

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GINZBURG-LANDAU DENKLEMİNİN ENERJİ KORUMALI VE ETKİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YAZAR

Şeyma GÜNDOĞDU

DANIŞMAN

DOÇ. DR. MURAT UZUNCA

SİNOP – 2021

TEZ KABUL

Şeyma GÜNDOĞDU tarafından hazırlanan “Ginzburg-Landau denkleminin enerji korumalı ve etkin çözümleri üzerine” başlıklı bu çalışma, 17.02.2021 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Doç. Dr. İsmail AYDIN
Sinop Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi

Üye

Doç. Dr. Murat UZUNCA
Sinop Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi

Üye

Doç. Dr. Hamdullah YÜCEL
Orta Doğu Teknik Üniversitesi / Uygulamalı Matematik Enstitüsü

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Şeyma GÜNDOĞDU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER	i
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
TABLolar LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Uzayda Ayırıklaştırma	17
3.1.1. 1-Boyutlu Uzayda Ayırıklaştırma	19
3.1.2. 2-Boyutlu Uzayda Ayırıklaştırma	24
3.2. Zamanda Ayırıklaştırma.....	29
3.3. Sürekli ve Ayırık Enerjilerin Yapısı	29
3.4. Mertebesi İndirgenmiş Modelleme.....	35
3.4.1. İndirgenmiş Enerjinin Yapısı	38
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	41
4.1. Sayısal Hatalar ve Yakınsama Mertebeleri	41
4.1.1. 1-Boyutlu Model	41
4.1.2. 2-Boyutlu Model	43
4.2. Reel GL Denklemi için Mertebesi İndirgenmiş Modelleme	45
4.2.1. 1-Boyutlu Reel GL Denklemi	45

4.2.2. 2-Boyutlu Reel GL Denklemi (Gerçek Çözümlü)	48
4.2.3. 2-Boyutlu Reel GL Denklemi	50
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59



SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

Ω_h^e	: 1-boyutlu bölüntülerdeki elemanlar
$\phi_i^r(x)$	: 1-boyutlu indirgenmiş baz fonksiyonları
$\phi_m^e(x)$	: 1-boyutlu Lagrange baz fonksiyonları
$\Omega_h^{m,n}$	: 2-boyutlu bölüntülerdeki dörtgensel elemanlar
$\phi_{i,j}^{m,n}(x,y)$	: 2-boyutlu Lagrange baz fonksiyonları
$a(\cdot, \cdot)$	: Bi-lineer form
$E(\cdot)$	: Enerji fonksiyoneli
∇	: Gradyant (nabla) operatörü
$\langle \cdot, \cdot \rangle_V$	: İç çarpım operatörü
Ψ	: İndirgenmiş baz katsayı matrisi
$V_{h,r}$	: İndirgenmiş mertebeli ayrık çözüm uzayı
$u_{h,r}(\cdot), p_{h,r}(\cdot), q_{h,r}(\cdot)$	: İndirgenmiş mertebeli ayrık çözümler
$\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}$	: İndirgenmiş mertebeli ayrık çözümlerin katsayı vektörleri
$E_{h,r}(\cdot)$	: İndirgenmiş mertebeli ayrık enerji
$\partial_\cdot$	: Kısmi türev operatörü
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
Δ	: Laplace operatörü
$n(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot)$	: Lineer olmayan form
N_r	: Mertebe indirgenmiş sistem boyutu
$\ \cdot\ _V$	: Norm
$u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)$	: Sürekli çözümler
V_h	: Tam mertebeli ayrık çözüm uzayı
$u_h(\cdot), p_h(\cdot), q_h(\cdot)$	: Tam mertebeli ayrık çözümler

$\mathbf{p}, \mathbf{q}$	: Tam mertebeli ayrık çözümlerin katsayı vektörleri
$E_h(\cdot)$	: Tam mertebeli ayrık enerji
N	: Tam mertebeli sistem boyutu
σ_i	: Tekil değerler
V	: Zayıf çözüm ve test fonksiyonu uzayı

KISALTMALAR

BBİ	: Bağlı bilgi içeriği
DDA	: Düzgün dik ayrışması
GL	: Ginzburg-Landau
GLL	: Gauss-Lobatto-Legendre
h.h.h.	: Hemen hemen her
LGL	: Legendre-Gauss-Lobatto
MİM	: Mertebe indirgenmiş modelleme
MTM	: Mertebesi tam model
SEY	: Sonlu elemanlar yöntemi
SSEY	: Spektral Sonlu elemanlar yöntemi
TDA	: Tekil değer ayrışması
OVA	: Ortalama vektör alanı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. 1-Boyutlu Ω_h bölüntüsünün yapısı	20
Şekil 3.2. 1-boyutlu alanda kütle ve sistem matrislerinin girdi yapısı ($P = 3, K_x = 4$)	23
Şekil 3.3. 2-Boyutlu Ω_h bölüntüsünün yapısı	24
Şekil 3.4. 2-boyutlu alanda kütle ve sistem matrislerinin girdi yapısı ($P = K_x = 2, K_y = 3$)	28
Şekil 4.1. 1-boyutlu karmaşık GL denklemi için $T = 1$ hedef zamanındaki çözümler	43
Şekil 4.2. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için $T = 1$ hedef zamanındaki gerçek (sol) ve yaklaşık (sağ) çözümler	45
Şekil 4.3. 1-boyutlu reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji grafiği	46
Şekil 4.4. 1-boyutlu reel GL denklemi için çözüm matrislerinin tekil değerleri	46
Şekil 4.5. 1-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 1$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği	47
Şekil 4.6. 1-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 2$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği	47
Şekil 4.7. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji grafiği	48
Şekil 4.8. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denklemi için çözüm matrislerinin tekil değerleri	48
Şekil 4.9. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denkleminin $N_r = 1$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği	49
Şekil 4.10. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denkleminin $N_r = 2$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği	49
Şekil 4.11. 2-boyutlu reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji ($\alpha = 5$) ...	50
Şekil 4.12. 2-boyutlu reel GL denklemi için çözüm matrislerinin tekil değerleri ($\alpha = 5$)..	51
Şekil 4.13. 2-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 7$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve çözüm hataları ($\alpha = 5$)	51
Şekil 4.14. 2-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 7$ DDA baz modu için indirgenmiş enerji grafiği ($\alpha = 5$)	52

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 4.1. 1-boyutlu karmaşık GL denklemi için SSEY hataları ve yakınsama mertebeleri	42
Tablo 4.2. 1-boyutlu karmaşık GL denklemi için OVA yöntemi hataları ve yakınsama mertebeleri	42
Tablo 4.3. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için SSEY hataları ve yakınsama mertebeleri	44
Tablo 4.4. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için OVA yöntemi hataları ve yakınsama mertebeleri	44
Tablo 4.5. 1-boyutlu reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar	47
Tablo 4.6. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar.....	50
Tablo 4.7. 2-boyutlu reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar	53

ÖZET

GINZBURG-LANDAU DENKLEMİNİN ENERJİ KORUMALI VE ETKİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bu tez çalışmasında bir boyutlu reel Ginzburg-Landau denkleminin sayısal çözümleri uzay ve zamanda ayırıklaştırma yöntemleri kullanılarak ele alınmıştır. Uzayda ayırıklaştırma için köşegen kütle matrisine sahip spektral sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Reel Ginzburg-Landau denklemi için tanımlanmış olan bir Lyapunov enerji fonksiyoneli tanımlıdır. Fiziksel olarak söz konusu enerji fonksiyonelinin en temel özelliği zaman ilerledikçe değerinin azalması olup gerçekçi sayısal çözümler elde edilebilmesi için bu özelliği koruyan sayısal yöntemlerin kullanılması çok önemlidir. Bu tez çalışmasında, reel Ginzburg-Landau denklemini zamanda ayırıklaştırmak için enerji korumalı, ikinci mertebe yakınsaklığa sahip bir yöntem olan ortalama vektör alanı yöntemi kullanılmıştır. Burada enerji korumasından kasıt Lyapunov enerji fonksiyonelinin azalma özelliğinin korunmasıdır.

Hemen hemen tüm gerçek hayat problemlerinin sayısal çözümleri için çok büyük boyutlara sahip lineer sistemlerin çözülmesi gereklidir. Büyük boyutlu sistemlerin çözümleri çok zaman aldığından söz konusu sistemlerin hızlı bir şekilde çözülmesi için yoğun araştırmalar yapılmaktadır. Bu tez çalışmasında, reel Ginzburg-Landau denkleminin sayısal çözümlerinin hızlı bir şekilde elde edilebilmesi için düzgün dik ayırıklaştırma yöntemini baz alan mertebe indirgenmiş modelleme kullanılmıştır. Sayısal çözümlerin kesinliği ve ne kadar hızlı elde edildiği örnek simülasyon sonuçları ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel Ginzburg-Landau denklemi, Spektral sonlu elemanlar yöntemi, Ortalama vektör alanı yöntemi, Enerji özelliği koruma, Mertebe indirgenmiş modelleme, Düzgün dik ayırıklaştırma yöntemi.

ABSTRACT

ON THE ENERGY PRESERVING AND EFFICIENT SOLUTIONS OF GINZBURG-LANDAU EQUATION

In this thesis, numerical solution of one dimensional real Ginzburg-Landau equation has been considered by the use of discretization methods in both space and time. For the space discretization, spectral finite elements method has been used, which results in a diagonal mass matrix. A Lyapunov energy functional is defined for real Ginzburg-Landau equation. Physically, the fundamental property of the so-called energy functional is that it decreases by the time progresses, and it becomes crucial to use a numerical scheme which preserves this energy decrease property in order to obtain reliable numerical approximations. In this thesis, for the time discretization, average vector field method has been used, which is an energy preserving, second order accurate method. Here, by energy preserving, it is meant the preservation of the energy decrease property of the Lyapunov energy functional.

For the numerical solution of almost all the real life problems, it requires solution of linear systems of very large dimension. Since it takes a long time to solve, there has been a wide range of research concerning the fast solution of such large systems. In this thesis, reduced order modeling based on the proper orthogonal decomposition has been used for the fast numerical solution of real Ginzburg-Landau equation. The accuracy of numerical approximations and the high speed of the numerical scheme have been shown through test simulations.

Key Words: Real Ginzburg-Landau equation, Spectral finite elements method, Average vector field method, Preservation of energy decrease, Reduced order modeling, Proper orthogonal decomposition.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Murat UZUNCA'ya, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı sayın Doç. Dr. Fadime DİRİK'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen değerli Arş. Gör. Yusuf ÇAKIR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu süreçte maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan başta eşim Hasan GÜNDOĞDU olmak üzere aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Şeyma GÜNDOĞDU

1. GİRİŞ

Kaotik dinamiklerin ve çoğunlukla kısmi türevli denklemlerden oluşan doğrusal olmayan evrilim (evolüsyon) denklemleri ile temsil edilen uzay-zaman sistemlerindeki kargaşalığın tanımlanması, teorik fizik ve uygulamalı matematik alanlarının karşılaştığı sorunların merkezinde yer almaktadır (Ginzburg ve Landau, 1950; Lumley, 1967; Cross ve Hohenberg, 1993; Kengne ve ark., 2009; Larson ve Bengzon, 2013). Söz konusu denklemlerden biri de topolojik tekillikler biçiminde çözümler sergileyen ilk doğrusal olmayan teorilerden biri olan Ginzburg-Landau (GL) teorisi üzerine inşa edilmiş ve karmaşık değerli bir $u(x, t)$ cisminin d -boyutlu ($d = 1, 2, 3$) bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ uzay alanı üzerindeki evrilimini açıklayan aşağıdaki genelleştirilmiş karmaşık (kompleks) GL denklemdir

$$\partial_t u = (1 + i\mu)\Delta u + \alpha u - (1 + i\beta)|u|^{2q} u, \quad (1.1)$$

öyle ki α ve q pozitif parametreler, μ ve β reel sabitler, $i = \sqrt{-1}$ karmaşık sayısı, ∂_t operatörü t zaman değişkenine göre kısmi türev, ve de Δ diferansiyel operatörü d -boyutlu Laplace operatörüdür. Tarihsel gelişim açısından bahsi geçen GL teorisinin ortaya çıkması 1900'li yılların ilk ortasına dayanmaktadır. Geleneksel süper-iletkenlerin elektro-dinamiği ilk olarak London kardeşler tarafından kurulmuştur (London ve London, 1935). London kardeşlerin teorisinde, deneyler aksini söylediği halde, normal-süper-iletken yüzeyinin işareti her zaman negatif olarak alınıyordu. 1950'de Ginzburg ve Landau (1950) çığır açan çalışmalarında, London kardeşlerin teorisindeki bu anlaşmazlığı ortadan kaldırmış, modern fiziğin en evrensel denklemlerinden biri haline gelen GL denklemlerini tanıtmışlardır. Aslında ikinci derece faz geçişlerini açıklamak için ortaya atılmış olan GL teorisi, daha sonra süper-iletkenliği açıklayan ilk kuantum teorisi olma özelliğini kazanmıştır. GL teorisi, süper-iletken duruma manyetik alanın etkilerini belirleyebilmek için elektrodinamik, kuantum mekaniksel ve termodinamik davranışları bütünleyen süper-iletkenlik olayının başarılı bir tanımıdır. GL teorisinin ortaya çıkmasından sonra, genelleştirilmiş karmaşık GL denkleminin en kabul gören hali olan (1.1) denklemi literatürde yerini almıştır. (1.1) denkleminin reel (gerçel) katsayılı hali ilk olarak 1960'lı yılların sonunda Newell ve Whitehead (1969) ile Segel (1969) tarafından Bénard konveksiyonunun ifade edilmesi için tanıtılmıştır. Sonrasında, karmaşık katsayılı olan (1.1) genelleştirilmiş karmaşık GL denklemini ise yine Newell ve Whitehead (1971), ve de DiPrima ve ark. (1971) tarafından

1970'li yılların başında cisimlerin süper-iletkenliğini ifade etmek için tanıtılmıştır. Daha sonraları, GL denkleminin çeşitli formları süper-iletkenliğin tanımlanması için birçok araştırmada kullanılmıştır (Du ve ark., 1992; Du ve ark., 1993; Du, 1998; Du ve ark., 1998; Deang ve ark., 2002). Her ne kadar süper-iletkenliği tanımlamak ve incelemek için kullanılmış olsa da, karmaşık GL denkleminin başkaca birçok alanlarda da kullanımı yaygındır. Özellikle akışkan mekaniğinde yitirgen (disipatif) sistemlerdeki kararsız dalgaların genliğinin (amplitüd) evriliminin ifade edilmesinde sıkça kullanılan GL denklemleri (Bu, 1994; Levmore ve Oliver, 1996; Gnidağlia ve Heron, 1987; Doering ve ark., 1998), doğrusal olmayan iletim sistemlerinde (Lin ve Duan, 2005; Ndzana ve ark., 2007; Kengne ve Vailancourt, 2009; Kengne ve ark., 2009), soliton dalga problemlerinde (Soto-Crespo ve Akhmediev, 2005; Tsoy ve ark., 2006; Efremidis ve ark., 2007; Renninger ve ark., 2008; Duan ve Holmes, 2009) de kullanılmıştır. Ayrıca, kimyasal reaksiyon problemlerinde (Kuramoto, 1984), desen (patern) oluşumu problemlerinde (Cross ve Hohenberg, 1993; Newell ve ark., 1993) de kullanılmıştır.

Fiziksel olarak (1.1) karmaşık GL denklemi μ ve β reel parametrelerinin değerine göre farklı karakteristiklere sahip olmaktadır. Bir yandan $\mu, \beta \rightarrow \infty$ limit durumunda (1.1) karmaşık GL denklemi bir Hamilton denklemi olan doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin yakınsarken (Bernard ve ark., 2007; de la Hoz ve Vadilo, 2008; Karasözen ve ark., 2015; Karasözen ve Uzunca, 2018), diğer yandan $\mu = \beta = 0$ değerleri için özellikle cisimlerin faz (katı, sıvı, gaz olma durumu) değişimlerinde sıklıkla model olarak kullanılan ve yitirgen (gradyant) bir sistem olan Allen-Cahn denkleminin yakınsamaktadır (Kassam ve Trefethen, 2005; Uzunca ve Karasözen, 2017; Karasözen ve ark., 2018). Her iki model için de bir $E(u)$ serbest enerji (Lyapunov) fonksiyoneli (veya sadece enerji fonksiyoneli) tanımlı olup karakteristik özellik olarak zaman geçtikçe $E(u)$ enerji fonksiyonelinin değeri yitirgen sistemler için azalırken, Hamilton sistemler için değişmeyip korunmaktadır. $\mu = \beta = 0$ değerleri için (1.1) karmaşık GL denklemi, çözümleri yürüyen dalga formunda olan aşağıdaki reel GL denkleminin indirgenmektedir

$$\partial_t u = \Delta u + \alpha u - |u|^{2q} u. \quad (1.2)$$

(1.2) reel GL denklemi

$$E(u(x,t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \alpha |u|^2 + \frac{1}{q+1} |u|^{2q+2} \right) dx, \quad (1.3)$$

enerji fonksiyoneliinden elde edilebilmektedir öyle ki $E(u)$ enerji fonksiyoneli zaman içinde azalan özelliğe sahip olup, Fréchet (varyasyonel veya fonksiyonel) türevi (1.2) reel GL denklemini

$$\partial_t u = -\frac{\delta E}{\delta u}, \quad \frac{dE}{dt} \leq 0, \quad (1.4)$$

formunda oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında, yukarıda verilen (1.4) özelliğini (1.3) enerji fonksiyoneli için sağlayan (1.2) reel GL denkleminin sayısal çözümleri incelenecektir.

GL denklemlerinin doğrusal olmayan yapısı ve de fiziksel olarak sağlaması gereken başlangıç/sınır koşullarının düzgün olamayabilme durumu neticesinde, özellikle 2 ve 3-boyutlu alanlarda GL denklemlerinin analitik (gerçek) çözümleri bulunamayıp, sayısal olarak çözülmesi gerekmektedir. Basit, kararlı ve kesin sayısal yöntemlerin geliştirilmesi halen GL denklemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesi açısından araştırılan konulardandır. Literatürde, GL denklemlerinin sayısal çözümleri için şimdiye kadar birçok araştırma yer almaktadır. Genel olarak sayısal çözüm yöntemleri uzay ve zaman alanlarında ayrıklaştırmaya dayanmaktadır. Zaman boyutunda Euler, Crank-Nicolson ve Runge-Kutta (Tsertsvadze, 1991; Sun ve Zhu, 1998; Du, 1998; Yan ve ark., 2015) gibi sonlu farklar temelli ayrıklaştırma yöntemleri kullanılırken, uzay boyutunda ayrıklaştırma için sonlu farklar, sonlu hacimler ve sonlu elemanlar gibi ayrıklaştırma yöntemleri kullanılmıştır (Du ve ark., 1993; Wang ve Wang, 1996; Willers ve Twizell, 2003). Tsertsvadze (1991) çalışmasında 1-boyutlu GL denkleminin çözümü için ikinci mertebe Crank-Nicolson tipi sonlu farklar kullanmış olup, Sun ve Zhu (1998) ise aynı yöntemin koşulsuz yakınsaklığını göstermiştir. Zamanda Crank-Nicolson ile uzayda çeşitli dördüncü mertebe kompakt (tıkız) sonlu farklar yöntemleri Du (1998)'nin çalışmalarında tanıtılmış olup, Yan ve ark. (2015) tarafından geliştirilmiştir. Ayrıca, uzayda sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanan çeşitli araştırmalar da bulunmaktadır (Du ve ark., 1993; Wang ve Wang, 1996; Willers ve Twizell, 2003).

GL denklemi gibi fiziksel ölçütlerin doğruluğunun önemli olduğu denklemlerde, sayısal çözüm yöntemlerinin fiziksel gerçekliklerle çelişmeyecek şekilde kararlı ve kesin çözümler üretmesi son derece önemlidir. Bu tez çalışmasında, (1.2) reel GL denkleminin etkin çözümü için uzayda ayırıklaştırma yöntemi olarak bir SEY olan spektral sonlu elemanlar yöntemi (SSEY) kullanılmıştır. Karmaşık mühendislik problemlerinin basite indirgenerek kontrol edilebilir parçalarla çözümünü sağlayan SEY pek çok mühendislik uygulamasında kullanılan yaygın ve kullanışlı bir çözüm yöntemidir. SEY ilk kez 1956 yılında (Turner ve ark., 1956) uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilmiş olup daha sonraki on yıl içerisinde uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Daha sonraki yıllarda, SEY ve çözüm teknikleri hızla geliştirilmiş ve günümüzde pek çok mühendislik probleminin sayısal çözümü için kullanılan en etkin yöntemlerden birisi halini almıştır. SEY yapısal mekanik problemlerinin yanı sıra, ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, elektrik ve manyetik alanlar ile ilgili mühendislik problemlerinin çözümü için de kullanılmaktadır. Diğer yandan, literatürde değişik amaçlara yönelik farklı şekillerde geliştirilen çeşitli SEY yöntemleri bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında kullanılmış olan SSEY, gerek hesaplanması gereken integrallerin ucuza mal edilmesi yönünden, gerekse dinamik sistemlerin çözümünde bir etkinlik sağlayan köşegen yapıda kütle matrisi üretmesi yönünden ideal bir yöntem olarak görülmüştür. Daha detaylı bilgi edinmek isteyen okurlar; SEY için bkz. (Larson ve Bengzon, 2013; Quarteroni, 2017), SSEY için bkz. (Dehghan ve Sabouri, 2013; Li ve Wang, 2017).

