

**T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GLOBAL ETKİNİN ESNEK KÜME TEORİYE YANSIMALARI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEMİH GEÇEN**

MATEMATİK Anabilim Dalı

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN
Eş Danışman: Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN**

HAZİRAN 2021

**T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GLOBAL ETKİNİN ESNEK KÜME TEORİYE YANSIMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SEMİH GEÇEN
(36193614075)**

MATEMATİK Anabilim Dalı

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN
Eş Danışman: Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN**

HAZİRAN 2021

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi ve tecrübesiyle daima yol gösteren, desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İlhan İÇEN' e, yine bilgi ve tecrübesiyle daima destek olan eş danışman hocam Sayın Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN' a çok teşekkür ederim.

Bu çalışmalarım süresince her daim desteklerini hissettiğim kıymetli eşim Reyhan GEÇEN ve kıymetli ablam Tülay AYAZ' a, değerli aileme, ayrıca kıymetli dostlarım Yusuf TEMÜR ve Nuri ÇETİN' e kalbi teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Global Etkinin Esnek Küme Teoriye Yansımaları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Semih GEÇEN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Kavramlar.....	3
1.1.1 Grup ve alt grup kavramları.....	3
1.1.2. Kategori ve alt kategori kavramları.....	3
1.1.3. Etki ve Etkiler Arası Dönüşüm.....	5
2. SOFT(ESNEK) KÜME TEORİSİ.....	7
2.1. Soft Kümeler.....	7
2.2. Soft Gruplar.....	12
2.3. Soft Kategori.....	15
2.4. Soft Etki.....	18
2.4.1. Soft etkilerde sabitleyici, merkezleştirici ve normalleştirici.....	24
2.4.2. Soft grupların yarı direkt çarpımı.....	26
3. GLOBAL ETKİ.....	27
3.1. Global Etki Kavramı.....	27
3.1.1. Lokal çatı.....	31
3.1.2. Global eğri.....	31
3.1.3. Global etkinin morfizmi.....	31
3.1.4. Global etki kategorisi.....	32
3.1.5. Regüler morfizm.....	32
3.1.6. Z-normal morfizm.....	34
4. SOFT GLOBAL ETKİ.....	35
4.1. Soft Global Etki Kavramı.....	35
4.1.1. Soft lokal çatı.....	39
4.1.2. Soft global eğri.....	39
4.1.3. Soft lokal çatı morfizmi.....	39
4.1.4. Soft global etki kategorisi.....	40
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	41
5.1.Sonuçlar.....	41
5.2.Öneriler.....	41
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\sim$	: Etki
G	: Grup
G_α	: Alt gruplar ailesi
$GL_n(G)$	: Genel lineer grup
G^n	: Kare matrisler kümesi
$\mathcal{C}$	: Kategori
$Ob(\mathcal{C})$	: Bir kategorinin nesneler kümesi
ϕ	: Grup homomorfizmi
$P(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
X_α	: X kümesinin alt kümeleri ailesi
$\simeq$	: Soft(esnek) alt küme
$\perp$	: Değil
F^c	: F 'nin soft tümleyen fonksiyonu
$\emptyset$	: Boş(null) soft küme
$\tilde{A}$	: Mutlak (absolute) soft küme
$\tilde{\cap}$	: Soft kümelerde kesişim
$\tilde{\cup}$	: Soft kümelerde birleşim
S_n	: Permütasyonlar grubu
$\lesssim$	: Soft alt grup
$\approx$	: Normal soft alt grup
Orb	: Yörünge
$Stab_G$	: Bir soft kümenin sabitleyicisi
Fix_G	: Bir soft alt kümenin sabitleyicisi
C_G	: G soft grubunun merkezleştiricisi
$Z(G)$	: G soft grubunun merkezi
N_G	: G soft grubunun normalleştiricisi
$Sym(X)$	: X kümesinin permütasyonları grubu
$\ltimes$	: Yarı direkt çarpım
L	: Doğru etki
$\bar{L}$	: Soft doğru etki
$E_{ij}(r)$	: Elementer matris

I	: Birim matris
I_n	: $n \times n$ birim matrisi
$\mathcal{G}$	: Global etki kategorisi
$\mathcal{G}^*$	: Soft global etki kategorisi
η	: Regüler morfizm
Mor	: Morfizm
$\mathfrak{A}$	: Funktor
$SCat$	: Soft kategorilerin kategorisi
i	: Dahil etme dönüşümü
$\mathcal{T}$	: Birim Funktor
$\mathcal{C}^{op}$	: $\mathcal{C}$ nin dual kategorisi
Comput. Math. Appl.	: Computers&MathematicsWith Applications
Appl. Soft Comput.	: Applications Soft Computers
Inform. Sci	: Information Sciences
IJMO	: International Journal of Modeling and Optimization
IEEE	: The Institute of Electrical and Electronics Engineers
An. Univ. Craiova	: Annals of the University of Craiova
Ann. Fuzzy	: Annals of Fuzzy
Math. Inform	: Mathematics and Informatics
Hacet. J. Math. Stat.	: Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GLOBAL ETKİNİN ESNEK KÜME TEORİYE YANSIMALARI

SEMİH GEÇEN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

MATEMATİK Anabilim Dalı

45 + vii sayfa

2021

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Eş Danışman: Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN

Beş bölümden oluşan bu tezde bazı soft (esnek) yapılar, global etki ve soft global etki kavramları ele alınmıştır. Soft küme teorisiyle global etki kavramı arasında hem mantıksal hem de yöntemsel bir benzerlik olduğu açıktır. Bu tez çalışmasının merkezinde önce bu iki kavram detaylı olarak incelenmiş, daha sonra bu iki kavram arasındaki ilişki ortaya konulmuş ve yeni bir kavram olarak ‘soft global etki’ kavramı tanımlanıp örneklendirilmiştir.

İlk bölümde tezin bilgi akışında ihtiyaç duyulacak olan bazı temel kavramlar sunulmuştur.

İkinci bölümde soft küme, soft grup, soft kategori ve soft etki kavramları incelenmiştir. Özellikle soft küme ile alakalı özgün örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde global etki kavramı ele alınıp, bazı özgün açıklama ve modellemelere de yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde özgün bir çalışma olarak soft küme ile global etki kavramları arasındaki ilişki ortaya konulmuş, özgün bir kavram olan ‘soft global etki’ kavramı tanımlanmıştır.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar genel bir çerçevede tartışılmış, soft global etkinin sonraki çalışmalara sağlayacağı katkılar ile ilgili öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Soft küme, Soft grup, Soft kategori, Global etki, Soft global etki

ABSTRACT

Master Thesis

REFLECTIONS OF GLOBAL ACTION ON SOFT SET THEORY

Semih GEÇEN

Inonu University

Graduate School of Nature and Applied Sciences

Department of Mathematics

45 + vii pages

2021

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Fatih ÖZCAN

In this thesis consisting of five chapters, some soft structures, global action and soft global action concepts are discussed. It is clear that there is both a logical and methodological similarity between soft set theory and the concept of global action. In the center of this thesis, first these two concepts are examined in detail, then the relationship between these two concepts is put forward and the concept of ‘soft global action’ is defined and exemplified as a new concept.

In the first chapter, some basic concepts that will be needed in the information flow of the thesis are presented.

In the second chapter, the concepts of soft set, soft group, soft category and soft action are examined. Particularly, original examples related to the soft set are included.

In the third chapter, the concept of global action is discussed, and some original explanations and models are also included.

In the fourth chapter, as an original study, the relationship between the soft set and the global action concepts is revealed, and the concept of ‘soft global action’, an original concept, is defined.

In the last chapter, the result obtained are discussed in a general framework, and suggestions are made regarding the contributions of the soft global action to future studies.

Keywords: Soft set, soft group, soft category, global action, soft global action.

1. GİRİŞ

Değerli bilim insanımız Cahit Arf der ki :“Matematik aslında sabır işidir. Ezberleyerek olmaz keşfetmek gerekir”. Hiç kuşkusuz bir bilim dalı olarak matematik, ancak yeterince sabır, emek ve gayret sarf edilince sırlarını âşikar eder. Kadim zamanlardan yakın geçmişimize kadar daima bilime ışık tutan, çeşitli bilim dallarının gelişimine katkı sunan klasik matematik, modern çağda beklenildiği gibi yerini modern matematiksel yaklaşımlara devretmeye başladı.

Matematiğin geleneksel yöntemleri modern çağın bazı belirsizlik problemlerini çözmekte yetersiz kalmaktadır. Bu durumu aşmak için geliştirilen en önemli modern teorilerden biri hiç kuşkusuz soft (esnek) küme teorisidir [1]. Bu teori pratik hayatta karşılaşılan bazı tam ve kesin olmayan kavramları parametrelendirerek daha belirli ve tasnifi daha kolay çözümler önermektedir.

Matematikteki tam ve kesinlik kavramlarına yeni bir bakış açısı kazandıran soft küme teorisi ortaya konulduktan sonra birçok matematikçi tarafından topolojik, kategorik ve cebirsel açıdan çalışılmıştır [2-12]. Matematikçiler topolojiye cebirsel bir yaklaşım geliştirmeye çalışmışlardır. Özellikle Maji ve arkadaşları soft kümeler ile ilgili cebirsel yaklaşımla bazı önemli kavramları tanımlamışlardır [2].

Soft küme teorisi ortaya konulduktan sonra Aktaş ve Çağman tarafından soft grup kavramı tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir [4]. Bu teori ile alakalı ilk topolojik çalışmalar ise Shabir ve Naz tarafından sunulmuştur [6]. Soft topolojik uzay tanımını veren Shabir ve Naz bu uzay üzerinde ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır [6].

Ayrıca matematiksel yapıların bir sınıflandırması olarak bilinen kategori teoriye de soft yaklaşımlar geliştirilmiş olup Sardar ve Gupta tarafından soft kategori kavramı tanımlanmıştır [13]. Sardar ve Gupta soft küme teorisiyle kategori teoriyi birlikte ele almış ve kategori kavramına soft bir yaklaşımla soft kategori teorisinin temellerini atarak bazı kategorik kavramları softlaştırmışlardır [13].

Daha sonra Oguz, Icen ve Gursoy ise bu çalışmalarını bir adım daha öteye taşıyarak soft kategoriye topolojiyle donatmış ve yeni bir kavram olarak soft topolojik kategoriye tanımlamışlardır [14]. Ayrıca bazı topolojik kategori kavramlarını soft küme teoriye uygulayarak topolojik alt kategori ve soft topolojik fonktor gibi özgün tanımlar

geliştirmişlerdir [14]. Buradan yola çıkarak, nesneleri soft topolojik kategoriler olan ve morfizmleri de soft topolojik fonktörler olan yeni bir kategori inşa etmişlerdir [14].

Yine özgün bir kavram olan soft etki kavramı da Oguz, Icen ve Gursöy, tarafından tanımlanıp, geliştirilip literatüre kazandırılmıştır [15]. Bu kavramla alakalı bazı karakterizasyonlar sunularak önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Soft simetrik grup kavramı tanımlanarak soft etki ve soft simetrik grup arasındaki ilişki incelenmiş ve iki soft grubun yarı-direkt çarpımı tanımlanarak bu çarpımın da bir soft grup olduğu ortaya konmuştur [15].

Anthony Bak [16] tarafından tanımlanan global etki kavramı ise bilinen klasik grup etkilerini belli kurallar dahilinde tekrar yorumlayan daha kompleks bir cebirsel yapıdır. Bu yapı sayesinde basit yapı taşlarıyla kompleks yapılar, bileşenlerinin kapalı diskler olduğu CW kompleksleri, bileşenlerinin sabit boyutlu açık diskler olduğu manifoldlar, bileşenlerinin afin olduğu yapılar gibi çeşitli kompleks yapılara matematiksel çözümler önerilmiştir [16].

Bu kavram üzerine de birçok matematikçi çalışmış [17-21] ve literatüre çeşitli katkılar sunmuşlardır. Bu katkılardan bazılarını şöylece sıralayabiliriz: genel, doğrusal, temel ve Steinberg gruplarına bağlı global etkiler ayrıntılı açıklanmıştır. Rastgele global etkilerin temel homotopi teorisi tanımlanıp homotopi grupları oluşturulmuştur [18]. Global etkilerin ve grupoid atlasların homotopi değişmezleri tanımlanmış [19], global etki kavramı grupoid atlas kavramına genelleştirilmiştir [20]. Bunun yanı sıra modüler olmayan sıralı global etki için yol bağlantılı bileşeni ve temel grubu hesaplanmıştır [21].

Soft küme teorisiyle global etki kavramı arasında hem mantıksal hem de yöntemsel bir benzerlik olduğu açıktır. Bu tez çalışmasında bu kavramlar arasındaki benzerliklerden yola çıkılmış, bu iki kavram birlikte yorumlanıp özgün bir çalışma olan soft global etki kavramı tanımlanmış ve literatüre kazandırılmıştır. Bu kavram daha anlaşılır olması için örnek ve açıklamalarla desteklenmiştir. Ayrıca soft lokal çatı, soft global eğri, soft lokal çatı morfizmi ve soft global etki kategorisi kavramları da tanımlanmıştır.

Soft global etki kavramının geliştirilmesinin cebirsel topolojiye farklı bir boyut kazandırarak bazı topolojik problemlerin cebirsel kavramlarla açıklanmasını kolaylaştıracağı ve bu konuyla alakalı çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde tezdeki bilgi akışının daha kolay anlaşılması adına grup, kategori, etki gibi temel tanımlar ve örnekler sunulmuştur.

1.1.1 Grup ve alt grup kavramları

Tanım 1.1.1. Aşağıdaki şartları sağlayan $(G, \bullet)$ matematiksel yapısına bir **grup** denir [22] :

- i. Her $x, y, z \in G$ için $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ (Birleşme özelliği),
- ii. Her $x \in G$ için $x \bullet e = e \bullet x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır (Birim eleman özelliği),
- iii. Her $x \in G$ için $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in G$ vardır (Ters eleman özelliği).

Kolaylık olması açısından $(G, \bullet)$ grubu G ile ve $x \bullet y$ işlemi xy ile gösterilecektir.

Örnek 1.1.1. $G = \mathbb{R}$ kümesinin reel sayılardaki çarpma işlemine göre bir grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir:

- i. Her $x, y, z \in G$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Birleşme özelliği),
- ii. Her $x \in G$ için $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ olacak şekilde bir tek $1 \in G$ vardır (Birim eleman),
- iii. Her $x \in G$ için $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in G$ vardır (Ters eleman).

Buna göre $(G, \cdot)$ ikilisi bir grup oluşturur.

Tanım 1.1.2. G bir grup, $H \subseteq G$ ve $H \neq \emptyset$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H kümesine G grubunun bir **alt grubu** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir [22].

- i. $\forall x, y \in H$ için $xy \in H$,
- ii. G grubunun birim elemanı e olmak üzere $e \in H$,
- iii. $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$.

1.1.2 Kategori ve alt kategori kavramları

Tanım 1.1.3. Nesnelerin kümesi $Ob(C)$ ve morfizmlerinin kümesi $Mor(C)$ olmak üzere dört yapı dönüşümü ile birlikte aşağıdaki şartları sağlayan $C = (Mor(C), Ob(C), s, t, i, m)$ yapısına bir **kategori** denir.

