



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GOLDİE-SS-TÜMLENMIŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATİH GÖMLEKSİZ

HAZİRAN

**FATİH
GÖMLEKSİZ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

HAZİRAN 2023

GOLDİE-SS-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

FATİH GÖMLEKSİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Fatih GÖMLEKSİZ tarafından hazırlanan “Goldie-SS-Tümlemiş Modüller” isimli tez çalışması aşağıdaki jüri OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul görmüştür.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan: Doç. Dr. Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 05/06/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Fatih GÖMLEKSİZ

05/06/2023

GOLDİE-SS-TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatih GÖMLEKSİZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2023

ÖZET

Bu çalışmada, Goldie-ss-tümlenmiş modül kavramı, $T\beta_{ss}^*W$ gösterimi ile verilen ve X modülünün T ve W alt modülleri için $(T + W)/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ ve $(T + W)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W$ koşullarını sağlayan β_{ss}^* bağıntısı yardımıyla belirlenen bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı kullanılarak Goldie-ss-tümlenmiş modüller tanımlanmış ve birtakım özellikleri incelenmiştir. Belirli koşullar altında β_{ss}^* bağıntısını sağlayan $\gamma: X \rightarrow \mathbb{Z}$ epimorfizmasının ve β_{ss}^* bağıntısının maksimal alt modüllerdeki uygulaması incelenmiştir. Ayrıca Goldie-ss-yükseltilebilir modüller kavramının temel özellikleri ve genellemeleri β_{ss}^* bağıntısı yardımıyla, belirlenmiştir. Bu bağıntı yardımıyla ayrıca Goldie-ss-yükseltilebilir modüller tanımlanarak önemli özellikleri belirlenmiştir.

Sayfa Adedi : 54

Anahtar Kelimeler : β_{ss}^* bağıntısı, Basit alt modül, Bir modülün desteği,
Goldie-ss-Yükseltilebilir Modül, Goldie-ss-Tümlenmiş Modül

Danışman : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

GOLDİE-SS-SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

Fatih GÖMLEKSİZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

In this study, the concept of Goldie-ss-supplemented modules is given with $T\beta_{ss}^*W$, notation and for T and W submodules of module X , $(T + W)/_T \subseteq (Soc_s(X) + T)/_T$ and $(T + W)/_W \subseteq (Soc_s(X) + W)/_W$ is an equivalence relation determined with the help of the relation β_{ss}^* , satisfying the conditions. Using this relation, Goldie-ss-supplemented modules are defined and several properties are examined. The application of epimorphism $\gamma: X \rightarrow \mathbb{Z}$ and relation β_{ss}^* has been examined in maximal submodules, which provides relation β_{ss}^* under certain conditions. In addition, the basic properties and generalizations of the concept of Goldie-ss-lifting modules are determined with the help of the relation β_{ss}^* . With the help of this relation, Goldie-ss-lifting modules were also defined and their important properties were determined.

Number of pages : 54
 Keywords : The relation β_{ss}^* , Simple submodule, Socle of a module, Goldie-ss-Lifting Module, Goldie-ss-Supplemented Module
 Supervisor : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Eğitimimde özverili bilimsel anlayışıyla hep katkı sunan, tezimin geliştirilmesinde etkin olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Burcu Nişancı Türkmen'e en derin saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca yardımlarını gördüğüm, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Ergül Türkmen'e saygılarımı sunarım. Bu yola girmeme vesile olan değerli arkadaşım Kemal Çalışkan'a, eğitim hayatım boyunca koşulsuz maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, beni özveriyle yetiştiren aileme ayrıca, kardeşlerim Yıldırım Gömlüksiz ve Tolga Gömlüksiz'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Halkalar ve Modüller.....	3
2.2. Modül Homomorfizmaları.....	7
2.3. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar.....	9
2.4. Küçük Alt Modüller.....	10
2.5. Basit ve Yarı Basit Modüller	12
2.6. Modüllerde Destek Kavramı.....	15
2.7. Modüllerde Radikal Kavramı	16
2.8. Yerel ve Yarıyerel Modüller.....	18
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
3.1. Tümlenmiş modüller.....	20
3.2. Zayıf Tümlenmiş Modüller.....	22
3.3. SS-Tümlenmiş ve SS-Yükseltilebilir Modüller	24
3.4. SS-Yarıyerel Modüller.....	28
3.5. β^* Bağıntısı.....	30
3.6. Goldie*-Yükseltilebilir Modüller ve Goldie*-Tümlenmiş Modüller.....	34

	Sayfa
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	36
4.1. β_{ss}^* Bağıntısı.....	36
4.2. Goldie-SS-Tümlenmiş Modüller.....	42
4.3. Goldie-SS-Yükseltilebilir Modüller.....	46
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler

Açıklama

 $\mathbb{N}$

Doğal Sayılar Kümesi

 $\mathbb{Z}$

Tam Sayılar Tamlık Bölgesi

 $\mathbb{Q}$

Rasyonel Sayılar Cismi

 $\mathbb{R}$

Reel Sayılar Cismi

 $\subseteq$

Alt Modül

 $\subset$

Öz Alt Modül

 $\cap$

Kesişim İşlemi

 0_S

S Halkasında Sıfır Eleman Gösterimi

 1_S

S Halkasının Birim Eleman Gösterimi

 X/T

X in T Alt Modülüne Göre Bölüm Modülü

 $\ll$

Küçük Alt Modül Gösterimi

 $\cong$

İzomorf Olma Bağıntısı

 $\prod_{\eta \in \phi} X_{\eta}$

$\{X_{\eta}\}_{\eta \in \phi}$ Modül Ailesinin Direkt Çarpımı

 $\sum_{\eta \in \phi} X_{\eta}$

$\{X_{\eta}\}_{\eta \in \phi}$ Modül Ailesinin Toplamı

 $\bigoplus_{\eta \in \phi} X_{\eta}$

$\{X_{\eta}\}_{\eta \in \phi}$ Modül Ailesinin Direkt Toplamı

 $\langle \rangle$

Üreteç Kümesi

 $\langle x \rangle$

x Elemanı Tarafından Üretilen Devirli Modül

Kısaltmalar**Açıklama** $Rad(X)$ X Modülünün Radikali $Des(X)$ X Modülünün Desteği $Gör(\vartheta)$ ϑ Fonksiyonunun Görüntü Kümesi $Çek(\psi)$ ψ Homomorfizmanın Çekirdeği $End(X)$ X Modülünün Endomorfizmalar Halkası $Des_S(X)$ X Modülünün Basit ve Küçük Alt Modüllerin Toplamı

KSK

Kısmen Sıralı Küme

1. GİRİŞ

Klasik cebirde modül kavramı, D. Hilbert tarafından 1890 yılında tanımlanmış ve E. Noether tarafından karakterize edilmiştir. Bu sayede Grup ve Halka Teorisinin üzerine Soyut Cebir alanında yeni bir saha ortaya çıkmıştır. Modül kavramı bu gerekçe ile cisim ve vektör uzaylarının genellemesi özelliği taşımaktadır. Üstelik halkanın idealleri, o halka üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Bu gerekçeyle, modül kavramı halka ve ideal kavramlarının karakterizasyonlarında kullanılmakta olup araştırma sahası olarak güncelliğini korumaktadır. Klasik cebirde modül kavramı üzerine literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan tez konusunun miladını oluşturan çalışmayı ifade ederek başlayalım. H. Zöschinger 1970'li senelerde modüllerde tümleyen kavramı ile tümlenmiş modül kavramını inşa etmiştir. K. Varadarajan'ın 1979 yılında tümleyen alt modüller üzerinde bir çalışması bulunmaktadır. X modülü ve $T \subseteq X$ için W, X in $W + T = X$ şartını sağlayan bir minimal alt modülü oluyorsa, W ya T alt modülünün tümleyeni ve T alt modülüne de X de W tümleyenine sahiptir denir. Denk tanım olarak, T nin X de W nın tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $W + T = X$, $W \cap T \ll W$ olmasıdır. Tüm alt modülleri bir tümleyene sahip olan modüle, tümlenmiş modül adı verilir. N. Sökmez, 2011 yılında yaptığı tez çalışmasında β^* bağıntısı ve bu bağıntıdan yararlanarak Goldie*-tümlenmiş modül kavramını çalışmıştır. X modülünün her $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*Z$ olan $Z \subseteq X$ tümleyen alt modülü varsa X e Goldie*-tümlenmiş ya da G^* -tümlenmiş modül adı verilir. X modülünün her $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*W$ olan X modülünün W direkt toplam terimi bulunabiliyorsa X modülüne Goldie*-yükseltilebilir ya da G^* -yükseltilebilir modül denir. E. Kaynar, H. Çalışıcı ve E. Türkmen, 2020 yılında yayınladıkları çalışmalarında tümlenmiş modülleri ss-tümlenmiş modüller olarak kuvvetlendirmişlerdir. Ayrıca bu modül sınıfının birtakım özelliklerini bulmuşlardır. Bu çalışmada sıklıkla kullanılan $Des_S(X)$ alt modülü X in ss-tümlenmiş olmasında önemli bir role sahiptir. Bu kavram şöyle tanımlanmaktadır, X in basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_S(X) = \{\sum T \ll X \mid T, X \text{ in basit alt modülü}\}$ ile ifade edilir. X modül $S(X) = \{T \mid T \subseteq X\}$ olsun. $T, W \in S(X)$ olduğu için X S -modülünün tüm alt modüllerinin kümesi olan $S(X)$ kümesi üzerinde bir β^* bağıntısı $T\beta^*W \Leftrightarrow (T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ şeklinde tanımlıdır.