Sayısal çözümlerin kararlı ve kesin olmasının yanında, fiziksel açıdan belirli karakteristik davranışları olan enerji fonksiyoneli tarafından türetilen denklemlerin sayısal çözümlerinin doğru bir şekilde geliştirilmesi de çok önemlidir öyle ki bulunacak olan sayısal çözümlerin de söz konusu enerjinin karakteristik davranışını koruması beklenir. Korunması gereken davranışlar arasından enerjinin azalması, enerjinin korunması veya simplektik yapının korunması gibi fiziksel olarak gerçekçi çözümler elde edilebilmesi adına gerekli olan karakteristikler sayılabilir. Bu tez çalışmasında, (1.2) reel GL denkleminin (1.4)'de verilen enerjinin azalma özelliğinin korunması için zaman boyutunda ortalama vektör alanı (OVA) yöntemi kullanılmıştır. OVA yöntemi ikinci mertebe yakınsaklığa sahip bir yöntem olduğundan ileriye/geriye dönük Euler yöntemlerine kıyasla daha kesin sonuçlar vermektedir. Ayrıca, OVA yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar denkleme ait olan enerjinin azalması veya korunması (değişmemesi) gibi karakteristik özelliklerini de korumaktadır (Celledoni ve ark., 2012; Hairer ve Lubich, 2014). OVA yöntemi, hem enerji

azalma hem de enerji korunma özelliklerini koruyan ve ikinci mertebe yakınsaklığa sahip olan tek yöntemdir.

Son çeyrek asırda, bilgisayar bilimi ve mühendisliği alanındaki gelişmelere paralel olarak, mekanik, elektronik, nörobilimler, tıp, biyoloji ve finans dahil temel ve uygulamalı bilimler gibi alanlarda yüksek performanslı hesaplama işlemleri kullanılır hale gelmiş, bununla birlikte büyük boyutlu dinamik sistemlerin hızlı çözümleri de araştırma konusu olmaya başlamıştır. Özellikle, GL denklemleri gibi gerçek hayat problemlerinin modellemesinde kullanılan birçok matematiksel denklemin sayısal çözümleri için yüksek boyutlu dinamik sistemlerin çözümlerinin hesaplanması gereklidir. İlk olarak 1967'de Lumley (1967)'nin çalışmasında türbülans mekanizmalarının yoğunluğunu ve akışkan problemlerinde mevcut olan büyük tutarlı yapıları kavramak için tanıtılan mertebe indirgenmiş modelleme (MİM), sonralarda sayısal çözümlerin hızlı bir şekilde elde edilmesinde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde MİM'nin yapay zekadan genetiğe, meteorolojiden borsa hareket öngörülerine, akışkanlar mekaniğinden aerodinamiğe, yüz tanıma algoritmalarından tıpta elektromanyetik/lazer görüntüleme sistemlerine kadar pek çok uygulama alanı vardır (Kutz, 2013; Quarteroni ve ark., 2016). MİM'nin temelinde, sayısal çözümlerin ait olduğu sonlu ama büyük boyutlu çözüm uzayının çok daha küçük boyutlu bir alt uzayından Galerkin izdüşümü ile yaklaşık bir sayısal çözüm bulmak yer almaktadır. Literatürde MİM'nin çeşitli varyansları bulunmaktadır. Bunların arasında en yaygın kullanılan araç düzgün dik ayrışmasıdır (DDA) (Volkwein, 2011; Quarteroni ve ark., 2016). Bu tez çalışmasında, (1.2) reel GL denkleminin sayısal çözümlerinin hesaplanmasını hızlandırmak için DDA temelli MİM kullanılmıştır.

Bu tezin düzeni şu şekildedir: 2. Bölüm'de, bu tez çalışmasında kullanılan temel kavram ve tanımlar verilmiştir. Tezde kullanılan yöntem ve formülasyonlardan oluşan uzayda ve zamanda ayrıklaştırma yöntemleri, dinamik sistemin oluşturulması ve MİM oluşumları 3. Bölüm'de verilmiştir. 4. Bölüm'de, reel GL denkleminin çeşitli simülasyonları gerçekleştirilmiş olup elde edilen sonuçlarla ilgili gerekli tartışmalara yer verilmiştir. Son bölüm olan 5. Bölüm'de ise tez çalışmasının sonuçları özetlenmiş olup ileriye dönük önerilerde bulunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan bazı önemli kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Süreklili Fonksiyonların Uzayları). Bir Ω alanı üzerinde tanımlı reel değerli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için bu tez çalışmasına konu olan bazı önemli fonksiyon uzayları aşağıda verilmiştir.

- $C(\Omega)$: Ω alanı üzerinde tanımlı bütün sürekli reel değerli fonksiyonların kümesi.
- $C^k(\Omega)$: Ω alanı üzerinde tanımlı olup kendisi ve k . mertebeye kadar tüm (kısmi) türevleri sürekli olan reel değerli fonksiyonların kümesi. Özel olarak $k=0$ için $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ alınır.
- $C_0^k(\Omega)$: $C^k(\Omega)$ uzayına ait olup Ω alanı içinde kompakt destek kümesi olan fonksiyonların uzayı. Özel olarak $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı test fonksiyonu uzayı olarak anılır ve bu uzaya ait fonksiyonların keyfi mertebeden tüm türevleri Ω alanında sürekli olup Ω alanının sınırında sıfır değerine sahiptir.
- $C^k(\bar{\Omega})$: $C^k(\Omega)$ uzayına ait olup Ω alanının sınırına sürekli olacak şekilde genişletilebilir fonksiyonların kümesi.
- $C_p^k(\Omega)$: $C^k(\Omega)$ uzayına ait olup Ω alanının sınırında periyodik olan fonksiyonların kümesi.
- $C([a,b], B)$: Bir $[a,b]$ aralığından bir B reel Banach uzayına giden sürekli olan vektör değerli fonksiyonların uzayı.

Tanım 2.2 (Polinom Fonksiyon Uzayları). Bir Ω alanı üzerinde tanımlı ve derecesi en fazla k olan polinom fonksiyonların uzayı $P_k(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 (Parçalı Polinom Fonksiyon Uzayları). Bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ alanının pozitif bir n tamsayısı için n ayrık Ω_h^e alt alanlarına bölünmüş haline Ω alanının bir bölüntüsü denir ve Ω_h ile gösterilir. Ω_h bölüntüsü

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^n \Omega_h^e,$$

bağıntısını sağlar öyle ki $e \neq e'$ için $\Omega_h^e \cap \Omega_h^{e'}$ kesişim kümesi ya boş küme ya da $(d-1)$ -boyutlu bir yüzeydir ($d=1$ için nokta, $d=2$ için kenardır). Ω_h bölüntüsü üzerinde tanımlı ve derecesi en fazla k olan sürekli parçalı polinomların uzayı $P_k(\Omega_h)$ ile gösterilir ve

$$P_k(\Omega_h) = \left\{ f(x) \in C^0(\Omega) : f|_{\Omega_h^e} \in P_k(\Omega_h^e), \forall e=1, \dots, n \right\},$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.4 (Lebesgue uzayları). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ alanı üzerinde tanımlı Lebesgue anlamında integrallenebilir reel değerli fonksiyonların vektör uzayına Lebesgue uzayı denir ve

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

olacak şekilde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı tam normlu uzay olma özelliğiyle bir Banach uzayı olup L^p normu

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

olarak verilir. Bu tez çalışmasında özel olarak $p=2$ değeri için

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad L_p^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid f \text{ periyodik} \right\},$$

uzayları kullanılacaktır. İlave olarak L^2 normunu doğuran bir iç-çarpım tanımlanabilmesi sebebiyle $L^2(\Omega)$ uzayı aynı zamanda bir Hilbert uzayı olup L^2 iç-çarpımı

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}},$$

olarak verilir. Bir Ω alanının her kompakt altkümesi üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlara yerel integrallenebilir fonksiyonlar denilir ve Ω alanı üzerinde yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı $L_{loc}^1(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5 (Zayıf Türev). Pozitif bir $d \geq 1$ tamsayısı ve negatif olmayan α_i tamsayıları için $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ vektörüne çoklu-indis denir ve $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ sayısına çoklu indisin mertebesi denir. Bir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ çoklu indisi cinsinden d değişkenli gerektiği kadar türevlenebilir bir $f(x_1, \dots, x_d)$ fonksiyonunun $|\alpha|$. mertebeden kısmi türevleri

$$D^\alpha f = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

olarak verilir ve $|\alpha| = 0$ değeri için $D^{|\alpha|} f = f$ alınır. Bir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ çoklu indisi ve bir $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha w(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) w(x) dx, \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega),$$

bağıntısını sağlayan $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonunun zayıf türevi denir ve $g = D^\alpha f$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 (Sobolev Uzayları). Bir $k > 0$ tamsayısı ve $1 \leq p \leq \infty$ değeri için bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) alanı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardan oluşan Sobolev uzayları $W^{p,k}(\Omega)$ ile gösterilir. $W^{p,k}(\Omega)$ Sobolev uzayları, kendisi ve $|\alpha| \leq k$ olacak şekilde her çoklu indis için $D^\alpha f$ zayıf türevi de $L^p(\Omega)$ Lebesgue uzayında olan reel değerli fonksiyonları içerir

$$W^{p,k}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq k \}.$$

$W^{p,k}(\Omega)$ Sobolev uzayları için

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}, \quad p = \infty,$$

normları ve

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}, \quad p = \infty,$$

yarı-normları tanımlıdır. Özel olarak $p = 2$ değeri için Sobolev uzayları $H^k(\Omega) := W^{2,k}(\Omega)$ ile gösterilir:

$$H^k(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq k \}.$$

Bu tez çalışmasına konu olan ve en sık kullanılan Sobolev uzayları aşağıda verilmiştir

$$H^1(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq 1 \},$$

$$H^2(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq 2 \}.$$

Ayrıca

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad H_p^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f \text{ periyodik} \},$$

alt uzayları da bu tez kapsamında konu olacaktır. İlave olarak, bir B reel Banach uzayı için

$$L^p(a, b; B) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow B \mid \int_a^b \|f(t)\|_B^p dt < \infty \right\},$$

uzayı $[a, b]$ aralığının her noktasında Lebesgue anlamında integrallenebilen vektör değerli fonksiyonların Banach uzayı olup

$$\|f\|_{L^p(a, b; B)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_B^p dt \right)^{1/p},$$

normu ile verilir.

Tanım 2.7 (Yerel Lipschitz Sürekliliği). Bir B Banach uzayı $\|\cdot\|_B$ normu ile verilsin. B uzayında tanımlı bir $N : B \rightarrow B$ bağıntısı verilsin. N bağıntısına B uzayında yerel Lipschitz sürekli denir eğer

- i. $\|N(u)\|_B \leq C_0(\|u\|_B), \quad \forall u \in B,$
- ii. $\|N(u) - N(v)\|_B \leq C_L(\|u\|_B, \|v\|_B)\|u - v\|_B, \quad \forall u, v \in B,$

şartları sağlanırsa öyle ki $C_0(\|u\|_B)$ ve $C_L(\|u\|_B, \|v\|_B)$ sabitleri u ve v fonksiyonlarının normlarına bağlı sabitlerdir.

Tanım 2.8 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği). Bir V Hilbert uzayı $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ iç çarpımı ve iç çarpımdan doğan $\|\cdot\|_V$ normu ile verilsin. Bu durumda aşağıdaki bağıntı gerçekleşir

$$|\langle u, v \rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Tanım 2.9 (Linear/Bi-linear Form). Bir V vektör uzayı verilsin. V uzayı üzerinde tanımlı bir $l: V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneline lineer form denir eğer

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v), \quad \forall u, v \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

bağıntısı sağlanıyorsa. Diğer yandan, V uzayı üzerinde tanımlı bir $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bağıntısına bi-linear form denir eğer $a(\cdot, \cdot)$ her iki argümanına göre lineer ise:

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), & \forall u, v, w \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(u, w), & \forall u, v, w \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tanım 2.10 (Legendre Polinomları). Derecesi P olan Legendre polinomları $L_p(x)$ ile gösterilirler ve $[-1, 1]$ aralığında birbirlerine dik bir sistemi oluşturan polinomlar olarak tanımlanırlar:

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

öyle ki δ_{mn} Kronecker Delta olarak adlandırılır. Açık olarak P . derece Legendre polinomları

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = x, \\ nL_n(x) &= (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots, P, \end{aligned}$$

tekrarlama formülü ile hesaplanabilir.

Tanım 2.11 (Lagrange İnterpolasyon Polinomları). $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_P, y_P)$ gibi $P+1$ noktasal veriden oluşan bir küme verilsin öyle ki $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ gerçekleşsin. Söz konusu noktasal veriyi sağlayacak en düşük dereceden $L(x)$ polinomuna interpolasyon polinomu denir ve $L(x_i) = y_i$ her $i = 0, \dots, P$ için sağlanır. $L(x)$ interpolasyon polinomu Lagrange formunda

$$L(x) = \sum_{i=0}^P y_i l_i(x),$$

lineer kombinasyonunu sağlar öyle ki $l_i(x)$ polinomlarına Lagrange baz polinomları denir ve

$$l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq P \\ k \neq i}} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \dots, P,$$

şeklinde tanımlanır. Tanım gereği her $l_i(x)$ Lagrange baz polinomu P . derece bir polinom olup aşağıdaki önemli özelliği sağlar:

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad i, k = 0, 1, \dots, P.$$

Tanım 2.12 (Quadrature Kuralı). Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $I = [a, b]$ aralığındaki belirli integralinin, fonksiyonun I aralığındaki belirli noktalarındaki değerlerinin ağırlıklı toplamı olarak yaklaşık hesaplanması formülüne bir quadrature kuralı denir:

$$\int_I f(x) dx \approx \sum_{i=0}^P w_i f(x_i) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_P f(x_P),$$

Burada $x_i \in I$ noktalarına quadrature noktaları, $w_i \in \mathbb{R}^+$ pozitif sayılarına ise quadrature ağırlıkları denir. P sayısına ise quadrature kuralının mertebesi denir.

Bu tezde, gerekli olan yaklaşık integral hesaplamalarının daha ucuz olabilmesi ve köşegen yapıda katsayı matrisine sahip dinamik sistemlerin elde edilebilmesi açısından özel olarak Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) quadrature kuralı kullanılacaktır. LGL quadrature kuralında quadrature noktaları ve ağırlıkları Legendre polinomları kullanılarak hesaplanırlar. Bu sebeple LGL quadrature kuralı $\hat{I} = [-1, 1]$ referans aralığında tanımlıdır. P . mertebe LGL quadrature kuralındaki quadrature noktaları $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_P = 1$

$$(1 - \xi^2) L'_P(\xi) = 0, \quad P \geq 1,$$

denkleminin kökleri olarak verilirken, ilgili quadrature ağırlıkları ise

$$w_i = \frac{2}{P(P+1)(L'_P(\xi_i))^2}, \quad i = 0, 1, \dots, P,$$

bağıntısı ile hesaplanır. LGL quadrature kuralı derecesi en fazla $2P-1$ olan polinomların integrallerini kesin hesaplar.

Referans aralıkta tanımlı bir quadrature kuralını keyfi bir $I=[a,b]$ aralığında uygulamak için referans aralık üzerine

$$\xi(x) = 2 \frac{x-a}{b-a} - 1, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{b-a}, \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

$$x(\xi) = \frac{1}{2}[(b-a)\xi + (a+b)], \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}, \quad a \leq x \leq b,$$

afin dönüşüm uygulanabilir. Yukarıdaki dönüşüm altında

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi))d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^P w_k f(x(\xi_k)),$$

quadrature kuralı kullanılabilir öyle ki $\xi_k \in [-1,1]$ noktaları referans aralıktaki quadrature noktaları olup $x(\xi_k) \in [a,b]$ noktaları fiziksel aralıkta karşılık gelen noktalardır.

Tanım 2.13 (Tekil Değer Ayrışması). $Y = [y_1 \dots y_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir diktörgen matris olmak üzere, Y matrisinin Tekil Değer Ayrışması (TDA)

$$Y = U \Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

şeklinde verilir öyle ki $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ve $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortonormal matrisler:

$$\langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

ve $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tekil değerleri barındıran köşegen bir matristir. $\text{rank}(Y) = d \leq \min(m, n)$ olmak üzere Σ köşegen matrisinin yapısı

$$U^T Y V = \Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

formundadır öyle ki pozitif σ_i tekil değerleri azalan şekilde sıralıdır, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > 0$.

Y matrisinin sol tekil vektörleri U matrisinin sütunları olan $u_i \in \mathbb{R}^m$ vektörleri iken sağ tekil vektörleri ise V matrisinin sütunları olan $v_i \in \mathbb{R}^n$ vektörleridir. Ayrıca

$$YV = U\Sigma \Rightarrow Yv_i = \sigma_i u_i,$$

$$Y^T Y v_i = \sigma_i Y^T u_i = \sigma_i \sigma_i v_i = \sigma_i^2 v_i, \quad \forall i = 1, \dots, d,$$

bağıntıları sağlanır. Benzer şekilde

$$YY^T u_i = \sigma_i Y v_i = \sigma_i \sigma_i u_i = \sigma_i^2 u_i$$

olduğundan

$$YY^T u_i = Y(Y^T u_i) = Y(\sigma_i v_i) = \sigma_i(Y v_i) = \sigma_i(\sigma_i u_i) = \sigma_i^2 u_i = \lambda_i u_i,$$

bağıntısı elde edilir. İlave olarak, Y matrisinin tekil değerleri σ_i 'ler olmak üzere, YY^T ve $Y^T Y$ reel simetrik matrislerinin özdeğerleri $\lambda_i = \sigma_i^2$ değerleri olacak şekilde tekil değerlerin karesi olarak gerçekleşir.