$\forall x, y, z \in Ob(C)$ çifti için x' den y' ye tüm morfizmlerin sınıfı $Mor(x, y)$ olmak üzere $f \in Mor(x, y)$ ve $g \in Mor(y, z)$ için

- i. Kaynak dönüşümü $s : Mor(C) \longrightarrow Ob(C)$, $f \longrightarrow s(f) = x$,
- ii. Hedef dönüşümü $t : Mor(C) \longrightarrow Ob(C)$, $f \longrightarrow t(f) = y$,
- iii. Nesne dönüşümü $i : Ob(C) \longrightarrow Mor(C)$, $x \longrightarrow I_x$,
- iv. Kısmi bileşke işlemi $m : Mor(y, z) \times Mor(x, y) \longrightarrow Mor(x, z)$,
 $(g, f) \longrightarrow gof$

olarak tanımlıdır, buna göre;

- $f \in Mor(x, y)$, $g \in Mor(y, z)$ ve $h \in Mor(z, w)$ için $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dir.
- $f \in Mor(x, y)$, $g \in Mor(z, x)$ için $f \circ I_x = f$ ve $I_x \circ g = g$ olacak şekilde $I_x \in Mor(x, x)$ birim morfizmi vardır [23].

Örnek 1.1.2. Nesneleri bütün kümeler, morfizmleri bu kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kısmi işlem bilinen bileşke işlemi olarak alalım. Birim morfizmi de özdeşlik fonksiyonu olarak tanımlandığında bir kategori oluşur. Kümelerin kategorisi denen bu kategori **SET** ile gösterilir [23].

Örnek 1.1.3. Nesneleri bütün topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem sürekli fonksiyonların bileşkesi olmak üzere topolojik uzayların kategorisi elde edilir. Bu kategoride birim morfizm, birim fonksiyon olarak verilir. Bu kategori **TOP** ile gösterilir [23].

Örnek 1.1.4. Nesneleri tüm gruplar, morfizmleri ise grup homomorfizmleri olan ve kısmi işlem de grup homomorfizmlerinin bileşkesi olarak alındığında grupların kategorisi elde edilir ve bu kategori **Gp** ile gösterilir [23].

Tanım 1.1.4. C ve D birer kategori olsun. Şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa D kategorisine C kategorisinin bir **alt kategorisi** denir [23].

- i. $Ob(D) \subseteq Ob(C)$
- ii. $Mor(D) \subseteq Mor(C)$
- iii. D kategorisindeki kısmi bileşke işlemi ile C kategorisindeki kısmi bileşke işlemi örtüşür
- iv. Her bir $x \in Ob(D)$ için D' deki I_x birim morfizmi, C' deki birim morfizm ile örtüşür.

Tanım 1.1.5. D kategorisi C 'nin bir alt kategorisi olsun.

- i. Eğer $Ob(D) = Ob(C)$ ise D 'ye geniş alt kategori denir [24].
- ii. Eğer $Mor(D) = Mor(C)$ ise D 'ye tam alt kategori denir [24].

Tanım 1.1.6. C ve D birer kategori olsun. Her bir $x \in Ob(C)$ nesnesine bir $F(x) \in Ob(D)$ nesnesini, C 'nin her bir $f : x \rightarrow y$ morfizmini ise D 'nin bir $F(f) : F(x) \rightarrow F(y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdakileri sağlayan $F : C \rightarrow D$ dönüşümüne C 'den D 'ye bir fonktor denir [25].

- i. Her $g : y \rightarrow z$ morfizmi için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
- ii. Her $x \in Ob(C)$ için $F(I_x) = I_{F(x)}$ dir.

Tanım 1.1.7. Bir $F : C \rightarrow D$ fonktoru verilsin. Eğer her $x, y \in Ob(C)$ için

$$\begin{array}{ccc} Mor(x, y) & \longrightarrow & Mor(F(x), F(y)) \\ f & \longrightarrow & F(f) \end{array}$$

Dönüşümü örten ise F 'ye tamdır denir [24].

Tanım 1.1.8. C bir kategori ve $a \in Ob(C)$ bir nesne olsun. Eğer her $x \in Ob(C)$ için bir tek $a \rightarrow x$ morfizmi bulunuyorsa, bu a nesnesine bir başlangıç nesne, eğer her $x \in Ob(C)$ için bir tek $x \rightarrow a$ morfizmi bulunuyorsa, bu a nesnesine bir bitiş nesne denir. Ayrıca, a nesnesi hem başlangıç hem de bitiş nesnesi ise a 'ya bir sıfır nesne denir [23].

1.1.3 Etki ve etkiler arası dönüşüm

Tanım 1.1.5. G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Böylece X kümesi üzerinde bir (sol) G -etkisi aşağıdaki şartları sağlayan bir $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ dönüşümüdür öyle ki G grubu X kümesi üzerine (soldan) **etki** eder denir:

- i. $\forall x \in X$ ve $e \in G$ birim elemanı için $e.x = x$,
- ii. $\forall x \in X$ ve $g, h \in G$ için $g.(h.x) = (gh).x$

Bu durumda, X kümesi bir G -küme olarak adlandırılır ve bu etki $G \curvearrowright X$ ile gösterilir [22].

Örnek 1.1.5. G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. G üzerindeki grup işlemi etki tanımlar:

$$\cdot : H \times G \rightarrow G, (h, g) \rightarrow hg$$

- i. $1 \cdot g = g$
- ii. $(h_1 \cdot h_2) g = h_1 (h_2 g)$

Etki şartları açıkça sağlanır, dolayısıyla H alt grubu G grubu üzerine etkidir.

Örnek 1.1.6. G kümesi rasyonel, reel veya kompleks sayılar kümesi olmak üzere; $GL_n(G) \times G^n \longrightarrow G^n$, $(A, x) \longrightarrow Ax$ dönüşümü ile $GL_n(G)$ genel lineer grubu G^n üzerine soldan etki tanımlar [22].

- i. $\forall x \in G^n$ ve I birim matris için, $I \cdot x = x$,
- ii. $\forall x \in G^n$ ve $A, B \in GL_n(G)$ için $A \cdot (B \cdot x) = (AB) \cdot x$

Örnek 1.1.7. G grubunun kendisi üzerinde konjuge etkisi vardır. Bu etki aşağıdaki gibidir:

$$G \times G \longrightarrow G, (g, x) \longrightarrow gxg^{-1}$$

Bu etki ile her G grubu bir G – gruptur [26].

Tanım 1.1.6. $G \curvearrowright X$ ve $G' \curvearrowright X'$ iki etki olsun. Etkiler arası dönüşümü, $\phi : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi ve $f : X \longrightarrow X'$ bir morfizm olmak üzere, aşağıdaki diyagramı değişimli yapan (ϕ, f) morfizmleriyle tanımlanır:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G' \times X' & \longrightarrow & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (g, x) & \longrightarrow & g.x \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\phi(g), f(x)) & \longrightarrow & \phi(g).f(x) = f(gx) \end{array}$$

Örnek 1.1.8. G bir grup H_1, H_2 ise G nin birer alt grubu olmak üzere $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ olsun:

$$\begin{array}{ccc} H_1 \times G & \longrightarrow & G \\ (i, I) \downarrow & & \downarrow I \\ H_2 \times G & \longrightarrow & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (h, g) & \longrightarrow & hg \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h, g) & \longrightarrow & hg \end{array}$$

Yukarıda verilenlerle birlikte etkiler arası dönüşüm açıkça görülür.

2. SOFT(ESNEK) KÜME TEORİSİ

D.A. Molodtsov tarafından tanımlanan soft küme teorisi modern dönem matematikte geniş yankı bulmuştur. Matematikteki tam ve kesinlik kavramlarına yeni bir bakış açısı kazandıran soft küme teorisi ortaya konulduktan sonra birçok matematikçi tarafından topolojik, kategorik ve cebirsel açıdan çalışılmıştır [2-12]. Matematikçiler topolojiye cebirsel bir yaklaşım geliştirmeye çalışmışlardır. Özellikle Maji ve arkadaşları soft küme teorisi üzerinde cebirsel yaklaşımla bazı önemli notasyonlar tanımlamışlardır [2]. Bu küme teorisi belirsiz durumlar için kullanılabildiği gibi belirli ve sınıflama gerektiren birçok soruna kolaylıklar getirmiştir. Hem mühendislik ve uygulamalarda hem de teorik alanda bu küme teorisi oldukça rağbet görmüştür.

Bu bölümde, D.A. Molodtsov tarafından 1999 yılında tanımlanan soft küme teorisine yer verilmiş, soft gruplar ve soft kategorilerle ilgili bazı temel tanım ve teoremler sunulmuştur [1].

2.1 Soft Kümeler

X bir evrensel küme ve E parametreler kümesi olmak üzere X kümesinin kuvvet kümesi $P(X)$ ve $A \subset E$ olsun. Böylece bir soft küme tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1.1. Herhangi bir $F : A \longrightarrow P(X)$ dönüşümü ile birlikte verilen (F, A) ikilisine X üzerinde bir **soft küme** denir [1].

Yukarıdaki tanım için denebilir ki X üzerinde bir soft küme X evrensel kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ ailesi (F, A) soft kümesinin α - yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi şeklinde tanımlanabilir [1].

Burada kolaylık olsun diye X üzerinde bir (F, A) soft kümesi bazen (X, F, A) ile gösterilecektir.

Örnek 2.1.1. X evrenseli ağaçların kümesi olsun. Ayrıca E parametrelerin kümesi; $E = \{ \text{kayısı, çınar, yaşlı, güzel, genç, çam, ceviz, uzun} \}$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda tanımlanacak bir soft küme; kayısı ağaçları, ceviz ağaçları, çam ağaçları, çınar ağaçları, ... vb şeklinde ağaçları belirtecektir.

$X = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$ evrensel kümesinde altı ağacın var olduğu kabul edilsin.

$A = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$ kümesi için

e_1 parametresi ‘kayısı’ ,

e_2 parametresi ‘çınar’ ,

e_3 parametresi ‘yaşlı’ ,

e_4 parametresi ‘güzel’ ,

e_5 parametresi ‘genç’ olmak üzere

$$F(e_1) = \{ h_1, h_3 \}$$

$$F(e_2) = \{ h_2, h_4 \}$$

$$F(e_3) = \{ h_2, h_3, h_5 \}$$

$$F(e_4) = \{ h_1, h_2, h_4 \}$$

$$F(e_5) = \{ h_1 \}$$

olarak tanımlansın. Ki burada;

$$F(e_1) = \{ h_1, h_3 \} \text{ kayısı ağaçları,}$$

$$F(e_2) = \{ h_2, h_4 \} \text{ çınar ağaçları,}$$

$$F(e_3) = \{ h_2, h_3, h_5 \} \text{ yaşlı ağaçlar,}$$

$$F(e_4) = \{ h_1, h_2, h_4 \} \text{ güzel ağaçlar,}$$

$$F(e_5) = \{ h_1 \} \text{ genç ağaçlar}$$

olmak üzere (F, A) soft kümesi, X evrensel kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir $\{F(e_i), i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ ailesidir.

Böylece, (F, A) soft kümesi $(F, A) = \{ \text{kayısı ağaçları} = \{ h_1, h_3 \}, \text{çınar ağaçları} = \{ h_2, h_4 \}, \text{yaşlı ağaçlar} = \{ h_2, h_3, h_5 \}, \text{güzel ağaçlar} = \{ h_1, h_2, h_4 \}, \text{genç ağaçlar} = \{ h_1 \} \}$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.2. (F, A) ve (H, B) , X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H, B) soft kümesine (F, A) soft kümesinin bir **soft alt kümesi** denir ve $(H, B) \tilde{\subset} (F, A)$ ile gösterilir [2].

i. $B \subset A$.

ii. Her $\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ ve $F(\alpha)$ özdeş yaklaşımlardır.

Tanım 2.1.3. (F, A) ve (H, B) , X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer (F, A) , (H, B) ’nin bir soft alt kümesi ve (H, B) ’de (F, A) ’nın bir soft alt kümesi ise (F, A) ve (H, B) **soft dengtir** denir [2].

Örnek 2.1.2. X evrensel kümesi ve E parametrelerin kümesi Örnek 2.1.1 de verildiği gibi olmak üzere $B = \{e_1, e_3\} \subset E$ ve $A = \{e_1, e_3, e_4\} \subset E$ olsun.

$B \subset A$ olduğu aşikârdır. Ayrıca, $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrenseli üzerinde (F, A) ve (H, B) soft kümeleri

$$H(e_1) = \{h_1, h_3\}, H(e_3) = \{h_2, h_3, h_5\},$$

$$F(e_1) = \{h_1, h_3\}, F(e_3) = \{h_2, h_3, h_5\}, F(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\},$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $(H, B) \simeq (F, A)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.4. $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\forall i$ için $\neg e_i = e_i$ - değil olmak üzere E 'nin **değili kümesi** $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ şeklinde ifade edilir [2].

Bu tanımdan, aşağıdaki sonuçlara ulaşmak mümkündür [2].

Önerme 2.1.1.

- i. $\neg(\neg A) = A.$
- ii. $\neg(A \cup B) = (\neg A \cap \neg B).$
- iii. $\neg(A \cap B) = (\neg A \cup \neg B).$

Örnek 2.1.3. Örnek 2.1.1 dikkate alındığı takdirde $\neg E = \{\text{kayısı değil, çınar değil, yaşlı değil, güzel değil, genç değil, çam değil, ceviz değil, uzun değil}\}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.5. Bir (F, A) soft kümesinin **tümleyeni** $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ ikilisidir öyle ki $\forall \alpha \in \neg A$ için

$$F^c : \neg A \longrightarrow P(X)$$

$$\alpha \mapsto F^c(\alpha) = X - F(\neg \alpha)$$

şeklinde tanımlıdır [2].

F 'nin **soft tümleyen fonksiyonu** F^c olmak üzere aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla yazılabilir [2].

- $(F^c)^c = F$
- $((F, A)^c)^c = (F, A)$

Örnek 2.1.4. Örnek 2.1.1' de verilen (F, A) soft kümesi göz önüne alınsın. Bunun tümleyeni $(F, A)^c = \{\text{kayısı olmayan ağaçlar} = \{h_2, h_4, h_5, h_6\}, \text{çınar olmayan ağaçlar} = \{h_1, h_3, h_5, h_6\}, \text{yaşlı olmayan ağaçlar} = \{h_1, h_4, h_6\}, \text{güzel olmayan ağaçlar} =$

$\{h_3, h_5, h_6\}$, genç olmayan ağaçlar $= \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ şeklinde tanımlı bir soft küme olarak elde edilir.

Tanım 2.1.6. (F, A) , X kümesi üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) = \emptyset$ ise bu takdirde (F, A) ikilisine **boş (null)** soft küme denir ve ϕ ile gösterilir [2].

Örnek 2.1.5. X evrenseli sadece kayısıdan yapılan tatlıların bir kümesi $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve A parametrelerin kümesi $A = \{\text{ceviz, fıstık, kuş üzümü}\}$ olarak verilsin.

Bu durumda, (F, A) soft kümesi “tatlıların yapımını” tanımlamak üzere

$F(\text{ceviz})$ cevizden yapılan tatlıları,

$F(\text{fıstık})$ fıstıktan yapılan tatlıları,

$F(\text{kuş üzümü})$ kuş üzümünden yapılan tatlıları

belirtir. Yaklaşımların ailesi olarak da (F, A) soft kümesi $(F, A) = \{\text{cevizden yapılan tatlılar} = \emptyset, \text{fıstıktan yapılan tatlılar} = \emptyset, \text{kuş üzümünden yapılan tatlılar} = \emptyset\}$ şeklinde yazılır. Buradan açıktır ki (F, A) bir **boş (null)** soft kümedir.