X modül ve $T, W \subseteq X$ olsun. T ve W alt modüllerine β_{ss}^* bağıntısına göre denk oldukları $(T + W)/_T \subseteq (Des_S(X) + T)/_T$ ve $(T + W)/_W \subseteq (Des_S(X) + W)/_W$ şartı ile sağlanır ve bu

durum $T\beta_{ss}^*W$ ile gösterilir. X modülünün her $X \subseteq T$ modülü için X de $T\beta_{ss}^*W$ olacak şekilde bir ss-tümlemiş W alt modülü varsa X e Goldie-ss-tümlemiş modül denir. X modülünün her T alt modülü için $T\beta_{ss}^*Z$ olan X in Z direkt toplamı bulunuyorsa X e Goldie-ss-yükseltilebilir modül denir.

Yukarıda verilen temel tanım ve teoremlerden hareketle bu çalışmada, Goldie-ss-tümlemiş modüller Goldie*-tümlemiş modüllerin özel bir hali ve Goldie-ss-yükseltilebilir modülleri ise Goldie*-yükseltilebilir modüllerin özel bir hali olarak kavramsallaştırılarak β^* bağıntısından daha özel olan β_{ss}^* bağıntısı yardımıyla modül teorisine temel teoremler kazandırılmıştır.



2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda çalışmamızda faydalandığımız gerekli tüm tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Halkalar ve Modüller

2.1.1. Tanım $(S, +, \cdot)$ cebirsel yapısı değişmeli (abel) grup olsun. S üzerindeki “ $\cdot$ ” ikili işlemi “ $+$ ” ikili işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahipse $(S, +, \cdot)$ üçlüsüne halka adı verilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmamızda S ile $(S, +, \cdot)$ halkası kastedilecektir.

2.1.2. Tanım S halka olsun. $x, y \in S$ keyfi elemanları için $xy = yx$ eşitliği varsa S ye değişmeli halka, her $x \in S$ için $1_S x = x 1_S$ olan $1_S \in S$ elemanı varsa S ye birimli halka denir ve 1_S elemanına S nin birimi adı verilir (Hungerford, 1973).

$\mathbb{Z}$ değişmeli halkası için $n > 1$ iken $M_n(\mathbb{Z})$ değişmeli olmayan halkadır (Hungerford, 1973).

Bu çalışmamızda tüm halkalar birimli halka olarak alınacaktır.

2.1.3. Tanım S halka, $0 \neq x \in S$ elemanı için $xy = 0$ ($yx = 0$) olacak şekilde S halkasında sıfırdan farklı bir $y \in S$ varsa $x \in S$ elemanına sol (veya sağ) sıfır bölen adı verilir. S halkasında sol sıfır bölen eleman bulunmuyorsa bu halkaya sol (veya sağ) sıfır bölensiz halka adı verilir. Sol ve sağ sıfır bölensiz halkaya ise sıfır bölensiz adı verilir. Sıfır bölensiz değişmeli halkaya ise tamlık bölgesi denir (Hungerford, 1973).

Örneğin; $\mathbb{Z}_q$ halkası $q \in \mathbb{P}$ asal tamsayısı için sıfır bölensiz halkadır. Böylece $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{23}, \dots$ halkaları sıfır bölensizdir (Hungerford, 1973).

2.1.4. Tanım S halka ve $x \in S$ olsun. $zx = 1_S$ ($xz = 1_S$) olacak şekilde $z \in S$ varsa, x elemanına sol (sağ) terslenebilir, z elemanına x elemanının sol (sağ) tersi denir. Sol ve sağ terslenebilir olan $x \in S$ elemanına terslenebilir denir (Hungerford, 1973).

2.1.5. Tanım Sıfır eleman haricindeki her elemanı terslenebilir olan halkaya bölme halkası adı verilir (Kasch, 1982).

2.1.6. Tanım S halka I , S nin boştan farklı alt kümesi olsun. $I, (S, +)$ değişmeli grubunun bir alt grubu iken her $a, b \in I$, $a \cdot b \in I$ ise, I ya S halkasının alt halkası ve her $r \in S$ ve her $a \in I$ için $ra \in I$ ($ar \in I$) olan I alt halkasına S halkasının sol (sağ) ideali adı verilir. I, S halkasının sol ve sağ ideali ise, I ya S halkasının ideali adı verilir (Hungerford, 1973).

$I = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & r \\ 0 & r' \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}; r, r' \in \mathbb{Q} \right\}$ kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ halkasının bir sol (sağ) ideali olmamasına karşın bir alt halkasıdır. Bu da alt halkaların ideal kavramından daha özel bir kavram olduğunun bir göstergesidir (Pancar, 2014).

0 ve S ideallerine S nin aşık idealleri adı verilir. S nin kendisi haricindeki ideallerinin her birine öz ideal denir (Hungerford, 1973).

Örneğin; $q \in \mathbb{P}$ olmak kaydıyla $\mathbb{Z}_q$ bir cisimdir. Böylece aşık ideallerinden başka ideali mevcut değildir. Ancak asal olmayan $m = 4$ için $\mathbb{Z}_m$ halkasının $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ idealinin $\mathbb{Z}_m$ nin bir öz ideali olduğu açıktır.

2.1.7. Tanım S halkası ve $(X, +)$ abel grubu verilsin. Her $q \in S$ ve her $a \in X$ için $\bullet (q, a) \rightarrow qa$ biçiminde tanımlı $\bullet : S \times X \rightarrow X$ dış işlemi;

(i) Her $q \in S$ ve her $a, b \in X$ elemanları için $q(a + b) = qa + qb$

(ii) Her $q, s \in S$ ve her $a \in X$ elemanı için $(q + s)a = qa + sa$

(iii) Her $q, s \in S$ ve her $a \in X$ elemanı için $(qs)a = q(sa)$

şartlarını sağlıyorsa X abel grubuna “ $\bullet$ ” dış işlemi ile birlikte S -modül adı verilir, ${}_S X$ yazılışı şeklinde ifade edilir. S birimli 1_S olan bir halka olsun. X modülü her $a \in X$ için $1_S a = a$ eşitliğini gerçekliyorsa X e üniter sol S -modül adı verilir (Hungerford, 1973).

Diğer taraftan $\bullet : X \times S \rightarrow X$ dış işlemi ile birlikte X_S sağ S -modül tanımı yapılır. S birimli halkasının tanımı gereği ${}_S S$ üniter sol S -modül ve S_S nin ise üniter sağ S -modül olduğu açıktır. Bu nedenle modül kavramına, halkaların bir genellemesi olarak bakılabilir.

Bu çalışmamızda tüm modüller, aksi belirtilmedikçe üniter sol S -modül çalışılacaktır.

Zorn Yardımcı Teoremi: Y KSK olsun. Y nin her zincirinin bir üst sınırı mevcut ise, Y bir maksimal elemana sahiptir (Hungerford, 1973).

2.1.8. Tanım X modül, T X in boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer T , $(X, +)$ değişmeli grubunda bir alt grup iken her $l \in T$, her $q \in S$ için $ql \in T$ ise T ye X in bir alt modülü adı verilir. $T \subseteq X$ gösterimi kullanılır. Tanım gereğince $0, X$; X de birer alt modül olup, bu alt modüllere aşık alt modüller denir. 0_X alt modülü sadelik için 0 ile de gösterilebilir. X in kendisi haricindeki her alt modülüne öz alt modül denir (Hungerford, 1973).

2.1.9. Teorem X modülünün alt modüllerinin kesişimi X in alt modülüdür (Hungerford, 1973).

2.1.10. Tanım X modül W , X in bir öz alt modülü olup, X in W yı içeren W haricinde bir öz alt modülü mevcut değilse, W ya X in maksimal alt modülü adı verilir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

2.1.11. Tanım X modül ve $Y \subseteq X$ keyfi öz alt modül olsun. Y , X in bir maksimal alt modülünde içeriliyorsa, X modülüne eş-atom adı verilir (Kasch, 1982).

2.1.12. Tanım X S -modül T , X in bir alt kümesi olsun. X in T alt kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine T nin ürettiği alt modül adı verilir. $\langle T \rangle$ yazılışı ile sembolize edilir. T sonlu elemanlı iken, $\langle T \rangle$ ye sonlu üretilmiş ve $T = \{m\}$ iken, $\langle T \rangle = \langle m \rangle$ ye devirli alt modül adı verilir. Eğer $X = \langle T \rangle$ için T sonlu ise, X e sonlu üretilmiş S -modül, $X = \langle m \rangle$ olan $m \in X$ mevcutsa X modülüne m yardımıyla üretilmiş devirli S -modül adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.13. Tanım X modül $T \subseteq X$ olmak üzere $\langle T \rangle$ alt modülünde T nin elemanlarına üreteç adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.14. Teorem X S -modül Z , X in bir alt modülü olsun. X/Z bölüm grubu, $q \in S$ ve $a + Z \in X/Z$ elemanları için $q \cdot (a + Z) \rightarrow qa + Z$ biçiminde tanımlanan $\cdot : S \times X/Z \rightarrow X/Z$ dış işlemine göre X/Z bir S -modüldür. Bu modüle Z alt modülüne göre X in bölüm modülü adı verilir (Hungerford, 1973).

Kanıt. Öncelikle “ $\bullet$ ” işleminin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $(q_1, a_1 + Z) = (q_2, a_2 + Z)$ olsun. Buradan $q_1 = q_2$ ve $a_1 + Z = a_2 + Z$ olup $a_1 - a_2 \in Z$ dir. O halde $q_1(a_1 - a_2) = (q_1 a_1 - q_1 a_2) = q_1 a_1 - q_2 a_2 \in Z \Rightarrow q_1 a_1 + Z = q_2 a_2 + Z$ olur.