Tanım 2.14 (Düzgün Dik Ayrışma). Bir $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi ele alınsın öyle ki $m \geq n$ olsun ($m < n$ durumu matris eşleniği kullanılarak benzer şekilde düşünülebilir). Y matrisinin rankı d olsun: $\text{rank}(Y) = d \leq \min(m, n)$. Y matrisinin sütun uzayı V olsun ve V uzayını geren d boyutlu bir baz $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ şeklinde verilsin. Her $i = 1, \dots, d$ için $\phi_i \in \mathbb{R}^m$ olup $\phi := [\phi_1 \ \dots \ \phi_d] \in \mathbb{R}^{m \times d}$ baz matrisi tanımlansın. Söz konusu baz tek olmayıp farklı formlarda bazlar bulunması mümkündür. Düzgün dik ayrışması (DDA), Y matrisinin baz matrisi üzerine iz düşümü alındığında maksimum varyans elde edilecek şekilde bir baz bulunmasını sağlayan bir yöntemdir. Daha açık olarak DDA

$$\max_{\phi \in \mathbb{R}^{m \times d}} \|\phi^T Y\|_V \quad \text{öyle ki} \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle_V = \delta_{ij},$$

kısıtlı optimizasyon probleminin çözümü ile Y matrisinin sütun uzayını geren baz bulunması için kullanılır öyle ki $\|\cdot\|_V$ uzayın normu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ uzayın iç çarpımıdır. Yukarıdaki maksimizasyon problemine denk olan minimizasyon problemi aşağıdaki problemle verilir (Volkwein, 2010; 2011)

$$\min_{\phi_1, \dots, \phi_d \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\| y_k - \sum_{i=1}^d \langle y_k, \phi_i \rangle_V \phi_i \right\|_V^2 \quad \text{öyle ki} \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle_V = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Bir pozitif tanımlı ve simetrik $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisi için eğer V iç çarpımı

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_V = \langle W\phi_i, \phi_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \phi_i, W\phi_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \phi_i^T W \phi_j$$

şeklinde bir W -ağırlıklı Euclid iç çarpımı gibi yazılabilirse verilen optimizasyon probleminin çözümü için

$$YY^T W \phi_i = \lambda_i \phi_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

özdeğer probleminin çözülmesi yeterlidir. $\hat{Y} = W^{1/2} Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dönüşümü için yukarıda verilen özdeğer problemi

$$\hat{Y} \hat{Y}^T \hat{\phi}_i = \lambda_i \hat{\phi}_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

halini alır öyle ki $\hat{\phi}_i = W^{1/2} \phi_i \in \mathbb{R}^m$ olarak verilir. Yeni özdeğer probleminin çözümleri olan $\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_d\}$ vektörleri $\hat{Y}$ matrisinin TDA'ndan gelen sol tekil vektörleri olup, özdeğerler ise $\hat{Y}$ matrisinin tekil değerlerinin kareleridir, $\lambda_i = \sigma_i^2$. $\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_d\}$ vektörleri bulunduktan sonra $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ baz vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\hat{\phi}_i = W^{-1/2} \phi_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Ayrıca bir $k < d$ pozitif tamsayısı için Y matrisinin sütun uzayının k -boyutlu bir alt uzayı $\phi := [\phi_1 \dots \phi_d] \in \mathbb{R}^{m \times d}$ baz matrisinin ilk k sütunundan oluşan $\phi^{(k)} := [\phi_1 \dots \phi_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ baz matrisi ile temsil edilebilir. Bu şekilde sütun uzayındaki keyfi bir $y \in \mathbb{R}^m$ vektörü k -boyutlu alt uzaydan bir $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ vektörü ile alt uzayı geren $\phi^{(k)} := [\phi_1 \dots \phi_k]$ bazı kullanılarak yaklaşık olarak

$$y \approx \tilde{y} = \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i \phi_i = \phi^{(k)} \tilde{y},$$

formülüyle temsil edilebilir öyle ki $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k)^T \in \mathbb{R}^k$ katsayılar vektörüdür.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bu tezin çalışma alanına konu olan (1.2) reel GL denkleminin $q=1$ değeri için 1 ve 2-boyutlu alanlar üzerindeki sayısal çözümleri ana hatlarıyla verilecektir. Daha açık olarak, bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d=1,2$) alanı üzerinde ve bir $T>0$ hedef zamanı için $[0,T]$ zaman aralığında, aşağıda verilen periyodik sınır koşuluna sahip reel GL denklemini ele alınsın

$$\partial_t u = \Delta u + \alpha u - |u|^2 u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad (3.1a)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1b)$$

öyle ki $u_0(x) \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu verilmiş bir başlangıç koşulu, α pozitif bir reel sabit, ve $d=1$ iken $x:=x$ olup $d=2$ iken $x:=(x,y)$ olarak alınır. Periyodik veya homojen Neumann sınır koşulları altında (3.1a) denklemi

$$\partial_t u = -\frac{\delta E}{\delta u},$$

bağıntısını sağlar öyle ki

$$E(u(x,t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \alpha |u|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 \right) dx, \quad (3.2)$$

enerji fonksiyoneli $q=1$ için (1.3)'de verilen enerjidir. (3.1) reel GL denkleminin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonu karmaşık değerli olup, çözüm $u(x,t) = p(x,t) + iq(x,t)$ olarak kabul edilirse, (3.1) denkleminde denk olan ve reel değerli $p(x,t)$ ve $q(x,t)$ çözümlerinden oluşan, yine periyodik sınır koşullarına sahip aşağıdaki ikili denklem sistemi elde edilebilir

$$\partial_t p = \Delta p + \alpha p - (p^2 + q^2)p, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad (3.3a)$$

$$\partial_t q = \Delta q + \alpha q - (p^2 + q^2)q, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad (3.3b)$$

$$p(x,0) = p_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.3d)$$

öyle ki karmaşık değerli başlangıç koşulu $u_0(x)$ fonksiyonu reel değerli $p_0(x)$ ve $q_0(x)$ fonksiyonları için $u_0(x) = p_0(x) + iq_0(x)$ formundadır. Yeni reel değerli çözümler cinsinden, $E(u(x,t))$ enerji fonksiyoneli aşağıdaki formu ile yazılabilir

$$E(p(x,t), q(x,t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla p|^2 + |\nabla q|^2 - \alpha(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)^2 \right) dx. \quad (3.4)$$

Yeni reel değerli fonksiyonlar kullanılarak (3.3) denklem sistemi (3.4) enerji fonksiyonlarından aşağıdaki şekilde elde edilebilir

$$\partial_t p = -\frac{\delta E}{\delta p}, \quad \partial_t q = -\frac{\delta E}{\delta q}.$$

Teorem 3.1. (1.1) ile verilen genelleştirilmiş karmaşık GL denkleminin, dolayısıyla da (3.3) ile verilen reel GL denkleminin, bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d=1,2$) alanı üzerinde ve her $T > 0$ hedef zamanı için

$$p(x,t), q(x,t) \in C([0,T], L_p^2(\Omega)) \cap C((0,T], C_p^2(\Omega)) \cap C^1((0,T], C_p(\Omega))$$

olacak şekilde tek bir çözümü vardır.

İspat. Teoremin ispatı için Levermore ve Oliver (1996)'ın çalışmalarındaki Teorem 5.6 ve Teorem 7.2 kullanılacaktır. (1.1) denklemindeki doğrusal olmayan terim $q=1$ değeri için

$$N(u) = -(1+i\beta)|u|^2 u$$

şeklinde tanımlansın. Bu doğrultuda, tek bir çözümün teoremden verildiği şekilde var olabilmesi için α parametresinin pozitif olması ve doğrusal olmayan $N(u)$ teriminin $N(0)=0$ şartını sağlaması ve $L^2(\Omega)$ normuna göre hemen hemen her (h.h.h.) $t \in (0,T]$ için yerel Lipschitz sürekli olması yeterlidir. Genelleştirilmiş karmaşık GL denkleminin tanımı gereği zaten α parametresi pozitif bir reel sayıdır. Doğrusal olmayan $N(u)$ teriminin tanımından $N(0)=0$ olduğu da açıktır. Son olarak, h.h.h. $t \in (0,T]$ için keyfi $u(x,t), v(x,t) \in L^2(\Omega)$ fonksiyonları ele alınsın. Bu durumda, $w=u-v$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|N(u) - N(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|-(1+i\beta)|u|^2 u + (1+i\beta)|v|^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= |1+i\beta|^2 \| |v|^2 v - |u|^2 u \|_{L^2(\Omega)}^2 = |1+i\beta|^2 \| \bar{v}v^2 - \bar{u}u^2 \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= |1+i\beta|^2 \| \bar{v}v^2 - u^2 \bar{v} + u^2 \bar{v} - uv\bar{v} + uv\bar{v} - \bar{u}u^2 \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= |1+i\beta|^2 \| u^2 \bar{w} + (u+v)\bar{v}w \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq |1+i\beta|^2 \| (u+v)^2 w \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq |1+i\beta|^2 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|u-v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir öyle ki Lipschitz sabiti

$$C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = |1+i\beta|^2 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

formundadır. Yukarıdaki bağıntıya göre $N(u)$ terimi $L^2(\Omega)$ normuna göre h.h.h. $t \in (0, T]$ için yerel Lipschitz süreklidir. $\square$

Bu bölümde öncelikle Bölüm 3.1’de (3.3) ile verilen reel GL denkleminin 1 ve 2-boyutlu alanlar için uzayda ayrıklaştırılması ve yarı-ayrık dinamik sistemin elde edilmesi detaylıca açıklanacaktır. Bölüm 3.2’de ise elde edilen yarı-ayrık dinamik sistem zamanda OVA yöntemi ile ayrıklaştırılıp tam ayrık sistemin elde edilişi gösterilecektir. Hızlı çözümler için kullanılacak olan MİM formülasyonları ise Bölüm 3.3’de belirtilecektir.

3.1. Uzayda Ayrıklaştırma

Bu tez çalışmasında, reel GL denkleminin sayısal çözümleri bulunurken uzayda ayrıklaştırma yöntemi olarak SEY ailesinden olan SSEY kullanılmıştır. Her SEY’nde olduğu gibi, öncelikle (3.2) ile verilen sürekli problem keyfi bir test fonsksiyonu ile çarpılıp uzay boyutunda (Ω alanı üzerinde) integrali alınır ve ikinci mertebe türev terimine Green teoremi uygulanarak Galerkin adı da verilen zayıf formülasyon elde edilir: h.h.h. $t \in (0, T]$ için bul $p(x, t), q(x, t) \in U$ öyle ki

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t p, v \rangle_\Omega + a(p, v) + n(p, q, v; p) &= 0, \quad \forall v \in V, \\
\langle \partial_t q, v \rangle_\Omega + a(q, v) + n(p, q, v; q) &= 0, \quad \forall v \in V,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

denklem sistemi sağlansın. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ operatörü Ω alanı üzerinde standart L^2 iç-çarpımını temsil ederken $a(\cdot, \cdot)$ bilineer formu ile $n(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot)$ lineer olmayan form

$$\begin{aligned} a(p, v) &= \langle \nabla p, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \alpha p, v \rangle_\Omega, & a(q, v) &= \langle \nabla q, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \alpha q, v \rangle_\Omega, \\ n(p, q, v; p) &= \langle (p^2 + q^2)p, v \rangle_\Omega, & n(p, q, v; q) &= \langle (p^2 + q^2)q, v \rangle_\Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlıdır. Problemin yapısı ve sınır koşulları düşünüldüğünde, h.h.h. $t \in (0, T]$ için çözüm uzayı ve test fonksiyonu uzayı olarak periyodik sınır koşulunu sağlayan

$$U = V := H_p^1(\Omega) = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) \text{ periyodik } \forall x \in \partial\Omega\},$$

Sobolev uzayı alınır. Burada not edilmesi gerekir ki Green Teoremi sonrası var olması beklenen sınır değeri terimleri periyodik sınır koşulundan dolayı yok olmaktadır. Aynı durum homojen Neumann sınır koşulu için de geçerlidir.

Teorem 3.2. (1.1) genelleştirilmiş karmaşık GL denkleminin, dolayısıyla da (3.3) ile verilen reel GL denkleminin, bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$) alanı üzerinde ve her $T > 0$ hedef zamanı için (3.4) ile verilen zayıf formülasyonu sağlayan ve

$$p(x, t), q(x, t) \in C([0, T], L_p^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_p^1(\Omega)) \cap H^1((0, T], L_p^2(\Omega))$$

olacak şekilde tek bir zayıf çözümü vardır.

İspat. Bu teoremin ispatı da Levermore ve Oliver (1996)'ın çalışmalarındaki Teorem 5.6 ve Teorem 7.2 kullanılarak Teorem 3.1'dekine benzer şekilde gösterilebilir.

□

SEY'deki temel mantık, çözüm bölgesini sonlu sayıda basit, küçük, birbirine bağlı eleman adı verilen alt bölgelere ayırarak Ω alanının bir Ω_h sonlu bölüntüsünü oluşturmak ve (3.4) zayıf formülasyonunun sonsuz boyutlu V çözüm uzayını söz konusu Ω_h bölüntüsünü temsil edecek sonlu boyutlu bir V_h alt uzayı ile değiştirmektir. Bu çerçevede, standart SEY yöntemi şu şekilde verilir: h.h.h. $t \in (0, T]$ için bul $p_h(x, t), q_h(x, t) \in V_h$ öyle ki

$$\begin{aligned} \langle \partial_t p_h, v_h \rangle_{\Omega_h} + a_h(p_h, v_h) + n_h(p_h, q_h, v_h; p_h) &= 0, & \forall v_h \in V_h, \\ \langle \partial_t q_h, v_h \rangle_{\Omega_h} + a_h(q_h, v_h) + n_h(p_h, q_h, v_h; q_h) &= 0, & \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (3.7)$$

denklem sistemi sağlansın. Burada $a_h(\cdot, \cdot)$ ve $n_h(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot)$ sırasıyla ayrık bilineer ve lineer olmayan formlar olup aşağıdaki şekilde tanımlanırlar

$$\begin{aligned} a_h(p_h, v_h) &= \langle \nabla p_h, \nabla v_h \rangle_{\Omega_h} - \langle \alpha p_h, v_h \rangle_{\Omega_h}, & a_h(q_h, v_h) &= \langle \nabla q_h, \nabla v_h \rangle_{\Omega_h} - \langle \alpha q_h, v_h \rangle_{\Omega_h}, \\ n_h(p_h, q_h, v_h; p_h) &= \langle (p_h^2 + q_h^2) p_h^2, v_h \rangle_{\Omega_h}, & n_h(p_h, q_h, v_h; q_h) &= \langle (p_h^2 + q_h^2) q_h^2, v_h \rangle_{\Omega_h}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

1-boyutlu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ alanları için bölüntüler aralıklar olurken 2-boyutlu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ alanları için üçgenler, dikdörtgenler gibi farklı şekillerde elemanlar alınabilir. Sıradaki bölümde öncelikle 1-boyutlu uzaysal alanlar için bölüntülerin ve bölüntüyü temsil edecek sonlu boyutlu V_h alt uzayının oluşturulması anlatılacaktır. Daha sonraki bölümde ilgili formülasyonlar 2-boyutlu alanlar için genişletilecektir.

3.1.1. 1-Boyutlu Uzayda Ayrıklaştırma

1-boyutlu bir $\Omega := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ alanı (aralığı) ele alınsın öyle ki $a < b$ reel sabitler olsun. 1-boyutlu Ω alanının Ω_h bölüntüsünü elde etmek için Ω alanı K_x ayrık aralığa bölünür:

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{K_x} \Omega_h^e, \quad \Omega_h^e = [x_{e-1}, x_e], \quad x_e = a + (e-1)h_e, \quad h_e = x_e - x_{e-1}, \quad e = 1, 2, \dots, K_x.$$

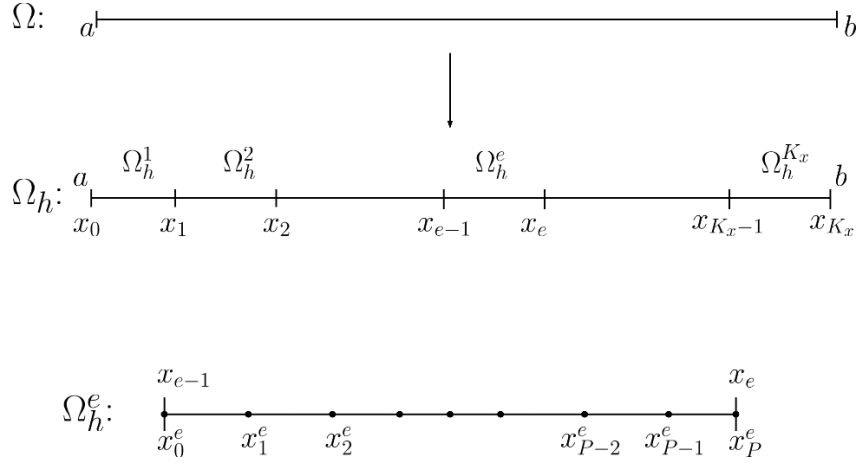
Ω_h bölüntüsü üzerinde ayrık L^2 iç-çarpımı

$$\langle u, v \rangle_{\Omega_h} = \sum_{e=1}^{K_x} \langle u, v \rangle_{\Omega_h^e}.$$

şeklinde hesaplanır. Literatürde hemen hemen her SEY yönteminde, her bir eleman üzerindeki iç-çarpımlar (integraller) yaklaşık olarak bir quadrature kuralı ile hesaplanırlar. Bu tez çalışmasında SSEY yöntemi kullanılmış olup her alt aralıktaki integraller Tanım 2.12’de verilen LGL kuralı ile hesaplanmaktadır. Bu doğrultuda, her Ω_h^e alt aralığı kendi içinde P alt aralığa bölünür öyle ki oluşacak yeni düğüm noktaları Tanım 2.12’de verilen LGL quadrature kuralındaki referans aralığa dönüşüm altında $[-1, 1]$ referans aralığındaki LGL quadrature noktalarına denk gelecek şekilde seçilir, bkz. Şekil 3.1:

$$\Omega_h : \mathbf{a} = \mathbf{x}_0^1 < \mathbf{x}_1^1 < \dots < \mathbf{x}_{P-1}^1 < \mathbf{x}_P^1 = \mathbf{x}_0^2 < \dots < \mathbf{x}_P^2 = \mathbf{x}_0^3 < \dots < \mathbf{x}_P^{K_x-1} = \mathbf{x}_0^{K_x} < \mathbf{x}_1^{K_x} < \dots < \mathbf{x}_{P-1}^{K_x} < \mathbf{x}_P^{K_x} = \mathbf{b}$$

$$\Omega_h^e : \mathbf{x}_{e-1}^e = \mathbf{x}_0^e < \mathbf{x}_1^e < \mathbf{x}_2^e < \dots < \mathbf{x}_P^e = \mathbf{x}_e$$



Şekil 3.1. 1-Boyutlu Ω_h bölüntüsünün yapısı

Sonuç olarak, standart SEY’de bağımsızlık derecesi (düğüm noktası sayısı) K_x iken SSEY’deki bağımsızlık derecesi $N := K_x P$ olarak gerçekleşir. Burada hatırlatmak gerekirse, periyodik sınır koşulundan dolayı seçtiğimiz V_h çözüm uzayında sağ sınır noktasındaki çözüm sol sınır noktasındaki çözüme eşit olacağından her iki sınır noktası birlikte bilinmeyen olmayıp $x_P^{K_x} = b$ düğüm noktası bağımsızlık derecesi olarak alınmamaktadır. Bu bilgiler ışığında, sonlu boyutlu V_h çözüm uzayı, her bir x_m^e düğüm noktasında tanımlı P . derece polinom fonksiyonları olan ve Tanım 2.11’de tanımlanmış olan $\phi_m^e(x)$ Lagrange baz fonksiyonlarının gerdiği uzay olarak alınır:

$$V_h := \left\{ v(x) \in C^0(\Omega) : v|_{\Omega^e} \in P_1(\Omega^e), \forall e = 1, \dots, K_x \right\} = \text{span} \left\{ \phi_0^1, \phi_1^1, \dots, \phi_P^1 = \phi_0^2, \phi_1^2, \dots, \phi_{P-1}^{K_x} \right\}.$$

Dikkat edilecek olursa, sağ sınır noktası bağımsızlık derecesi olarak alınmadığından, o noktada tanımlı baz fonksiyonu dahil edilmemiştir ve V_h uzayının boyutu olan baz fonksiyonu sayısı $N = K_x P$ olarak gerçekleşmiştir. Ayrıca, söz konusu Lagrange baz fonksiyonları nodal olarak adlandırılan baz fonksiyonları olup

$$\phi_m^i(x_n^j) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ve } m = n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, K_x; m, n = 0, \dots, P,$$

özellikliğini sağlarlar öyle ki her bir baz fonksiyonu tanımlı olduğu düğüm noktasının bulunduğu aralığın dışında sıfırdır.

SSEY ile sayısal çözümün bulunması için (3.7) denklem sisteminden yarı-ayrık dinamik sistem matris-vektör formunda elde edilmelidir. Bunun için öncelikle (3.7) sisteminin keyfi bir Ω_h^e aralığındaki çözümlerinin V_h uzayında olması durumu kullanılarak

$$p_h(x, t)|_{\Omega^e} := p_h^e(x, t) = \sum_{j=0}^P p_j^e(t) \phi_j^e(x), \quad q_h(x, t)|_{\Omega^e} := q_h^e(x, t) = \sum_{j=0}^P q_j^e(t) \phi_j^e(x),$$

çözümleri Lagrange baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak sisteme koyulur ve test fonksiyonları $v_h = \phi_i^e$ olarak seçilir, $i = 0, 1, \dots, P$, $e = 1, 2, \dots, K_x$. Burada $p_j^e(t), q_j^e(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ zaman değişkeni olan t 'ye bağlı bilinmeyen katsayılar olup, bilinmeyen katsayılar vektörü

$$\mathbf{p}^e(t) = (p_0^e(t), p_1^e(t), \dots, p_P^e(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{P+1}$$

$$\mathbf{q}^e(t) = (q_0^e(t), q_1^e(t), \dots, q_P^e(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{P+1}$$

olarak tanımlanırlar. Çözümlerin yerine koyulması ve test fonksiyonlarının baz fonksiyonu olarak seçilmesi sonrasında, keyfi bir Ω_h^e aralığı üzerinde (3.7) denklem sistemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^P \partial_t p_j^e(t) \langle \phi_j^e, \phi_i^e \rangle_{\Omega_h^e} + \sum_{j=0}^P p_j^e(t) a_h(\phi_j^e, \phi_i^e) + n_h(p_h^e, q_h^e, \phi_i^e; p_h^e) &= 0, \\ \sum_{j=0}^P \partial_t q_j^e(t) \langle \phi_j^e, \phi_i^e \rangle_{\Omega_h^e} + \sum_{j=0}^P q_j^e(t) a_h(\phi_j^e, \phi_i^e) + n_h(p_h^e, q_h^e, \phi_i^e; q_h^e) &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklini alır öyle ki (3.9) sistemindeki lineer terimlerdeki iç-çarpımlar sadece baz fonksiyonlarının veya x 'e göre kısmi türevlerinin iç-çarpımı olup her $i = 0, 1, \dots, P$ için $P+1$ adet denklem elde edilir. O halde (3.9) denklemler sistemi $P+1$ bilinmeyenli $P+1$ denklemden oluşan bir lineer sistem olarak aşağıdaki matris-vektör formunda yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e \partial_t \mathbf{p}^e + \mathbf{A}^e \mathbf{p}^e + \mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{p}^e) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^e \partial_t \mathbf{q}^e + \mathbf{A}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{q}^e) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10) lineer sistemi $P+1$ boyutlu bir dinamik sistem olup sistemdeki $\mathbf{M}^e \in \mathbb{R}^{(P+1) \times (P+1)}$ matrisine kütle matrisi, $\mathbf{A}^e = \tilde{\mathbf{A}}^e - \alpha \mathbf{M}^e \in \mathbb{R}^{(P+1) \times (P+1)}$ matrisine ise sistem matrisi denir ve girdileri

