1/k \ g_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = k/k = 1$$

bulunur.

$$h_1(-\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = -h_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

olduğundan

$$h_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = -1$$

dir.

h_1 u fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$ yazıp u 'yu sıfır alırsak

$$h_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = 1/k \ g_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + w_1)$$

dir.

$$h_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = -h_1(\frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1)$$

olduğundan,

$$h_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = -1/k \ g_1(\frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1 + w_1) = -1/k \ g_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

$$=-k/k = -1$$

olarak bulunur.

(51) de tanımlanan h_2 u fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1$ yazıp u 'yu sıfır alırsak ,

$$h_2(\frac{1}{2}w_1) = 1/k' \ g_2(\frac{1}{2}w_1 + w_2) = ik'/k' = i$$

değerini buluruz. h_2 u fonksiyonunda u yerine -u yazıp tekrar

u yerine $u + \frac{1}{2}w_2$ yazarsak,

$$\begin{aligned} h_2(-u - \frac{1}{2}w_2) &= 1/k'g_2(-u - \frac{1}{2}w_2 + w_2) \\ &= 1/k'g_2(-u + \frac{1}{2}w_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$h_2(-\frac{1}{2}w_2) = 1/k'g_2(\frac{1}{2}w_2) = 1/k' \cdot (1+ik) = (-1-k)/k'$$

elde olur.

$$h_2(-\frac{1}{2}w_2) = -h_2(\frac{1}{2}w_2)$$

olduğundan,

$$h_2(\frac{1}{2}w_2) = (1+k)/k'$$

değerini buluruz.

Yine h_2u fonksiyonunda u yerine $u + w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazıp g_2u 'nun homojenliğinden ve $2w_2$ ile periyodik olmasından yararlanarak,

$$\begin{aligned} h_2(w_1 + \frac{1}{2}w_2) &= 1/k'g_2(w_1 + \frac{1}{2}w_2 + w_2) = 1/k'g_2(\frac{2w_1 + w_2 + 2w_2}{2}) \\ &= 1/k'2g_2(2w_1 + w_2) = 1/k'g_2(w_1 + \frac{1}{2}w_2) \\ &= 1/k' \cdot 1(k-1) = (-k+1)/k' \end{aligned}$$

değerini elde ederiz.

Benzer olarak h_2u 'da u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 + w_2$ yazıp $u=0$ aldığımızda

$$h_2(\frac{1}{2}w_1 + w_2) = 1/k'g_2(\frac{1}{2}w_1 + 2w_2) = 1/k'g_2(\frac{1}{2}w_1) = ik'/k' = i$$

buluruz. Aynı şekilde u yerine $-u$ yazıp tekrar u yerine

$u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazdığımızda,

$$\begin{aligned} h_2(-u - \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) &= 1/k'g_2(-u - \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + w_2) \\ &= 1/k'g_2(-u + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1) \end{aligned}$$

elde ederiz. u yerine sıfır aldığımızda ,

$$h_2(-\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = 1/k'g_2(\frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1) \quad \text{olur.}$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = -h_2\left(-\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) \quad \text{olduğundan}$$

$$\begin{aligned} h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) &= -1/k'g_2\left(\frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1\right) = 1/k'g_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) \\ &= ik' \cdot i/k' = -1. \end{aligned}$$

değerini buluruz.

h_2 u fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$ yazıp u 'yu sıfır aldığımızda

$$\begin{aligned} h_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) &= 1/k'g_2\left(w_2 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1\right) = 1/k'g_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) \\ &= ik' \cdot i/k' = -1 \end{aligned}$$

(51) de tanımlanan h_3 u fonksiyonunda u yerine $-u$ alıp tekrar

u yerine $u + \frac{1}{2}w_1$ yazdığımızda

$$h_3\left(-u - \frac{1}{2}w_1\right) = g_3\left(-u - \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1\right) = g_3\left(-u + \frac{1}{2}w_2\right)$$

olur. $u=0$ aldığımızda,

$$h_3\left(-\frac{1}{2}w_1\right) = g_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i$$

sonucu bulunur.

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -h_3\left(-\frac{1}{2}w_1\right)$$

olduğundan

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -i$$

bulunur.

h_3 fonksiyonunda u yerine $-u$ yazıp tekrar u yerine $u + \frac{1}{2}w_2$ yazdığımızda

$$h_3\left(-u - \frac{1}{2}w_2\right) = g_3\left(-u - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = g_3\left(-u + \frac{1}{2}w_1\right)$$

olur. Buradan da ,

$$h_3\left(-\frac{1}{2}w_2\right) = g_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \pm 1$$

olarak bulunur.