Tanım 2.1.7. (F, A) , X kümesi üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) = X$ ise (F, A) ikilisine **mutlak (absolute)** soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir [2].

Açıktır ki $\tilde{A}^c = \emptyset$ ve $\phi^c = \tilde{A}$.

Örnek 2.1.6. X evrenseli sadece kayısıdan yapılan tatlıların bir kümesi $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve A parametrelerin kümesi $A = \{\text{ceviz değil, fıstık değil, kuş üzümü değil}\}$ olarak verilsin.

Bu durumda, (F, A) soft kümesi “tatlıların yapımını” tanımlamak üzere;

$F(\text{ceviz değil})$ cevizden yapılmayan tatlıları,

$F(\text{fıstık değil})$ fıstıktan yapılmayan tatlıları,

$F(\text{kuş üzümü değil})$ kuş üzümünden yapılmayan tatlıları

belirtir. Yaklaşımların ailesi olarak da (F, A) soft kümesi $(F, A) = \{\text{cevizden yapılmayan tatlılar} = X, \text{fıstıktan yapılmayan tatlılar} = X, \text{kuş üzümünden yapılmayan tatlılar} = X\}$ şeklinde yazılır. Böylece (F, A) bir **mutlak (absolute)** soft kümedir.

Tanım 2.1.8. $X \times X$ üzerinde tanımlı bir (F, A) soft kümesine X kümesi üzerinde bir **soft bağıntı** denir [3].

Tanım 2.1.9. X kümesi üzerinde (F, A) soft kümesi bir soft bağıntı ve $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \neq \emptyset$ olsun. Her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ise (F, A) ' ya X kümesi üzerinde bir **soft denklik bağıntısı** denir [3].

Örnek 2.1.7. X evrensel kümesi $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ gibi altı evin olduğu bir küme ve E parametrelerin kümesi

e_1 parametresi 'pahalı' ,

e_2 parametresi 'ahşap' ,

e_3 parametresi 'bahçeli' ,

e_4 parametresi 'kerpiç' ,

e_5 parametresi 'ucuz'

olmak üzere parametre kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde tanımlansın.

Buna göre, tanımlanacak bir soft küme; "pahalı evler, ahşap evler, bahçeli evler, kerpiç evler, ucuz evler" şeklinde evlerin bir sınıflandırmasını oluşturacaktır.

$A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ kümesi için

$$F(e_1) = \{h_1, h_3\},$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_3, h_6\},$$

$$F(e_3) = \{h_1, h_3, h_4, h_5\},$$

$$F(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$F(e_1) = \{h_1, h_3\} \text{ pahalı evleri,}$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_3, h_6\} \text{ ahşap evleri,}$$

$$F(e_3) = \{h_1, h_3, h_4, h_5\} \text{ bahçeli evleri,}$$

$$F(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\} \text{ kerpiç evleri}$$

gösterir.

Buna göre, A parametre kümesinde verilen parametrelere göre evleri kategorize eden (F, A) soft kümesinin X evrenseli üzerinde bir soft denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda, her bir denklik bağıntısı için denklik sınıfları

$$[F(e_1)] = \{\{h_1, h_3\}, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}\}$$

$$[F(e_2)] = \{\{h_1, h_3, h_6\}, \{h_2, h_4, h_5\}\}$$

$$[F(e_3)] = \{\{h_1, h_3, h_4, h_5\}, \{h_2, h_6\}\}$$

$$[F(e_4)] = \{\{h_1, h_2, h_3\}, \{h_4, h_5, h_6\}\}$$

şeklinde olur [3].

Tanım 2.1.10. (F, A) ve (H, B) X evrensel kümesi üzerinde birer soft küme olsun. Soft kümelerin **Birleşimi** $C = A \cup B$ ve $\forall \alpha \in C$ için

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in A - B \\ H(\alpha), & \alpha \in B - A \\ F(\alpha) \cup H(\alpha), & \alpha \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (K, C)$ soft kümesidir [2].

Tanım 2.1.11. (F, A) ve (H, B) kümeleri X evrensel kümesi üzerinde birer soft küme olmak üzere bunların **kesişimi**, $C = A \cap B$ ve $\forall \alpha \in C$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ olarak tanımlı olup $(F, A) \tilde{\cap} (H, B) = (K, C)$ olarak yazılır.

Aşağıdaki önermeler ispatları aşikâr olduğundan doğrudan verilmiştir [2].

Önerme 2.1.2.

- i. $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$
- ii. $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$
- iii. ϕ boş soft küme olmak üzere $(F, A) \tilde{\cup} \phi = (F, A)$
- iv. $(F, A) \tilde{\cap} \phi = \phi$
- v. $\tilde{A}$ mutlak soft küme olmak üzere $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$
- vi. $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A)$

Önerme 2.1.3.

- i. $((F, A) \tilde{\cup} (H, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (H, B)^c$
- ii. $((F, A) \tilde{\cap} (H, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (H, B)^c$

Önerme 2.1.4.

- i. $(F, A) \tilde{\cup} ((H, B) \tilde{\cup} (K, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (H, B)) \tilde{\cup} (K, C)$
- ii. $(F, A) \tilde{\cap} ((H, B) \tilde{\cap} (K, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (H, B)) \tilde{\cap} (K, C)$
- iii. $(F, A) \tilde{\cup} ((H, B) \tilde{\cap} (K, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (H, B)) \tilde{\cap} ((F, A) \tilde{\cup} (K, C))$
- iv. $(F, A) \tilde{\cap} ((H, B) \tilde{\cup} (K, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (H, B)) \tilde{\cup} ((F, A) \tilde{\cap} (K, C))$

2.2 Soft Gruplar

Soft küme teorisi ortaya konulduktan sonra Aktaş ve Çağman çalışmalarında soft grubu tanımlamış ve bazı özellikleri vermiştir [4]. Bu teori ile alakalı ilk topolojik çalışmalar ise

Shabir ve Naz tarafından sunulmuştur [6]. Soft topolojik uzay tanımını veren Shabir ve Naz bu uzay üzerinde ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır [6].

Bu bölümde H. Aktas ve N. Cagman [4] tarafından tanımlanan soft gruplar ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1. G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun. (F, A) ikilisi G üzerinde bir soft küme olmak üzere, eğer $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ ise bu takdirde (F, A) ' ya G üzerinde bir **soft grup** denir [4].

Daha genel bir ifadeyle, (F, A) soft grubu G grubunun alt gruplarının bir parametrelendirilmiş ailesi olarak tanımlanabilir.

G grubu üzerindeki bir (F, A) soft grubu bazen (G, F, A) ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.1. $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olsun.

Küme değerli bir fonksiyon olarak

$$F(x) = \{y \in G : xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N}\} \text{ alalım.}$$

Buradan,

$$F(e) = \{e\},$$

$$F(12) = \{e, (12)\},$$

$$F(13) = \{e, (13)\},$$

$$F(23) = \{e, (23)\},$$

$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$$

olarak bulunur ki bu kümelerin her birinin $G = S_3$ ' ün birer alt grubu olduğu kolaylıkla görülebilir. Buna göre, (F, A) ikilisi bir soft grup olup G 'nin alt gruplarının parametrelendirilmiş bir $\{F(\alpha) : \alpha \in A\}$ ailesidir [4].

Önerme 2.2.1. (F, A) ve (H, A) , G üzerinde iki soft grup olmak üzere, bu grupların kesişimi olan $(F, A) \tilde{\cap} (H, A)$ da G üzerinde bir soft gruptur [4].

Önerme 2.2.2. G üzerinde (F, A) ve (H, B) birer soft grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise bunların birleşimi olan $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$ de G üzerinde bir soft gruptur [4].

Tanım 2.2.2. (F, A) ikilisi G üzerinde bir soft grup olsun. Bu takdirde,

- i. e , G ' nin birimi olmak üzere $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) = \{e\}$ ise (F, A) ' ya G üzerinde **birim soft grup** denir [4].
- ii. $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) = G$ ise (F, A) ' ya G üzerinde bir **mutlak soft grup** denir [4].

Önerme 2.2.3.

- i. (F, A) ikilisi G üzerinde bir soft grup ve $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm olsun. $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) = \text{Ker } f$ ise $(f(F), A)$ çifti K üzerinde birim soft gruptur [4].
- ii. (F, A) ikilisi G üzerinde bir mutlak soft grup ve $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm olmak üzere $(f(F), A)$ da K üzerinde bir mutlak soft gruptur [4].

Tanım 2.2.3. G üzerinde (F, A) ve (H, B) ikilileri birer soft grup olsun. Eğer

- i. $B \subset A$ ve
- ii. $\forall \alpha \in B$ için $H(\alpha) \leq F(\alpha)$

şartları sağlanıyorsa (H, B) soft grubuna (F, A) soft grubunun bir **soft alt grubu** denir ve $(H, B) \lesssim (F, A)$ ile gösterilir [4].

Örnek 2.2.2. $G = A = S_3$ ve $B = A_3$ olsun.

$$F(x) = \{ y \in S_3 : xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N} \}$$

$$H(x) = \{ y \in A_3 : xRy \Leftrightarrow y = \langle x \rangle \}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $A_3 \subset S_3$ ve $\forall \alpha \in A_3$ için $H(\alpha) \leq F(\alpha)$ olduğundan $(H, B) \lesssim (F, A)$ olur [4].

Tanım 2.2.4. (F, A) ikilisi G üzerinde bir soft grup ve $(H, B) \lesssim (F, A)$ olsun. Eğer $\forall \alpha \in B$ için $H(\alpha)$ grubu $F(\alpha)$ 'nın bir normal alt grubu yani $H(\alpha) \trianglelefteq F(\alpha)$ ise (H, B) 'ye (F, A) 'nin bir **normal soft alt grubu** denir ve $H(\alpha) \approx F(\alpha)$ şeklinde gösterilir [4].

Önerme 2.2.4. (F, A) ve (H, B) G üzerinde iki soft grup ve $(F, A) \lesssim (H, B)$ olsun. Bu durumda, $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm ise $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ ikilisi K üzerinde birer soft grup olup $(f(F), A) \lesssim (f(H), B)$ olur [4].

Tanım 2.2.4. (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olsun,

$f : G \longrightarrow K$ ve $g : A \longrightarrow B$ fonksiyonları verilsin. Eğer

- i. f örten bir homomorfizm,
- ii. g örten fonksiyon ve
- iii. $\forall \alpha \in A$ için $f(F(\alpha)) = H(g(\alpha))$

şartları sağlanıyorsa (f, g) ikilisine **soft homomorfizm** denir. İlave olarak, (F, A) ile (H, B) **soft homomorfik** olarak adlandırılır ve $(F, A) \sim (H, B)$ şeklinde gösterilir [4].

Burada, f bir izomorfizm, g de örten ve bire-bir bir fonksiyon olarak seçilirse (f, g) ikilisine bir **soft izomorfizm** denir ve (F, A) ile (H, B) **soft izomorfik** olarak adlandırılıp $(F, A) \simeq (H, B)$ şeklinde yazılır [4].

Tanım 2.2.5. (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olmak üzere, (F, A) ve (H, B) soft gruplarının çarpımı $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ için $U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \times H(\beta)$ olmak üzere $F(\alpha) \times H(\beta) = (U, A \times B)$ olarak tanımlıdır [4].

Önerme 2.2.5. (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olsun. Bunların çarpımı olan $(F, A) \times (H, B)$ de $G \times K$ üzerinde bir soft gruptur [4].

2.3 Soft Kategori

Soft küme teorisinin belirsizliği modelleyen bir matematiksel kavram olarak ortaya konduğunu biliyoruz. Matematikçilerin büyük ilgiyle karşıladığı bu teori birçok alana taşınmıştır. Özellikle Sardar ve Gupta soft küme teorisiyle kategori teoriiyi birlikte ele almış ve kategori kavramına soft bir yaklaşımla soft kategori teorisinin temellerini atarak bazı kategorik kavramları softlaştırmışlardır [13].

Bu bölümde, soft kategori ve soft kategoriyle ilgili bazı temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.3.1. Bir C kategorisinin bütün alt kategorilerinin kümesi $P(C)$ olsun. Parametrelerin kümesi A olmak üzere $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$, C 'nin bir alt kategorisi olacak şekilde tanımlanan $F : A \longrightarrow P(C)$ dönüşümüyle birlikte (F, A) çiftine bir **soft kategori** denir [13].

Başka bir deyişle, C üzerinde bir soft kategori C 'nin alt kategorilerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak da ifade edilebilir.

Örnek 2.3.1. (F, A) çifti U üzerinde bir soft küme olsun. U kümesi $Ob(C) = U$ ve $\forall x, y \in Ob(C)$ için $Mor(x, x) = I_x$, diğer durumlarda $Mor(x, y) = \emptyset$ şeklinde tanımlanan bir C kategorisi olarak ele alınsın. (F, A) ikilisi U üzerinde bir soft küme olduğundan $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \subset U$. Buna göre, açıkça görülebilir ki birim morfizmler ile $F(\alpha)$ kategorisi C 'nin bir alt kategorisidir. O halde, (F, A) ikilisi C üzerinde bir soft kategoridir [23].

Örnek 2.3.2. C grupların G_p kategorisi olmak üzere parametrelerin kümesi olarak $A = \{\text{normal, sonlu, abelyan}\}$ kümesi alınsın. Bu takdirde, $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$ normal, sonlu ve abelyan alt grupları gösterir.

Grup homomorfizmleri ile bu alt grupların her biri kategori yapısına sahiptir ve C 'nin birer alt kategorisidir. Bu takdirde, (F, A) çifti C üzerinde bir soft kategoridir [13].

Tanım 2.3.2. (F, A) ve (H, B) , C kategorisi üzerinde birer soft kategori olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa (H, B) 'ye (F, A) 'nın bir **soft alt kategorisi** denir [13].

- i. $B \subset A$
- ii. $\forall \alpha \in B$ için $H(\alpha), F(\alpha)$ 'nin bir alt kategorisidir.

Örnek 2.3.3. (F, A) soft kategorisi Örnek 2.3.2'deki gibi olsun. Aynı kategori üzerinde (H, B) soft kategorisi de $B = \{G : G \text{ abel grup}\}$ ve $H = \{G : G \text{ sonlu abel grup}\}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, (H, B) 'nin (F, A) 'nin bir soft alt kategorisi olduğu açıkça görülebilir [13].

Önerme 2.3.1. (H, B) ikilisi (F, A) 'nin ve (K, C) ikilisi de (H, B) 'nin birer soft alt kategorisi ise bu takdirde (K, C) ikilisi de (F, A) 'nin bir soft alt kategorisi olur [13].

Tanım 2.3.3. (F, A) ve (H, B) , C kategorisi üzerinde iki soft kategori olsun. Eğer (F, A) soft kategorisi (H, B) 'nin ve (H, B) soft kategorisi de (F, A) 'nin birer soft alt kategorisi ise bu durumda (F, A) ve (H, B) **soft denktir** denir [13].

Tanım 2.3.4. C kategorisi üzerinde (F, A) 'nin bir soft alt kategorisi (H, B) olsun.

Bu takdirde,

- i. $\forall \alpha \in B$ için $H(\alpha)$ kategorisi $F(\alpha)$ 'nin bir tam alt kategorisi ise (H, B) 'ye (F, A) 'nin bir **tam** soft alt kategorisi denir [13].
- ii. $\forall \alpha \in B$ için $H(\alpha)$ kategorisi $F(\alpha)$ 'nin bir geniş alt kategorisi ise (H, B) 'ye (F, A) 'nin bir **geniş** soft alt kategorisi denir [13].