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= a_h(\phi_j^e, \phi_i^e) = \tilde{A}_{ij}^e - \alpha M_{ij}^e, \quad i, j = 0, 1, \dots, P, \\
M_{ij}^e &= \langle \phi_j^e, \phi_i^e \rangle_{\Omega_h^e} = \int_{\Omega_h^e} \phi_j^e(x) \phi_i^e(x) dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, P, \\
\tilde{A}_{ij}^e &= \langle \partial_x \phi_j^e, \partial_x \phi_i^e \rangle_{\Omega_h^e} = \int_{\Omega_h^e} \partial_x \phi_j^e(x) \partial_x \phi_i^e(x) dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, P,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde hesaplanır. $\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \cdot) \in \mathbb{R}^{P+1}$ vektörleri ise çözümlere bağlı lineer olmayan vektörler olup girdileri $i = 0, 1, \dots, P$ için aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{p}^e))_i &= \left\langle \left((p_h^e)^2 + (q_h^e)^2 \right) p_h^e, \phi_i^e \right\rangle_{\Omega_h^e} = \int_{\Omega_h^e} \left(\left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^P q_j^e \phi_j^e \right)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e \right) \phi_i^e dx, \\
(\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{q}^e))_i &= \left\langle \left((p_h^e)^2 + (q_h^e)^2 \right) q_h^e, \phi_i^e \right\rangle_{\Omega_h^e} = \int_{\Omega_h^e} \left(\left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^P q_j^e \phi_j^e \right)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^P q_j^e \phi_j^e \right) \phi_i^e dx.
\end{aligned}$$

SSEY'nde oluşan integral terimleri LGL quadrature kuralı ile hesaplanır. LGL quadrature noktaları ile düğüm noktalarımızın aynı olduğu gerçeği ve de Lagrange baz fonksiyonlarının tanımı gereği LGL quadrature kuralı uygulandığındaki kütle matrisinin girdileri

$$\begin{aligned}
M_{ij}^e &= \int_{\Omega_h^e} \phi_j^e(x) \phi_i^e(x) dx = \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 \phi_j^e(x(\xi)) \phi_i^e(x(\xi)) d\xi \\
&= \frac{h_e}{2} \sum_{k=0}^P w_k \phi_j^e(x_k^e) \phi_i^e(x_k^e) \\
&= \frac{h_e}{2} w_i \delta_{ij}
\end{aligned}$$

şeklinde gerçekleşir. Yukarıdaki hesaba göre kütle matrisi tamamen köşegen bir matris yapıdadır. Aynı sürecin uygulanması sonucu $A^e = \tilde{A}^e - \alpha M^e$ sistem matrisinde bulunan $\tilde{A}^e$ matrisinin girdileri aşağıdaki şekilde gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ij}^e &= \int_{\Omega_h^e} \partial_x \phi_j^e(x) \partial_x \phi_i^e(x) dx = \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{h_e} \partial_x \phi_j^e(x(\xi)) \right) \left(\frac{2}{h_e} \partial_x \phi_i^e(x(\xi)) \right) d\xi \\
&= \frac{2}{h_e} \sum_{k=0}^P w_k \partial_x \phi_j^e(x_k^e) \partial_x \phi_i^e(x_k^e)
\end{aligned}$$

Kütle matrisinin aksine $\tilde{A}^e$ matrisi ve dolayısıyla A^e sistem matrisi tam köşegen yapıda bir matris olmayıp blok köşegen yapıdadır. Diğer yandan lineer olmayan $\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{p}^e)$ vektörünün girdileri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir

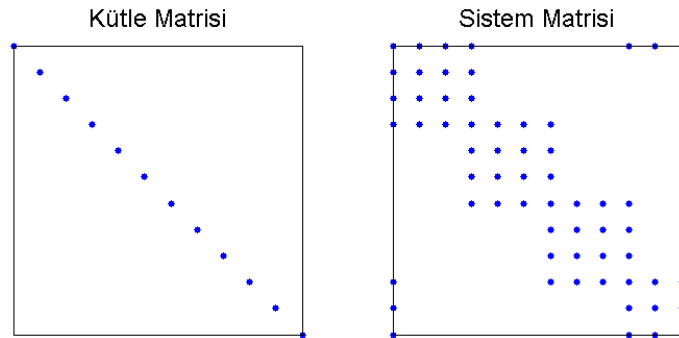
$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{p}^e))_i &= \int_{\Omega_h^e} \left(\left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x) \right)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x) \right) \phi_i^e dx \\
&= \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 \left(\left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x(\xi)) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x(\xi)) \right)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x(\xi)) \right) \phi_i^e(x(\xi)) d\xi \\
&= \frac{h_e}{2} \sum_{k=0}^P w_k \left(\left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x_k^e) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x_k^e) \right)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^P p_j^e \phi_j^e(x_k^e) \right) \phi_i^e(x_k^e) \\
&= \frac{h_e}{2} w_i \left((p_i^e)^2 + (q_i^e)^2 \right) p_i^e \delta_{ij} \\
&= \mathbf{M}_{ij}^e \left((p_i^e)^2 + (q_i^e)^2 \right) p_i^e.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mathbf{f}^e(\mathbf{p}^e, \mathbf{q}^e; \mathbf{q}^e)$ vektörünün girdileri de hesaplanabilir.

Son olarak keyfi bir Ω_h^e aralığı için verilen yukarıdaki yerel matris/vektörler global bir yapı içine yerleştirilerek $N = K_x P$ boyutlu

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \partial_t \mathbf{p} + \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p}) &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{M} \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{q}) &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dinamik sistemi elde edilir. Bu tez çalışmasında, (3.12) denklem sistemi mertebesi tam model (MTM) olarak anılacaktır. Global kütle ve sistem matrislerinin yapıları (sıfırdan farklı girdilerinin konumu) $P = 3$ ve $K_x = 4$ değerleri için Şekil 3.2’de verilmiştir. Global sistem matrisinin ilk satırının son üç girdisi ile ilk sütununun son üç girdisi periyodik sınır koşulundan gelmektedir.



Şekil 3.2. 1-boyutlu alanda kütle ve sistem matrislerinin girdi yapısı ($P = 3$, $K_x = 4$)

3.1.2. 2-Boyutlu Uzayda Ayırıklaştırma

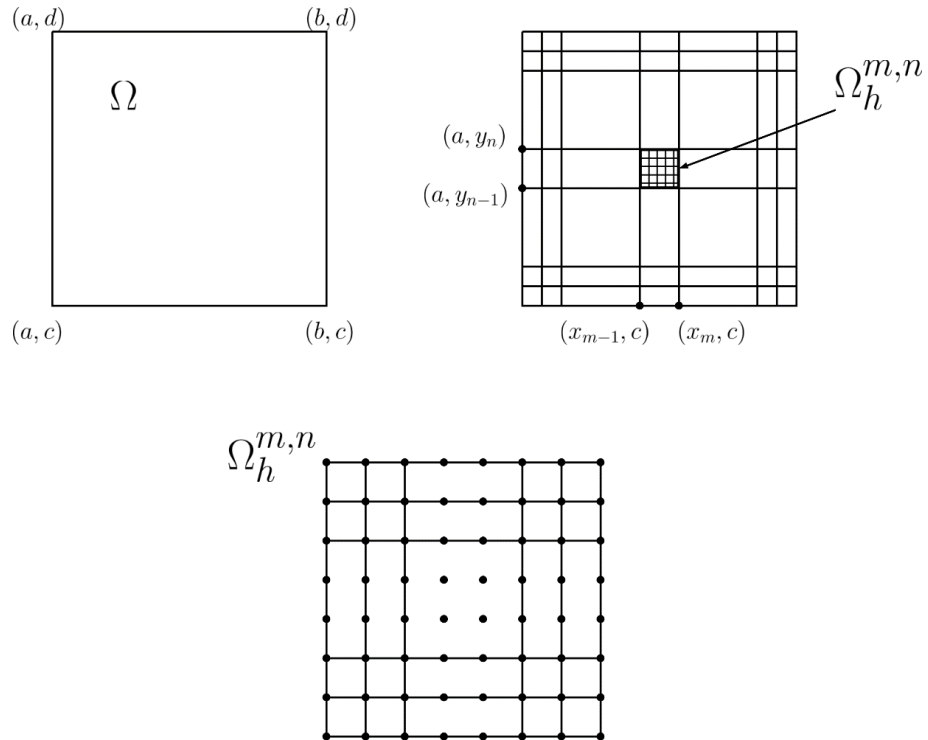
2-boyutlu bir $\Omega := [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ alanı ele alınsın öyle ki $a < b$ ve $c < d$ reel sabitler olsun. 2-boyutlu Ω alanının Ω_h bölüntüsünü elde etmek için Ω alanı $K = K_x K_y$ ayırık dikdörtgene (iki farklı dikdörtgenin kesişimi ya boş küme ya da bir kenar) bölünür:

$$\Omega_h = \bigcup_{m=1}^{K_x} \bigcup_{n=1}^{K_y} \Omega_h^{m,n}, \quad \Omega_h^{m,n} = [x_{m-1}, x_m] \times [y_{n-1}, y_n]$$

Burada her $\Omega_h^{m,n}$ dikdörtgeni yatay x -ekseni K_x ve dikey y -ekseni K_y alt aralığa bölünmesi sonucu elde edilir, bkz. Şekil 3.3:

$$\begin{aligned} x_m &= a + (m-1)\Delta x_m, & \Delta x_m &= x_m - x_{m-1}, & m &= 1, 2, \dots, K_x, \\ y_n &= c + (n-1)\Delta y_n, & \Delta y_n &= y_n - y_{n-1}, & n &= 1, 2, \dots, K_y. \end{aligned}$$

İç-çarpımlarda hesaplanması gereken integraller yine LGL quadrature kuralı ile yaklaşık olarak hesaplanır. Bu doğrultuda, hem x -eksenindeki hem de y -eksenindeki alt aralıklar kendi içlerinde P alt aralığa bölünür ve her iki boyutta da oluşacak yeni düğüm noktaları Tanım 2.12’de verilen quadrature kurallarındaki referans aralığa dönüşüm altında $[-1, 1]$ referans aralığındaki LGL quadrature noktalarına denk gelecek şekilde seçilir, Şekil 3.3.



Şekil 3.3. 2-Boyutlu Ω_h bölüntüsünün yapısı

Sonuç olarak, standart SEY’de bağımsızlık derecesi (düğüm noktası sayısı) $K_x K_y$ iken SSEY’deki bağımsızlık derecesi $N := K_x K_y P^2$ olarak gerçekleşir. Burada yine hatırlatmak gerekirse, periyodik sınır koşulundan dolayı seçtiğimiz V_h çözüm uzayında sağ ve üst sınır noktalarındaki çözümler sırasıyla sol ve alt sınır noktalarındaki çözümlere eşit olacağından tüm sınır noktaları birlikte bilinmeyen olmayıp $x_p^{K_x} = b$ ve $y_p^{K_y} = d$ sınır seviyelerindeki düğüm noktaları bağımsızlık derecesi olarak alınmamaktadır. Bu bilgiler ışığında, sonlu boyutlu V_h çözüm uzayı, her bir (x_i^m, y_j^n) düğüm noktasında tanımlı $N := K_x K_y P^2$ adet $\phi_{i,j}^{m,n}(x, y)$ Lagrange baz fonksiyonlarının gerdiği uzay olarak alınır, $m=1, \dots, K_x$, $n=1, \dots, K_y$, $i, j=0, \dots, P$. Burada 2-boyutlu bölüntüleri geren $\phi_{i,j}^{m,n}(x, y)$ Lagrange baz fonksiyonları her biri 1-boyutlu bölüntüleri geren tek değişkenli $h_i^m(x)$ ve $g_j^n(y)$ Lagrange baz fonksiyonları cinsinden yazılırlar:

$$\phi_{i,j}^{m,n}(x, y) = h_i^m(x) g_j^n(y).$$

Ayrıca, söz konusu Lagrange baz fonksiyonları yine nodal olarak adlandırılan baz fonksiyonları olma özelliğini taşıyıp

$$h_i^m(x_{i'}^{m'}) = \begin{cases} 1, & i = i' \text{ ve } m = m' \\ 0, & \text{diger} \end{cases}, \quad g_j^n(y_{j'}^{n'}) = \begin{cases} 1, & j = j' \text{ ve } n = n' \\ 0, & \text{diger} \end{cases},$$

$$\phi_{i,j}^{m,n}(x_{i'}^{m'}, y_{j'}^{n'}) = h_i^m(x_{i'}^{m'}) g_j^n(y_{j'}^{n'}) = \begin{cases} 1, & i = i', j = j', m = m' \text{ ve } n = n' \\ 0, & \text{diger} \end{cases},$$

özelliğini sağlarlar öyle ki her bir baz fonksiyonu tanımlı olduğu düğüm noktasının bulunduğu dörtgenin dışında sıfırdır.

SSEY ile sayısal çözümün bulunması için (3.7) denklem sisteminden yarı-ayrık dinamik sistem matris-vektör formunda elde edilmelidir. Bunun için öncelikle (3.7) sisteminin keyfi bir $\Omega_h^{m,n}$ dörtgenindeki çözümlerinin V_h uzayında olması durumu kullanılarak

$$p_h(x, y, t)|_{\Omega_h^{m,n}} := p_h^{m,n}(x, y, t) = \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P p_{k,l}^{m,n}(t) \phi_{k,l}^{m,n}(x, y) = \sum_{j=1}^{(P+1)^2} p_j^{m,n}(t) \phi_j^{m,n}(x, y),$$

$$q_h(x, y, t)|_{\Omega_h^{m,n}} := q_h^{m,n}(x, y, t) = \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P q_{k,l}^{m,n}(t) \phi_{k,l}^{m,n}(x, y) = \sum_{j=1}^{(P+1)^2} q_j^{m,n}(t) \phi_j^{m,n}(x, y),$$

çözümleri Lagrange baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak sisteme koyulur ve test fonksiyonları $v_h = \phi_i^{m,n}(x, y)$ olarak seçilir, $i = 1, \dots, (P+1)^2$, $m = 1, 2, \dots, K_x$, $n = 1, 2, \dots, K_y$. Burada uygun bir indis sıralaması kullanılarak 2-boyutlu (k, l) indisleri 1-boyutlu indisler ile değiştirilmiştir. İndis sıralaması farklı şekillerde alınabilir. Bu çalışmada indis sıralamaları hem global hem yerel olarak soldan sağa ve aşağıdan yukarı yönde alınmıştır. Ayrıca $p_j^{m,n}(t), q_j^{m,n}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ zaman değişkeni olan t 'ye bağlı bilinmeyen katsayılar olup bilinmeyen katsayılar vektörleri

$$\mathbf{p}^{m,n}(t) = (p_1^{m,n}(t), p_2^{m,n}(t), \dots, p_{(P+1)^2}^{m,n}(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{(P+1)^2},$$

$$\mathbf{q}^{m,n}(t) = (q_1^{m,n}(t), q_2^{m,n}(t), \dots, q_{(P+1)^2}^{m,n}(t))^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{(P+1)^2},$$

formunda tanımlanırlar. Çözümlerin yerine koyulması ve test fonksiyonlarının baz fonksiyonu olarak seçilmesi sonrasında, keyfi bir $\Omega_h^{m,n}$ dörtgeni üzerinde (3.7) denklem sistemi aşağıdaki şekli alır:

$$\sum_{j=1}^{(P+1)^2} \partial_t p_j^{m,n}(t) \langle \phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n} \rangle_{\Omega_h^{m,n}} + \sum_{j=1}^{(P+1)^2} p_j^{m,n}(t) a_h(\phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n}) + n_h(p_h^{m,n}, q_h^{m,n}, \phi_i^{m,n}; p_h^{m,n}) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{(P+1)^2} \partial_t q_j^{m,n}(t) \langle \phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n} \rangle_{\Omega_h^{m,n}} + \sum_{j=1}^{(P+1)^2} q_j^{m,n}(t) a_h(\phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n}) + n_h(p_h^{m,n}, q_h^{m,n}, \phi_i^{m,n}; q_h^{m,n}) = 0,$$
(3.13)

öyle ki (3.13) sisteminden $i = 1, \dots, (P+1)^2$ için $(P+1)^2$ adet denklem elde edilir. O halde (3.13) denklemler sistemi $(P+1)^2$ bilinmeyenli $(P+1)^2$ denklemden oluşan bir lineer sistem olarak

$$\mathbf{M}^{m,n} \partial_t \mathbf{p}^{m,n} + \mathbf{A}^{m,n} \mathbf{p}^{m,n} + \mathbf{f}^{m,n}(\mathbf{p}^{m,n}, \mathbf{q}^{m,n}; \mathbf{p}^{m,n}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}^{m,n} \partial_t \mathbf{q}^{m,n} + \mathbf{A}^{m,n} \mathbf{q}^{m,n} + \mathbf{f}^{m,n}(\mathbf{p}^{m,n}, \mathbf{q}^{m,n}; \mathbf{q}^{m,n}) = \mathbf{0},$$
(3.14)

matris-vektör formunda yazılabilir. (3.14) lineer sistemi $(P+1)^2$ boyutlu bir dinamik sistem olup sistemdeki $\mathbf{M}^{m,n} \in \mathbb{R}^{(P+1)^2 \times (P+1)^2}$ kütle matrisinin ve $\mathbf{A}^{m,n} = \tilde{\mathbf{A}}^{m,n} - \alpha \mathbf{M}^{m,n} \in \mathbb{R}^{(P+1)^2 \times (P+1)^2}$ sistem matrisinin girdileri

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{m,n} &= a_h(\phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n}) = \tilde{A}_{ij}^{m,n} - \alpha M_{ij}^{m,n}, \quad i, j = 1, \dots, (P+1)^2, \\
M_{ij}^{m,n} &= \langle \phi_j^{m,n}, \phi_i^{m,n} \rangle_{\Omega_h^{m,n}} = \int_{\Omega_h^{m,n}} \phi_j^{m,n}(x, y) \phi_i^{m,n}(x, y) dx dy, \quad i, j = 1, \dots, (P+1)^2, \\
\tilde{A}_{ij}^{m,n} &= \langle \nabla \phi_j^{m,n}, \nabla \phi_i^{m,n} \rangle_{\Omega_h^{m,n}} = \int_{\Omega_h^{m,n}} \nabla \phi_j^{m,n}(x, y) \cdot \nabla \phi_i^{m,n}(x, y) dx dy, \quad i, j = 1, \dots, (P+1)^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbf{f}^{m,n}(\mathbf{p}^{m,n}, \mathbf{q}^{m,n}; \cdot) \in \mathbb{R}^{(P+1)^2}$ vektörleri ise çözümlere bağlı lineer olmayan vektörler olup girdileri 1-boyutlu durumdakine benzer bir şekilde verilir.