Dolayısıyla $\bullet$ işlemi iyi tanımlıdır. Her $a_1, a_2 \in X$ ve her $q, s \in S$ için

(i) $q((a_2 + Z) + (a_1 + Z)) = q((a_2 + a_1) + Z) = q(a_2 + a_1) + Z = (q a_2 + q a_1) + Z = (q a_2 + Z) + (q a_1 + Z) = q(a_2 + Z) + q(a_1 + Z)$ eşitliği sağlanır.

(ii) $(q + s)(a_2 + Z) = (q + s)a_2 + Z = (q a_2 + s a_2) + Z = (q a_2 + Z) + (s a_2 + Z) = q(a_2 + Z) + s(a_2 + Z)$ eşitliği sağlanır.

(iii) $(qs)(a_2 + Z) = (qs)a_2 + Z = q(s a_2) + Z = q(s a_2 + Z) = q(s(a_2 + Z))$ eşitliği sağlanır.

(iv) $1_R(a_2 + Z) = 1_R a_2 + Z = a_2 + Z$ olduğu için X/Z üniter sol S -modüldür. $\square$

2.1.15. Önerme (Modüler Kural) X modül ve $Z \subseteq W$ olmak üzere T, W, Z ; X modülünün alt modülleri olsun. Bu koşullarda, $(Z + T) \cap W = Z + (T \cap W)$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Kanıt. Her $a \in (Z + T) \cap W$ için $a \in Z + T$ ve $a \in W$ olduğundan $a = h + k$ eşitliğini sağlayan $h \in Z$ ve $k \in T$ elemanları mevcuttur. $Z \subseteq T$ iken $h \in W$ bulunur. Böylece $k = a - h$ ve $a \in W, h \in W$ iken $k \in W$ olup $k \in T \cap W$ bulunur. Yani $h \in Z, k \in T \cap W$ olup $a = h + k \in Z + (T \cap W)$ dir. Bu durumda $(Z + T) \cap W \subseteq Z + (T \cap W)$ olur. Tersine; $Z + (T \cap W) \subseteq Z + T$ ve $Z + (T \cap W) \subseteq W$ olduğundan $Z + (T \cap W) \subseteq (Z + T) \cap W$ kapsamı bulunur. Dolayısıyla $(Z + T) \cap W = Z + (T \cap W)$ dir. $\square$

2.1.16. Tanım X in $T, W, Z \subseteq X$ alt modülleri verilsin. $Z + (T \cap W) = (Z + T) \cap (Z + W)$ ve $Z \cap (T + W) = (Z \cap T) + (Z \cap W)$ oluyorsa X e dağılımlı modül adı verilir (Tuganbaev, 1999).

2.1.17. Sonuç X modülünün $T, W, Z \subseteq X$ alt modülleri verilsin. $T + W = X$ ve $(T \cap W) + Z = X$ ise $(W \cap Z) + T = (T \cap Z) + W = X$ dir (Sökmez, 2011).

Kanıt. Modüler kural ve hipotezden aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$(T \cap Z) + W = [(T \cap Z) + (T \cap W)] + W = [T \cap (Z + (T \cap W))] + W = T + W = X$$

$$(W \cap Z) + T = [(W \cap Z) + (T \cap W)] + T = [W \cap (Z + (T \cap W))] + T = W + T = X \quad \square$$

2.1.18. Teorem T, W, Z bir S -modülünün alt modülleri ve $Z \subseteq T, Z \subseteq W$ iken $T/Z = W/Z$ olması için gerek ve yeter şart $T = W$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $x \in T$ verilsin. Buradan $x + Z = y + Z$ olacak şekilde $\exists y \in W$ mevcuttur. Böylece $x - y = Z$ olacak şekilde $\exists z \in Z$ mevcut olup $Z \subseteq W$ olduğundan $x = z + y \in W$ bulunur. Yani $T \subseteq W$ kapsaması elde edilir. Benzer düşünceyle T ve W nın rolleri değiştirilerek $W \subseteq T$ kapsaması vardır. Buradan $T = W$ dır.

$(\Leftarrow)$ İspatı açıktır. □

2.1.19. Teorem X S -modül, $T_1, T_2, X_1, X_2 \subseteq X$ $T_1 \subset X_1$ ve $T_2 \subset X_2$ olsun. Eğer $T_1 \ll X_1$ ve $T_2 \ll X_2$ ise $T_1 + T_2 \ll X_1 + X_2$ dir (Kasch, 1982).

Kanıt. $T_1 + T_2 + W = X_1 + X_2$ eşitliğini sağlayan bir W alt modülü verilsin. Eşitliğin X_1 ile kesişimi alınırsa $T_1 + [(T_2 + W) \cap X_1] = X_1$ olup $T_1 \ll X_1$ kullanılarak $(T_2 + W) \cap X_1 = X_1$ olur ve $X_1 \subset T_2 + W$ kapsaması elde edilir. Ayrıca $T_1 \subset X_1$ kullanılarak $T_2 + W = X_1 + X_2$ eşitliği bulunur. Şimdi her tarafın X_2 ile kesişimi alınırsa $T_2 + (X_2 \cap W) = X_2$ olup $T_2 \ll X_2$ olduğundan $(X_2 \cap W) = X_2$ ve $X_2 \subset C$ elde edilir. Yani $T_1 \subset (T_2 + W)$ ve $T_2 \subset X_2 \subset W$ olur. Bu durumda $T_1 + T_2 + W = X_1 + X_2$ den $T_2 + W = X_1 + X_2$ ve $W = X_1 + X_2$ bulunur. Sonuç olarak $T_1 + T_2 \ll X_1 + X_2$ dir. □

2.2. Modül Homomorfizmaları

2.2.1. Tanım X, T S -modüller $\gamma: X \rightarrow T$ fonksiyonu verilsin. Her $m_1, m_2 \in X$ ve her $c \in S$ için $\gamma(m_1 + m_2) = \gamma(m_1) + \gamma(m_2)$ ve $\gamma(cm_1) = c\gamma(m_1)$ şartları sağlanırsa γ fonksiyonuna bir S -modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma adı verilir. γ homomorfizmasının görüntü kümesine γ nın homomorfik görüntüsü denir ve $Gör(\gamma)$ biçiminde yazılır. X den T ye tanımlı bütün S -modül homomorfizmaların kümesi $Hom(X, T)$ ile gösterilir. Bu küme her $\gamma, \mu \in Hom(X, T)$, her $a \in X$ için $(\gamma + \mu)(a) = \gamma(a) + \mu(a)$ biçiminde fonksiyonlarla tanımlı toplama işlemine göre bir abel grup yapısına sahiptir. X S -modül olmak üzere $\gamma: X \rightarrow X$ homomorfizmasına X in endomorfizması denir. X in bütün endomorfizmalarının kümesi $End(X)$ biçimindedir. Fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı toplama ve bileşke ikili işlemlerine göre bir halka olan $End(X)$ e X in endomorfizmalar

halkası denir. $\gamma: X \rightarrow T$ bire-bir homomorfizma oluyorsa γ ya bir monomorfizma, γ örten homomorfizma oluyorsa γ ya epimorfizma ve γ hem bire-bir hem örten homomorfizma oluyorsa γ ya izomorfizma adı verilir. X den T ye izomorfizma varsa, X ile T ye izomorf modüller adı verilip $X \cong T$ yazılışı ile ifade edilir (Hungerford, 1973).

2.2.2. Teorem X, T modül olmak üzere, $\gamma: X \rightarrow T$ homomorfizması verilsin. Buradan;

- (i) $W \subseteq X$ ise, $\gamma(W) \subseteq T$ dir. Özel olarak $\text{Gör}(\gamma) \subseteq T$ olur.
- (ii) $Z \subseteq T$ ise, $\gamma^{-1}(Z) \subseteq X$ olur. Özel olarak $Z = 0 \subseteq T$ alınırsa, $\gamma^{-1}(0) = \{m \in X / f(m) = 0\}$ alt modüldür. $\gamma^{-1}(0)$ alt modülüne γ homomorfizmasının çekirdeği adı verilir ve $\text{Çek}(\gamma)$ yazılışı ile gösterilir. $\eta: X \rightarrow X/T$ doğal homomorfizması için $\text{Çek}(\eta) = T$ dir.
- (iii) $W \subseteq X$ ve $Z \subseteq T$ ise $\gamma^{-1}(\gamma(W)) = W + \text{Çek}(\gamma)$ ve $\gamma(\gamma^{-1}(Z)) = Z \cap \gamma(X)$ dir.
- (iv) $W \subseteq X$ ve $Z \subseteq T$ ise $\gamma^{-1}(\gamma(W) + Z) = W + \gamma^{-1}(Z)$ ve $\gamma(\gamma^{-1}(Z) \cap W) = Z \cap \gamma(W)$ dır.
- (v) μ ve ψ homomorfizmaları için $\gamma = \mu\psi$ ise $\text{Çek}(\gamma) \cong \mu^{-1}(\text{Çek}(\psi))$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.2.3. Teorem (Homomorfizma Teoremi) X ve T, S -modülleri için $\gamma: X \rightarrow T$ homomorfizması verilsin. Bu takdirde $p: X \rightarrow X/\text{Çek}(\gamma)$ doğal epimorfizma ise $\gamma = \mu p$ olacak şekilde bir tek $\mu: X/\text{Çek}(\gamma) \rightarrow T$ monomorfizması mevcuttur o da $X/\text{Çek}(\gamma) \cong \gamma(X)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt. $m + \text{Çek}(\gamma) \in X/\text{Çek}(\gamma)$ keyfi elemanı için $\mu(m + \text{Çek}(\gamma)) = \gamma(m)$ ile tanımlı $\mu: X/\text{Çek}(\gamma) \rightarrow T$ dönüşümü $\gamma = \mu p$ koşulunu gerçekleyen tek monomorfizmadır. $\square$

2.2.4. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) X modül, $T, W \subseteq X$ olsun. Bu takdirde $(T + W)/T \cong W/(T \cap W)$ dır (Alizade ve Pancar, 1999).