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.3'de verilen (H, B) soft alt kategorisi (F, A) 'nin bir tam soft alt kategorisidir [13].

Tanım 2.3.5. (F, A) ve (H, B) sırasıyla C ve D üzerinde birer soft kategori olsun. $g : A \longrightarrow B$ bir dönüşüm ve $\mathfrak{K} : C \longrightarrow D$ bir fonktor olmak üzere; eğer

- i. $\mathfrak{K}$ tam bir fonktor ve g örten bir dönüşüm,
- ii. $\forall \alpha \in A$ için $\mathfrak{K}(F(\alpha)) = H(g(\alpha))$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde $(\mathfrak{K}, g)$ ikilisi bir **soft fonktor** olarak adlandırılır [13].

Bu sayede, soft kategorileri nesne ve soft kategoriler arasındaki soft fonktorları da morfizm kabul eden yeni bir kategori elde edilir. Bu kategoriye **soft kategorilerin kategorisi** denir ve **SCat** ile gösterilir.

Örnek 2.3.5. Bir C kategorisi üzerinde (F, A) 'nın bir soft alt kategorisi (H, B) olsun.

$i : B \longrightarrow A$ dahil etme dönüşümü ve $\mathcal{T} : C \longrightarrow C$ birim fonktoru aldığımız takdirde yukarıdaki tanıma göre $(\mathcal{T}, i)$ çifti (H, B) 'den (F, A) 'ya bir soft fonktor olur [13].

Tanım 2.3.6. C kategorisi üzerinde iki soft kategori (F, A) ve (H, B) olsun. C^{op} , C 'nin dual kategorisi olarak verilsin. Bu takdirde, $\forall \alpha \in A$ için $F^{op}(\alpha) = (F(\alpha))^{op}$ olmak üzere $(F, A)^{op} = (F^{op}, A)$ ifadesine (F, A) 'nın **dual soft kategorisi** denir [13].

Dual kategori için var olan sonuçlar soft kategoriler için de geçerli olup aşağıdaki gibi verilir.

Önerme 2.3.2. $((F, A)^{op})^{op} = (F, A)^{op}$ [13].

Ayrıca, sıfır, başlangıç ve bitiş nesne kavramları da soft kategoride aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.7. C kategorisi üzerinde (F, A) bir soft kategori olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ başlangıç nesnesine sahip ise bu durumda (F, A) 'ya **başlangıç nesnelere sahip** bir soft kategori denir [13].

Tanım 2.3.8. C kategorisi üzerinde (F, A) bir soft kategori olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ bitiş nesnesine sahip ise bu durumda (F, A) 'ya **bitiş nesnelere sahip** bir soft kategori denir [13].

Önerme 2.3.3. C kategorisi üzerinde (F, A) başlangıç(veya bitiş) nesnelere sahip bir soft kategori ise bu takdirde $(F, A)^{op}$ da C üzerinde bitiş(veya başlangıç) nesnelere sahip bir soft kategoridir [13].

İspat. Tanım 2.3.7 (-2.3.8)'den (F, A) başlangıç (veya bitiş) nesnelere sahip bir soft kategori ise bu durumda $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kategorisi başlangıç (veya bitiş) nesnesine sahiptir. Kategori teoriden bilindiği üzere bir kategorinin her başlangıç (veya bitiş) nesnesi onun dual kategorisinde bitiş (veya başlangıç) nesnesidir.

Bu sebeple, C üzerinde $(F, A)^{op}$ kategorisi bitiş (veya başlangıç) nesnesine sahip olur. Böylece de ispat tamamlanmış olur [13].

Tanım 2.3.9. C kategorisi üzerinde (F, A) bir soft kategori olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ sıfır nesnelere sahip ise bu durumda (F, A) **sıfır nesnelere sahip** bir soft kategori olarak adlandırılır [13].

Önerme 2.3.4. C kategorisi üzerinde bir (F, A) soft kategorisindeki herhangi iki başlangıç (bitiş) nesnesi izomorfiktir [27].

İspat. C kategorisi üzerinde bir (F, A) soft kategorisinin iki başlangıç (veya bitiş) nesnesine sahip olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $\alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ iki başlangıç (veya bitiş) nesnesine sahiptir. Kategori teoride bir kategorinin herhangi iki başlangıç (veya bitiş) nesnesi izomorfik olduğundan ispat tamamlanmış olur [27].

Sonuç 2.3.1. Bir soft kategoride aynı tipteki nesneler izomorfiktir [27].

Tanım 2.3.10. C kategorisi üzerinde (F, A) bir soft kategori olmak üzere $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kategorisi geçişmeli ise (F, A) ' ya **geçişmelidir** denir [27].

Uyarı 2.3.1. Kategori teoride bir C kategorisinin sıfır nesneye sahip olması için gerek ve yeter şartın bu kategorinin geçişmeli olması olduğu bilinir. Aşağıdaki sonuçta bu gerçek soft kategoriler için verilmiştir.

Sonuç 2.3.2. C kategorisi üzerinde (F, A) bir başlangıç ve bir bitiş nesnesine sahip soft kategori olsun. Bu takdirde, (F, A) ' nın bir sıfır nesneye sahip olması için gerek ve yeter şart (F, A) ' nın geçişmeli olmasıdır [27].

2.4 Soft Etki

Bu bölümde Oguz, Icen ve Gursoy tarafından tanımlanan soft etki kavramı ve örnekleri incelenmiştir. Oguz, Icen ve Gursoy bu konuyla ilgili bazı karakterizasyonlar sunarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Soft simetrik grup tanımını vererek soft etki ile soft simetrik grup arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlar, ayrıca iki soft grubun yarı-direkt çarpımını tanımlayıp bu çarpımın yine bir soft grup olduğunu göstermişlerdir [15].

Tanım 2.4.1. $G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olmak üzere;
 X üzerinde G 'nin bir (sol) **soft G -etkisi**

$$\pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$$

ikili işlemidir öyle ki $\forall \alpha \in A$ için

- i. $\forall x \in F'(\alpha)$ için $\pi_\alpha(e, x) = x$,
- ii. $\forall x \in F'(\alpha)$ ve $\forall g, h \in F(\alpha)$ için $\pi_\alpha(g, \pi_\alpha(h, x)) = \pi_\alpha(gh, x)$

koşulları sağlanır. Burada, $\forall \alpha \in A$ için π_α bir (sol) G -etki dönüşümü olup G soft grubunun X soft kümesi üzerine (soldan) **soft etkisi** denir ve X soft kümesi bir **G -soft küme** olarak adlandırılır.

Ayrıca, (X, F', A) soft kümesi bir soft grup olarak alınırsa ve $\forall \alpha \in A$ için π_α dönüşümü *i. ve ii.* şartlarına ek olarak

- iii. $\forall x, y \in F'(\alpha)$ ve $\forall g \in F(\alpha)$ için $\pi_\alpha(g, xy) = \pi_\alpha(g, x) \pi_\alpha(g, y)$

şartını da sağlarsa G soft grubu X soft grubu üzerine (soldan) soft etkir denir ve bu etki ile birlikte X bir **G -soft grup** olarak adlandırılır [15].

Örnek 2.4.1. $S = \{1, 2, 3\}$ üzerinde permütasyonların grubu S_3 olmak üzere $A = G = S_3$ alınsın.

$G = (G, F, A)$ soft grubu

$$F(e) = \{e\},$$

$$F(12) = \{e, (12)\},$$

$$F(13) = \{e, (13)\},$$

$$F(23) = \{e, (23)\},$$

$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\},$$

şeklinde ve $X = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $X = (X, F', A)$ soft kümesi de

$$F'(e) = \{1\},$$

$$F'(12) = \{1, 2\},$$

$$F'(13) = \{1, 3\},$$

$$F'(23) = \{2, 3\},$$

$$F'(123) = F'(132) = \{1, 2, 3\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, $\forall \alpha \in A$ için

$$\pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$$

$$(g, x) \longrightarrow \pi_\alpha(g, x) = \sigma(x)$$

dönüşümü bir (sol) grup etkisidir. Açıkça görülebilir ki $e \in G$ birim eleman olmak üzere $\pi_\alpha(e, x) = x$ olup $\forall g, h \in F(\alpha)$ için $\pi_\alpha(g, \pi_\alpha(h, x)) = \pi_\alpha(gh, x)$ dir. Buna göre, $X = (X, F, A)$ soft kümesi bir G -soft küme olur [15].

Uyarı 2.4.1. Yukarıdaki tanımda $\forall \alpha \in A$ için sol grup etki dönüşümü olan π_α 'nın yönü değiştirildiği takdirde π_α bir sağ grup etkisi olur. Böylece X üzerinde G 'nin bir sağ soft grup etkisi bulunur.

Açıktır ki sağ ve sol soft (grup) etkileri birbirinden çok farklı değildir. Aralarındaki tek fark etkinin yönüdür. Dolayısıyla, sol soft (grup) etki örneklerinin duali sağ soft (grup) etkileri için de birer örnektir. Aşağıdaki örnek, sağ soft (grup) etkilerine bir örnek olarak verilebilir [15].

Örnek 2.4.2. H bir G soft grubunun soft alt grubu olsun. H 'nin bir (sağ) soft koset kümesi

$$X = \{ Hg : g \in F(\alpha) \}$$

olmak üzere $\forall g_1 \in F(\alpha)$ için

$$\pi_\alpha : F'(\alpha) \times F(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$$

$$(Hg, g_1) \longrightarrow \pi_\alpha(Hg, g_1) = H(g g_1)$$

dönüşümü bir grup etkisidir. Açıktır ki $\forall g_1, g_2 \in F(\alpha)$ için

$$\text{i. } \pi_\alpha(Hg, e) = H(ge) = Hg$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \pi_\alpha(\pi_\alpha(Hg, g_1), g_2) &= \pi_\alpha(H(gg_1), g_2) \\ &= H((gg_1)g_2) \\ &= H(g(g_1g_2)) \\ &= Hg(g_1g_2) \\ &= \pi_\alpha(Hg, g_1g_2) \end{aligned}$$

şartları sağlanır.

Buna göre, G soft grubu H 'nin sağ soft kosetlerinin üzerine sağdan etki eder.

Benzer şekilde, G soft grubunun H 'nin sol soft kosetlerinin üzerine soldan etki ettiği de gösterilebilir.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe soft etkiden kasıt, sol soft etki olduğu bilinmelidir [15].

Önerme 2.4.1. $G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olmak üzere X bir G -soft küme ve $\forall \alpha \in A$ için $F'(\alpha) = X$ olsun.

$\forall x, y \in F'(\alpha)$ için $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in F(\alpha)$ vardır $\exists y = \pi_\alpha(g, x)$

şeklinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı X üzerinde bir soft denklik bağıntısı oluşturur [15].

Sonuç 2.4.1. Yukarıda verilen $\sim$ bağıntısına göre x 'in **yörüngesi**

$$Orb_G(x) = \{y \in F'(\alpha) : x \sim y\} = \{\pi_\alpha(g, x) : g \in F(\alpha)\}$$

ile tanımlı bir G -soft kümedir. Buna ilaveten, (Orb_G, X) ikilisi X üzerinde

$$Orb_G : X \longrightarrow P(X)$$

dönüşümüyle bir soft kümedir [15].

Önerme 2.4.2. X üzerinde yukarıdaki gibi $\sim$ ile tanımlanan (F'', A) soft denklik bağıntısı için $x \in F'(\alpha)$ olmak üzere $x \in Orb_G(x)$ olur [15].

Önerme 2.4.3. X bir G -soft küme olsun. Ayrık yörüngeler, X soft kümesinin bir parçalanışını oluşturur [15].

İspat. İspat için aşağıdaki iki şartın sağlandığını göstermek yeterlidir.

- i. X 'in her elemanı, herhangi bir yörüngededir.
- ii. $Orb_G(x) \cap Orb_G(x') \neq \emptyset$ ise $Orb_G(x) = Orb_G(x')$ sağlanır.

İlk şart Önerme 2.4.2 den açıkça görülebilir.

İkincisi için ise $y \in Orb_G(x) \cap Orb_G(x')$ olsun. Bu takdirde, $y = \pi_\alpha(g, x) = \pi_\alpha(h, x')$ olacak şekilde $g, h \in F(\alpha)$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} x &= \pi_\alpha(e, x) = \pi_\alpha(gg^{-1}, x) = \pi_\alpha(g^{-1}, \pi_\alpha(g, x)) = \pi_\alpha(g^{-1}, \pi_\alpha(h, x')) = \pi_\alpha(g^{-1}h, x') \\ \text{olup } x &\in Orb_G(x') = \{\pi_\alpha(g_1, x') : g_1 \in F(\alpha)\} \text{ bulunur. O halde, } g_1 = e \text{ alındığında} \\ Orb_G(x) &= \{\pi_\alpha(g', x) : g' \in F(\alpha)\} \subseteq \{\pi_\alpha(g', g_1x') : g', g_1 \in F(\alpha)\} \end{aligned}$$

$$\subseteq \{\pi_\alpha(g', x') : g' \in F(\alpha)\} = Orb_G(x') \quad \text{elde edilir.}$$

Benzer yol kullanılarak $Orb_G(x') \subseteq Orb_G(x)$ olduğu bulunur ki bu ispatı tamamlar [15]

Önerme 2.4.4. $G = (G, F, A)$ soft grubu $X = (X, F', A)$ soft kümesi üzerine etki etsin.

Eğer $x \in F'(\alpha)$, $g \in F(\alpha)$ için $y = \pi_\alpha(g, x)$ ise bu durumda $x = \pi_\alpha(g^{-1}, y)$ olur.

Ayrıca $x \neq x'$ ise $\pi_\alpha(g, x) \neq \pi_\alpha(g, x')$ olur [15].

Soft etkinin bazı temel örnekleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.4.3. Her G soft grubu kendisi üzerine etki eder.

Gerçekten: $X = G$ alınmak üzere $\forall \alpha \in A$ için;

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g, h) &\longrightarrow \pi_\alpha(g, h) = h\end{aligned}$$

bir etki dönüşümüdür. Bu G üzerindeki **aşıkâr (trivial) soft etki** olarak adlandırılır [15].

Örnek 2.4.4. G soft grup olsun. Bu durumda aşağıda verilen çarpım ile kendi üzerine etki eder: $\forall \alpha \in A$ için;

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g, h) &\longrightarrow \pi_\alpha(g, h) = gh\end{aligned}$$

dönüşümünün bir soft etki olduğu açıkça görülür [15].

Örnek 2.4.5. G soft grup olsun. Bu durumda aşağıda verilen konjuge işlemiyle kendi üzerinde bir soft etkiye sahiptir: $\forall \alpha \in A$ için;

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g, h) &\longrightarrow \pi_\alpha(g, h) = ghg^{-1}\end{aligned}$$

dönüşümünün bir etki olduğu açıktır [15].

Örnek 2.4.6. $Y = (Y, F'', A)$ herhangi bir soft küme olsun. $G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ üzerindeki soft etkisi

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (g, x) &\longrightarrow \pi_\alpha(g, x)\end{aligned}\quad \text{olsun.}$$

$f : X \longrightarrow Y$ bire-bir bir dönüşüm ve $F'' = f(F')$ olmak üzere $\forall \alpha \in A$ için

$$\begin{aligned}\pi'_\alpha : F(\alpha) \times f(F'(\alpha)) &\longrightarrow f(F'(\alpha)) \\ (g, f(x)) &\longrightarrow \pi'_\alpha(g, f(x)) = f(\pi_\alpha(g, x))\end{aligned}$$

İle verilen dönüşüm de bir etkidir.