(3.15) bağıntılarındaki integral terimleri 1-boyutlu $[-1, 1]$ referans aralığında tanımlı olan LGL quadrature kuralının köşeleri $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ ve $(1, 1)$ noktalarında olan 2-boyutlu $\hat{\Omega}$ referans dörtgenine genişletilmesi yapılarak hesaplanırlar. Bunun için öncelikle keyfi bir dörtgen üzerindeki integraller $\hat{\Omega}$ referans dörtgenindeki integrallere dönüştürülmelidir. Keyfi bir $[a, b] \times [c, d]$ dörtgeni için söz konusu dönüşümler ve her boyutta uygulanacak dönüşüm ile oluşacak ilgili LGL quadrature kuralı aşağıdaki şekilde gerçekleşir

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= 2 \frac{x-a}{b-a} - 1, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{b-a}, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \\
\eta(y) &= 2 \frac{y-c}{d-c} - 1, \quad \frac{d\eta}{dy} = \frac{2}{d-c}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \\
x(\xi) &= \frac{1}{2}[(b-a)\xi + (a+b)], \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}, \quad a \leq x \leq b, \\
y(\eta) &= \frac{1}{2}[(d-c)\eta + (c+d)], \quad \frac{dy}{d\eta} = \frac{d-c}{2}, \quad c \leq y \leq d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 f(x, y(\eta)) d\eta dx = \frac{d-c}{2} \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\eta)) d\eta d\xi \\
&= \frac{d-c}{2} \frac{b-a}{2} \sum_{l=0}^P w_l \int_{-1}^1 f(x, y(\eta_l)) d\xi \\
&= \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P w_k w_l f(x(\xi_k), y(\eta_l)),
\end{aligned}$$

öyle ki $\xi_k, \eta_l \in [-1, 1]$ noktaları referans aralıktaki quadrature noktaları olup $x(\xi_k) \in [a, b]$ ve $y(\eta_l) \in [c, d]$ noktaları fiziksel aralıklarda karşılık gelen noktalardır. Bu bilgiler ışığında, kütle matrisinin girdileri

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{m,n} &= \int_{\Omega_h^{m,n}} \phi_j^{m,n}(x,y) \phi_i^{m,n}(x,y) dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_j^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) \phi_i^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) d\xi d\eta \\
&= \frac{\Delta x \Delta y}{4} \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P w_k w_l \phi_j^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}) \phi_i^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}) \\
&= \frac{\Delta x \Delta y}{4} w^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, (P+1)^2.
\end{aligned}$$

şeklinde gerçekleşir. Yukarıdaki hesaba göre kütle matrisi yine tamamen köşegen bir matris yapıdadır. Aynı sürecin uygulanması sonucu $A^{m,n} = \tilde{A}^{m,n} - \alpha M^{m,n}$ sistem matrisinde bulunan $\tilde{A}^{m,n}$ matrisinin girdileri aşağıdaki şekilde gerçekleşir:

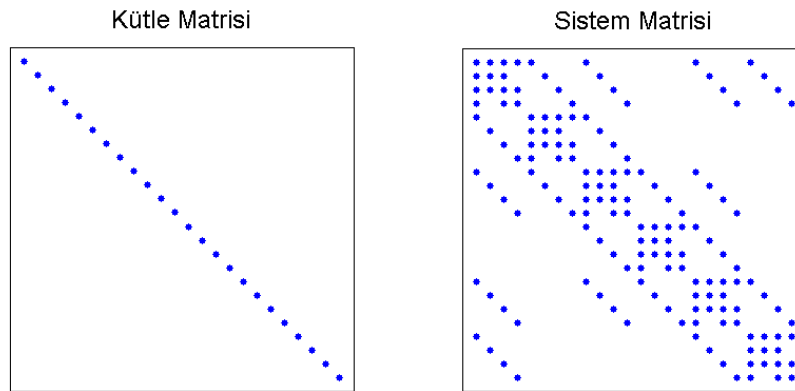
$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ij}^e &= \int_{\Omega_h^{m,n}} \nabla \phi_j^{m,n}(x,y) \cdot \nabla \phi_i^{m,n}(x,y) dx dy \\
&= \int_{\Omega_h^{m,n}} \left(\partial_x \phi_j^{m,n}(x,y) \partial_x \phi_i^{m,n}(x,y) + \partial_y \phi_j^{m,n}(x,y) \partial_y \phi_i^{m,n}(x,y) \right) dx dy \\
&= \frac{\Delta x \Delta y}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{\Delta x^2} \partial_x \phi_j^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) \partial_x \phi_i^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) + \frac{4}{\Delta y^2} \partial_y \phi_j^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) \partial_y \phi_i^{m,n}(x(\xi), y(\eta)) \right) d\xi d\eta \\
&= \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P w_k w_l \partial_x \phi_j^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}) \partial_x \phi_i^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}) + \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{k=0}^P \sum_{l=0}^P w_k w_l \partial_y \phi_j^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}) \partial_y \phi_i^{m,n}(x_k^{m,n}, y_l^{m,n}).
\end{aligned}$$

Son olarak keyfi bir $\Omega_h^{m,n}$ dörtgeni için verilen yukarıdaki yerel matris/vektörler global bir yapı içine yerleştirilerek $N = K_x K_y P^2$ boyutlu

$$M \partial_t \mathbf{p} + A \mathbf{p} + \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p}) = \mathbf{0},$$

$$M \partial_t \mathbf{q} + A \mathbf{q} + \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{q}) = \mathbf{0},$$

dinamik sistemi elde edilir. Global kütle ve sistem matrislerinin yapıları (sıfırdan farklı girdilerinin konumu) $P = 2$, $K_x = 2$ ve $K_y = 3$ değerleri için Şekil 3.4’de verilmiştir.



Şekil 3.4. 2-boyutlu alanda kütle ve sistem matrislerinin girdi yapısı ($P = K_x = 2$, $K_y = 3$)

3.2 Zamanda Ayrıklaştırma

Bu bölümde OVA yöntemi kullanılarak zaman boyutunda ayrıklaştırma yapılarak 1-boyutlu (3.12) yarı-ayrık denklem sisteminden tam-ayrık sistem elde edilecektir (2-boyutlu sistem için benzer işlemler yapılabilir). Bunun için $[0, T]$ zaman aralığının $J-1$ eşit aralıktan oluşan

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{J-1} = T, \quad I_n = (t_{n-1}, t_n], \quad \Delta t = \frac{T}{J-1},$$

bölüntüsü ele alınsın. Her t_n zaman anındaki yaklaşık çözümlerimiz aşağıdaki gibi alınsın

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^n &\approx \mathbf{p}(t_n) = (p(x_1, t_n), p(x_2, t_n), \dots, p(x_N, t_n))^T \in \mathbb{R}^N, \quad n = 1, \dots, J-1, \\ \mathbf{q}^n &\approx \mathbf{q}(t_n) = (q(x_1, t_n), q(x_2, t_n), \dots, q(x_N, t_n))^T \in \mathbb{R}^N, \quad n = 1, \dots, J-1, \end{aligned}$$

öyle ki başlangıç zamanındaki tam-ayrık çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= \mathbf{p}(t_0) = (p_0(x_1), p_0(x_2), \dots, p_0(x_N))^T \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{q}^0 &= \mathbf{q}(t_0) = (q_0(x_1), q_0(x_2), \dots, q_0(x_N))^T \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

olacak şekilde başlangıç koşulu ile verilsin. Bu durumda, tam-ayrık problemimiz şu şekilde oluşur: bilinen $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n \in \mathbb{R}^N$ vektörleri için bul $\mathbf{p}^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1} \in \mathbb{R}^N$ öyle ki

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2}A(\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{p}^n) + \int_0^1 \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{p}}^n, \widehat{\mathbf{q}}^n; \widehat{\mathbf{p}}^n) d\omega &= 0, \\ M\left(\frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2}A(\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n) + \int_0^1 \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{p}}^n, \widehat{\mathbf{q}}^n; \widehat{\mathbf{q}}^n) d\omega &= 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

bağıntıları sağlansın öyle ki

$$\widehat{\mathbf{p}}^n := \omega \mathbf{p}^{n+1} + (1-\omega) \mathbf{p}^n, \quad \widehat{\mathbf{q}}^n := \omega \mathbf{q}^{n+1} + (1-\omega) \mathbf{q}^n,$$

olarak verilsin. (3.16) denklem sistemi lineer olmayan bir sistem olup Newton yöntemi ile çözülür.

3.3. Sürekli ve Ayrık Enerjilerin Yapısı

Bu bölümde (3.4) sürekli enerjinin azalma özelliği ve (3.4) sürekli enerjinin (3.16) tam ayrık sistemin çözümleri sonucu oluşan ayrık enerji tanıtılıp ayrık enerjinin de azalma özelliğinin korunması incelenecektir. Öncelikle sürekli enerjinin zaman içinde azaldığı gösterilsin.

Teorem 3.3. (Levemore ve Oliver, 1996) (3.3) sürekli problemini doğuran (3.4) enerji fonksiyoneli

$$\frac{d}{dt} E(p(x,t), q(x,t)) \leq 0, \quad \forall t > 0,$$

zaman içinde azalma özelliğini gösterir.

İspat. (3.4) enerji fonksiyonelinin tanımı ve zincir kuralı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [E(p(x,t), q(x,t))] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla p|^2 + |\nabla q|^2 - \alpha(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)^2) dx \right] \\ &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla (\partial_t p) dx + \int_{\Omega} (-\alpha p + (p^2 + q^2)p) \partial_t p dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla (\partial_t q) dx + \int_{\Omega} (-\alpha q + (p^2 + q^2)q) \partial_t q dx. \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. $\nabla p \cdot \nabla (\partial_t p)$ ve $\nabla q \cdot \nabla (\partial_t q)$ birinci mertebe türev terimlerini içeren integrallere Green teoremi uygulanır, periyodik sınır koşulundan dolayı sınırdan gelen terimlerin yok olacağı kullanılır ve (3.3) denklem sistemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [E(p(x,t), q(x,t))] &= - \int_{\Omega} \Delta p (\partial_t p) dx + \int_{\Omega} (-\alpha p + (p^2 + q^2)p) \partial_t p dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \Delta q (\partial_t q) dx + \int_{\Omega} (-\alpha q + (p^2 + q^2)q) \partial_t q dx \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{[\Delta p + \alpha p - (p^2 + q^2)p]}_{=\partial_t p} \partial_t p dx - \int_{\Omega} \underbrace{[\Delta q + \alpha q - (p^2 + q^2)q]}_{=\partial_t q} \partial_t q dx \\ &= - \int_{\Omega} (\partial_t p)^2 dx - \int_{\Omega} (\partial_t q)^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{[(\partial_t p)^2 + (\partial_t q)^2]}_{\geq 0} dx \leq 0, \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

□

Tanım 3.1. (3.16) tam ayrık sistemin çözümleri $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n \in \mathbb{R}^N$ verilsin, $n = 0, 1, \dots, J-1$. Hatırlanırsa tanım gereği $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ vektörleri sırasıyla $p(x,t)$ ve $q(x,t)$ çözümlerinin $t = t_n$ zamanındaki SSEY sonucu oluşan $p_h(x,t)$ ve $q_h(x,t)$ ayrık çözümlerini oluşturan lineer kombinasyondaki katsayılarıdır. Bu durumda, $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ global kütle matrisinin tanımı ve

global indis yapısı da kullanılarak $p_h(x, t)$ ayrık çözümünün ($q_h(x, t)$ için benzer şekilde) L^2 normu aşağıdaki şekilde ağırlıklı Euclid normu olarak yazılabilir:

$$\begin{aligned}\|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle p_h, p_h \rangle_\Omega = \int_\Omega (p_h)^2 dx = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N p_k(t) \phi_k(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N p_k(t) p_l(t) \int_\Omega \phi_k(x) \phi_l(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N p_k(t) p_l(t) M_{lk} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p}.\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ global sistem matrisinin tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\|\nabla p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle \nabla p_h, \nabla p_h \rangle_\Omega - \alpha \langle p_h, p_h \rangle_\Omega \\ &= \mathbf{p}^T (\tilde{\mathbf{A}} - \alpha \mathbf{M}) \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p},\end{aligned}$$

bağıntısı da elde edilebilir.

Tanım 3.2. Yarı-ayrık çözüm vektörleri $\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ve dolayısıyla yarı-ayrık çözümler $p_h(x, t)$ ve $q_h(x, t)$ verilsin. Bu durumda yarı-ayrık enerji fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}E_h(p_h, q_h) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \left(|\nabla p_h|^2 + |\nabla q_h|^2 - \alpha(p_h^2 + q_h^2) + \frac{1}{2}(p_h^2 + q_h^2)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (|\nabla p_h|^2 - \alpha p_h^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} (|\nabla q_h|^2 - \alpha q_h^2) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega_h} (p_h^2 + q_h^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \nabla p_h, \nabla p_h \rangle_{\Omega_h} - \alpha \langle p_h, p_h \rangle_{\Omega_h} \right) + \frac{1}{2} \left(\langle \nabla q_h, \nabla q_h \rangle_{\Omega_h} - \alpha \langle q_h, q_h \rangle_{\Omega_h} \right) + \frac{1}{4} \langle (p_h^2 + q_h^2)^2, 1 \rangle_{\Omega_h} \\ &= \frac{1}{2} a_h(p_h, p_h) + \frac{1}{2} a_h(q_h, q_h) + \frac{1}{4} \langle (p_h^2 + q_h^2)^2, 1 \rangle_{\Omega_h}\end{aligned}\tag{3.17}$$

öyle ki $a_h(\cdot, \cdot)$ bi-lineer formu (3.8)'de tanımlandığı gibidir. Yukarıdaki tanım kullanılarak tam ayrık enerji fonksiyoneli

$$E_h^n(p_h, q_h) := E_h(p_h(x, t_n), q_h(x, t_n))\tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.4. Zaman boyutunun ayrıklaştırılmasında OVA yöntemi kullanıldığında elde edilen çözümler için (3.18) ayrık enerji fonksiyoneli Δt değeri için hiçbir kısıtlama olmaksızın

$$E_h^{n+1}(p_h, q_h) \leq E_h^n(p_h, q_h), \quad \forall n,$$

zaman içinde azalma özelliğini gösterir.

İspat. Teoremin ispatı için OVA yönteminin varyasyonel formda olan (3.7) sistemine uygulanmış aşağıdaki halini ele alınsın

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle p_h^{n+1} - p_h^n, v_h \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(p_h^{n+1} + p_h^n, v_h) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, v_h; \bar{p}_h) d\omega &= 0, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \frac{1}{\Delta t} \langle q_h^{n+1} - q_h^n, v_h \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(q_h^{n+1} + q_h^n, v_h) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, v_h; \bar{q}_h) d\omega &= 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

öyle ki $t = t_n$ anındaki $p_h^n := p_h(x, t_n)$ ve $q_h^n := q_h(x, t_n)$ ayrık çözümleri için

$$\bar{p}_h := \omega p_h^{n+1} + (1-\omega)p_h^n, \quad \bar{q}_h := \omega q_h^{n+1} + (1-\omega)q_h^n,$$

olarak verilir. Yukarıdaki sistem her $v_h \in V_h$ için geçerli olduğundan ilk denklemde $v_h = p_h^{n+1} - p_h^n$ ve ikinci denklemde $v_h = q_h^{n+1} - q_h^n$ seçilirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle p_h^{n+1} - p_h^n, p_h^{n+1} - p_h^n \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(p_h^{n+1} + p_h^n, p_h^{n+1} - p_h^n) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, p_h^{n+1} - p_h^n; \bar{p}_h) d\omega &= 0, \\ \frac{1}{\Delta t} \langle q_h^{n+1} - q_h^n, q_h^{n+1} - q_h^n \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(q_h^{n+1} + q_h^n, q_h^{n+1} - q_h^n) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n; \bar{q}_h) d\omega &= 0, \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bi-lineer formülü terimlerin lineer olma özelliği ve $(a+b, a-b) = (a^2 - b^2, 1)$ iki kare farkı bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_h(p_h^{n+1} + p_h^n, p_h^{n+1} - p_h^n) &= a_h(p_h^{n+1}, p_h^{n+1}) - a_h(p_h^n, p_h^n), \\ a_h(q_h^{n+1} + q_h^n, q_h^{n+1} - q_h^n) &= a_h(q_h^{n+1}, q_h^{n+1}) - a_h(q_h^n, q_h^n), \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. L^2 normunun L^2 iç-çarpımı cinsinden tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \frac{1}{2} a_h(p_h^{n+1}, p_h^{n+1}) - \frac{1}{2} a_h(p_h^n, p_h^n) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, p_h^{n+1} - p_h^n; \bar{p}_h) d\omega = 0, \\
& \frac{1}{\Delta t} \|q_h^{n+1} - q_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \frac{1}{2} a_h(q_h^{n+1}, q_h^{n+1}) - \frac{1}{2} a_h(q_h^n, q_h^n) + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n; \bar{q}_h) d\omega = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi lineer olmayan terimler incelensin. Lineer olmayan formlar açık olarak yazılıp integral sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, p_h^{n+1} - p_h^n; \bar{p}_h) d\omega &= \int_0^1 \left\langle (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{p}_h, p_h^{n+1} - p_h^n \right\rangle_{\Omega_h} d\omega = \int_{\Omega_h} \left[\int_0^1 (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{p}_h (p_h^{n+1} - p_h^n) d\omega \right] dx, \\
\int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n; \bar{q}_h) d\omega &= \int_0^1 \left\langle (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n \right\rangle_{\Omega_h} d\omega = \int_{\Omega_h} \left[\int_0^1 (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{q}_h (q_h^{n+1} - q_h^n) d\omega \right] dx,
\end{aligned}$$

bağıntıları gerçekleşir. Yukarıdaki bağıntılarda lineer olmayan terimler toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, p_h^{n+1} - p_h^n; \bar{p}_h) d\omega + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n; \bar{q}_h) d\omega \\
&= \int_{\Omega_h} \left[\int_0^1 \left[(\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{p}_h (p_h^{n+1} - p_h^n) + (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{q}_h (q_h^{n+1} - q_h^n) \right] d\omega \right] dx,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

bağıntısı elde edilir. Dikkat edilecek olunursa

$$F(p_h, q_h) = \frac{1}{4} (p_h^2 + q_h^2)^2,$$

şeklinde tanımlanacak bir fonksiyon için aşağıdaki bağıntılar kolayca elde edilebilir:

$$\partial_{p_h} F(p_h, q_h) = (p_h^2 + q_h^2) p_h, \quad \partial_{q_h} F(p_h, q_h) = (p_h^2 + q_h^2) q_h.$$

Bu durumda $\bar{p}_h := \omega p_h^{n+1} + (1-\omega) p_h^n$ ve $\bar{q}_h := \omega q_h^{n+1} + (1-\omega) q_h^n$ dönüşümleri altında $F(\bar{p}_h, \bar{q}_h)$ fonksiyonunun ω değişkenine göre tam türevi

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\omega}(\bar{p}_h, \bar{q}_h) &= \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_h} \frac{d\bar{p}_h}{d\omega} + \frac{\partial F}{\partial \bar{q}_h} \frac{d\bar{q}_h}{d\omega} \\
&= \partial_{\bar{p}_h} F(\bar{p}_h, \bar{q}_h) (p_h^{n+1} - p_h^n) + \partial_{\bar{q}_h} F(\bar{p}_h, \bar{q}_h) (q_h^{n+1} - q_h^n) \\
&= (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{p}_h (p_h^{n+1} - p_h^n) + (\bar{p}_h^2 + \bar{q}_h^2) \bar{q}_h (q_h^{n+1} - q_h^n),
\end{aligned}$$

olacağından (3.20)'deki toplam

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, p_h^{n+1} - p_h^n; \bar{p}_h) d\omega + \int_0^1 n_h(\bar{p}_h, \bar{q}_h, q_h^{n+1} - q_h^n; \bar{q}_h) d\omega \\
&= \int_{\Omega_h} \left[\int_0^1 \frac{dF}{d\omega}(\bar{p}_h, \bar{q}_h) d\omega \right] dx = \int_{\Omega_h} \left[F(\bar{p}_h, \bar{q}_h) \Big|_{\omega=0}^{\omega=1} \right] dx \\
&= \int_{\Omega_h} [F(p_h^{n+1}, q_h^{n+1}) - F(p_h^n, q_h^n)] dx \\
&= \langle F(p_h^{n+1}, q_h^{n+1}), 1 \rangle_{\Omega_h} - \langle F(p_h^n, q_h^n), 1 \rangle_{\Omega_h},
\end{aligned}$$

olacak şekilde yazılabilir. Şimdi (3.19)'daki denklemler taraf tarafa toplanır ve yukarıdaki bağıntı (3.19)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|q_h^{n+1} - q_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \left[\frac{1}{2} a_h(p_h^{n+1}, p_h^{n+1}) + \frac{1}{2} a_h(q_h^{n+1}, q_h^{n+1}) + \langle F(p_h^{n+1}, q_h^{n+1}), 1 \rangle_{\Omega_h} \right] \\
& - \left[\frac{1}{2} a_h(p_h^n, p_h^n) + \frac{1}{2} a_h(q_h^n, q_h^n) + \langle F(p_h^n, q_h^n), 1 \rangle_{\Omega_h} \right] = 0,
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Son olarak normlu terimler eşitliğin sağına atılıp $F(p_h, q_h)$ fonksiyonunun ve enerji fonksiyonelinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} a_h(p_h^{n+1}, p_h^{n+1}) + \frac{1}{2} a_h(q_h^{n+1}, q_h^{n+1}) + \frac{1}{4} \left\langle \left((p_h^{n+1})^2 + (q_h^{n+1})^2 \right)^2, 1 \right\rangle_{\Omega_h} \right] \\
& - \left[\frac{1}{2} a_h(p_h^n, p_h^n) + \frac{1}{2} a_h(q_h^n, q_h^n) + \frac{1}{4} \left\langle \left((p_h^n)^2 + (q_h^n)^2 \right)^2, 1 \right\rangle_{\Omega_h} \right] = -\frac{1}{\Delta t} \left(\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|q_h^{n+1} - q_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right),
\end{aligned}$$

$$E_h^{n+1} - E_h^n = -\frac{1}{\Delta t} \underbrace{\left(\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|q_h^{n+1} - q_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)}_{\geq 0},$$

bağıntısı elde edilir ki $\Delta t > 0$ olduğundan

$$E_h^{n+1} - E_h^n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E_h^{n+1} \leq E_h^n \quad \forall n,$$

enerjinin azalma özelliği her $\Delta t > 0$ için elde edilir.

□

3.4. Mertebesi İndirgenmiş Modelleme

(3.12) denkleminin boyutu olan N sayısı gerçek hayat problemlerinde genelde çok büyük olup sistemin çözümü çok fazla zaman gerektirmektedir. Bu bölümde, (3.12) MTM'in daha hızlı çözülebilmesi için MİM yöntemi tanıtılacaktır.

MİM yöntemi (3.12) MTM'e ait ayrık çözüm vektörlerinin oluşturduğu sütun uzayının çok daha küçük boyutlu bir alt uzayından çözüm vektörlerini yaklaşık olarak bulmayı amaçlar. Bu tez çalışmasında oluşturulacak olan düşük boyutlu alt uzayı geren baz vektörleri DDA yöntemi ile bulunacaktır.