Kanıt. $m \in C$ verilsin. Buradan $\gamma(m) = m + T$ kuralıyla tanımlanan $\gamma: W \rightarrow (T + W)/T$ fonksiyonu epimorfizma yapısına sahiptir ve $\text{Çek}(\gamma) = T \cap W$ eşitliği sağlanır. Teorem 2.2.3 den $(T + W)/T \cong W/(T \cap W)$ olduğu görülür. $\square$

2.2.5. Teorem (2. İzomorfizma Teoremi) X modülünün $T \subseteq W \subseteq X$ alt modülleri için $X/W \cong (X/T)/(W/T)$ dir (Hungerford, 1973).

Kanıt. $m + W \in X/T$ verilsin. Buradan $\gamma(m + T) = m + W$ kuralıyla verilen $\gamma: X/T \rightarrow X/W$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $\text{Çek}(\gamma) = W/T$ dir. $\square$

2.2.6. Teorem Her sonlu üretilmiş modül eş atomdur (Kasch, 1982).

Kanıt. X sonlu üretilmiş modül; $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, X in bir üreteç kümesi ve $T \subset X$ olsun. T yi kapsayan X in öz alt modüllerinin kümesi Θ olsun. Buradan $T \subset X$ olduğu için $T \in \Theta \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Θ içermeye bağıntısı gereğince bir kısmen sıralı kümedir. ψ , Θ nın tam sıralı bir alt kümesi. W ile ψ kümesinde mevcut olan elemanların birleşimi gösterilirse $T \subseteq W$ ve ψ tam sıralı olduğundan $W \subseteq X$ dir. Ayrıca $W \subseteq X$ dir. Şayet W , X in öz alt modülü değilse; X sonlu üretilmiş olduğundan tam sıralı olan ψ nın tüm x_i leri içeren bir alt kümesi mevcuttur. Buna Z diyelim. O halde $X \subseteq Z$ olur. Bu nedenle $X \in \psi$ bulunur. Bu, ψ nın seçimi ile çelişmektedir. Böylece $W \subset X$ dir. Sonuç olarak $W \in \Theta$ olup W , ψ nın üst sınırı bulunur. Zorn Yardımcı Teoremine göre Θ nın maksimal elemanı mevcuttur. Bu maksimal eleman, T yi kapsayan X in maksimal alt modülü olduğundan X eş atomdur. $\square$

2.2.7. Tanım X modülünün endomorfizma halkasının $e_1, e_2 \in \text{End}(X)$ elemanları idempotent iken $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ eşitliklerini sağlıyor ise e_1, e_2 ye ortogonal idempotent elemanlar adı verilir (Hungerford, 1973).

2.2.8. Teorem $T + W = X$ olan parçalanışa sahip X modülü için $x = y + z \rightarrow y$ ($y \in T, z \in W$) şeklinde tanımlı $e : X \rightarrow T$ dönüşümü bir idempotenttir. Buradan $\text{Çek}(e) = W$ olup e elemanına X modülünün T üzerine W boyunca doğal (kanonik) projeksiyonu adı verilir (Hungerford, 1973).

2.3. Direkt toplamlar ve Direkt çarpımlar

2.3.1. Tanım X modül ve bu modülün alt modüllerinin topluluğu $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ olsun. $X = \sum_{\eta \in \varphi} X_\eta$ ve her $k \in \varphi$, $X_k \cap (\sum_{\theta \neq k} X_\theta) = 0$ ise, X e bu alt modüller topluluğunun iç direkt toplamı adı verilir ve $\bigoplus_{\eta \in \varphi} X_\eta$ gösterimi kullanılır. Bu durumda her X_i alt modülüne de X

in direkt toplam terimi adı verilir. Özel olarak $I = \{1,2\}$ ise $X_1 \oplus X_2 = X$ olması için gerek ve yeter şart $X_1 + X_2 = X$ ve $X_1 \cap X_2 = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

X modülünün 0 ve kendisi haricinde direkt toplam terimi yoksa bu modüle parçalanamazdır adı verilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.3.2. Tanım S halkası ve $\emptyset \neq \varphi$ indis kümesi verilsin. $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ S -modüllerinin topluluğu olsun. $\{\alpha \mid \alpha: \varphi \rightarrow \cup_{\eta \in \varphi} X_\eta, \forall \eta \in \varphi \text{ için } \alpha(\eta) \in X_\eta\}$ kümesine $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ topluluğunun çarpımı denir ve kısaca $\prod_{\eta \in \varphi} X_\eta$ gösterimi kullanılır. Her $\eta \in \varphi$ için $\alpha(\eta) = \alpha_\eta$ ve $\alpha = (\alpha_\eta)_{\eta \in \varphi}$ olarak kullanılır. Burada α_η ye α nın η . bileşeni adı verilir. Eğer φ sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_\eta)_{\eta \in \varphi} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\eta, \dots)$ şeklinde yazılır.

$\alpha, \beta \in \prod_{\eta \in \varphi} X_\eta$ olmak üzere;

$$(i) \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \forall \eta \in \varphi \text{ için } \alpha_\eta = \beta_\eta,$$

$$(ii) \quad \alpha + \beta = (\alpha_\eta + \beta_\eta)_{\eta \in \varphi},$$

$$(iii) \quad -\alpha = (-\alpha_\eta)_{\eta \in \varphi},$$

(iv) $r \in S$ iken $r\alpha = (r\alpha_\eta)_{\eta \in \varphi}$ şeklinde tanımlı cebirsel işlemlere göre $\prod_{\eta \in \varphi} X_\eta$ kümesi S -modüldür. Bu $\prod_{\eta \in \varphi} X_\eta$ modülüne $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ modüller topluluğunun dış direkt çarpımı adı verilir.

$\oplus_{\eta \in \varphi}^w X_\eta = \{(\alpha_\eta)_{\eta \in \varphi} \mid \text{sonlu sayıda } \eta \in \varphi \text{ için } \alpha_\eta \neq 0\}$ kümesi, $\prod_{\eta \in \varphi} X_\eta$ nin bir alt modülü olup alt modüle $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ modüller topluluğunun dış direkt toplamı adı verilir. φ indis kümesi sonlu ise, $\prod_{\eta \in \varphi} X_\eta = \oplus_{\eta \in \varphi}^w X_\eta$ dir. İç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4. Küçük Alt Modüller ve Oyuk Modüller

2.4.1. Tanım X modül ve T, X in öz alt modülü iken $T + W = X$ koşulunu sağlayan X in bir W öz alt modülü mevcut değilse T ye X in bir küçük alt modülü adı verilir $T \ll X$ yazılışı ile ifade edilir (Wisbauer, 1991).

2.4.2. Önerme

- (i) X modül, $W \subseteq T \subseteq X$ için $T \ll X$ ise, $W \ll X$ dir.
- (ii) X modül, $W \subseteq T \subseteq X$ için $W \ll T$ ise, $W \ll X$ dir.
- (iii) $W_1, W_2, \dots, W_m, Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, X in alt modülleri $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $W_i \ll Z_i$ iken $W_1 + W_2 + \dots + W_m \ll Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m$ dir.
- (iv) X ve T modül, W X in alt modülü ve $\gamma: X \rightarrow T$ homomorfizması için $W \ll X$ ise, $\gamma(W) \ll \gamma(X)$ dir.
- (v) T , X in direkt toplam terimi olmak üzere $W \subseteq T \subseteq X$ olsun. Buradan, $W \ll T$ olması için gerek ve yeter şart $W \ll X$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Kanıt. (i) $W + Z = X$ koşulunu sağlayan $Z \subseteq X$ verilsin. $W \subseteq T$ olduğu için $T + Z = X$ yazılır. Buradan $T \ll X$ olduğundan $Z = X$ bulunur. Dolayısıyla $W \ll X$ dir.

(ii) $W + E = X$ koşulunu sağlayan X in bir E alt modülünü alalım. $T \subseteq X$ iken $(W + E) \cap T = T$ dir. $W \subseteq T$ olduğu kullanılırsa Önerme 2.1.15 gereğince, $W + (T \cap E) = T$ yazılır. $W \ll T$ iken $T \cap E = T$ bulunur. Buradan $T \subseteq E$ dir. $W \subseteq T \subseteq E$ ve $W + E = X$ olduğundan $E = X$ dir. Dolayısıyla $W \ll X$ elde edilir.

(iii) İfadenin doğruluğunu $m = 2$ için ispatlayalım. $W_1 + W_2 + E = Z_1 + Z_2$ koşulunu sağlayan $Z_1 + Z_2$ nin bir E alt modülünü alalım. $W_1 \ll Z_1$ olduğundan (ii) den $W_2 + E = Z_1 + Z_2$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $W_2 \ll Z_2$ olduğundan tekrar (ii) den $E = Z_1 + Z_2$ sağlanır. Böylece $W_1 + W_2 \ll Z_1 + Z_2$ dir. Tümevarımla her $2 < m$ tamsayısı içinde ifadenin doğru olduğu gösterilebilir.

(iv) $\gamma(W) + Z = \gamma(X)$ koşulunu sağlayan $Z \subseteq \gamma(X)$ verilsin. Bu takdirde, $\gamma^{-1}(\gamma(W) + Z) = X$ olup Teorem 2.2.2 (iv) ile $W + \gamma^{-1}(Z) = X$ eşitliği elde edilir. $W \ll X$ olduğu için $\gamma^{-1}(Z) = X$ bulunur. Tekrar Teorem 2.2.2 (iii) ile $Z = \gamma(X)$ dir. Dolayısıyla $\gamma(T) \ll \gamma(X)$ dir.