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = -h_3\left(-\frac{1}{2}w_2\right)$$

olduğundan ,

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \pm 1$$

olarak elde olur.

h_3 u fonksiyonunda $u=-u$ yazarsak,

$$h_3(-u) = g_3(-u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

bulunur. Tekrar u yerine $u + w_1 + \frac{1}{2}w_2$ yazdığımızda,

$$h_3(-u - w_1 - \frac{1}{2}w_2) = g_3(-u - w_1 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = g_3(-u - \frac{1}{2}w_1)$$

buluruz. Buradan,

$$h_3(-w_1 - \frac{1}{2}w_2) = g_3(-\frac{1}{2}w_1)$$

dır, buradan ise

$$h_3(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = g_3(\frac{1}{2}w_1) = \pm 1$$

sonucu bulunur.

Yine h_3 u fonksiyonunda $u=-u$ yazdığımızda ,

$h_3(-u) = g_3(-u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$ olur. Burada tekrar u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 + w_2$ yazdığımızda

$$h_3(-u - \frac{1}{2}w_1 - w_2) = g_3(-u - \frac{1}{2}w_1 - w_2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = g_3(-u - \frac{1}{2}w_2)$$

buluruz. Benzer olarak,

$$h_3(-\frac{1}{2}w_1 - w_2) = g_3(-\frac{1}{2}w_2)$$

h_3 u ve g_3 u 'nun tekliğinden de

$$h_3(\frac{1}{2}w_1 + w_2) = g_3(\frac{1}{2}w_2) = 1$$

sonucunu buluruz.

h_3 u fonksiyonunda u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$ alıp $u=0$ yazdığımızda

$$h_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = g_3(w_1 + w_2) = \infty$$

değerini buluruz.

Benzer şekilde u yerine $u + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$ alıp $u=0$ yazdığımızda,

$$h_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = g_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = g_3(w_1) = 0$$

sonucunu elde ederiz.

ÖZET

Bu çalışmanın giriş kısmında latisler ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiş, Weierstrass'ın p_u , ζ_u , σ_u fonksiyonları tanımlanmıştır.

Birinci bölümde p_u 'nun normalleştirilmiş latislerde aldığı değerler verilmiştir. Çalışmanın esas kısmını oluşturan diğer bölüm de ise, $g_i u$ ve $h_i u$ eliptik fonksiyonları tanımlanmıştır.

$$g_i u = \frac{f_j u \cdot f_k u}{f_i u} \quad (ijk = 123)$$

olarak tanımlanan $g_i u$ fonksiyonun periyotları sırasıyla $(2w_1, 4w_2, 4w_3)$, $(4w_1, 2w_2, 4w_3)$ ve $(4w_1, 4w_2, 2w_3)$ olarak verilmiştir. Bu fonksiyonların yarı periyot noktalarında aldığı değerler sırasıyla,

$$\begin{array}{lll} g_1(w_1) = \infty & g_2(w_1) = 0 & g_3(w_1) = 0 \\ g_1(w_2) = 0 & g_2(w_2) = \infty & g_3(w_2) = 0 \\ g_1(w_1 + w_2) = 0 & g_2(w_1 + w_2) = 0 & g_3(w_1 + w_2) = \infty \end{array}$$

olarak bulunmuştur. Bu fonksiyonların çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler ise aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{array}{lll} g_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = 1+k' & g_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = ik & g_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = 1-k' \\ g_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = k' & g_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i+ik & g_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = k' \\ g_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \bar{i}1 & g_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i & g_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = 1 \end{array}$$

$$g_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = ik$$

$$g_1\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = k$$

$$g_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = i(k-1)$$

$$g_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = ik'$$

$$g_3(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = -i$$

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{2kk' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = k$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = ik'$$

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-2kk' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

Normalleştirilmiş Ω^* latisinde $h_i u$ ($i=1,2,3$) fonksiyonları ise ,

$$h_1 u = \frac{1}{k} g_1(u+w_1)$$

$$h_2 u = \frac{1}{k'} g_2(u+w_2)$$

$$h_3 u = g_3(u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler , $g_i u$ fonksiyonlarından elde edilmiştir. Bu fonksiyonların yarı periyot noktalarında aldığı değerler ,

$$h_1(w_1) = \infty$$

$$h_2(w_1) = 0$$

$$h_3(w_1) = 0$$

$$h_1(w_2) = 0$$

$$h_2(w_2) = \infty$$

$$h_3(w_2) = 0$$

$$h_1(w_1 + w_2) = 0$$

$$h_2(w_1 + w_2) = 0$$

$$h_3(w_1 + w_2) = \infty$$

olarak bulunmuştur.

$h_i u$ fonksiyonlarının çeyrek periyot noktalarında aldığı değerler ise aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir.

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -(1+k')/k$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = 1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -1$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = (1-k')/k$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = 1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = 1$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \infty$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = (1+k)/k'$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \mp 1$$

$$h_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = i$$

$$h_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = (-k+1)/k'$$

$$h_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \mp 1$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = 0$$

SUMMARY

In introduction of this study , some definitions and theorems for lattices were introduced , Weierstrass $\wp u$, ζu , σu functions were introduced.