MİM'nin uygulanması için öncelikle N -boyutlu $V_h = \text{span}\{\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)\}$ sonlu elemanlar uzayının N_r -boyutlu indirgenmiş uzay denilen bir $V_{h,r} = \text{span}\{\phi_1^r(x), \dots, \phi_{N_r}^r(x)\}$ alt uzayı bulunur. Bu durumda h.h.h. t için $p_h(x, t), q_h(x, t) \in V_h$ ayrık çözümleri

$$p_h(x, t) \approx p_{h,r}(x, t) := \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{p}_i(t) \phi_i^r(x), \quad q_h(x, t) \approx q_{h,r}(x, t) := \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{q}_i(t) \phi_i^r(x),$$

olacak şekilde yaklaşık olarak temsil edilebilirler öyle ki $p_{h,r}(x, t), q_{h,r}(x, t) \in V_{h,r}$ indirgenmiş yaklaşık çözümler olup

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = (\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t), \dots, \tilde{p}_{N_r}(t)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_r},$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = (\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \dots, \tilde{q}_{N_r}(t)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_r},$$

indirgenmiş katsayı vektörleridir. Bu durumda MİM problemi şöyledir: h.h.h. $t \in (0, T]$ için bul $p_{h,r}(x, t), q_{h,r}(x, t) \in V_{h,r}$ öyle ki

$$\begin{aligned} \langle \partial_t p_{h,r}, v_{h,r} \rangle_{\Omega_h} + a_h(p_{h,r}, v_{h,r}) + n_h(p_{h,r}, q_{h,r}, v_{h,r}; p_{h,r}) &= 0, \quad \forall v_{h,r} \in V_{h,r}, \\ \langle \partial_t q_{h,r}, v_{h,r} \rangle_{\Omega_h} + a_h(q_{h,r}, v_{h,r}) + n_h(p_{h,r}, q_{h,r}, v_{h,r}; q_{h,r}) &= 0, \quad \forall v_{h,r} \in V_{h,r}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

denklem sistemi sağlansın. Burada not etmek gerekirse $V_{h,r} \subset V_h$ olduğundan indirgenmiş baz vektörleri $\{\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)\}$ baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak

$$\phi_i^r(x) = \sum_{k=1}^N \Psi_{i,k} \phi_k(x), \quad i = 1, \dots, N_r, \quad (3.22)$$

formunda yazılabilir öyle ki $\Psi_i = (\Psi_{i,1}, \dots, \Psi_{i,N})^T \in \mathbb{R}^N$ vektörü i . indirgenmiş baz vektörü için katsayı vektörü olup indirgenmiş katsayı matrisi $\Psi = [\Psi_1 \dots \Psi_{N_r}] \in \mathbb{R}^{N \times N_r}$ şeklinde tanımlanır. İndirgenmiş baz $p_h(x, t)$ ve $q_h(x, t)$ argümanları için ayrı ayrı bulunur. Burada sadece $p_h(x, t)$ argümanı için indirgenmiş baz bulunması gösterilecektir, $q_h(x, t)$ argümanı için benzer işlemler yapılabilir. İndirgenmiş baz bulunması için DDA kullanılır. Tanım 2.14’de verilen bilgiler ışığında DDA ile bulunacak $\{\phi_1^r(x), \dots, \phi_{N_r}^r(x)\}$ bazı

$$\min_{\phi_1^r, \dots, \phi_{N_r}^r \in V_h} \frac{1}{J} \sum_{n=1}^J \left\| p_h^n(x) - \sum_{i=1}^{N_r} \langle p_h^n(x), \phi_i^r(x) \rangle_{\Omega_h} \phi_i^r(x) \right\|_{\Omega_h}^2 \quad (3.23)$$

$$\text{öyle ki } \langle \phi_i^r(x), \phi_j^r(x) \rangle_{\Omega_h} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_r,$$

optimizasyon problemini sağlar öyle ki $p_h^n(x) = p_h(x, t_n)$ $t = t_n$ anındaki ayrık çözümdür. Burada L^2 iç çarpımı M -ağırlıklı Euclid iç çarpımı şeklinde yazılabilir. Bunu görmek için M kütle matrisinin tanımı ve (3.22) açılımı kullanılarak aşağıdaki adımlar takip edilebilir

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \phi_i^r(x), \phi_j^r(x) \rangle_{\Omega_h} = \int_{\Omega_h} \phi_i^r(x) \phi_j^r(x) dx \\ &= \int_{\Omega_h} \left[\sum_{k=1}^N \Psi_{i,k} \phi_k(x) \right] \left[\sum_{l=1}^N \Psi_{j,l} \phi_l(x) \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Psi_{i,k} \Psi_{j,l} \int_{\Omega_h} \phi_k(x) \phi_l(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Psi_{i,k} \Psi_{j,l} M_{l,k} \\ &= \Psi_i^T M \Psi_j. \end{aligned}$$

Bu bilgiler ışığında (3.23) optimizasyon problemi

$$\min_{\Psi = [\Psi_1 \dots \Psi_{N_r}] \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{J-1} \sum_{n=1}^{J-1} (\mathbf{p}^n - \Psi \Psi^T \mathbf{p}^n) \quad \equiv \quad \min_{\Psi = [\Psi_1 \dots \Psi_{N_r}] \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{J-1} (\mathbf{P} - \Psi \Psi^T \mathbf{P}) \quad (3.24)$$

$$\text{öyle ki } \Psi_i^T M \Psi_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_r.$$

şeklini alır. (3.24) probleminde $\Psi = [\Psi_1 \dots \Psi_{N_r}] \in \mathbb{R}^{N \times N_r}$ matrisinin sütun vektörleri $\{\phi_1^r, \dots, \phi_{N_r}^r\}$ DDA baz fonksiyonlarının katsayı vektörleri olup DDA modları olarak

adlandırılırlar. $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times J}$ matrisi ise MTM'in ayrık çözüm vektörlerinin oluşturduğu çözüm matrisidir:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}^0 \ \mathbf{p}^1 \ \dots \ \mathbf{p}^{J-1}] \in \mathbb{R}^{N \times J}.$$

Tanım 2.14'de verildiği üzere (3.24) optimizasyon probleminin çözümleri için

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{M} \Psi_i = \sigma_i^2 \Psi_i, \quad i = 1, \dots, N_r.$$

özdeğer problemi çözümlmelidir. Bu durumda DDA modları olan $\{\Psi_1, \dots, \Psi_{N_r}\}$ vektörleri $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{P}$ matrisinin TDA'ndan gelen sol tekil vektörleri olan $\{\hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_{N_r}\}$ vektörleri için $\Psi_i = \mathbf{M}^{-1/2} \hat{\Psi}_i$ formülüyle hesaplanabilir, $i = 1, \dots, N_r$. Ayrıca, MTM çözüm vektörleri ile indirgenmiş çözüm vektörleri arasında

$$\mathbf{p}(t) \approx \hat{\mathbf{p}}(t) = \Psi \tilde{\mathbf{p}}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(t) = \Psi^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{p}}(t), \quad (3.25)$$

bağıntıları sağlanır öyle ki $\hat{\mathbf{p}}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tam boyutlu indirgenmiş yaklaşık çözüm vektörü iken $\tilde{\mathbf{p}}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_r}$ zamana bağlı indirgenmiş boyutlu katsayı vektörüdür.

Aynı işlemler takip edilerek $p_h(x, t)$ ve $q_h(x, t)$ argümanları için ayrı ayrı DDA baz modları bulunabilir. Daha açık olarak $\Psi_p \in \mathbb{R}^{N \times N_r^p}$ ve $\Psi_q \in \mathbb{R}^{N \times N_r^q}$ DDA baz modları sırasıyla $p_h(x, t)$ ve $q_h(x, t)$ argümanları için bulunan N_r^p ve N_r^q boyutlu modlar olsunlar. Bu durumda, (3.21) formundaki indirgenmiş sisteme ait olan matris-vektör formundaki MİM elde etmek için (3.12) MTM'de tam boyutlu çözüm vektörleri ile (3.25) bağıntısındaki dengi değiştirilip sistem denklemleri sırasıyla soldan Ψ_p^T ve Ψ_q^T ile çarpılarak düşük boyutlu alt uzay üzerine izdüşümü alınır. Bu işlemler sonrasında elde edilecek sırasıyla N_r^p ve N_r^q boyutlu denklemlerden oluşan MİM

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{A}}_p \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{p}}) &= \mathbf{0}, \\ \partial_t \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{A}}_q \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{q}}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak gerçekleşir. (3.26) denklemindeki indirgenmiş matris ve vektörler

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_p &= \Psi_p^T \mathbf{A} \Psi_p \in \mathbb{R}^{N_r^p \times N_r^p}, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{p}}) = \Psi_p^T \mathbf{f}(\Psi_p \tilde{\mathbf{p}}, \Psi_q \tilde{\mathbf{q}}; \Psi_p \tilde{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^{N_r^p}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_q &= \Psi_q^T \mathbf{A} \Psi_q \in \mathbb{R}^{N_r^q \times N_r^q}, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}; \tilde{\mathbf{q}}) = \Psi_q^T \mathbf{f}(\Psi_p \tilde{\mathbf{p}}, \Psi_q \tilde{\mathbf{q}}; \Psi_q \tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{N_r^q}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar. (3.26) nolu MİM de aynı (3.12) nolu MTM gibi OVA yöntemi ile zamanda ayrıklaştırılarak çözülebilir. (3.26) sisteminde dikkat edilecek olunursa MTM’de yer alan zamana bağlı türev terimi önündeki kütle matrisi, DDA baz modlarının M -ağırlıklı iç çarpıma göre dik olmasından dolayı

$$\Psi_p^T M \Psi_p = I_{N_r^p}, \quad \Psi_q^T M \Psi_q = I_{N_r^q},$$

bağıntılarını sağlayıp kaybolmaktadır öyle ki $I_{N_r^p} \in \mathbb{R}^{N_r^p \times N_r^p}$ ve $I_{N_r^q} \in \mathbb{R}^{N_r^q \times N_r^q}$ ilgili boyutlu birim matrislerdir.

Literatürde değişik şekilde DDA baz mod belirleme yöntemleri bulunmaktadır (Kutz, 2013; Quarteroni ve ark., 2016). Bu tez çalışmasında uygun DDA baz modlarının sayısını belirlemek için

$$\varepsilon(N_r) = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{J-1} \sigma_i^2}, \quad (3.27)$$

Formülüyle verilen bağıl bilgi içeriği (BBİ) kriteri kullanılacaktır. Uygun DDA baz mod sayısı olan N_r sayısını seçmek için verilmiş bir $\tau > 0$ toleransı için

$$1 - \varepsilon(N_r) < \tau,$$

bağıntısını sağlayan en küçük N_r tamsayısı alınır. Bu tez çalışmasında DDA baz modları sayısı belirlenirken BBİ kriteri $\tau > 0.0001$ toleransı için kullanılmıştır. Bu şekilde MTM’in dinamiği %99.99 oranında temsil edilebilmiştir.

3.4.1. İndirgenmiş Enerjinin Yapısı

Bu bölümde (3.4) sürekli enerjinin (3.26) MİM çözümleri ile oluşan indirgenmiş yaklaşık çözümler için indirgenmiş enerjinin de azalma özelliğinin korunması incelenecektir.

Yarı-ayrık çözüm vektörleri $\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ve dolayısıyla yarı-ayrık çözümler $p_h(x, t)$ ve $q_h(x, t)$ verilsin. Ayrıca, tam ayrık çözümler için oluşturulmuş MİM’in indirgenmiş katsayı çözüm vektörleri $\tilde{\mathbf{p}}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_r^p}$, $\tilde{\mathbf{q}}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_r^q}$ ve dolayısıyla indirgenmiş boyutlu çözümlerin katsayı vektörleri olan $\hat{\mathbf{p}}(t) = \Psi_p \tilde{\mathbf{p}}(t)$ ve $\hat{\mathbf{q}}(t) = \Psi_q \tilde{\mathbf{q}}(t)$

katsayıları için yarı-ayrık indirgenmiş çözümler $p_{h,r}(x,t)$ ve $q_{h,r}(x,t)$ verilsin. Bu durumda yarı-ayrık indirgenmiş enerji fonksiyoneli

$$E_{h,r}(p_{h,r}, q_{h,r}) = \frac{1}{2} a_h(p_{h,r}, p_{h,r}) + \frac{1}{2} a_h(q_{h,r}, q_{h,r}) + \frac{1}{4} \langle (p_{h,r}^2 + q_{h,r}^2)^2, 1 \rangle_{\Omega_h},$$

olacak şekilde yazılabilir. Yukarıdaki tanım kullanılarak tam ayrık indirgenmiş enerji fonksiyoneli

$$E_{h,r}^n(p_{h,r}, q_{h,r}) := E_{h,r}(p_{h,r}(x, t_n), q_{h,r}(x, t_n)), \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.5. Zaman boyutunun ayrıklaştırılmasında OVA yöntemi kullanıldığında elde edilen çözümler için (3.28) ayrık indirgenmiş enerji fonksiyoneli Δt değeri için hiçbir kısıtlama olmaksızın

$$E_{h,r}^{n+1}(p_{h,r}, q_{h,r}) \leq E_{h,r}^n(p_{h,r}, q_{h,r}), \quad \forall n,$$

zaman içinde azalma özelliğini gösterir.

İspat. Teoremin ispatı için Teorem 3.4'ün ispatında izlenen yolun aynısı izlenebilir. Bu sefer OVA yönteminin varyasyonel formda olan (3.21) sistemine uygulanmış hali ele alınır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle p_{h,r}^{n+1} - p_{h,r}^n, v_h \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(p_{h,r}^{n+1} + p_{h,r}^n, v_{h,r}) + \int_0^1 n_h(\hat{p}_{h,r}, \hat{q}_{h,r}, v_{h,r}; \hat{p}_{h,r}) d\omega &= 0, \quad \forall v_{h,r} \in V_{h,r}, \\ \frac{1}{\Delta t} \langle q_{h,r}^{n+1} - q_{h,r}^n, v_{h,r} \rangle_{\Omega_h} + \frac{1}{2} a_h(q_{h,r}^{n+1} + q_{h,r}^n, v_{h,r}) + \int_0^1 n_h(\hat{p}_{h,r}, \hat{q}_{h,r}, v_{h,r}; \hat{q}_{h,r}) d\omega &= 0, \quad \forall v_{h,r} \in V_{h,r}, \end{aligned}$$

öyle ki $t = t_n$ anındaki $p_{h,r}^n := p_{h,r}(x, t_n)$ ve $q_{h,r}^n := q_{h,r}(x, t_n)$ ayrık çözümleri için

$$\hat{p}_{h,r} := \omega p_{h,r}^{n+1} + (1-\omega) p_{h,r}^n, \quad \hat{q}_{h,r} := \omega q_{h,r}^{n+1} + (1-\omega) q_{h,r}^n,$$

olarak verilir. Teorem 3.4'dekine benzer şekilde ilk denklemde $v_{h,r} = p_{h,r}^{n+1} - p_{h,r}^n$ ve ikinci denklemde $v_{h,r} = q_{h,r}^{n+1} - q_{h,r}^n$ seçilip Teorem 3.4'ün ispatındaki aynı yol izlendiğinde

$$E_{h,r}^{n+1} - E_{h,r}^n = - \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\left(\|p_{h,r}^{n+1} - p_{h,r}^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|q_{h,r}^{n+1} - q_{h,r}^n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right)}_{\geq 0},$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\Delta t > 0$ olduğu kullanılarak

$$E_{h,r}^{n+1} - E_{h,r}^n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E_{h,r}^{n+1} \leq E_{h,r}^n \quad \forall n,$$

indirgenmiş enerjinin azalma özelliği her $\Delta t > 0$ için elde edilir.

□



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, periyodik sınır koşulları ile verilen (3.1)'deki (veya (3.2)'deki) reel GL denkleminin sayısal çözümleri çeşitli simülasyon örneklerinin sonuçları üzerinden gerek etkinlik gerekse hızlı çözüm elde edilebilmesi yönlerinden tartışılacaktır.

4.1. Sayısal Hatalar ve Yakınsama Mertebeleri

İlk olarak genel anlamda (1.1) karmaşık GL denkleminin SSEY ve OVA yöntemleri ile elde edilen sayısal çözümlerinin gerçek çözümlere yakınsama mertebeleri, gerçek çözümü olan 1- ve 2-boyutlu test problemleri üzerinden gösterilecektir. Bunun için (1.1) denklemini $q = \alpha = \beta = \mu = 1$ parametre değerleri ve $T = 1$ hedef zamanı için ele alınacaktır.

4.1.1. 1-Boyutlu Model

Öncelikle 1-boyutlu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ alanı (aralığı) için (1.1) karmaşık GL denklemini ele alınsın. Bu test probleminde çalışma aralığı olarak $\Omega = [0, 2\sqrt{2}\pi]$ aralığı kullanılsın. Verilen değerler için denklemin gerçek çözümü (Yan ve ark., 2015)

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\beta + \mu}{2}t}$$

olacak şekilde gerçekleşir. Verilen karmaşık gerçek çözüm için reel değerli argümanları

$$p(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\beta + \mu}{2}t\right), \quad q(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\beta + \mu}{2}t\right),$$

olarak hesaplanır. Başlangıç koşulları olan $p_0(x)$ ve $q_0(x)$ fonksiyonları gerçek çözümünden $t = 0$ için elde edilir. İlk olarak SSEY'nin yakınsaklık mertebesini görmek için (1.1) denkleminin çözümleri $\Delta t = 0.0001$ değeri sabit tutularak farklı K_x aralık sayısı değerleri için bulunacaktır. Tablo 4.1'de LGL quadrature mertebesi $P = 2$ için sonuçlar verilmiştir. Sonuçlar gösteriyor ki SSEY ile elde edilen sonuçlar gerçek çözüme 4. mertebe yakınsaklıkla iyi bir hassasiyetle yaklaşmaktadır. Bu sonuç SSEY için beklenen $O(h^{2+P}) = O(K_x^{-2-P})$ yakınsama mertebesi ile örtüşmektedir (Li ve Wang, 2017).

Tablo 4.1. 1-boyutlu karmaşık GL denklemi için SSEY hataları ve yakınsama mertebeleri

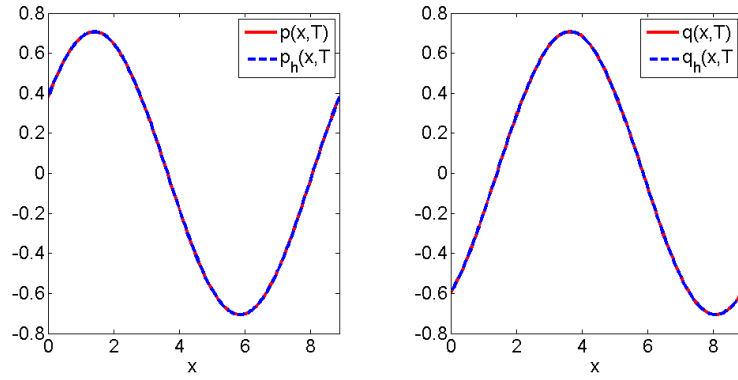
K_x	$\ p(x, T) - p_h(x, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe	$\ q(x, T) - q_h(x, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe
10	2.94e-04	-	2.94e-04	-
20	1.84e-05	4.00	1.84e-05	4.00
40	1.15e-06	4.00	1.15e-06	4.00
80	7.30e-08	3.98	7.30e-08	3.98

İkinci olarak, uzay boyutundaki K_x aralık sayısı sabit tutularak zaman ayrıklaştırmasında kullandığımız OVA yönteminin yakınsama mertebesine bakılacaktır. Bunun için $K_x = 100$ aralıktan oluşan bir bölüntüde yine $P = 2$ LGL quadrature mertebesi için farklı Δt adımları ile elde edilen çözümlere ait hatalar ve yakınsama mertebeleri Tablo 4.2’de verilmiştir. Sonuçlara göre OVA yönteminin yakınsama mertebesi beklendiği gibi $O(\Delta t^2)$ yakınsama mertebesi ile uyumlu biçimde 2 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 4.2. 1-boyutlu karmaşık GL denklemi için OVA yöntemi hataları ve yakınsama mertebeleri

Δt	$\ p(x, T) - p_h(x, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe	$\ q(x, T) - q_h(x, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe
0.1	4.43e-03	-	4.43e-03	-
0.05	1.09e-03	2.02	1.09e-03	2.02
0.025	2.71e-04	2.01	2.71e-04	2.01
0.0125	6.75e-05	2.01	6.75e-05	2.01
0.00625	1.68e-05	2.00	1.68e-05	2.00

Şekil 4.1’de $\Delta t = 0.01$ ve $K_x = 100$ değerleri için $T = 1$ hedef zamanındaki çözümler verilmiştir. Sonuçlar gösteriyor ki yaklaşık çözümler gerçek dalgayı tam olarak yakalamaktadır.