Böylece (Y, F'', A) bir G -soft kümedir denir [15].

Örnek 2.4.7. $A = G = S_n$ için $G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olmak üzere $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesinin polinomları $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ile gösterilsin.

Bu takdirde,

$$\pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$$

$$(\sigma, f(P_1, P_2, \dots, P_n)) \longrightarrow \pi_\alpha(\sigma, f(P_1, P_2, \dots, P_n)) = f(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \dots, P_{\sigma(n)})$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm için

$$\text{i. } \sigma = e \text{ için } \pi_\alpha(e, f(P_1, P_2, \dots, P_n)) = f(P_{e(1)}, P_{e(2)}, \dots, P_{e(n)}) = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$\text{ii. Her } \sigma, \sigma' \in S_n \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(\sigma, \pi_\alpha(\sigma', f(P_1, P_2, \dots, P_n))) &= \pi_\alpha(\sigma, f(P_{\sigma'(1)}, P_{\sigma'(2)}, \dots, P_{\sigma'(n)})) \\ &= f(P_{\sigma(\sigma'(1))}, P_{\sigma(\sigma'(2))}, \dots, P_{\sigma(\sigma'(n))}) \\ &= \pi_\alpha(\sigma\sigma', f(P_1, P_2, \dots, P_n)) \end{aligned}$$

şartları sağlandığı için bu dönüşüm bir etki olup X bir G -soft kümedir denir [15].

Tanım 2.4.2. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde $\forall \alpha \in A$ ve $x, y \in F'(\alpha)$ için bir $g \in F(\alpha)$ var olup $\pi_\alpha(g, x) = y$ ise bu durumda bu soft etkiye **geçişmelidir (transitive)** denir [15].

Tanım 2.4.3. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde $\forall \alpha \in A$ ve birbirinden farklı $\forall g, h \in F(\alpha)$ için bir $x \in F'(\alpha)$ var olup $\pi_\alpha(g, x) \neq \pi_\alpha(h, x)$ ise bu durumda bu soft etkiye **efektiftir** denir [15].

Tanım 2.4.4. Bir (G, F, A) soft grubu (X, F', A) soft kümesi üzerinde bir soft etkiye sahip olsun. Eğer $\forall \alpha \in A$ ve $g, h \in F(\alpha)$ için $\pi_\alpha(g, x) = \pi_\alpha(h, x)$ şartını sağlayan bir $x \in F'(\alpha)$ için $g = h$ ise, bu soft etkiye **serbesttir** denir.

Diğer bir değişle, bir $x \in F'(\alpha)$ için $\pi_\alpha(g, x) = x$ olacak şekilde bir $g \in F(\alpha)$ var ise bu g elemanı birimdir [15].

Önerme 2.4.5. Her serbest soft etki efektiftir [15].

Tanım 2.4.5. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki soft etkisi geçişmeli ve aynı zamanda serbest ise **regülerdir** denir. Yani ; $\forall \alpha \in A$ ve $x, y \in F'(\alpha)$ için bir tek $g \in F(\alpha)$ vardır öyleki $\pi_\alpha(g, x) = y$ ise bu soft etkiye **regülerdir** denir [15].

Sonuç 2.4.2. Keyfi bir G -soft grubu alındığında, bu grubun çarpım vasıtasıyla kendi üzerindeki soft etkisi regülerdir ve aynı zamanda efektiftir [15].

2.4.1 Soft etkilerde sabitleyici, merkezleştirici ve normalleştirici

Tanım 2.4.6. $X = (X, F', A)$ bir G -soft küme olsun. $\forall \alpha \in A$ ve $x \in F'(\alpha)$ için

$$Stab_G(x) = \{g \in F(\alpha) : \pi_\alpha(g, x) = x\}$$

kümesine x ' in **sabitleyicisi** denir.

Genelde, herhangi bir $Y \subseteq X$ soft alt kümesinin sabitleyicisi de

$$Fix_G Y = \{g \in F(\alpha) : \pi_\alpha(g, x) = x, x \in F'(\alpha) \cap Y\}$$

ile tanımlıdır [15].

Önerme 2.4.6. Yukarıdaki gibi verilen $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ kümeleri, G üzerinde birer soft gruptur [15].

İspat. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} Stab_G: X &\longrightarrow P(G) \\ x &\longrightarrow Stab_G(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup $Stab_G(x)$ ' in G ' nin bir alt grubu olduğu açıktır.

Buna göre, $(G, Stab_G, X)$ yapısı bir soft gruptur. Benzer şekilde, her $x \in Y$ için

$$\begin{aligned} Fix_G: Y &\longrightarrow P(G) \\ x &\longrightarrow Fix_G(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır öyle ki $Fix_G(x)$ ' in G ' nin bir alt grubu olduğu açıkça görülebilir. Buradan, $(Fix_G(x) Y)$ ikilisi G üzerinde bir soft gruptur [15].

Uyarı 2.4.2. Klasik teoriden farklı olarak $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ soft grupları G soft grubunun birer soft alt grubu değildir [15].

Önerme 2.4.7. Yukarıda tanımlanan $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ için

$$Fix_G Y = \bigcap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x) \text{ [15].}$$

İspat. $g \in Fix_G Y$ alınsın. Tanımdan, her $x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $\pi_\alpha(g, h) = x$ olup $g \in Stab_G(x)$ bulunur. Buna göre, $g \in \bigcap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$ olur. Bu sayede, $Fix_G Y \subseteq \bigcap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$ elde edilir.

Tersine $g \in \bigcap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$ alınsın. Bu takdirde, her $x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $g \in Stab_G(x)$ olup $\pi_\alpha(g, h) = x$ bulunur. Böylece, $g \in Fix_G Y$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar [15].

Tanım 2.4.7. $G = (G, F, A)$ soft grubu kendi üzerine konjuge etki etsin. $\forall \alpha \in A$ ve $h \in F(\alpha)$ için h 'nin yörüngelerinin

$$C_G(h) = \{g \in F(\alpha) : \pi_\alpha(g, h) = \pi_\alpha(h, g)\}$$

kümesi h 'nin **merkezleştiricisi** olarak adlandırılır.

Ayrıca, $F(\alpha)$ daki tüm elemanların merkezleştiricilerinin kesişimi

$$Z(G) = \{g \in F(\alpha) : \pi_\alpha(g, h) = \pi_\alpha(h, g), \forall h \in F(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlı olup $Z(G)$ 'ye G soft grubunun merkezi denir [15].

Önerme 2.4.8. (C_G, G, G) yapısı bir soft gruptur [15].

İspat. Her $h \in F(\alpha)$ için

$$\begin{aligned} C_G : G &\longrightarrow P(G) \\ h &\longrightarrow C_G(h) \end{aligned}$$

ile tanımlı olup $C_G(h)$ 'nın G 'nin bir alt grubu olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak, (C_G, G) ikilisi G üzerinde bir soft gruptur [15].

Tanım 2.4.8. $G = (G, F, A)$ soft grubu kendi üzerine konjuge etki etsin ve H kümesi G 'nin bir soft alt kümesi olsun. $\forall \alpha \in A$ için izotropi soft alt grubu

$$N_G(H) = \{g \in F(\alpha) : \pi_\alpha(g, h) = h, h \in F(\alpha) \cap H\}$$

ile tanımlıdır ve buna G 'de H 'nin **normalleştiricisi** denir [15].

Açıktır ki, H soft alt kümesi G 'nin bir soft alt grubu ise H aynı anda $N_G(H)$ 'nin da soft alt grubudur. Ayrıca, H soft alt kümesi G 'nin bir normal soft alt grubu ise bu durumda $N_G(H)$ kümesi G 'nin en geniş soft alt grubudur [15].

Tanım 2.4.9. Bir X kümesi ve parametrelerin bir A kümesi verilsin. X kümesinin permütasyonlar grubu $Sym(X)$ ve bu grubun bütün alt gruplarının kümesi de $P(Sym(X))$ ile verilsin. Bu durumda, $\alpha \in A$ için

$$F : A \longrightarrow P(Sym(X))$$

dönüşümü ile $F(\alpha)$ kümesi $Sym(X)$ 'in bir alt grubu ise $(Sym(X), F, A)$ yapısına bir **soft simetrik grup** denir [15].

Teorem 2.4.1. $G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ soft kümesi üzerine etkisi verilsin. Bu takdirde, G 'den $Sym(X)$ 'e bir soft homomorfizm vardır [15].

Teorem 2.4.2. Sonlu bir grup üzerinde verilen her soft grup bir soft simetrik grup içine gömülebilir [15].

Sonuç 2.4.3. $G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ soft kümesi üzerindeki soft etkisi $G \longrightarrow \text{Sym}(X)$ soft homomorfizmi ile aynıdır [15].

2.4.2 Soft grupların yarı-direkt çarpımı

Tanım 2.4.10. $G = (G, F, A)$ ve (H, F', A) soft gruplar olsun. G ve H gruplarının yarı-direkt çarpımı, $G \ltimes H$ grubundan indirgenen işlem ve G 'nin H üzerine etkisinden indirgenen kısıtlanmış etkiler ile $\forall \alpha \in A$ için $F''(\alpha) = F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)$ birer grup olmak üzere bu iki soft grubun **yarı-direkt çarpımı**

$$(G, F, A) \ltimes (H, F', A) = (G \ltimes H, F'', A) \text{ olarak tanımlıdır [15].}$$

Önerme 2.4.9. İki soft grubun yarı-direkt çarpımı yine bir soft gruptur [15].

İspat. (G, F, A) ve (H, F', A) iki soft grup ve bunların yarı-direkt çarpımı

$$(G, F, A) \ltimes (H, F', A) = (G \ltimes H, F'', A)$$

olsun. Buna göre;

$$F'': A \longrightarrow P(G \ltimes H)$$

$$\alpha \longrightarrow F''(\alpha) = F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)$$

şeklinde tanımlıdır.

Grup teoriden bilindiği gibi G ve H gruplarının yarı-direkt çarpımı olan $G \ltimes H$ da yine bir grup olacağı açıktır. Ayrıca $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$ ve $F'(\alpha)$ birer grup olup $G \ltimes H$ grubunun işlemi ve indirgenen etki dönüşümü ile $F(\alpha) \times F'(\alpha)$ da bir grup yapısına sahip olur. $F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)$ ile gösterilen bu grup yarı-direkt çarpım grubu olup $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \times F'(\alpha) \leq G \ltimes H$ olduğu açıktır. Buna göre, $(G \ltimes H, F'', A)$ yapısı bir soft grup olur [15].

3. GLOBAL ETKİ

Anthony Bak [16] tarafından tanımlanan global etki kavramı bilinen klasik grup etkilerini belli kurallar dahilinde tekrar yorumlayan daha kompleks bir cebirsel yapıdır. Bu yapı sayesinde basit yapı taşlarıyla kompleks yapılar, bileşenlerinin kapalı diskler olduğu CW kompleksleri, bileşenlerinin sabit boyutlu açık diskler olduğu manifoldlar, bileşenlerinin afin olduğu yapılar gibi çeşitli kompleks yapılara matematiksel çözümler önerilmiştir [16].

Bu kavram üzerine de birçok matematikçi çalışmış [17-21] ve literatüre çeşitli katkılar sunmuşlardır. Bu katkılardan bazılarını şöylece sıralayabiliriz: genel, doğrusal, temel ve Steinberg gruplarına bağlı global etkiler ayrıntılı açıklanmıştır. Rastgele global etkilerin temel homotopi teorisi tanımlanıp homotopi grupları oluşturulmuştur [18]. Global etkilerin ve grupoid atlasların homotopi değişmezleri tanımlanmış [19], global etki kavramı grupoid atlas kavramına genelleştirilmiş [20], bunun yanı sıra modüler olmayan sıralı global etki için yol bağlantılı bileşeni ve temel grubu hesaplanmıştır [21]. Ayrıca bu bölümde, “global etki kategorisi” kavramı da tanımlanmıştır.

3.1 Global Etki Kavramı

Tanım 3.1.1. X bir küme olsun. X üzerindeki bir (sol) global etki, $G_\alpha \curvearrowright X_\alpha$ grup etkilerinin bir $\{G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \mid \alpha \in T\}$ kümesinden oluşur. Burada her $X_\alpha \subseteq X$ ve T , aşağıdaki şartların geçerli olacağı şekilde yansıma bağıntısı $\leq$ ile donatılmış bir indis kümesidir:

a) $\alpha \leq \beta$ ise, G_α ’nın etkisi altında $X_\alpha \cap X_\beta$ değişmez.

Yani $g \in G_\alpha$ ve $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ ise $gx \in X_\alpha \cap X_\beta$ olur. Böylece $G_\alpha \curvearrowright (X_\alpha \cap X_\beta)$ olur.

Başka bir deyişle

$$\begin{aligned} G_{\alpha \leq \beta} : G_\alpha \times (X_\alpha \cap X_\beta) &\longrightarrow (X_\alpha \cap X_\beta) \\ (g, x) &\longrightarrow gx \end{aligned}$$

yazılır.

b) Kabul edelim ki $\alpha \leq \beta \in T$ olsun. Bu takdirde global etkinin bir parçası olarak $i_{X_\alpha \cap X_\beta, X_\beta} : X_\alpha \cap X_\beta \longrightarrow X_\beta$ dönüşümünün standart katılım gösterdiği grup etkilerinin bir morfizmi $G_\alpha \curvearrowright (X_\alpha \cap X_\beta) \longrightarrow G_\beta \curvearrowright X_\beta$ olacak şekilde bir $G_{\alpha \leq \beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$, ($G_{\alpha \leq \beta}$, $i_{X_\alpha \cap X_\beta, X_\beta}$) grup homomorfizmi vardır [17].

Başka bir deyişle $\alpha \leq \beta \in T$ için bir $G_{\alpha \leq \beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ grup homomorfizmi var öyleki $G_\alpha \curvearrowright (X_\alpha \cap X_\beta) \longrightarrow G_\beta \curvearrowright X_\beta$ bir etki dönüşümüdür.

Daha açık bir ifadeyle, $\alpha \leq \beta$ ise, $G_{\alpha \leq \beta} : G_{\alpha} \longrightarrow G_{\beta}$ grup homomorfizmi var öyleki aşağıdaki diyagram değişimlidir:

$$\begin{array}{ccc}
 G_{\alpha} \curvearrowright (X_{\alpha} \cap X_{\beta}) & \longrightarrow & G_{\beta} \curvearrowright X_{\beta} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 G_{\alpha} \times (X_{\alpha} \cap X_{\beta}) & \longrightarrow & X_{\alpha} \cap X_{\beta} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_{\beta} \times X_{\beta} & \longrightarrow & X_{\beta}
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 (g, x) & \longrightarrow & g.x \\
 (G_{\alpha \leq \beta}, i) \downarrow & & \downarrow i \\
 (G_{\alpha \leq \beta}(g), x) & \longrightarrow & g.x = G_{\alpha \leq \beta}(g).x
 \end{array}
 \end{array}$$

Böyle bir $G_{\alpha \leq \beta}$ homomorfizmi **yapı homomorfizmi** olarak adlandırılır.

Bir global etkiyle donatılmış X kümesine **global etki uzayı** veya kısaca **global etki** denir. Burada X_{α} kümeleri lokal kümeler, G_{α} grupları lokal gruplar ve $G_{\alpha} \curvearrowright X_{\alpha}$ etkileri lokal etkiler olarak adlandırılır.