In chapter one the values of $\wp u$ function , which takes on the normalized lattices , were given. In chapter two , which is main section of the study , $g_i u$ and $h_i u$ elliptic functions were introduced. The periods of $g_i u$ functions which were introduced as

$$g_i u = \frac{f_j u \cdot f_k u}{f_l u} \quad (ijk = 123)$$

were given respectively, as $(2w_1, 4w_2, 4w_3)$, $(4w_1, 2w_2, 4w_3)$, $(4w_1, 4w_2, 2w_3)$. The values of these functions which take on the half period points, have been given by the following results.

$$\begin{array}{lll} g_1(w_1) = \infty & g_2(w_1) = 0 & g_3(w_1) = 0 \\ g_1(w_2) = 0 & g_2(w_2) = \infty & g_3(w_2) = 0 \\ g_1(w_1+w_2) = 0 & g_2(w_1+w_2) = 0 & g_3(w_1+w_2) = \infty \end{array}$$

The values of these functions which take on the half period points, have been calculated as the following results.

$$\begin{array}{lll} g_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = 1+k' & g_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = ik & g_1\left(\frac{1}{2}w_1+w_2\right) = 1-k' \\ g_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = k' & g_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i+ik & g_2\left(\frac{1}{2}w_1+w_2\right) = k' \\ g_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \mp 1 & g_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i & g_3\left(\frac{1}{2}w_1+w_2\right) = 1 \end{array}$$

$$g_1(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = ik$$

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = k$$

$$g_2(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = i(k-1)$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = ik'$$

$$g_3(w_1 + \frac{1}{2}w_2) = -1$$

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{2kk' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

$$g_1(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = k$$

$$g_2(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = ik'$$

$$g_3(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2) = \frac{\sqrt{-2kk' + i(k^2 - k'^2)}}{\sqrt{i}}$$

On normalized Ω^* lattice, $h_i u$ ($i=1,2,3$) functions were introduced as the following equations.

$$h_1 u = \frac{1}{k} g_1(u+w_1)$$

$$h_2 u = \frac{1}{k'} g_2(u+w_2)$$

$$h_3 u = g_3(u + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2)$$

The values of these functions which take on the half period points, were introduced from the values of $g_i u$ functions. These values were

$$h_1(w_1) = \infty$$

$$h_2(w_1) = 0$$

$$h_3(w_1) = 0$$

$$h_1(w_2) = 0$$

$$h_2(w_2) = \infty$$

$$h_3(w_2) = 0$$

$$h_1(w_1 + w_2) = 0$$

$$h_2(w_1 + w_2) = 0$$

$$h_3(w_1 + w_2) = \infty$$

The values of $h_i u$ functions which take on the quarter period points, have been calculated as the following results.

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -(1+k')/k$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1\right) = i$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1\right) = -i$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = (1-k')/k$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = i$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\right) = i$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \infty$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_2\right) = i$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_2\right) = (1+k)/k'$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_2\right) = \mp i$$

$$h_1\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = i$$

$$h_2\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = (-k+1)/k'$$

$$h_3\left(w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = \mp i$$

$$h_1\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_2\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = -1$$

$$h_3\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right) = 0$$

KAYNAKLAR

- 1) DUTTA ,M -Debnath ,L - Elements of the theory of elliptic and associated functions with applications.
The world Press , Calcutta.1965
- 2) DU VAL ,P - Elliptic functions and Elliptic curves ,Cambridge University Press , London,1973
- 3) KURT ,V - $\csc u, \operatorname{dn} u, \operatorname{sn} u$ fonksiyonlarının bileşkesiyle oluşturulan bazı meromorf fonksiyonlarda Periyot katlarının değer değişimlerine etkileri , Erzurum,1978
- 4) LING ,Chih,Bing- On a class of Weierstrass Elliptic functions at half and quarter periods Department of Math. Virginia, February,1975
- 5) NEVILLE ,E,harold - Elliptic functions : A primer
Pergamon Press . 1971
- 6) WATSON-Whittaker - A course of Modern Analysis, Oxford.1954

ÖZGEÇMİŞ

1968 yılında Erzurum'un İspir ilçesinde doğdum. İlk ve ortaokulu Adana 'da tamamladıktan sonra 1985 yılında Adana Borsa lisesi 'nden mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 1989 yılında bu fakülteden mezun oldum. 1991 yılının Ocak ayından beri Adana 'nın Akapınar beldesinde, Selahattin Afşar Lisesi 'nde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her türlü yardımlarını ve ilgilerini gördüğüm sayın hocam Doç. Dr. Veli KURT 'a teşekkür ederim.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca yardımlarını esirgemeyen diğer bölüm hocalarıma da teşekkür ederim.