(v) $(\Rightarrow)$ $W \ll T$ ise, (ii) gereğince $W \ll X$ dir.

$(\Leftarrow)$ $W \ll X$ olsun. $W + Z = T$ koşulunu sağlayan $Z \subseteq T$ verilsin. T , X in direkt toplam terimi olması sebebiyle $X = T \oplus E$ şeklinde $E \subseteq X$ vardır. Buradan $W + Z + E = X$ eşitliği elde edilir. $W \ll X$ iken $Z + E = X$ dir. Önerme 2.1.15 gereğince $T = Z + (E \cap T) = Z$ olup $W \ll T$ bulunur. $\square$

2.4.3. Tanım Bir X modülünün keyfi bir T öz alt modülü için $T \ll X$ oluyorsa X e oyuk modül adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.4.4. Teorem Oyuk modüllerin tüm bölüm modülleri de oyuktur (Wisbauer, 1991).

Kanıt. X oyuk modülünün X/T bölüm modülü ve $W/T \subseteq X/T$ öz alt modülü verilsin. Buradan $W \subset X$ olup $W \ll X$ bulunur. $W/T + Z/T = X/T$ olan $Z \subseteq X$ verilsin. Bu durumda $(W + Z)/T = X/T$ olur ki Teorem 2.1.18 den $W + Z = X$ bulunur. Bu durumda $W \ll X$ olduğundan $Z = X$ olup $Z/T = X/T$ elde edilir. Böylece $W/T \ll X/T$ dir. $\square$

2.5. Yarı Basit Modüller

2.5.1. Tanım X in 0 ve kendisi haricinde alt modülü bulunmuyorsa X e basit modül denir. S sol S -modülü basit modül ise, S ye sol basit halka denir. (Alizade ve Pancar, 1999).

2.5.2. Teorem S birimli halkası için aşağıdaki denk ifadeler mevcuttur.

- (i) S bölme halkasıdır.
- (ii) S sol basit halkadır.
- (iii) S sağ basit halkadır (Kasch, 1982).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) S bölme halkası ve $0 \neq I$, S nin sol ideali ise $a \neq 0$ olacak şekilde $a \in I$ elemanı vardır. S bölme halkası olduğu için $a^{-1}a = 1_S$ olacak şekilde a^{-1} mevcut olup I sol ideal olduğundan $1_S = a^{-1}a \in I$ bulunur. Böylece her $u \in S$ için $u = u1_S \in I$ olup $I = S$ eşitliği bulunur.

(ii) $\Leftarrow$ (i) S sol basit halka ve $0 \neq a \in S$ olsun. Böylece $Sa = S$ eşitliği sağlanır. Buradan $1_S = ua$ olacak şekilde $0 \neq u \in S$ elemanı mevcuttur. Üstelik $wu = 1_S$ olacak şekilde $w \in S$ bulunur. Böyleyse $w = w1_S = w(ua) = (wu)a = 1_Sa = a$ olur. Böylece $ua = 1_S = au$ olup a nın tersi vardır. Buradan S bölme halkasıdır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (i) benzer yolla ispatlanabilir. $\square$

2.5.3. *Örnek* Teorem 2.5.2 ye göre bölme halkalarının birer basit halka olduğu açıktır. Ancak basit halkaların bölme halkası olma zorunluluğu yoktur. $M_2(\mathbb{R})$ matris halkasını ele alalım. $M_2(\mathbb{R})$ bir bölme halkası değildir. $0 \neq X$, $M_2(\mathbb{R})$ nin bir ideali olsun. Bu takdirde, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ elemanlarının en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in X$ vardır. X ideal

olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ için $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \in X$,
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in X$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in X$ elde edilir.
 Böylece $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için X idealinde bir $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi bulunur. Buradan $x^{-1} \in \mathbb{R}$ için $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ dir. O halde $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ zx^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in X$ dir.

Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in X$ olur. Böylece $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in X$ dir. Sonuç olarak $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \in X$ bulunur. Dolayısıyla $X = M_2(\mathbb{R})$ eşitliğinden $M_2(\mathbb{R})$ nin bir basit halka olmasına karşın bölme halkası olmadığı gerçektir (Kasch, 1982).

2.5.4. Teorem X modül, $T \subseteq X$ olsun. T nin maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart X/T bölüm modülünün basit olmasıdır (Wisbauer, 1991).

2.5.5. Tanım X modülünde her alt modül direkt toplam terimi oluyorsa, X modülüne yarı basit modül adı verilir (Kasch, 1982).

2.5.6. Yardımcı Teorem Yarı basit bir modülün sıfır dışındaki her alt modülü basit alt modül içerir (Kasch, 1982).

Kanıt. X yarı basit modül, $0 \neq T$, X in sonlu üretilmiş bir alt modülü ise Teorem 2.2.6 dan T , W maksimal alt modülünde kapsar. Bu takdirde $W \oplus X_1 = X$ olacak şekilde X_1 alt modülü vardır. Önerme 2.1.15 den $X \cap T = W \oplus (X_1 \cap T) = T$ dir. Böylece $T/W \cong X_1 \cap T$ elde edilir. W , T nin maksimal alt modülü olduğu için Teorem 2.5.4 kullanılarak T/W bölüm modülünün basit olduğu elde edilir. Sonuç olarak $X_1 \cap T$, T nin basit alt modülüdür. X in sıfır dışındaki her alt modülü sonlu üretilmiş alt modülü kapsayacağından X in sıfır dışındaki her alt modülü basit alt modül içerir. $\square$

2.5.7. Yardımcı Teorem X bir modül olsun. $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ basit alt modüllerin ailesi olmak üzere $\sum_{\eta \in \varphi} X_\eta = X$ ve $T \subseteq X$ alt modülü verilsin. Buradan;

- (i) $X = T \oplus (\bigoplus_{\eta \in \Delta} X_\eta)$ varsa $\Delta \subseteq \varphi$ mevcuttur.
- (ii) $T \cong \bigoplus_{\eta \in \Delta} X_\eta$ olacak şekilde $\Delta \subseteq \varphi$ vardır (Kasch, 1982).

2.5.8. Teorem Bir X modülüne göre aşağıdakiler denktir;

- (i) X in her alt modülü X in basit alt modüllerinin toplamı biçiminde yazılır.
- (ii) X , basit alt modüllerinin toplamı biçiminde yazılır.
- (iii) X , basit alt modüllerinin direkt toplamı biçiminde yazılır.
- (iv) X yarı basittir (Kasch, 1982).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) Aşıkardır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Yardımcı Teorem 2.5.7 (i) den $T = 0$ eşitliğinin kabulü ile görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Yardımcı Teorem 2.5.7 (i) den açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $T \subseteq X$ olsun. X_i ler T alt modülünde içeren basit alt modüller olmak üzere $T_0 = \sum_{X_i \leq T} X_i$ alt modülünü gözönüne alalım. Hipotezden X in T_0 direkt toplam terimi vardır. Yani $X = T_0 \oplus W$ eşitliğini sağlayan $W \subseteq X$ alt modülü mevcuttur. Önerme 2.1.15 den $0 = X \cap T = T_0 \oplus (W \cap T) = T$ eşitliği sağlanır. $W \cap T = 0$ ise $T = T_0$ olup (i) gerçekleşir. $W \cap Z \neq 0$ olsun. Yardımcı Teorem 2.5.6 dan $W \cap T, E$ basit alt modülünü içerir. Buradan, T_0 tanımından $E \subseteq T_0 \cap (W \cap T) = 0$ çelişkisi gereği T nin basit alt modüllerinin toplamıdır. $\square$

2.5.9. *Sonuç* (i) Yarı basit modüllerin alt modülleri de yarı basittir.

- (ii) Yarı basit modüllerin homomorfik görüntüleri de yarı basittir.
- (iii) Yarı basit modüllerin toplamı da yarı basittir (Kasch, 1982).

Kanıt. (i) Teorem 2.5.8 (i) den açıktır.

(ii) X yarı basit modül $\gamma: X \rightarrow T$ homomorfizma ise Teorem 2.5.8 kullanılarak $\sum_{\eta \in \varphi} W_\eta = X$ nin basit alt modüllerin toplamı biçiminde olduğu görülür. Her $\eta \in \varphi$ için γ nın W_η ye kısıtlanışını $\{\gamma|_{W_\eta} = \mu\}$ ile gösterirsek, W_i basit olduğundan $\text{Çek}(\mu) = 0$ veya $\text{Çek}(\mu) = W_\eta$ olup Teorem 2.2.2 ile $\mu(W_\eta)$ nin basit olduğu veya $\mu(W_\eta) = 0$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Böylece $\gamma(X) = \sum_{\eta \in \varphi} \gamma(W_\eta)$ olduğu için T birtakım basit alt modüllerin toplamı biçiminde yazılır. Teorem 2.5.8 den T yarı basit bulunur.

(iii) X yarı basit modüllerin toplamı biçiminde yazılsın. Teorem 2.5.8 den her yarı basit modül basit modüllerin toplamı biçiminde yazılabildiğinden X in basit modüllerin toplamı biçiminde olduğu görülür. Böylece X yarı basit modül olur. $\square$

2.5.10. Teorem S halkası için belirtilen denk ifadeler vardır;

- (i) Her sol S -modül yarı basittir.
- (ii) Her sonlu üretilmiş sol S -modül yarı basittir.
- (iii) Her devirli sol S -modül yarı basittir.
- (iv) ${}_S S$ yarı basittir (Lam, 1991).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) İspatı açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) X herhangi S -modül $x \in X$ iken her $y \in S$ için $\gamma(y) = yx$ biçiminde tanımlanan $\gamma: S \rightarrow Sa$ dönüşümü bir epimorfizma yapısına sahiptir. Homomorfizma teoremi gereği $S/\text{Çek}(\gamma) \cong Sa$ bulunur. *Sonuç* 2.5.9 (iii) den Sa yarı basit olduğu için *Sonuç* 2.5.9 (iii) den $X = \sum_{a \in A} Sa$ eşitliğinden X yarı basit bulunur. $\square$

2.6. Modüllerde Destek Kavramı

2.6.1. Tanım X in basit alt modüllerinin toplamına X in desteği adı verilir ve $Des(X)$ biçiminde tanımlanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

Buna göre Teorem 2.5.8 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

2.6.2. *Sonuç* X modülü için aşağıdaki denk ifadeler vardır;

- (i) X in her T alt modülü $Des(T) = T$ eşitliğini sağlar.
- (ii) $Des(X) = X$ şeklindedir.
- (iii) X basit alt modüllerin direkt toplamı biçiminde yazılır.
- (iv) X yarı basittir (Kasch, 1982).