Açıklama 3.1.1.

- a) Burada X kümesi $X = \cup X_{\alpha}$, $\alpha \in T$ dir.
- b) T üzerindeki bağıntının geçişli olduğu varsayılmadığından, eğer $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \gamma$ ise zorunlu olarak $\alpha \leq \gamma$ olması gerekmez, elbette ki $\alpha \leq \gamma$ mümkündür ancak bu bir zorunluluk değildir.

Varsayalım ki $\alpha \leq \gamma$ olsun. O takdirde $G_{\alpha \leq \beta}$, $G_{\beta \leq \gamma}$ ve $G_{\alpha \leq \gamma}$ yapı homomorfizmleri vardır ve $G_{\beta \leq \gamma} G_{\alpha \leq \beta} = G_{\alpha \leq \gamma}$ eşitliği sağlanır [17].

Aşağıda global etkinin bazı önemli örnekleri bulunmaktadır:

Örnek 3.1.1. G bir grup ve T , G 'nin G_{α} alt gruplarının bir $\{G_{\alpha} \mid \alpha \in T\}$ kümesini indisleyen indis kümesi olsun. Eğer $\alpha = \alpha'$ ise $G_{\alpha} = G_{\alpha'}$ ve kesişim işlemi altında korunur; yani $\alpha, \beta \in T$, $\exists \gamma \in T : G_{\alpha} \cap G_{\beta} = G_{\gamma}$ dır.

T 'yi $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow G_{\alpha} \subseteq G_{\beta}$ ile tanımlanan yansıma bağıntısı ile tanımlayalım,

Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $G_{\alpha \leq \beta}$ standart kapsama homomorfizmi $G_{\alpha} \rightarrowtail G_{\beta}$ ile gösterilir.

$X = G$ ve her bir $\alpha \in T$ için $X_{\alpha} = X$ olsun. Sol (ya da sağ) çarpma ile G_{α} , $X_{\alpha} (= X)$ üzerinde etki tanımlar. Bu takdirde $\{G_{\alpha} \curvearrowright X_{\alpha} \mid \alpha \in T\}$, X üzerinde bir global etkidir. Bu örneğe **standart tek alanlı global etki** denir [17].

Açıklama 3.1.2. Yukarıdaki örneği daha açık bir şekilde ifade edebiliriz:

G bir grup, $G_\alpha \leq G$ ve $\forall \alpha \in T$ için $X_\alpha = X = G$ olsun.

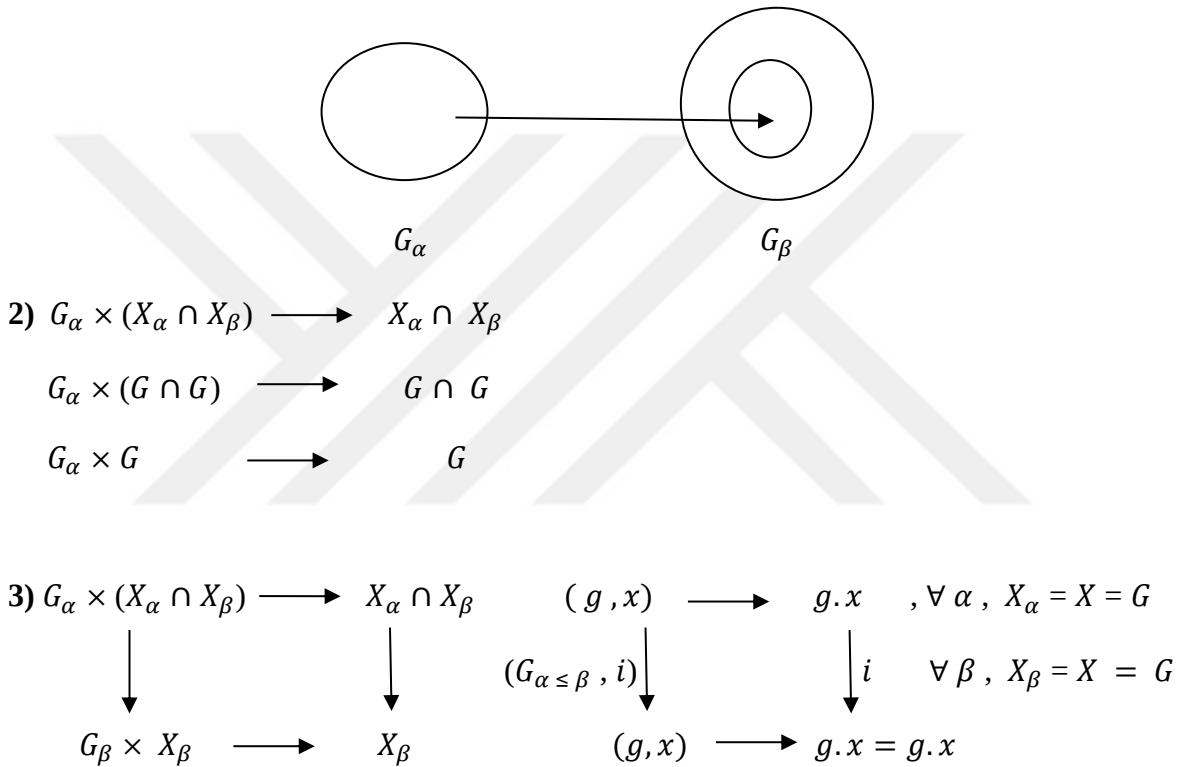
1) $G_\alpha \times X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ bir etki oluşur:

$$\cdot : G_\alpha \times G \rightarrow G, (k, g) \rightarrow k g$$

i. $1 \cdot g = g$

ii. $(k_1 \cdot k_2) g = k_1 (k_2 g)$

Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $G_\alpha \subseteq G_\beta$ olup standart kapsama homomorfizmi $G_{\alpha \leq \beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$ ile gösterilir.



daha sade yazacak olursak,

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha \times (G \cap G) & \longrightarrow & G \cap G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\beta \times G & \longrightarrow & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G_\alpha \times G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\beta \times G & \longrightarrow & G \end{array}$$

Örnek 3.1.2. Bir L doğru etkisi $X = \mathbb{Z}$ ve indis kümesi $T = \mathbb{Z} \cup \{*\}$ ile verilen bir global etkidir. Burada T üzerinde bir bağıntı $* \leq *$ ve her n için $n \leq n, * \leq n$ sağlasın.

Ayrıca $X_* = \mathbb{Z}$, her n için de $X_n = \{n, n+1\}$ dir. Grup içinde $G_* = 1$ ve her n için $G_n = \text{Per}(\{n, n+1\})$ grupları tanımlanır.

Etkileri $\cdot : G_* \times (X_* = \mathbb{Z}) \longrightarrow X_* = \mathbb{Z}, (1, x) \longrightarrow 1 \cdot x$ ve her $n \in T$ için $\cdot : G_n \times (X_n = \{n, n+1\}) \longrightarrow X_n = \{n, n+1\}, (\bar{f}, n) \longrightarrow f(n) = n+1$ şeklinde tanımlanır.

$$((f \cdot g)(n) = f(g(n)) = f(n+1) = n)$$

Yapı dönüşümleri : $G_{*\leq*} : G_* \longrightarrow G_*, G_{*\leq n} : G_* \longrightarrow G_n$ bir tek şekilde tanımlanır. Her $n \in \mathbb{Z}$ için de $G_{n\leq n} : G_n \longrightarrow G_n$ birim dönüşümdür. Bu örneğe **doğru etki** denir.

Örnek 3.1.3. İkinci önemli örnek cebir teorisinde önemli yeri olan genel lineer gruplar yardımıyla verilir. Bunun için bazı kabuller yapalım: $n \geq 3$ için, $J_n = [1, n] \times [1, n] \setminus \{(i, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ olsun. Bu $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin köşegeni kaldırılmış kartezyen çarpımıdır.

Aşağıdaki koşullar geçerliyse $\alpha \subseteq J_n$ alt kümesine nilpotent (üstel sıfır) denir.

-Eğer $(i, j) \in \alpha$ iken $(j, i) \notin \alpha$

-Eğer $(i, j), (j, k) \in \alpha$ iken $(i, k) \in \alpha$

Belirtelim ki boş küme bir nilpotent alt kümedir, nilpotent alt kümelerin kesişimi de nilpotenttir.

T_n indeks sistemini gösterebiliriz. $T_n = \{\alpha \mid \alpha, J_n \text{ 'nin nilpotent alt kümesi}\}$

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ yansıma bağıntısı $\leq$ ile verilsin. Görüntüsü J_n 'nin en küçük boştan farklı nilpotent alt kümelerinden oluşan kanonik bir $J_n \rightarrow T_n, (i, j) \rightarrow \{(i, j)\}$ gömme var.

R , birim elemanlı birleşimli bir halka olsun. Genel lineer global etki temelini oluşturan genel lineer grup $GL_n(R)$, indeks sistemi T_n ve lokal gruplar $GL_n(R)_\alpha, \alpha \in T_n$ ile tek tanımlı global etkidir.

(i, j) konumundaki köşegen girişleri $(i, j) \in \alpha$ ise 1 olan, köşegen olmayan girişleri $(i, j) \notin \alpha$ ise 0 olan tüm matrislerden oluşur. Bu T_n boş alt kümesinin, aşikâr $GL_n(R)$ alt grubuna atandığı anlamına gelir. Lokal $GL_n(R)_\alpha$ grupları sağ çarpma ile $GL_n(R)$ üzerine etki eder. Yapı homomorfizmleri $\theta_{\alpha \leq \beta} : GL_n(R)_\alpha \longrightarrow GL_n(R)_\beta$ tanım gereği kapsama dönüşümüdür.

Açıkça $GL_n(R)_\alpha \cap GL_n(R)_\beta = GL_n(R)_{\alpha \cap \beta}$ ve $T_n \longrightarrow GL_n(R), \alpha \longrightarrow GL_n(R)_\alpha$

İfadesi yalnızca kısmi sıralamayı korur, yani $\alpha \leq \beta \Rightarrow GL_n(R)_\alpha \subseteq GL_n(R)_\beta$, üstelik kesişimle $GL_n(R)_{\alpha \cap \beta} = GL_n(R)_\alpha \cap GL_n(R)_\beta$ olur.

$GL_n(R)_\alpha, \alpha \in T_n$ alt grupları, literatürde $GL_n(R)$ 'nin nilpotent alt grupları olarak bilinir. Elementer bir matrisin tanımını hatırlayalım:

Eğer $(i, j) \in J_n$ ise e_{ij} , (i, j) ' leri 1 ve diğeri 0 olan $n \times n$ matris olsun. $r \in R$ için $E_{ij}(r) = I_n + re_{ij}$ olsun. Burada I_n , $n \times n$ birim matrisi gösterebiliriz. $E_{ij}(r)$ elementer matris olarak bilinir. Tüm elementer matrisler yardımıyla üretilen $GL_n(R)$ 'nin alt gruplarına elementer grup denir ve $E_n(R)$ ile gösterilir.

$J_n \rightarrow T_n$, $(i, j) \rightarrow \{(i, j)\}$ ifadesi bize herhangi bir elementer matrisin lokal $GL_n(R)_\alpha$ grubunda yer aldığını söyler. $E_n(R)$ ' nin $E_n(R)_\alpha$ grupları tarafından, T_n üzerinden üretildiğini anlıyoruz [18].

Buradan $E_n(R)_\alpha = GL_n(R)_\alpha$ eşitliği yazılır. Bu örneğe **genel lineer global etki** denir.

3.1.1 Lokal çatı

Tanım 3.1.2. $\{G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \mid \alpha \in T\}$, X kümesindeki bir global etkiyi gösterebiliriz. Bir *lokal çatı* α veya sadece α - *çatı* sonlu bir $\{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subseteq X_\alpha$ kümesidir öyle ki G_α geçişli olarak $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ üzerinde etki eder, yani her bir i ($1 \leq i \leq p$) için $g_i x_{i-1} = x_i$ olacak şekilde bir $g_i \in G_\alpha$ vardır [17].

3.1.2 Global eğri(path)

Tanım 3.1.3. Bir X global etkisinde bir eğri, bir sonlu $x_0, \dots, x_n$ dizisidir öyle ki; her i için $\{x_{i-1}, x_i\}$ kümesi lokal bir çatı oluşturur. Yani bazı α indisleri için bir α -çatı vardır.

X kümesinin iki x, y elemanı verildiği zaman her iki noktayı birleştiren bir eğri varsa bunlar X kümesinin bağlantılı bileşenleridir. Burada X 'in bağlantılı (eğri) bileşenlerinin kümesi $\pi_0(X)$ ile gösterilir [19].

3.1.3 Global etkinin morfizmi

Tanım 3.1.4. Sırasıyla X ve Y üzerinde $\{G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ve $\{H_\beta \curvearrowright Y_\beta \mid \beta \in \Psi\}$ iki global etki olsun. Global etkilerin bir morfizmi $f : X \rightarrow Y$ lokal çatıları koruyan bir f fonksiyonudur. Yani eğer $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, X 'de bir lokal çatı ise o zaman $\{fx_0, fx_1, \dots, fx_p\}$ de Y 'de bir lokal çatıdır [17].

Açıklama 3.1.3. Eğer $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ global etkilerin birer morfizmleri ise bu takdirde açıktır ki $gf : X \rightarrow Z$ de bir global etki morfizmidir [17].

Örnek 3.1.4. $\{G_\alpha \simeq X_\alpha \mid \alpha \in T\}$, X üzerinde bir global etki, $\{H_\beta \simeq Y_\beta \mid \beta \in \Psi\}$ ise Y üzerinde bir global etki $\exists \beta \in \Psi$ ve $y \in Y_\beta$ olmak üzere $H_{\beta y} = Y_\beta$ olsun. Yani Y_β 'nin tüm elemanları, bazı $y \in Y_\beta$ elemanlarının yörüngesindedir. O zaman, görüntüsü Y_β 'nin içinde olan herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyon global etki morfizmidir [17].

3.1.4 Global etki kategorisi

Tanım 3.1.5. Objeleri global etki $Ob(\mathcal{G}) = \{X \mid X \text{ global etki}\}$ ailesi, morfizmleri global etkiler arasında global etki morfizmi $Mor(X, Y) = \{f \mid f : X \longrightarrow Y \text{ global etki morfizmi}\}$ ailesi bir kategori oluşturur. Bu kategoriye “Global etki kategorisi” denir ve $\mathcal{G}$ ile gösterilir.

Açıktır ki [17] den $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ global etki morfizmleri ise bu durumda $g \circ f : X \longrightarrow Z$ bir global etki morfizmidir ve fonksiyonlarda bileşke işlemi $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ daima sağlanır.

Kategori olmanın ikinci şartı için de $f \in Mor(X, Y)$ ve $g \in Mor(Z, X)$ için $f \circ I_x = f$ ve $I_x \circ g = g$ olacak şekilde bir $I_x \in Mor(X, X)$ global etki morfizmi vardır.

Eğer $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, X' de bir lokal çatı ise bu durumda $\{I(x_0), I(x_1), \dots, I(x_p)\} = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ 'nin de X' de bir lokal çatı olduğu açıktır.