Şekil 4.1. 1-boyutlu karmaşık GL denklemleri için $T = 1$ hedef zamanındaki çözümler

4.1.2. 2-Boyutlu Model

Bu sefer 2-boyutlu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ alanı için (1.1) karmaşık GL denklemleri ele alınsın. Bu test probleminde çalışma alanı olarak $\Omega = [0, 4\pi]^2$ dörtgensel alanı kullanılsın. Verilen değerler için denklemin gerçek çözümü (Yan ve ark., 2015)

$$u(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\beta + \mu}{2}t}$$

olacak şekilde gerçekleşir. Verilen karmaşık gerçek çözüm için reel değerli argümanları

$$p(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\beta + \mu}{2}t\right), \quad q(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\beta + \mu}{2}t\right).$$

olarak hesaplanır. Başlangıç koşulları olan $p_0(x, y)$ ve $q_0(x, y)$ fonksiyonları gerçek çözümden $t = 0$ için elde edilir. İlk olarak yine SSEY'nin yakınsaklık mertebesini görmek için (1.1) denkleminin çözümleri $\Delta t = 0.0001$ değeri sabit tutularak farklı $K_x = K_y$ aralık sayısı değerleri için bulunacaktır. Tablo 4.3'de LGL quadrature mertebesi $P = 2$ için sonuçlar verilmiştir. Sonuçlar gösteriyor ki 2-boyutlu model için de SSEY ile elde edilen sonuçlar gerçek çözüme beklendiği gibi 4. mertebe yakınsaklıkla iyi bir hassasiyetle yaklaşmaktadır.

Tablo 4.3. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için SSEY hataları ve yakınsama mertebeleri

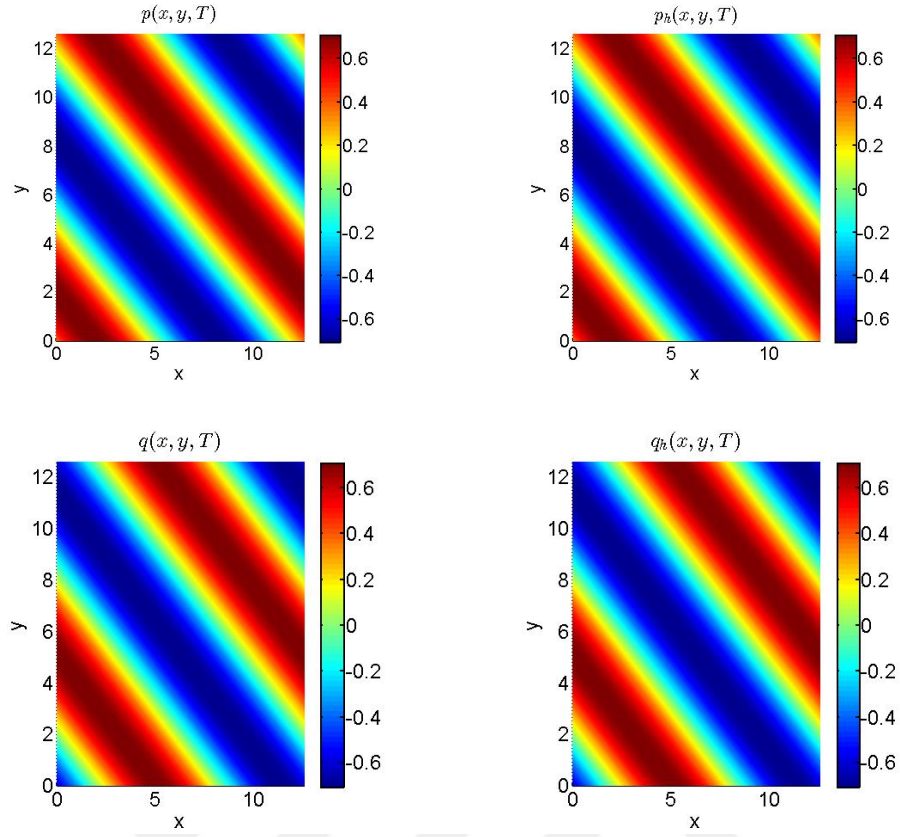
K_x, K_y	$\ p(x, y, T) - p_h(x, y, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe	$\ q(x, y, T) - q_h(x, y, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe
10	1.67e-03	-	1.67e-03	-
20	1.07e-04	3.97	1.07e-04	3.97
40	6.74e-06	3.99	6.74e-06	3.99
80	4.25e-07	3.99	4.25e-07	3.99

İkinci olarak, uzay boyutundaki $K_x = K_y$ aralık sayıları sabit tutularak zaman ayrıklaştırmasında kullandığımız OVA yönteminin yakınsama mertebesine bakılacaktır. Bunun için $K_x = K_y = 100$ değerleri için oluşan bir bölüntüde yine $P = 2$ LGL quadrature mertebesi için farklı Δt adımları ile elde edilen çözümlere ait hatalar ve yakınsama mertebeleri Tablo 4.4’de verilmiştir. Sonuçlara göre OVA yönteminin yakınsama mertebesi yine gerektiği gibi 2 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 4.4. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için OVA yöntemi hataları ve yakınsama mertebeleri

Δt	$\ p(x, y, T) - p_h(x, y, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe	$\ q(x, y, T) - q_h(x, y, T)\ _{L^2(\Omega_h)}$	Mertebe
0.1	1.87e-02	-	1.87e-02	-
0.05	4.61e-03	2.02	4.61e-03	2.02
0.025	1.14e-03	2.01	1.14e-03	2.01
0.0125	2.84e-04	2.01	2.84e-04	2.01
0.00625	7.10e-05	2.00	7.10e-05	2.00

Şekil 4.2’de ise $\Delta t = 0.01$ ve $K_x = K_y = 100$ değerleri için $T = 1$ hedef zamanındaki gerçek ve yaklaşık çözümler verilmiştir. Sonuçlar gösteriyor ki yaklaşık çözümler 2-boyutlu gerçek dalgayı tam olarak yakalamaktadır.



Şekil 4.2. 2-boyutlu karmaşık GL denklemi için $T = 1$ hedef zamanındaki gerçek (sol) ve yaklaşık (sağ) çözümler

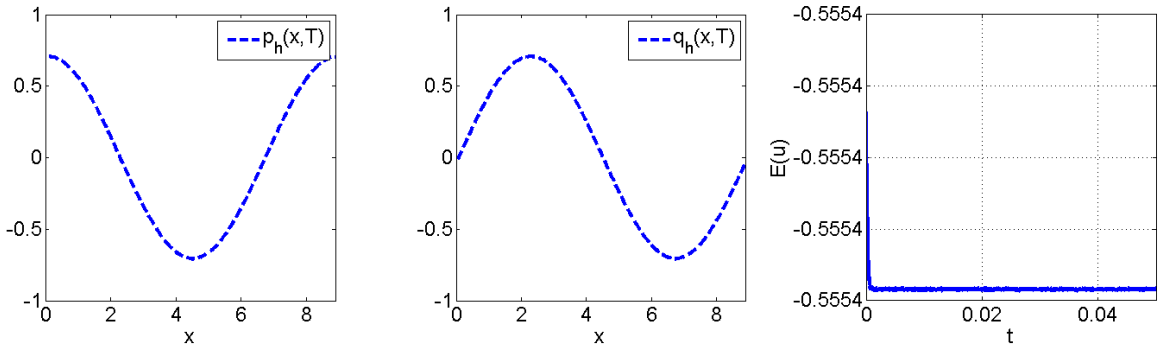
4.2. Reel GL Denklemi için Mertebesi İndirgenmiş Modelleme

Bu bölümde (3.1) reel GL denkleminin MTM ve MİM çözümleri kıyaslanacak ve çözümlerin ne kadar hızlı elde edilebildiği gösterilecektir. MİM oluşturulması için öncelikle MTM çözülecektir. Oluşan ayrık çözümlerin oluşturduğu çözüm matrisine Bölüm 3.4’de açıklandığı gibi DDA yöntemi uygulanarak küçük bir N_r boyutlu MİM oluşturulup düşük mertebeli yaklaşık sonuçlar elde edilecektir.

4.2.1. 1-Boyutlu Reel GL Denklemi

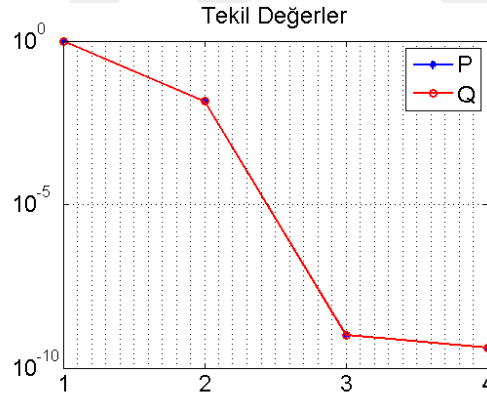
Bu bölümde Bölüm 4.1.1’deki 1-boyutlu modelde $\beta = \mu = 0$ değerleri için reel GL denklemi üzerinden MİM incelenecektir. Denkleminiz $\Omega = [0, 2\sqrt{2}\pi]$ aralığında $T = 0.1$ hedef zamanı ve $\alpha = 1$ değeri için ele alınsın (Yan ve ark., 2015). Bölüntümüz $K_x = 100$ aralık ve LGL mertebesi $P = 2$ olacak şekilde oluşturulsun. $\Delta t = 0.01$ için $T = 0.1$ hedef

zamanındaki mertebesi tam çözümler ve enerji grafiği Şekil 4.3’de verilmiştir. Görüldüğü üzere reel GL denklemi için enerji azalma özelliği sayısal çözümler tarafından sağlanmıştır.



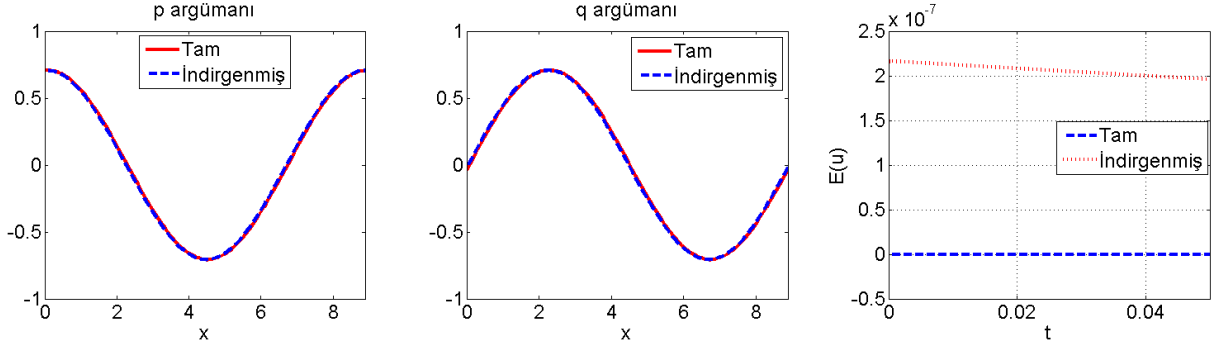
Şekil 4.3. 1-boyutlu reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji grafiği

Çözümler matrisine TDA uygulanması sonucu oluşan tekil değerler Şekil 4.4’de verilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere problemin durağan olma yapısından dolayı çözümler zamanla çok fazla değişmediğinden çözüm matrisinin rankı 4 olup sadece 2 DDA baz modu yeterli denklem karakteristiğini yakalamayı sağlamaya aday olarak gözükmemektedir.

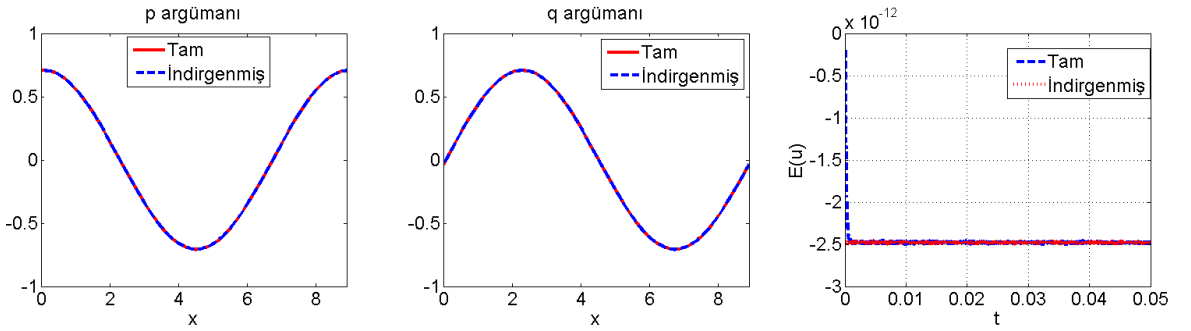


Şekil 4.4. 1-boyutlu reel GL denklemi için çözüm matrislerinin tekil değerleri

DDA baz modu sayısı $N_r = 1$ ve $N_r = 2$ için tam ve indirgenmiş mertebeli çözümler ile ilgili enerji grafikleri Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da verilmiştir. $N_r = 1$ değeri için indirgenmiş çözümler tam çözümlere yakın fakat enerji grafiği tam yakalanmamakta iken $N_r = 2$ değeri için hem indirgenmiş çözümler hem de indirgenmiş enerji, tam çözüm ve tam enerjiyi çok iyi yakalamaktadır. (3.27) ile tanımlanan BBİ kriterine göre $N_r = 2$ DDA mod sayısı %99.99 oranında sistem karakteristiğini yansıtmaktadır.



Şekil 4.5. 1-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 1$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği



Şekil 4.6. 1-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 2$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği

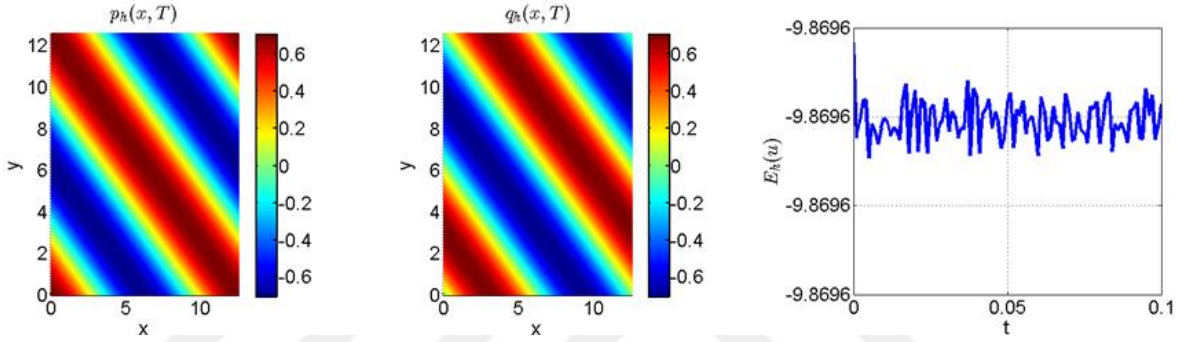
Son olarak Tablo 4.5’de artan DDA baz modu sayısına göre tam ve indirgenmiş çözümler arasındaki hatalar ve MİM’in ne kadar hızlı çözüm ürettiğini gösterir hızlanma katsayısı verilmiştir. Beklendiği gibi DDA baz fonksiyonu sayısı arttıkça hataların azaldığı ve $N_r = 2$ değerinden daha büyük değerlere ihtiyaç olmadığı gözlemlenmiştir. Diğer yandan tam ve indirgenmiş enerjiler arasındaki hata azalmaya devam etmiştir. Tablo 4.5’in son sütununda yer alan hızlanma katsayıları ise MİM’in MTM’e göre ortalama 2.5 kat daha hızlı çalıştığını göstermektedir.

Tablo 4.5. 1-boyutlu reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar

N_r	$\ p_h(x, T) - p_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ q_h(x, T) - q_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ E_h(u_h) - E_{h,r}(u_{h,r})\ _{L^\infty}$	Hızlanma
1	3.73e-02	3.73e-02	3.90e-07	2.71
2	7.45e-02	7.45e-02	4.20e-12	2.51
3	7.45e-02	7.45e-02	5.57e-13	2.50
4	7.45e-02	7.45e-02	8.36e-14	2.39

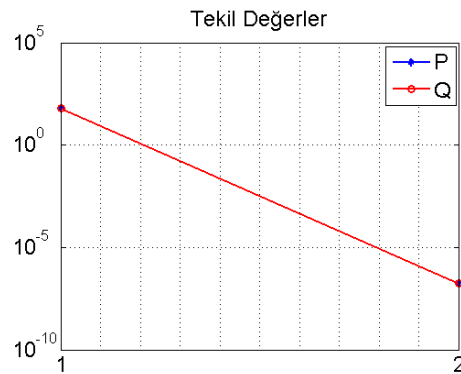
4.2.2. 2-Boyutlu Reel GL Denklemi (Gerçek Çözümlü)

Bu bölümde Bölüm 4.1.2'deki 2-boyutlu modelde $\beta = \mu = 0$ değerleri için reel GL denklemi üzerinden MİM incelenecektir. Denklemimiz $\Omega = [0, 4\pi]^2$ aralığında $T = 0.1$ hedef zamanı ve $\alpha = 1$ değeri için ele alınsın (Yan ve ark., 2015). Bölüntümüz $K_x = K_y = 100$ aralık ve LGL mertebesi $P = 2$ olacak şekilde oluşturulsun. $\Delta t = 0.01$ için $T = 0.5$ hedef zamanındaki mertebesi tam çözümler ve enerji grafiği Şekil 4.7'de verilmiştir. Görüldüğü üzere 2-boyutlu alan üzerinde de reel GL denklemi için enerji azalma (artmama) özelliği sayısal çözümler tarafından sağlanmıştır.



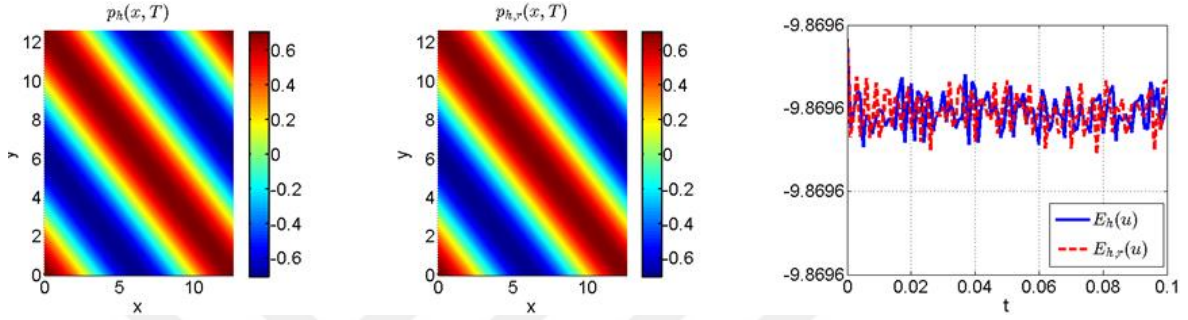
Şekil 4.7. 2-boyutlu (gerçek çözömlü) reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji grafiğı

Çözümler matrisine TDA uygulanması sonucu oluşan tekil değerler Şekil 4.8'de verilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere yine problemin durağan olma yapısından ötürü çözümler zamanla çok fazla değişmediğinden çözüm matrisinin rankı 2 olup sadece 2 boyutlu bir indirgenmiş model denklem karakteristiğini yakalamayı sağlamaya yetmektedir.

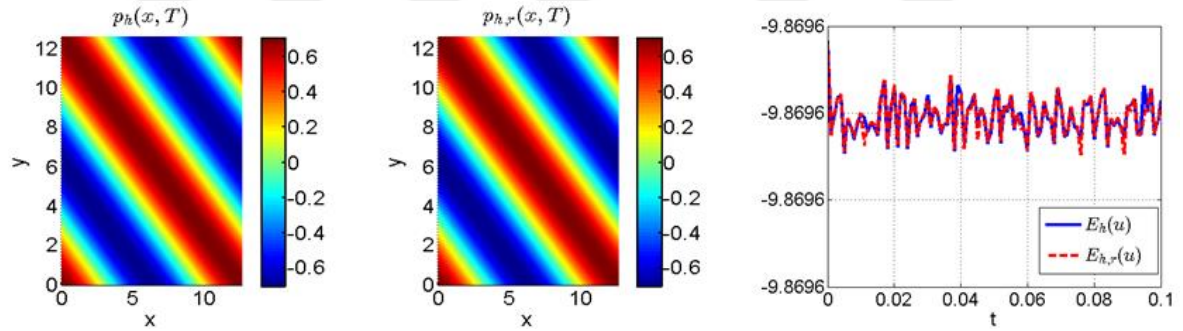


Şekil 4.8. 2-boyutlu (gerçek çözömlü) reel GL denklemi için çözüm matrislerinin tekil değerleri

DDA baz modu sayısı $N_r = 1$ ve $N_r = 2$ için $p_h(x, T)$ argümanına ait tam ve indirgenmiş mertebeli çözümler ile ilgili enerji grafikleri Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da verilmiştir. Hem $N_r = 1$ hem de $N_r = 2$ değerleri için indirgenmiş çözümler ve indirgenmiş enerji, tam çözüm ve tam enerjiyi çok iyi yakalamaktadır. (3.27) ile tanımlanan BBİ kriterine göre $N_r = 1$ DDA mod sayısı %99.99 oranında sistem karakteristiğini yansıtmaktadır.