2.6.3. Önerme X modül $T \subseteq A$ olduğu için $Des(T) = T \cap Des(X)$ dir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. Keyfi $T \subseteq X$ için $Des(T) \subseteq T$ ve $Des(T) \subseteq Des(X)$ olduğu kullanılarak $Des(T) \subseteq T \cap Des(X)$ olur. Öte yandan $a \in T \cap Des(X)$ ise $a \in T$ ve $a \in Des(X)$ dir. Sa sonlu

üretilmiş yarı basit modül ve $Sa \subseteq T$ dir. Buradan $a \in Sa \subseteq Des(T)$ olur. Yani $a \in Des(T)$ olup $Des(T) = T \cap Des(X)$ eşitliği bulunur. $\square$

2.7. Modüllerde Radikal Kavramı

2.7.1. Tanım X modülünün maksimal alt modüllerinin kesişimine X modülünün radikali adı verilir ve $Rad(X)$ biçiminde ifade edilir. Şayet X in maksimal alt modülü mevcut değilse $X = Rad(X)$ olarak alınır. Böyle X modülüne radikal modül adı verilir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

2.7.2. Teorem Her modülün radikali, onun tüm küçük alt modüllerinin toplamı biçimindedir (Anderson ve Fuller, 1992).

Kanıt. X bir modül olmak üzere keyfi $T \ll X$ alt modülü verilsin. Eğer X in W maksimal alt modülü T yi kapsamazsa $W + T = X$ olup $W = X$ eşitliğinde bir çelişki bulunur. Dolayısıyla T , X in tüm maksimal alt modüllerinde kapsanır ki buradan $T \subseteq Rad(X)$ bulunur. Buradan da $\sum_{T \ll X} T \subseteq Rad(X)$ dir. Her $m \in Rad(X)$ elemanı için $\langle m \rangle = Sm \ll X$ olduğunu göstermeliyiz. $m \in Rad(X)$ iken Sm nin X de küçük alt modül olmadığını kabul edelim. Bu durumda $Sm + T = X$ olduğu için en az tek $T \neq X$ alt modülü mevcuttur. Böylece $L = \{T | m \notin T, Sm + T = X\}$ kümesi boştan farklıdır. Kabul edelim ki W, L nin bir zinciri ve $Z = \bigcup_{F \in W} F$ olduğu için Z, X in alt modülü olur. $X = Z$ olsa $m \in Z$ için $m \in F$ olan $\exists F \in C \subset L$ mevcuttur. Böylece $F = Sm + F = X$ eşitliğinden $F \in L$ olmasıyla bir çelişki elde edilir. Buradan $X \neq Z$ olup Z, W da bir üst sınır olur. Zorn Yardımcı Teoremi kullanılırsa E, X in bir maksimal alt modülü olacak şekilde L, E gibi bir maksimal eleman kapsar. Dolayısıyla $m \notin E$ iken $m \in Rad(X) \subseteq E$ çelişkisine ulaşılır. Sonuç olarak $\langle m \rangle = Sm \ll X$ olmak zorundadır. $\square$

$Rad(X) = 0$ ise, X in 0 haricinde küçük alt modülünün olmadığı açıktır (Anderson ve Fuller, 1992).

2.7.3. Teorem X modül ve Y, X in keyfi öz alt modülü olsun. Y, X in maksimal alt modülünde kapsanıyorsa $Rad(X) \ll X$ dir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. $Rad(X) + W = X$ olan keyfi W alt modülü verilsin. Şayet $W \neq X$ olsa hipotez gereğince W , X modülünün bir T maksimal alt modülü tarafından kapsanan alt modüldür. $W \subseteq T$ ve $Rad(X) \subseteq T$ iken $X = Rad(X) + W \subseteq T$ dir. Böylece $X = T$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla $W = X$ olmalıdır. Öyleyse $Rad(X) \ll X$ bulunur. $\square$

2.7.4. Yardımcı Teorem X bir modül olmak üzere I indis kümesi verilsin. Her $\eta \in \varphi$ için $T \subseteq T_\eta \subseteq X$ ise $\cap_{\eta \in \varphi} (T_\eta/T) = (\cap_{\eta \in \varphi} T_\eta)/T$ dir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. Her $m + T \in \cap_{\eta \in \varphi} (T_\eta/T)$ ve her $\eta \in \varphi$ için $m + T \in T_\eta/T$ iken $m \in T_\eta$ dir. Böylece $m \in \cap_{\eta \in \varphi} T_\eta$ olur ki $m + T \in (\cap_{\eta \in \varphi} T_\eta)/T$ elde edilir. Böylece $\cap_{\eta \in \varphi} (T_\eta/T) \subseteq (\cap_{\eta \in \varphi} T_\eta)/T$ bulunur. Benzer yolla ters kapsama da bulunur. $\square$

2.7.5. Teorem X modül olsun. Böylece aşağıdaki özellikler vardır;

- (i) $Rad(X/Rad(X)) = \{0\}$ dir.
- (ii) $T \subseteq X$ iken, $Rad(T) \subseteq Rad(X)$ dir.
- (iii) W modül olmak üzere her $\gamma \in Hom_S(X, W)$ için $\gamma(Rad(X)) \subseteq Rad(W)$ dir. Eğer $\text{Çek}(\gamma) \subseteq Rad(X)$ ise, $\gamma(Rad(X)) = Rad(\gamma(X))$ dir. Özel olarak her $\gamma \in End(X)$ için $\gamma(Rad(X)) \subseteq Rad(X)$ dir.
- (iv) $T \subseteq X$ ise, $(T + Rad(X))/T \subseteq Rad(X/T)$ ve $T \subseteq Rad(X)$ ise $Rad(X/T) = Rad(X)/T$ dir.
- (v) X yarı basit ise, X in her bir öz alt modülü tek maksimal alt modülünde içerilir.
- (vi) $X = \bigoplus_{i \in I} \eta \in \varphi X_\eta$ ise $Rad(X) = \bigoplus_{\eta \in \varphi} Rad(X_\eta)$ ve $X/Rad(X) \cong \bigoplus_{\eta \in \varphi} (X_\eta/Rad(X_\eta))$ dir.
- (vii) X modülü için $Rad(X) = X$ olması için gerek ve yeter şart X in keyfi T sonlu üretilmiş alt modülü $T \ll X$ olmasıdır (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

2.7.6. Teorem X eş atom modül ise, $Rad(X) \ll X$ dir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. $Rad(X) + T = X$ eşitliğini sağlayan T alt modülü için $X \neq T$ olsun. Hipotez gereğince T , X in W maksimal alt modülü tarafından içerilir. Böylece $T \subseteq W$, $Rad(X) \subseteq W$ iken $X = Rad(X) + T \subseteq W$ olur. Böylece $X = W$ çelişkisi çıkar. Dolayısıyla $T = X$ olup $Rad(X) \ll X$ elde edilir. $\square$

2.7.7. *Sonuç* Sonlu üretilmiş her modülün radikali küçük alt modüldür (Wisbauer, 1991).

Kanıt. X sonlu üretilmiş modül olsun. Teorem 2.2.6 kullanılarak X in her öz alt modülünün maksimal alt modülde kapsandığı görülür.

Bu nedenle Teorem 2.7.6 dan $Rad(X) \ll X$ dir. $\square$

2.8. Yerel ve Yarı yerel Modüller

2.8.1. Tanım X in tüm öz alt modüllerinin toplamı tekrar X in bir öz alt modülü oluyorsa, X e yerel modül adı verilir. S yerel modül oluyorsa S ye yerel halka adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.8.2. Teorem $0 \neq X$ modülünün yerel olması için gerek ve yeter şart X in sonlu üretilmiş (devirli) bir tek maksimal alt modülünün bulunmasıdır. Buradan X modülünün maksimal alt modülü $Rad(X)$ biçimindedir ve $Rad(X) \ll X$ sağlanır (Wisbauer, 1991).

Kanıt. X yerel modül, X in tüm öz alt modüllerinin toplamı T ise, $T \neq X$ olur. Buradan, en az bir $a \in X$ elemanı için $a \notin T$ olduğu için $Sa \not\subseteq T$ dir. T ifadesinin tanımı kullanılarak $Sa = T$ eşitliğinden X in devirli modül olduğu görülür. Bunun yanında T alt modülünün tek maksimal alt modülü olduğu bellidir. Zıt olarak, X devirli ve X sadece T maksimal alt modülüne sahip ise X in sonlu üretilmiş olduğu kullanılarak X modülünün her öz alt modülü T tarafından içerilir. Böylece X in tüm öz alt modüllerinin toplamı T olur ki bu ise X in yerel modül olması anlamına gelir. Sonuç olarak $Rad(X) = T$ olup X devirli olduğundan *Sonuç* 2.7.7 kullanılarak $Rad(X) \ll X$ bulunur. $\square$

2.8.3. Tanım X S -modülü için $X/Rad(X)$ yarı basit oluyorsa X e yarı yerel modül adı verilir. S sol (sağ) S -modül olarak yarı yerel halka oluyorsa, bu S halkasına yarı yerel halka adı verilir (Facchini, 1998).