Şimdi global etkiler arasında tanımlanan bazı dönüşümleri verelim:

3.1.5 Regüler morfizm

Tanım 3.1.6. $\{G_\alpha \simeq X_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ve $\{H_\beta \simeq Y_\beta \mid \beta \in \Psi\}$ sırasıyla X ve Y üzerinde birer global etki olsun. Bir regüler morfizm $\eta : X \longrightarrow Y$, (ι, κ, λ) üçlüsüyle tanımlanır:

- a) $\iota : T \longrightarrow \Psi$ bir fonksiyon öyle ki $\iota(\alpha) \leq \iota(\beta)$, $\alpha \leq \beta$; yani ι bağıntıyı korur.
- b) κ her bir $\alpha \in T$ için, aşağıdaki gibi bir grup homomorfizmidir:

$$\kappa_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H_{\iota(\alpha)} \text{ öyle ki } \alpha \leq \beta$$

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \longrightarrow & H_{\iota(\alpha)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\beta & \longrightarrow & H_{\iota(\beta)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\kappa_\alpha} & \\ G_{\alpha \leq \beta} \downarrow & & \downarrow H_{\iota(\alpha) \leq \iota(\beta)} \\ & \xrightarrow{\kappa_\beta} & \end{array}$$

Dolayısıyla T ve Ψ üzerinde tanımlı bağıntılar geçişli ise bu durumda T ve Ψ açık şekilde kategori olurlar ve bileşke kuralları $G_{\beta} \leq_Y G_{\alpha} \leq_{\beta} = G_{\alpha} \leq_Y$ ve $H_{\beta'} \leq_{Y'} H_{\alpha'} \leq_{\beta'} = H_{\alpha'} \leq_{Y'}$ sağlanır. O zaman G ve H sırasıyla T ve Ψ üzerinde grup değerli, $\iota : T \longrightarrow \Psi$ fonktor olurlar ve κ , T ve Ψ üzerinde fonktorların bir doğal dönüşümü $G_{(\)} \longrightarrow H_{(\)}$ belirtir.

c) $\forall \alpha \in T, \lambda : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon öyle ki $\lambda(X_{\alpha}) \subseteq Y_{\iota(\alpha)}$,

d) $\forall \alpha \in T$ için $(\kappa_{\alpha}, \lambda|_{X_{\alpha}}) : G_{\alpha} \sim X_{\alpha} \longrightarrow H_{\iota(\alpha)} \sim Y_{\iota(\alpha)}$ çifti grup etkilerinin bir morfizmidir [17].

Bir $\eta = (\iota, \kappa, \lambda) : X \longrightarrow Y$ regüler morfizmi için ι' , ι nin tersi, λ' , λ nin tersi ve $\kappa'_{\iota(\alpha)}$, κ_{α} 'nın tersi olacak şekilde bir $\eta' = (\iota', \kappa', \lambda') : Y \longrightarrow X$ regüler morfizmi varsa η ye bir regüler izomorfizm denir. Böyle regüler morfizmde η' , η nin tersi olarak adlandırılır.

Bir regüler morfizm $\eta = (\iota, \kappa, \lambda) : X \longrightarrow Y$ bir zayıf regüler izomorfizm olarak adlandırılır; eğer bir regüler morfizm $\eta' = (\iota', \kappa', \lambda') : Y \longrightarrow X$ öyle ki λ' , λ 'nin tersi varsa [17].

Açıklama 3.1.4. Yukarıdaki (d) maddesine göre regüler morfizm bir global etkilerin morfizmidir. Daha net bir ifadeyle, eğer (ι, κ, λ) regüler bir morfizm ise bu takdirde λ global etkilerin bir morfizmidir.

Global etkilerin morfizmlerinin homotopi teorisi geliştirmek için, global etkinin yapısını bir global etki X' den, bir başka global etki Y' ye kadar tüm morfizmleri $Mor(X, Y)$ kümesi üzerine inşa etmek gerekir [17].

Tanım 3.1.7. X üzerinde bir global etki $\{G_{\alpha} \sim X_{\alpha} \mid \alpha \in T\}$ ve Y üzerinde bir global etki $\{H_{\beta} \sim Y_{\beta} \mid \beta \in \Psi\}$ olsun. $Mor(X, Y)$ üzerinde bir global etkiyi aşağıdaki gibi tanımlayalım: $Mor(X, Y)$ üzerinde uygulanacak global etki için indis kümesi

$$\Theta = \{ \beta \longrightarrow \Psi \mid \beta \text{ bir keyfi fonksiyon} \},$$

$$\Theta \text{ üzerindeki bağıntı } \beta \leq \beta' \Leftrightarrow \beta(x) \leq \beta'(x) \forall x \in X \text{ ile tanımlansın.}$$

Eğer $\beta \in \Theta$ ise o zaman lokal $Mor(X, Y)_{\beta}$ kümesi,

$$Mor(X, Y)_{\beta} = \{ f \in Mor(X, Y) \mid$$

$$\text{a) } f(x) \in Y_{\beta(x)}, \forall x \in X$$

$$\text{b) } \text{Eğer } \{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subseteq X, X' \text{ de lokal bir çatı ise bu takdirde, } \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_p)\}, \text{ bazı } b \in \Psi' \text{ ler için } Y' \text{ de lokal bir } b\text{-çatıdır öyle ki } b \geq \beta(x_i) (0 \leq i \leq p) \}$$

Eğer $\beta \in \Theta$ ise β daki lokal grup

J_β , $J_\beta = \Pi_{x \in X} H_{\beta(x)}$, $x \in X$ ile tanımlanır ve

J_β nın $Mor(X, Y)_\beta$ üzerindeki etkisi:

$$\begin{aligned} J_\beta \times Mor(X, Y)_\beta &\longrightarrow Mor(X, Y)_\beta \\ (\sigma, f) &\longrightarrow (\sigma, f) \end{aligned}$$

Öyle ki $\sigma f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow \sigma_x(f(x))$ ve σ_x , $\sigma \in \Pi_{x \in X} H_{\beta(x)}$ ' in x -koordinatıdır. Yukarıda tanımlanan σf fonksiyonunun $Mor(X, Y)_\beta$ ' nin bir öğesi olup olmadığı basit bir ispatla kontrol edilebilir. Eğer $\beta, \beta' \in \Theta$ ve $\beta \leq \beta'$ ise yapı morfizmi $J_{\beta \leq \beta'}$ şöyle tanımlanır:

$$J_{\beta \leq \beta'} = \Pi_{x \in X} H_{\beta(x) \leq \beta'(x)} : J_\beta = \Pi_{x \in X} H_{\beta(x)} \longrightarrow J_{\beta'} = \Pi_{x \in X} H_{\beta'(x)} \quad [17].$$

Lemma 3.1.1. X ve Y birer global etki olsun. Eğer $g : Z \rightarrow X$ bir global etki ise bu takdirde

$$\begin{aligned} Mor(g, 1_Y) : Mor(X, Y) &\longrightarrow Mor(Z, Y) \text{ bir global etki morfizmidir.} \\ f &\longrightarrow fg \end{aligned}$$

Ancak, Z ve X global etkiler ve $g : X \rightarrow Y$ global etkilerin bir morfizmi ise, $Mor(1_Z, g)$ ' nin global etkilerin bir morfizmini

$$\begin{aligned} Mor(Z, X) &\longrightarrow Mor(Z, Y) \\ f &\longrightarrow fg \end{aligned}$$

tanımlaması zorunlu değildir. Eğer $Mor(1_Z, g)$ global etkinin bir morfizmiyse, g ' nin Z -normal olduğunu söyleyebiliriz [17].

Şimdi de Z -normal morfizminin tanımını verelim:

3.1.6 Z-normal morfizm

Tanım 3.1.8. Z bir global etki olsun. $g : X \rightarrow Y$ bir global etki morfizmi Z -normal morfizm olarak adlandırılır öyle ki β ' da herhangi bir lokal çatı $\{f_0, f_1, \dots, f_p\}$ için $(\beta \in \Theta_{(Z, X)})$, $\{gf_0, gf_1, \dots, gf_p\}$ Y ' da lokal çatı olacak şekilde bir $\gamma \in \Theta_{(Z, X)}$ vardır [17].

4. SOFT GLOBAL ETKİ

D.A. Molodtsov ‘un soft küme teorisi [1] ile A. Bak’ in global etki kavramı [16] arasında hem mantıksal hem de yöntemsel bir benzerlik olduğu açıktır. Bu bölümde bu kavramlar arasındaki benzerliklerden yola çıkılmış, bu iki kavram birlikte yorumlanıp özgün bir kavram olan “soft global etki” tanımlanıp örnekler ve açıklamalar sunulmuştur. Ayrıca soft lokal çatı, soft eğri, soft lokal çatı morfizmi ve soft global etki kategorisi kavramları da verilmiştir. Soft global etki kavramının geliştirilmesinin cebirsel topolojiye farklı bir boyut kazandırarak bazı topolojik problemlerin cebirsel kavramlarla açıklanmasını kolaylaştıracağı ve bu konuyla alakalı çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu bölümde yeni bir kavram olan “**soft global etki**” kavramı literatüre kazandırılmış, örnekler verilmiştir. Bu yapı için gerekli olan “**soft lokal çatı**”, “**soft global eğri**”, “**soft çatı morfizmi**” ve “**soft global etki kategorisi**” kavramları tanımlanmıştır. Bundan sonraki çalışmalar bu temel kavramlar üzerine kurulacaktır.

4.1 Soft Global Etki Kavramı

Tanım 4.1.1. $G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olsun. Bu durumda X üzerinde bir (sol) **soft global etki**, A yansıma bağıntısı $\leq$ ile donatılmış bir parametre kümesi olmak üzere, $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \sim F'(\alpha)$ soft grup etkilerinin bir $\{F(\alpha) \sim F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ kümesinden oluşur öyle ki aşağıdaki şartlar sağlanır:

a) $\forall \alpha \leq \beta$ için $F(\alpha)$ ’nin soft etkisi altında $F'(\alpha) \cap F'(\beta)$ değişmez.

Yani, $\forall g \in F(\alpha)$ ve $x \in F'(\alpha) \cap F'(\beta)$ ise $gx \in F'(\alpha) \cap F'(\beta)$.

Böylece $F(\alpha) \sim (F'(\alpha) \cap F'(\beta))$ olur.

b) $\forall \alpha \leq \beta \in A$ için $F(\alpha \leq \beta) : F(\alpha) \longrightarrow F(\beta)$ soft grup homomorfizmi var öyle ki; $F(\alpha) \sim (F'(\alpha) \cap F'(\beta)) \longrightarrow F(\beta) \sim F'(\beta)$ bir soft etki dönüşümüdür.

Bir soft global etkiyle donatılmış X kümesine soft global etki uzayı veya kısaca **soft global etki** denir.

Örnek 4.1.1. G bir soft grup ve A, G ’nin $F(\alpha)$ soft alt gruplarının bir $\{F(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ kümesini parametrelendiren küme olsun. Eğer $\alpha = \alpha'$ ise $F(\alpha) = F(\alpha')$ ve kesişim işlemi altında kapalıdır; yani $\alpha, \beta \in A, \exists \gamma \in A : F(\alpha) \cap F(\beta) = F(\gamma)$ olur.

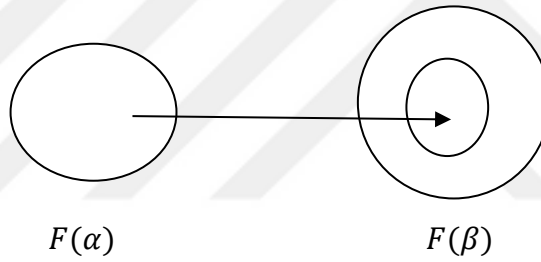
A parametre kümesini $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow F(\alpha) \subseteq F(\beta)$ ile tanımlanan yansıma bağıntısı ile tanımlayalım. Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $F(\alpha \leq \beta)$ standart kapsama homomorfizmi $F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ ile gösterilir.

$X = G$ ve her bir $\alpha \in A$ için $F'(\alpha) = X$ olsun. Yani X mutlak soft küme olmak üzere; Sol (ya da sağ) çarpma ile $F(\alpha)$, $F'(\alpha) (= X)$ üzerinde soft etki oluştursun. Bu takdirde $\{F(\alpha) \sim F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$, X üzerinde bir soft global etki tanımlar. Bu örneğe **standart tek alanlı soft global etki** denir.

Açıklama 4.1.1. Örnek 4.1.1.' de verilen örneği daha açık ifade edelim: G bir soft grup, $F(\alpha) \subseteq G$ ve X bir soft küme $F'(\alpha) \subseteq X$. $\forall \alpha \in A$ için $F'(\alpha) = X = G$ olsun.

1) $F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$ bir soft etki oluşur:

Eğer $\alpha \leq \beta \in A$ ise $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$ olup standart kapsama homomorfizmi $F(\alpha \leq \beta) : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ ile gösterilir



2) $\forall \alpha \leq \beta \in A$ için $F(\alpha)$ 'nın soft etkisi altında $F'(\alpha) \cap F'(\beta)$ değişmez.

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) \times (F'(\alpha) \cap F'(\beta)) &\longrightarrow F'(\alpha) \cap F'(\beta) \\
 F(\alpha) \times (G \cap G) &\longrightarrow G \cap G \\
 F(\alpha) \times G &\longrightarrow G
 \end{aligned}$$

3) $\forall \alpha \leq \beta \in A$ için $F(\alpha) \sim (F'(\alpha) \cap F'(\beta)) \longrightarrow F(\beta) \sim F'(\beta)$ bir soft etki dönüşümü vardır:

$$\begin{array}{ccc}
 F(\alpha) \times (F'(\alpha) \cap F'(\beta)) & \longrightarrow & F'(\alpha) \cap F'(\beta) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(\beta) \times F'(\beta) & \longrightarrow & F'(\beta)
 \end{array}$$

daha sade yazacak olursak

$$\begin{array}{ccc}
 F(\alpha) \times (G \cap G) & \longrightarrow & G \cap G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(\beta) \times G & \longrightarrow & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(\alpha) \times G & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(\beta) \times G & \longrightarrow & G
 \end{array}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2. Bir önceki bölümde verilen Örnek 3.1.2.' yi soft global etki kavramına taşıyabiliriz. Bu anlamda L , parametre kümesi $\forall n \in A$ için $A = \{\{n\}, \{n, n+1\}\} \subseteq \mathbb{Z}$, $X_n = X = \mathbb{Z}$ ile aşağıdaki gibi bir soft global etki tanımlar. Burada A parametre kümesi üzerinde soft global etkinin şartlarını gösterelim:

- i. $\{n\} \longrightarrow G_{\{n\}} = \{n\}$
 $\{n, n+1\} \longrightarrow G_{\{n, n+1\}} = \{n, n+1\}$
- ii. $G_{\{n\}} \times X \longrightarrow X$
 $\{n, x\} \longrightarrow n \cdot x = x$
- iii. $G_{\{n, n+1\}} \times X \longrightarrow X$
 $\{n, x\} \longrightarrow n \cdot x = n+1$
 $\{n+1, x\} \longrightarrow (n+1) \cdot x = n$

Görüldüğü gibi soft global etki şartları sağlanır. Bu soft global etkiye **soft doğru(line) etki** denir.

Örnek 4.1.3. Bir önceki bölümde verilen Örnek 3.1.3. aynı zamanda soft global etki için de güzel bir örnektir. Burada soft teoremin kendi notasyonları kullanılarak tekrar yorumlandı. $n \geq 3$ için, $J_n = [1, n] \times [1, n] \setminus \{(i, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ olsun. Bu ifade $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin köşegeni kaldırılmış kartezyen çarpımıdır.

Aşağıdaki koşullar geçerliyse $A \subseteq J_n$ alt kümesine nilpotent(üstel sıfır) denir.