Şekil 4.9. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denkleminin $N_r = 1$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği



Şekil 4.10. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denkleminin $N_r = 2$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve enerji grafiği

Son olarak Tablo 4.6'da artan DDA baz modu sayısına göre tam ve indirgenmiş çözümler arasındaki hatalar ve MİM'in ne kadar hızlı çözüm ürettiğini gösterir hızlanma katsayıları verilmiştir. BBİ kriterine göre $N_r = 1$ DDA mod sayısı yeterli olacağından $N_r = 1$ DDA mod sayısı için beklendiği gibi hem indirgenmiş çözümler hem de indirgenmiş enerji tam çözüm ve tam enerjiyi gayet iyi bir şekilde yakalamıştır. $N_r = 2$ için ise çözüm matrisinin rankı 2 olduğundan makine hassasiyetinde hatalar gerçekleşmiştir. Tablo 4.6'nın son sütununda yer alan hızlanma katsayıları ise MİM'in MTM'e göre ortalama 26 kat daha hızlı çalıştığını

göstermektedir ki 2-boyutlu alanlarda bağımsızlık derecesi daha fazla olduğundan MİM yönteminin etkinliği daha fazla öne çıkmıştır.

Tablo 4.6. 2-boyutlu (gerçek çözümlü) reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar

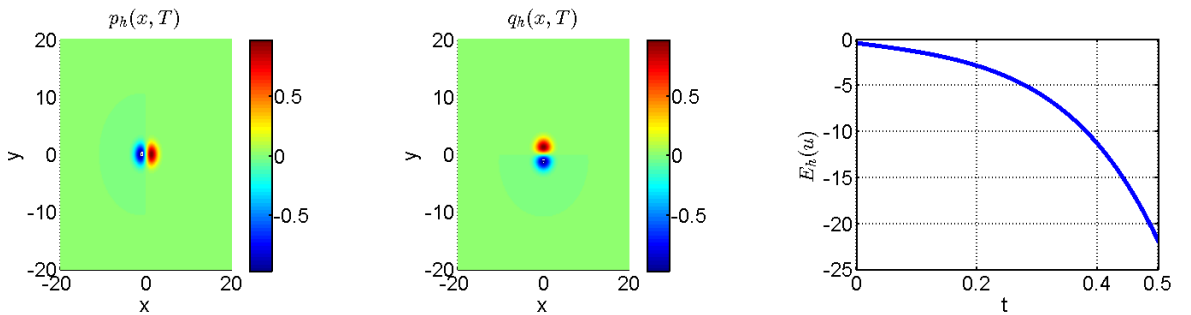
N_r	$\ p_h(x, T) - p_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ q_h(x, T) - q_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ E_h(u_h) - E_{h,r}(u_{h,r})\ _{L^\infty}$	Hızlanma
1	1.95e-09	1.95e-09	3.24e-11	27.62
2	1.86e-13	2.20e-13	1.66e-11	26.11

4.2.3. 2-Boyutlu Reel GL Denklemi

Bu bölümde gerçek çözümü olmayan 2-boyutlu reel GL denklemi için MİM incelenecektir. Denkleminiz bu sefer $\alpha = 5$ değeri için $\Omega = [-20, 20]^2$ dörtgeni üzerinde $T = 0.5$ hedef zamanı için ele alınsın (Yan ve ark., 2015). Bölüntümüz $K_x = K_y = 100$ aralık ve LGL mertebesi $P = 2$ olacak şekilde oluşturulsun. Başlangıç koşulları olarak

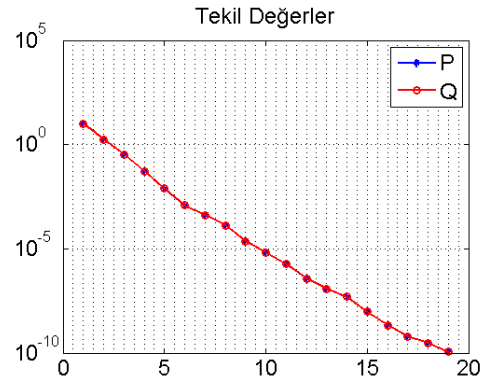
$$p_0(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-(x^2+y^2)}, \quad q_0(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} y e^{-(x^2+y^2)},$$

fonksiyonları alınsın. $\Delta t = 0.01$ için $T = 0.5$ hedef zamanındaki mertebesi tam çözümler ve de enerji grafiği Şekil 4.11’de verilmiştir. Görüldüğü üzere denkleminiz bu sefer durağan yapıda olmadığından sayısal çözümler için enerji azalma özelliği daha belirgindir.

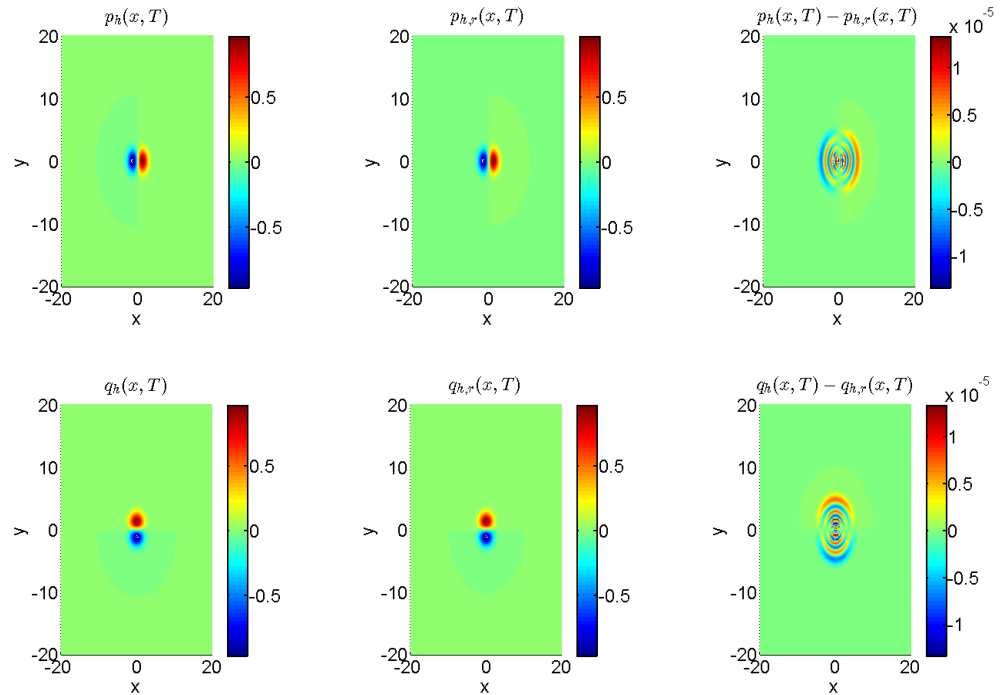


Şekil 4.11. 2-boyutlu reel GL denklemi için tam mertebeli çözümler ve enerji ($\alpha = 5$)

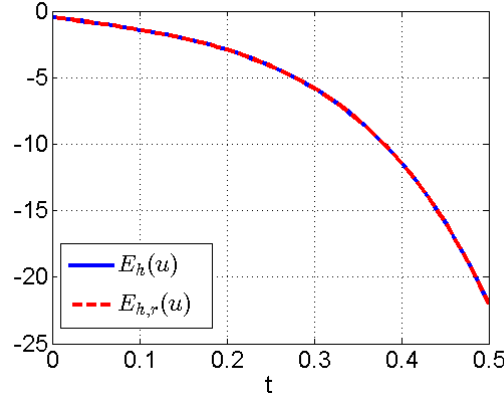
Çözümler matrisine TDA uygulanması sonucu oluşan tekil değerler Şekil 4.12’de verilmiştir. Problem durağan yapıda bir problem olmayıp çözümler zamanla değişmekte olduğundan çözüm matrisinin rankı bu sefer 19 olarak gerçekleşmiştir. (3.27) ile tanımlanan BBİ kriterine göre $N_r := N_r^p = N_r^q = 7$ DDA mod sayısı %99.99 oranında sistem karakteristiğini yansıtmaktadır. DDA baz modu sayısı $N_r = 7$ için tam ve indirgenmiş mertebeli çözümler ve hatalar Şekil 4.13’de verilmiştir. İlgili enerji grafiği ise Şekil 4.14’de verilmiştir. İndirgenmiş enerjinin tam mertebeli enerjiyi çok iyi yakaladığı ve enerjinin azaldığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4.12. 2-boyutlu reel GL denklemleri için çözüm matrislerinin tekil değerleri ($\alpha = 5$)



Şekil 4.13. 2-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 7$ DDA baz modu için indirgenmiş çözümleri ve çözüm hataları ($\alpha = 5$)



Şekil 4.14. 2-boyutlu reel GL denkleminin $N_r = 7$ DDA baz modu için indirgenmiş enerji grafiği ($\alpha = 5$)

Son olarak Tablo 4.7’de artan DDA baz modu sayısına göre tam ve indirgenmiş çözümler arasındaki hatalar ve MİM’in ne kadar hızlı çözüm ürettiğini gösterir hızlanma katsayıları verilmiştir. Beklendiği gibi DDA mod sayısı arttıkça indirgenmiş çözümler ve indirgenmiş enerji giderek tam mertebeli çözüm ve enerjiye yaklaşmaktadır. BBI kriterine göre seçtiğimiz $N_r = 7$ DDA mod sayısı için kabul edilebilir yeterlilikte ve etkinlikte sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir. Tablo 4.7’nin son sütununda yer alan hızlanma katsayıları ise MİM’in MTM’e göre ortalama 35-80 kat daha hızlı çalıştığını göstermektedir. Doğal olarak DDA mod sayısı arttıkça hızlanma oranı da azalmaktadır.

Tablo 4.7. 2-boyutlu reel GL denklemi için artan DDA baz fonksiyonu sayısına göre hatalar

N_r	$\ p_h(x, T) - p_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ q_h(x, T) - q_{h,r}(x, T)\ _{L^2}$	$\ E_h(u_h) - E_{h,r}(u_{h,r})\ _{L^\infty}$	Hızlanma
1	4.78e-01	4.78e-01	2.08e+00	87.11
2	9.70e-02	9.70e-02	5.29e-01	81.36
3	1.57e-02	1.57e-02	2.28e-02	66.72
4	2.31e-03	2.31e-03	1.66e-03	68.36
5	3.48e-04	3.48e-04	2.75e-04	54.60
6	8.65e-05	8.65e-05	1.20e-04	51.89
7	4.02e-05	4.02e-05	4.50e-06	45.95
8	6.10e-06	6.10e-06	3.20e-07	48.08
9	1.51e-06	1.51e-06	7.82e-08	51.70
10	4.12e-07	4.12e-07	7.43e-09	47.25
11	8.92e-08	8.92e-08	2.93e-10	48.85
12	3.16e-08	3.16e-08	7.74e-12	48.56
13	1.02e-08	1.02e-08	5.00e-12	42.32
14	1.42e-09	1.42e-09	5.00e-12	41.45
15	2.38e-10	2.38e-10	2.38e-13	35.46
16	9.55e-11	9.55e-11	3.45e-13	40.12
17	5.76e-11	5.76e-11	3.16e-13	38.74
18	1.33e-11	1.33e-11	3.34e-13	37.19
19	2.23e-12	2.24e-12	3.06e-13	35.48

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bir ve iki boyutlu reel GL denklemi uzayda SSEY ve zamanda OVA yöntemi ile ayrıklaştırılarak sayısal olarak çözülmüştür. Her iki yöntem için de teorik yakınsama mertebelerinin gerçekleştiği hesaplanan sayısal hatalar ile gösterilmiştir. Reel GL denklemi için tanımlanmış olan Lyapunov enerji fonksiyonelinin zaman içinde azalma özelliği hem teorik olarak gösterilmiş hem de sayısal sonuçlarla da söz konusu azalma özelliğinin korunduğu gözlemlenmiştir.

Ayrıca model indirgeme yöntemleri kullanılarak sayısal çözümlerin daha hızlı çözülebilmesi sağlanmıştır. İndirgenmiş ve tam mertebeli çözümlere ait sonuçlar ve enerji grafikleri, indirgenmiş model ile elde edilen sonuçların da tam mertebeli sonuçlar gibi hassas olduğunu ve enerjinin azalma özelliğini de koruduğunu göstermiştir.

Bundan sonraki aşamada reel GL denkleminin üç boyutlu uzay alanlarında çalışılması planlanmaktadır. Ayrıca zamanda ayrıklaştırma yöntemi olarak yakınsama mertebesi 2'den daha yüksek olan yöntemler üzerinde araştırma yapılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Bernard, H., Islas, A., ve Schobe, C. M. 2007. Conservation of phase properties using exponential integrators on the cubic Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.*, 225, 284-299.
- Bu, C. 1994. On the Cauchy problem for the 1+2 complex Ginzburg-Landau equation. *J Aust Math Soc ser B*, 36, 313–324.
- Celledoni, E., Grimm, V., McLachlan, R. I., McLaren, D. I., O’Neale, D. J., ve Owren, B. 2012. Preserving energy resp. dissipation in numerical PDEs using "Average Vector Field" method. *Journal of Computational Physics*, 231, 6770-6789.
- Cross, M. C. ve Hohenberg, P. C. 1993. Pattern Formation Outside of Equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65, 851-1089.
- Deang, J., Gunzburger, M. D., ve Du, Q. 2002. Modeling and Computation of Random Thermal Fluctuations and Material Defects in the Ginzburg–Landau Model for Superconductivity. *Journal of Computational Physics*, 181(1), 45-67.
- Dehghan, M. ve Sabouri, M. 2013. A Legendre spectral element method on a large spatial domain to solve the predator-prey system modeling interacting populations. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 1028-1038.
- DiPrima, R. C., Eckhaus, W., ve Segel, L. A. 1971. Non-Linear Wave-Number Interaction in Near-Critical Two-Dimensional Flows. *J. Fluid Mech.*, 49, 705-744.
- Doering, C. R., Gibbon, J. D., Holm, D. D., ve Nicolaenko, B. 1988. Low-dimensional behaviour in the complex Ginzburg–Landau equation. *Nonlinearity*, 1, 279-309.
- Du, Q. 1998. Discrete gauge invariant approximations of time dependent Ginzburg-Landau model of superconductivity. *Math. Comput*, 67, 965-986.
- Du, Q., Gunzburger, M. D., ve Deang, J. 1993. Finite element approximation of a periodic Ginzburg-Landau model for type-II superconductors. *Numer. Math*, 64, 85-114.
- Du, Q., Gunzburger, M. D., ve Peterson, J. S. 1992. Analysis and Approximation of the Ginzburg–Landau Model of Superconductivity. *SIAM Rev.*, 34(1), 54–81.
- Du, Q., Nicolaidis, R. A., ve Wu, X. 1998. Analysis and convergence of covolume approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, 1049-1072.
- Duan, J. ve Holmes, P. 2009. Fronts, domain walls and pulses in a generalized Ginzburg-Landau equation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 38(1), 77 - 97.
- Efremidis, N. K., Christodoulides, D. N., ve Hizanidis, K. 2007. Two-dimensional discrete Ginzburg-Landau solitons. *Phys. Rev. A*, 76, 043839.

- Ginzburg, V. L. ve Landau, L. D. 1950. On the Theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20, 1064-1082.
- Gnidaglia, J. M. ve Heron, B. 1987. Dimension of the attractor associated to the Ginzburg-Landau equation. *Phys D*, 28, 282-304.
- Hairer, E. ve Lubich, C. 2014. Energy-diminishing integration of gradient systems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 34(2), 452-461.
- Hoz, F. d. ve Vadilo, F. 2008. An exponential time differencing method for the nonlinear Schrödinger equation. *Comput. Phys. Commun.*, 179, 449-456.
- Karasözen, B. ve Uzunca, M. 2018. Energy preserving model order reduction of the nonlinear Schrodinger equation. *Advances in Computational Mathematics*, 44, 1769-1796.
- Karasözen, B., Akkoyunlu, C., ve Uzunca, M. 2015. Model order reduction for nonlinear Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 258, 509-519.
- Karasözen, B., Uzunca, M., Sariaydin-Filibelioglu, A., ve Yücel, H. 2018. Energy Stable Discontinuous Galerkin Finite. *International Journal of Computational Methods*, 15, 403-419.
- Kassam, A. ve Trefethen, L. N. 2005. Fourth-order time-stepping for stiff PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26, 1214-1233.
- Kengne, E. ve Vaillancourt, R. 2009. Propagation of solitary waves on lossy nonlinear transmission lines. *Int. J. Modern Phys. B*, 1, 1-18.
- Kengne, E., Tadmon, C., Nguyen-Ba, T., ve Vaillancourt, R. 2009. On the dissipative complex Ginzburg-Landau equation governing the propagation of solitary pulses in dissipative nonlinear transmission lines. *Chin. J. Phys.*, 47, 80-90.
- Kuramoto, Y. 1984. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Cilt Series in Synergetics 19). New York: Springer.
- Kutz, J. N. 2013. *Data-Driven Modeling & Scientific Computation: Methods for Complex Systems & Big Data*. Oxford: Oxford University Press.
- Larson, M. G. ve Bengzon, F. 2013. *Theory, Implementation and Applications*. (T. J. Barth, M. Griebel, D. E. Keyes, R. M. Nieminen, D. Roose, & T. Schlick, Dü) London: Springer.
- Levmore, C. D. ve Oliver, M. 1996. The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem. *Lectures in Appl Math*, 31, 141-190.
- Li, H. ve Wang, Y. 2017. An averaged vector field Legendre spectral element method for the nonlinear Schrödinger equation. *International journal of computer mathematics*, 94(6), 1196-1218.

- Lin, M.-m. ve Duan, W.-s. 2005. Wave packet propagating in an electrical transmission line. *Chaos Solitons Fractals*, 24(1), 191-196.
- London, F. ve London, H. 1935. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 149(866), 71-88.
- Lumley, J. L. 1967. The structure of inhomogeneous turbulent flows. A. M. Yaglom, & V. I. Tatarsky (Dü) içinde, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (s. 166). Moscow: Nauka.
- Ndzana, F. I., Mohamadou, A., ve Kofane, T. C. 2007. Modulated waves and chaotic-like behaviours in the discrete electrical transmission line. *J. Phys. D: Appl. Phys*, 40, 3254-3262.
- Newell, A. C. ve Whitehead, J. A. 1969. Finite Bandwidth, Finite Amplitude Convection. *J. Fluid Mech.*, 38, 279-303.
- Newell, A. C. ve Whitehead, J. A. 1971. Review of the Finite Bandwidth Concept. H. Leipholz (Dü.), *International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Symposium on Instability of Continuous Systems* içinde (s. 279-303). Berlin: Springer-Verlag.
- Newell, A. C., Passot, T., ve Lega, J. 1993. Order Parameter Equations for Patterns. *Annual Rev. Fluid Mech.*, 25, 399-453.
- Quarteroni, A. 2017. *Numerical Models for Differential Problems*. Cham: Springer International Publishing.
- Quarteroni, A., Manzoni, A., ve Negri, F. 2016. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations* (Cilt 92). (P. Biscari, C. Ciliberto, M. Ledoux, W. J. Runggaldier, L. Ambrosio, & A. Quarteroni, Dü) Switzerland: 123.
- Renninger, W. H., Chong, A., ve Wise, F. W. 2008. Dissipative solitons in normal-dispersion fiber lasers. *Phys. Rev. A*, 77, 023814.
- Segel, L. A. 1969. Distant Side-Walls Cause Slow Amplitude Modulation of Cellular Convection. *J. Fluid Mech.*, 38, 203-224.
- Soto-Crespo, J. M. ve Akhmediev, N. 2005. Exploding soliton and front solutions of the complex cubic–quintic Ginzburg–Landau equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 69(5-6), 526-536.
- Sun, Z. Z. ve Zhu, Q. 1998. On Tsertsvadze’s difference scheme for the Kuramoto-Tsuzuki equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 98, 289-304.
- Tsertsvadze, G. Z. 1991. On the convergence of difference schemes for the Kuramoto-Tsuzuki equation and for systems of reaction diffusion type. *J. Comput. Math. Math. Phys.*, 31, 698-707.

- Tsoy, E. N., Ankiewicz, A., ve Akhmediev, N. 2006. Dynamical models for dissipative localized waves of the complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. Rev. E*, 73, 036621.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., ve Topp, L. 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, 23(9), 805-823.
- Uzunca, M. ve Karasözen, B. 2017. Energy Stable Model Order Reduction for the Allen-Cahn Equation. P. Benner, M. Ohlberger, A. Patera, G. Rozza, & K. Urban (Dü) içinde, *Model Reduction of Parametrized Systems* (s. 403-419). Cham: Springer International Publishing.
- Volkwein, S. 2010. *Proper Orthogonal Decomposition: Applications in Optimization and Control*. Austria: Karl-Franzens-Universität Graz.
- Volkwein, S. 2011. *Model Reduction Using Proper Orthogonal Decomposition*. Austria: Karl-Franzens-Universität Graz.
- Wang, Q. ve Wang, Z. D. 1996. Simulating the time-dependent $d_{x^2-y^2}$ Ginzburg-Landau equations using the finite-element method. *Phys. Rev. B*, 54, R15645.
- Willers, J. ve Twizell, E. H. 2003. A finite-difference solution of the Ginzburg-Landau equation. *J. Differ. Eq. Appl.*, 9, 1059-1068.
- Yan, Y., Frederick, I. M., ve Weizhong, D. 2015. A new compact finite difference scheme for solving the complex Ginzburg-Landau equation. *Applied Mathematics and Computation*, 260, 269-287.

ÖZGEÇMİŞ

1. Kişisel Bilgiler

Ad Soyad

Şeyma GÜNDOĞDU