2.8.4. Teorem (i) Yarı yerel modülün tüm bölüm modülleri yarı yerel modüldür.

(ii) $\{X_\eta\}_{\eta \in \varphi}$ yarı yerel modüllerin topluluğu olmak üzere $\bigoplus_{\eta \in \varphi} X_\eta = X$ yarı yereldir (Lomp, 1999).

Kanıt. (i) X yarı yerel modül, $\gamma: X \rightarrow T$ epimorfizma ise her $a + \text{Rad}(X) \in X/\text{Rad}(X)$ için $\bar{\gamma}(a + \text{Rad}(X)) = \gamma(a) + \text{Rad}(T)$ olarak tanımlanan $\bar{\gamma}: X/\text{Rad}(X) \rightarrow T/\text{Rad}(T)$ dönüşümü epimorfizmadır. X yarı yerel olduğu için $X/\text{Rad}(X)$ yarı basit olup *Sonuç* 2.5.9 (ii) kullanılarak $T/\text{Rad}(T)$ nin yarı basit olduğu buradan T nin yarı yerel olduğu görülür.

(ii) Her $i \in I$ için $X_{\eta}/\text{Rad}(X_{\eta})$ yarı basittir.

Teorem 2.7.5 (vi) ve *Sonuç* 2.5.9 (iii) kullanılarak $X/\text{Rad}(X) \cong \bigoplus_{\eta \in \varphi} (X_{\eta}/\text{Rad}(X_{\eta}))$ yarı basit olduğunda X yarı yerel bulunur. $\square$

2.8.5. Teorem X modülü için aşağıdakiler sağlanır,

- (i) X yarı yerel modüldür.
- (ii) $\text{Rad}(X) = \text{Rad}(S)X$ eşitliği vardır (Kasch, 1982).

Kanıt. (i) X S -üretilmiş olduğu için $I \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere $\gamma: S^{(I)} \rightarrow X$ epimorfizması vardır. S yarı yerel iken Teorem 2.8.4 (ii) kullanılarak $S^{(I)}$ nin yarı yerel S -modül olduğu görülür. Böylece Teorem 2.8.4 (i) den X yarı yereldir.

(ii) Teorem 2.7.5 (i) gereği $\text{Rad}(S)X \subseteq \text{Rad}(X)$ dir. S yarı yerel halka olduğundan $S/\text{Rad}(S)$ bölüm halkası yarı basittir. Buradan $X/(\text{Rad}(S)X)$, $S/\text{Rad}(S)$ -modül olup Teorem 2.5.10 (i) den $X/(\text{Rad}(S)X)$ yarı basit olur. Böylece $\text{Rad}(X/\text{Rad}(S)X) = 0$ eşitliğinden $\text{Rad}(S)X \subseteq \text{Rad}(X)$ kapsamı gelir Teorem 2.7.5 (iv) kullanılırsa $0 = \text{Rad}(X/\text{Rad}(S)X) = \text{Rad}(X)/(\text{Rad}(S)X)$ eşitliği görülür ki. Buradan $\text{Rad}(X) = \text{Rad}(S)X$ yazılır. $\square$

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş Modüller

3.1.1. Tanım $T \subseteq X$ in $T + Z = X$ eşitliğini sağlayan Z alt modülünün minimali W ise W ya T alt modülünün toplamaya göre tümleyeni (veya kısaca tümleyeni) adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.2. Tanım X in her alt modülü X içinde bir tümleyen içeriyorsa, X e tümlenmiş modül adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.3. Teorem X modül, X_1 ve T , X in alt modülleri ve X_1 tümlenmiş olsun. Eğer $X_1 + T$ nin X de tümleyeni varsa, T nin de X de bir tümleyeni vardır (Wisbauer, 1991).

Kanıt. $X_1 + T$ nin X içindeki tümleyeni W ve $X_1 \cap (T + W)$ alt modülünün X_1 içindeki tümleyeni Z olsun. Bu takdirde W , $X_1 + T$ nin X içindeki tümleyeni olduğundan $(X_1 + T) + W = X$, $(X_1 + T) \cap W \ll W$ ve Z , $X_1 \cap (T + W)$ nin X_1 içindeki tümleyeni olduğundan $X_1 \cap (T + W) + Z = X_1$ ve $(X_1 \cap (T + W)) \cap Z \ll Z$ dir. Buradan $X_1 + T + W = X_1 \cap (T + W) + Z + T + W = X$ olup $T + W + Z = X$ elde edilir. Diğer yandan, $T \cap (W + Z) \subseteq W \cap (T + Z) + Z \cap (T + W)$ olup $Z \subset X_1$ ve $Z \cap (T + W) \ll Z$ bulunur. Sonuç olarak $T \cap (W + Z) \ll W + Z$ olup $W + Z$, T nin X içindeki tümleyenidir. $\square$

3.1.4. Teorem X_1 ve X_2 ; X in alt modülleri olmak üzere $X = X_1 + X_2$ olsun. Eğer X_1 ve X_2 tümlenmişse, X de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. $T \subseteq X$ ve W da $(X_1 + T) \cap X_2$ nin X_2 içinde bir tümleyeni olsun. Bu durumda $X_1 + X_2 = X_1 + [(X_1 + T) \cap X_2] + W = X_1 + T + W = X$ bulunur. Ayrıca W , $(X_1 + T) \cap X_2$ nin X_2 içinde bir tümleyeni olduğundan $(X_1 + T) \cap W = ((X_1 + T) \cap X_2)$ olur. Dolayısıyla W $X_1 + T$ nin X içinde bir tümleyenidir. Yani $X_1 + T$, X de tümleyene sahip olur. X_1 tümlenmiş olduğu için Teorem 3.1.3 gereği T , X de tümleyene sahip olur. Dolayısıyla X tümlenmiştir. $\square$

3.1.5. Teorem T ile W , X modülünün alt modülleri iken W , T nin tümleyeni olduğu için;

- (i) X sonlu üretilmiş iken, W alt modülü de sonlu üretilmiştir.
- (ii) T, X in maksimal alt modülü iken $Rad(W) = T \cap W$ olacak biçimde yerel W alt modülü vardır.
- (iii) $Z \ll X$ iken $Z \cap W \ll W$ olup $Rad(W) = W \cap Rad(X)$ şeklindedir.
- (iv) $E \leq T$ olmak üzere $(W + E)/E$, X/E de T/E bölüm modülünün tümleyenidir (Wisbauer, 1991).

3.1.6. Teorem Oyuk modüller tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. X oyuk modül, X in herhangi bir öz alt modülü T iken $W \subseteq X$ için $T + W = X$ koşulu sadece $W = X$ iken gerçekleşir. Tanım 3.1.1 den X, T nin bir tümleyenidir. $\square$

3.1.7. Teorem Tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. X tümlenmiş modülü ve $T \subseteq W \subseteq X$ alt modülleri verilsin. Buradan $W + Z = X$ ve $W \cap Z \ll Z$ olan $Z \subseteq X$ alt modülü mevcuttur. Teorem 3.1.5 (iv) den $(Z + T)/T$, W/T nin X/T de tümleyeni olduğundan X/T bölüm modülünün tümlenmiş olduğu görülür. $\square$

3.1.8. Tanım X, S -modül $T \subseteq X$ iken $T + W = X$ koşulunu sağlayan her W alt modülü için T nin $W' \subseteq W$ olan W tümleyeni varsa T, X de bol tümleyene sahiptir. (Wisbauer, 1991).

3.1.9. Tanım X in her alt modülü bol tümleyenleri içeriyorsa X modülüne bol tümlenmiş adı verilir. X in her sonlu üretilmiş alt modülünün bol tümleyenleri bulunuyorsa X e sonlu bol tümlenmiş modül adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.10. *Sonuç* X bol tümlenmiş ise tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.11. Teorem X bol tümlenmiş modül ve T, X de tümleyen alt modül ise T de bol tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Kanıt. W, T tümleyenine sahip olsun. Ayrıca $Z + E = W$ olan keyfi $Z, E \subseteq T$ verilsin. Z nin $E' \subseteq E$ olan bir E' tümleyeninin bulunduğunu gösterelim. $Z + E = T$ ve $W + T = X$

olduğundan $W + Z + E = X$ olur. X bol tümlenmiş olduğundan $W + Z$ nin X içinde $E' \subseteq E$ olan bir E' tümleyeni vardır. Burada $E' \subseteq E \subseteq T$ iken $Z + E' \subseteq T$ dir. $X = W + Z + E'$ olduğu için T nin tümleyen olması sebebiyle $Z + E' = T$ yazılır. Ayrıca $Z \cap E' \subseteq (W + Z) \cap E' \ll E'$ iken $Z \cap E' \ll E'$ olup E' , Z nin T içinde $E' \subseteq E$ biçiminde bir tümleyeni olur. Dolayısıyla T bol tümlenmiştir. $\square$

3.2. Zayıf Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım X modülü ve $T \subseteq B$ verilsin. Eğer $T + W = X$ ve $T \cap W \ll X$ olacak şekilde bir $W \subseteq X$ varsa W ya T nin X de bir zayıf tümleyeni adı verilir. X in her alt modülünün bir zayıf tümleyeni mevcutsa X e zayıf tümlenmiş modül adı verilir (Clark ve ark, 2006).