-Eğer $(i, j) \in A$ iken $(j, i) \notin A$

-Eğer $(i, j), (j, k) \in A$ iken $(i, k) \in A$

Belirtelim ki boş küme bir nilpotent alt kümedir, nilpotent altkümelerin kesişimi de nilpotenttir.

A parametre kümesini gösterebilirsin. $A = \{ \alpha \mid \alpha, J_n \text{ 'nin nilpotent alt kümesi} \}, \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ yansıma bağıntısı $\leq$ ile verilsin. Görüntüsü J_n 'nin en küçük boştan farklı nilpotent alt kümelerinden oluşan kanonik bir $J_n \twoheadrightarrow A, (i, j) \rightarrow \{(i, j)\}$ gömme vardır.

R , birim elemanlı birleşimli bir halka olsun.

Genel lineer soft global etki için gerekli olan soft grup, soft küme ve soft etki kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Soft grup: $G = GL(n, R), F: A \longrightarrow P(G)$

$$\alpha \longrightarrow F(\alpha) = GL(n, R)_\alpha$$

soft küme: $X = GL(n, R), \forall \alpha \in A, F': A \longrightarrow P(X)$

$$\alpha \longrightarrow F'(\alpha) = X = GL(n, R)$$

yani, X soft kümesi mutlak soft küme,

ve soft etki, $\forall \alpha \in A$ için $\pi_\alpha: F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$

$$GL(n, R)_\alpha \times GL(n, R) \longrightarrow GL(n, R)$$

şeklinde tanımlanır.

(i, j) konumundaki köşegen girişleri $(i, j) \in A$ ise 1 olan, köşegen olmayan girişleri $(i, j) \notin A$ ise 0 olan tüm matrislerden oluşur. Bu A 'nın boş alt kümesinin, aşikâr $GL(n, R)$ soft alt grubuna atandığı anlamına gelir. $GL(n, R)_\alpha$ soft grupları sağ çarpma ile $GL(n, R)$ üzerine soft etki eder.

Yapı homomorfizmleri $F(\alpha \leq \beta): GL(n, R)_\alpha \longrightarrow GL(n, R)_\beta$ tanım gereği kapsama dönüşümüdür.

Açıkça, $GL(n, R)_\alpha \cap GL(n, R)_\beta = GL(n, R)_{\alpha \cap \beta}$ ve $A \longrightarrow GL(n, R), \alpha \longrightarrow GL(n, R)_\alpha$

ifadesi yalnızca kısmi sıralamayı korur, yani $\alpha \leq \beta \Rightarrow GL(n, R)_\alpha \subseteq GL(n, R)_\beta$. Üstelik kesişimleri $GL(n, R)_{\alpha \cap \beta} = GL(n, R)_\alpha \cap GL(n, R)_\beta$ olur.

Burada $GL(n, R)_\alpha, \alpha \in A$ soft alt grupları, $GL(n, R)$ 'nin nilpotent soft alt gruplarıdır.

Elementer bir matrisin tanımını hatırlayalım:

Eğer $(i, j) \in J_n$ ise e_{ij} , (i, j) 'leri 1 ve diğeri 0 olan $n \times n$ matris olsun. $r \in R$ için $E_{ij}(r) = I_n + re_{ij}$ olsun. Burada $I_n, n \times n$ birim matrisi gösterebilirsin. $E_{ij}(r)$ elementer matris olarak bilinir. Tüm elementer matrisler yardımıyla üretilen $GL(n, R)$ 'nin alt gruplarına elementer grup denir ve $E(n, R)$ ile gösterilir. $J_n \twoheadrightarrow A, (i, j) \rightarrow \{(i, j)\}$ ifadesi bize herhangi bir elementer matrisin $GL(n, R)_\alpha$ soft grubunda yer aldığını söyler. $E(n, R)$ 'nin $E(n, R)_\alpha$ soft grupları tarafından, A üzerinden üretildiğini anlıyoruz.

Buradan $E(n, R)_\alpha = GL(n, R)_\alpha$ eşitliği yazılır. Burada elde edilen soft global etkiye **genel lineer soft global etki** denir

Bir önceki bölümde verilen “lokal çatı”, “global eğri”, “global etkinin morfizmi”, ve “global etki kategorisi” kavramları soft global çerçevede yeniden yorumlanarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

4.1.1 Soft lokal çatı

Tanım 4.1.2. $\{F(\alpha) \leadsto F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$, X kümesindeki bir soft global etkiyi gösterebilir. Bir *soft lokal çatı* α veya sadece α - *çatı* sonlu bir $\{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subseteq F'(\alpha)$ kümesidir öyle ki $F(\alpha)$ geçişli olarak $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ üzerinde soft etki eder, yani her bir i ($1 \leq i \leq p$) için $g_i x_{i-1} = x_i$ olacak şekilde $g_i \in F(\alpha)$ vardır.

4.1.2 Soft global eğri(path)

Tanım 4.1.3. $\alpha \in A$ olmak üzere; $\{F(\alpha) \leadsto F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$, X kümesindeki bir soft global etkiyi gösterebilir. Bir soft eğri $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq F'(\alpha)$ sonlu bir parametre kümesidir öyle ki her i için $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq F'(\alpha)$ kümesi bir soft lokal çatı oluşturur; yani bazı α parametreleri için bir soft α -çatı vardır.

X kümesinin iki x, y elemanı verildiği zaman her iki noktayı birleştiren bir soft eğri varsa bunlar X kümesinin aynı bağlantılı bileşenleridir. Burada X' in bağlantılı (eğri) bileşenlerinin kümesi $\pi_0(X)$ ile gösterilir.

4.1.3 Soft lokal çatı morfizmi

Tanım 4.1.4. Sırasıyla X ve Y üzerinde $\{F(\alpha) \leadsto F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ve $\{H(\beta) \leadsto H'(\beta) \mid \beta \in B\}$ iki soft global etki olsun. Soft lokal çatı morfizmi $f : X \longrightarrow Y$ soft lokal çatıları koruyan bir f fonksiyonudur. Yani, eğer $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, X' de bir soft lokal çatı ise o zaman $\{fx_0, fx_1, \dots, fx_p\}$ de Y' de bir soft lokal çatıdır.

Açıklama 4.1.2. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ soft lokal çatı morfizmleri ise bu takdirde açıktır ki $gf : X \longrightarrow Z$ de bir soft lokal çatı morfizmidir.

Örnek 4.1.3. $\{F(\alpha) \leadsto F'(\alpha) \mid \alpha \in A\}$, X üzerinde bir soft global etki, $\{H(\beta) \leadsto H'(\beta) \mid \beta \in B\}$ ise Y üzerinde bir soft global etki ve $\exists \beta \in B$ ve $y \in H'(\beta)$ olmak üzere $H(\beta y) = H'(\beta)$ olsun. Yani $H'(\beta)'$ nin tüm elemanları, bazı $y \in H'(\beta)$ elemanlarının

yörüngesindedir. O zaman, görüntüsü $H'(\beta)$ 'nin içinde olan herhangi bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu soft lokal çatı morfizmidir.

4.1.4 Soft global etki kategorisi

Tanım 4.1.5 Objeleri soft global etki, $Ob(\mathcal{G}^*) = \{ X \mid X \text{ soft global etki} \}$, morfizmleri soft global etkiler arasında soft lokal çatı morfizmi

$$Mor(X, Y) = \{ f \mid f: X \rightarrow Y \text{ soft lokal çatı morfizmi} \}$$

aileleri ile birlikte bir kategori oluşturur. Bu kategoriye “Soft global etki kategorisi” denir ve $\mathcal{G}^*$ ile gösterilir.

Açıktır ki $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ soft lokal çatı morfizmleri ise bu durumda $g \circ f : X \rightarrow Z$ bir soft lokal çatı morfizmidir ve fonksiyonlarda bileşke işlemi birleşme özelliğini $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ daima sağlar.

Kategori olmanın ikinci şartı için de $f \in Mor(X, Y)$ ve $g \in Mor(Z, X)$ için $f \circ I_x = f$ ve $I_x \circ g = g$ olacak şekilde bir $I_x \in Mor(X, X)$ soft lokal çatı morfizminin varlığı gösterilmelidir.

Eğer $\{ x_0, x_1, \dots, x_p \}$, X 'de bir soft lokal çatı ise bu durumda $\{ I(x_0), I(x_1), \dots, I(x_p) \} = \{ x_0, x_1, \dots, x_p \}$ 'nin de X 'de bir soft lokal çatı olduğu açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasının merkezine soft kavramı (soft küme, soft grup, soft kategori, soft etki) ve global etki kavramı alınmıştır. Önce tezdeki bilgi akışının takibini kolaylaştırması bakımından grup, kategori ve etki gibi temel kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra ünlü matematikçi Molodtsov tarafından geliştirilen soft küme teorisi ele alınmıştır [1]. Bu teori pratik hayatta karşılaşılan bazı tam ve kesin olmayan kavramları parametrelendirerek daha belirli ve tasnifi daha kolay çözümler önerir.

Soft küme teorisi ortaya konulduktan sonra birçok matematikçi bu kavram üzerine çalışmıştır. Soft grup kavramı geliştirilmiş [4], soft kategori kavramı tanımlanmış [13] ve daha sonra Oguz, Icen ve Gursoy tarafından soft etki kavramı literatüre kazandırılmıştır [15]. Global etki kavramı ise bilinen klasik grup etkilerini belli kurallar dahilinde tekrar yorumlayan daha kompleks bir cebirsel yapıdır [17]. Bu yapı sayesinde çeşitli kompleks yapılara matematiksel açıklamalar önerilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar sırasıyla şu şekilde ifade edilebilir:

- i. Soft küme teorisi incelenirken özgün örneklerle yer verilmiş, bu örnekler üzerinden bu kavramın daha kolay anlaşılması amaçlanmıştır.
- ii. Global etki kavramı incelenirken bazı özgün açıklamalara yer verilmiş, global etki kategorisi tanımlanmış ve global etki kavramının daha rahat anlaşılması amaçlanmıştır.
- iii. Soft küme kavramıyla global etki kavramı arasındaki benzerlikler fark edilmiş, literatür taranmış fakat bu iki kavram arasındaki geçişi ortaya koyan herhangi bir çalışma olmadığı anlaşılmıştır. Literatürdeki bu boşluğu gidermeyi amaçlayan bu tez çalışmasında bu iki kavram arasındaki ilişki ortaya konulup özgün bir kavram olan soft global etki kavramı literatüre kazandırılmış ve bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca soft lokal çatı, soft global eğri, soft lokal çatı morfizmi ve soft global etki kategorisi kavramları da tanımlanmıştır.

5.2 Öneriler

D.A. Molodtsov [1] tarafından tanımlanan “soft küme” teorisi ile Anthony Bak [16] tarafından tanımlanan “global etki” kavramı bir çok matematikçi tarafından ilgiyle karşılanmış ve üzerinde çalışılmıştır [2-22].

Global etki kavramı bazı topolojik yapılar yardımıyla elde edilen sonuçların cebirsel kavramlar kullanılarak elde edilmesinde kolaylıklar sağlamaktadır.

Bu durumun soft küme ve soft grup kavramları için de kolaylıklar sağlayacağı düşünülmektedir. Bu tez çalışmasının merkezinde yer alan soft kavramıyla global etki kavramının birlikte yorumlanıp “soft global etki” kavramının geliştirilmesinin cebirsel topolojiye farklı bir boyut kazandırarak bazı topolojik problemlerin cebirsel kavramlarla açıklanmasını kolaylaştıracağı ve bu konuyla alakalı çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] D. A. Molodtsov, *Soft set theory-First results*, **Comput. Math. Appl.** , 37(4-5) (1999) 19-31.
- [2] P. K. Maji, R. Biswas and R. Roy, *Soft set theory*, **Comput. Math. Appl.** , 45(4-5) (2003) 555-562.
- [3] M. I. Ali, *A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets*, **Appl.Soft Comput.** , 11(2011) 3329-3332.
- [4] H. Aktas and N. Cagman, *Soft sets and soft groups*, **Inform.Sci.** , 77(13) (2007) 2726-2735.
- [5] A. O. Atagun, A. Sezgin, *Soft substructures of rings, fields and modules*, **Comput. Math. Apply.** , 61 (2011)592-601
- [6] M. Shabir, M. Naz, *On Soft topological spaces*, **Comput. Math. Apply.** , 61(7) (2011) 1786-1799.
- [7] W. K. Min, *A Note on Soft Topological Spaces*, **Comput. Math. Apply.** , 62 (2011) 3524-3528.
- [8] N. Cagman, S. Karatas and S. Enginoğlu, *Soft topology*, **Comput. Math. Apply.**, 62(1) (2011) 351-358.
- [9] A. Aygunoğlu, A. Aygun, *Some notes on soft topological spaces*, **Neural Comput. Apply.**, 22(1) (2012) 113-119.
- [10] O. Zahiri, *Category of soft sets*, **An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.**, 40(2) (2013) 154-166.
- [11] T. Shah, S. Shaheen, *Soft topological groups and rings*, **Ann. Fuzzy Math. Inform.** , 7(5) (2014) 725-743.
- [12] D. Pie and D. Miao, *From soft sets to information systems*. İn: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B. Zhang (Eds.), *Proceedings of Granular Computing*, Vol.2, IEEE. (2005), pp. 617-621.
- [13] S. K. Sardar, S. Gupta, *Soft category theory-an introduction*, **J. Hyperstructures**, 2(2013) 118-135.
- [14] G. Oguz, M. H. Gursoy and I. Icen, *On Soft Topological Categories*, **Hacet. J. Math. Stat.** , (2018)
- [15] Oguz, G. , Icen, I. and Gursoy, M. H, *Actions of Soft Groups*, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* Volume 68,number 1, Pages 1163-1174 (2019).
- [16] A. Bak, *Global actions: The algebraic Counterpart of a Topological Space*, Department of mathematics, University of Bielefeld, 33501 Bielefeld, Germany, 3-4

- [17] R. Preusser, *Global Actions*, Diploma thesis, Universität Bielefeld, matr. number: 1633126, 2010
- [18] A. Bak, A. S. Garge, *Global Actions and Vector K-theory*, Forum of mathematics, Vol.8,e4,29 p. ,2019
- [19] M. L. D. Hoyo, E. G. Minian, *Classical Invariants for Global Actions and Groupoid Atlases*, Appl Categor Struct (2008) 16: 689-721
- [20] A. Bak, R. Brown, G. Minian, T. Porter, *Global Actions, Groupoid Atlases and Applications*, Journal of Homotopy and Related Structures, Vol. 1(1), 2006, pp. 101-107
- [21] A. Bak, A. S. Garge, *Global actions, K-Theory and unimodular rows*, arXiv: 1308. 6792
- [22] J. L. Alperin, R. B. Bell, *Groups and representations*, Vol.162, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995, 196 p.
- [23] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006, 256 p.
- [24] O. Mucuk, *Topoloji ve Kategori*, Nobel Yayın Dağıtım, 2010, 472 p.
- [25] S. MacLane, *Categories for Working Mathematician*, Vol. 5, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1971, 317 p.
- [26] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th ed., Springer, New York, 1995, 517 p.
- [27] S. Oztunc, *Some properties of soft categories*, **IJMO**, 6(2) (2016) 91-95.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Semih GEÇEN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİM:

- 2012-2020 Van Vali Haydar Bey Anadolu Lisesi' nde çalıştı.
- 2020-2021 Kahramanmaraş Elbistan Bahçelievler Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi' nde çalıştı.