3.2.2. Teorem X modül, $T \subseteq W$ ve $T, W \subseteq X$ olsun. Bu durumda X/T zayıf tümlenmiş iken X/W zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. $Z/W \subseteq X/W$ olsun. $T \subseteq W$ olduğundan $Z/T \subseteq X/T$ olup Z/T nin X/T içinde E/T gibi bir zayıf tümleyeni vardır. Buradan $(Z/T) + (E/T) = X/T$ ve $(Z \cap E)/T \ll X/T$ olur. Bu durumda $Z + E = X$ olup $(Z/T) + (E + W) = X/W$ bulunur. $(Z/W) \cap (E + W)/W = [(Z \cap E) + W]/W$ eşitliği sağlanır. $[(Z \cap E) + W] + F = X/W$ olsun. Bu durumda $(Z \cap E) + F = X$ olup $T \subseteq W \subseteq F$ iken $[(Z \cap E)/T] + F/T = X/T$ bulunur. $(Z \cap E)/T \ll X/T$ olması sebebiyle $F/T = X/T$ olur ki $F = X$ ve buradan da $F/W = X/W$ elde edilir. Dolayısıyla $(Z/W) \cap (E + W)/W \ll X/W$ olup $(E + W)/W, Z/W$ nın X/W da bir zayıf tümleyeni olur. Sonuç olarak X/W bölüm modülü zayıf tümlenmiştir. $\square$

3.2.3. Teorem X modül, $T \ll X$ şartı ile eğer X/T zayıf tümlenmiş ise X modülü zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. $W \subseteq X$, X/T zayıf tümlenmiş iken $(W + T)/T$ nin X/T içinde Z/T gibi zayıf tümleyeni olduğu açıktır. Bu durumda $W + Z = X$ olur. $(W \cap Z) + E = X$ eşitliğini sağlayan bir $E \subseteq X$ alalım. Buradan $[(W \cap Z) + T]/T + (E + T)/T = X/T$ olup $[(W \cap Z) + T]/T \ll X/T$ olduğundan $(E + T)/T = W/T$ bulunur. Yani $E + T = X$ olup $T \ll X$ olduğundan $E = X$ dir.

Dolayısıyla $W \cap Z \ll X$ olup Z, W nın X de bir zayıf tümleyenidir. Dolayısıyla X zayıf tümlenmiştir. $\square$

3.2.4. *Sonuç* Zayıf tümlenmiş modüllerin tüm bölüm modülleri zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. X zayıf tümlenmiş modül ve $T \subseteq X$ olsun. X/T bölüm modülünü ele alalım. X zayıf tümlenmiş ve $X/\{0\} \cong X$ olduğundan $X/\{0\}$ da zayıf tümlenmiştir. $\{0\} \subseteq T$ olduğu için Teorem 3.2.2 kullanılarak X/T bölüm modülü de zayıf tümlenmiş bulunur. $\square$

3.2.5. *Sonuç* Zayıf tümlenmiş modüllerin tüm homomorfik görüntüleri de zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. $\gamma: X \rightarrow T$ homomorfizma ve X zayıf tümlenmiş olsun. Bu takdirde *Sonuç* 3.2.4 den $X/\text{Çek}(\gamma)$ bölüm modülü zayıf tümlenmiştir. Böylece $\gamma(X) \cong X/\text{Çek}(\gamma)$ olduğundan $\gamma(X)$ de zayıf tümlenmiş olur. $\square$

3.2.6. Teorem X modül, $T, X_1 \subseteq X$ ve X_1 zayıf tümlenmiş olsun. Bu takdirde $X_1 + T, X$ de zayıf tümleyene sahip olmak şartıyla T de X de zayıf tümleyene sahiptir (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. Hipotez gereğince $X_1 + T$ nin X modülünde W gibi bir zayıf tümleyeni vardır. Bu durumda $X_1 + T + W = X$ ve $(X_1 + T) \cap W \ll X$ olur. X_1 zayıf tümlenmiş olduğundan $(T + W) \cap X_1$ in X_1 içinde Z gibi bir zayıf tümleyeni mevcuttur. Dolayısıyla $X_1 = ((T + W) \cap X_1) + Z$ ve $((T + W) \cap X_1) \cap Z \ll X_1$ dir. Buradan $X_1 + T + W = [((T + W) \cap X_1) + Z] + T + W = T + Z + W = X$ dir. $(X_1 + T) \cap W \ll X$ olduğu için $(Z + T) \cap W \ll X$ ve $(T + W) \cap Z \ll X_1$ bulunur ki buradan $(T + W) \cap Z \ll X$ dir. Bu durumda $T \cap (Z + W) \subseteq ((Z + T) \cap W) + ((T + W) \cap Z) \ll X$ olup $Z + W, T$ nin X de zayıf tümleyeni olur. $\square$

3.2.7. Teorem X_1 ve $X_2; X$ S -modülünün zayıf tümlenmiş alt modülleri olmak üzere $X_1 + X_2 = X$ ise X zayıf tümlenmiş modüldür (Clark ve ark, 2006).

Kanıt. $T \subseteq X$ olsun $X_1 + (X_2 + T)$ nin X de bir $\{0\}$ zayıf tümleyeni vardır ve X_1 zayıf tümlenmiş iken Teorem 3.2.6 dan $X_2 + T$ de X içinde bir zayıf tümleyene sahip olduğu görülür. X_2 zayıf tümlenmiş iken tekrar Teorem 3.2.6 dan T de X içinde bir zayıf tümleyene sahip olduğu görülür. Sonuç olarak X zayıf tümlenmiştir. $\square$

3.2.8. *Sonuç* Zayıf tümlenmiş modülün sonlu toplamı zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark, 2006).

3.3. SS-Tümlenmiş ve SS-Yükseltilebilir Modüller

3.3.1. Tanım X modülünün küçük basit alt modüllerinin toplamı olan X in $Des_s(X) = \sum\{T \ll X \mid T, X \text{ in basit alt modülü}\}$ alt modülü şeklinde tanımlanır (Zhou ve Zhang, 2011).

3.3.2. Tanım X modülü ve $T, W \subseteq X$ verilsin. Eğer $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(W)$ ise W ya T nin X de ss-tümleyeni adı verilir (Kaynar ve ark, 2020).

Tanım 3.3.2 den görüleceği üzere yarı basit her modül ss-tümlenmiştir. ss-tümlenmiş her modül tümlenmiştir.

3.3.3. *Sonuç* X modülü sonlu üretilmiş olsun. Bu durumda, X modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter şart X in tümlenmiş ve $Rad(X) \subseteq Des(X)$ olmasıdır (Kaynar ve ark, 2020).

3.3.4. *Örnek* r asal tamsayı olmak üzere $X = \mathbb{Z}_{r,k}$ ($1 \leq k \in \mathbb{Z}$) yerel $\mathbb{Z}$ -modülünde $k = 1$ alınırsa X basit modüldür. Bu sebeple X ss-tümlenmiştir. $k = 2$ alınırsa X basit modül değildir. Ancak $Rad(\mathbb{Z}_{r,2}) = Des(\mathbb{Z}_{r,2}) \cong \mathbb{Z}_r$ olup X ss-tümlenmiştir. Özel olarak $k = 2$ ve $r = 2$ alınırsa $\mathbb{Z}_4$ ss-tümlenmiş olur. Çünkü bu durumda $\mathbb{Z}_4$ e ait alt modül diyagramı

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_4 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

formunda olup $Des(\mathbb{Z}_4) = Rad(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dir.

$k \geq 3$ alınırsa $\mathbb{Z}_{r,k-1} \cong \text{Rad}(\mathbb{Z}_{r,k}) \neq \text{Des}(\mathbb{Z}_{r,k}) \cong \mathbb{Z}_r$ olduğu için *Sonuç* 3.3.3 den X ss-tümlenmiş değildir. Bunu örneğin; $k = 3$ ve $r = 2$ için daha açık ifade edelim. $\mathbb{Z}_8$ e ait alt modül diyagramı

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_8 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{4}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

formundadır. $\text{Des}(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_2$ ve $\text{Rad}(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_4$ olduğu için $\text{Des}(\mathbb{Z}_8) \neq \text{Rad}(\mathbb{Z}_8)$ dir. Ayrıca $\text{Des}_s(\mathbb{Z}_8) = \text{Des}(\mathbb{Z}_8) \cap \text{Rad}(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dir. *Sonuç* itibariyle $\mathbb{Z}_8$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü tümlenmiş iken ss-tümlenmiş değildir. $\mathbb{Z}_4$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü ss-tümlenmiştir, ancak yarı basit değildir (Kaynar ve ark, 2020).

3.3.5. Yardımcı Teorem X modülü için $\text{Des}_s(X) = \text{Rad}(X) \cap \text{Des}(X)$ dir (Kaynar ve ark, 2020).

Kanıt. $\text{Des}_s(X) \subseteq \text{Rad}(X)$ ve $\text{Des}_s(X) \subseteq \text{Des}(X)$ olduğu açıktır. Buradan $\text{Des}_s(X) \subseteq \text{Rad}(X) \cap \text{Des}(X)$ kapsamı vardır. Her $a \in \text{Rad}(X) \cap \text{Des}(X)$ için, Sa yarı basit olduğu için $n \in \mathbb{Z}^+$ iken Teorem 2.6.2 den $Sa = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$ parçalanışını sağlayan $P_1, \dots, P_n \subseteq X$ basit alt modülleri mevcuttur. $Sa \ll X$ iken Önerme 2.4.2 (i) den $1 \leq i \leq n$ için $P_i \ll X$ yazılır. Böylece $a \in Sa \subseteq \text{Des}_s(X)$ dir. $\square$

3.3.6. Önerme X bir modül olmak üzere, $T \subseteq \text{Rad}(X)$ ve T yarı basit ise, $T \ll X$ dir (Kaynar ve ark, 2020).

Kanıt. $T + W = X$ eşitliğini sağlayan $c \in X$ verilsin. T yarı basit iken $(T \cap W) \oplus T' = T$ şeklinde T nin T' direkt toplam terimi mevcuttur. O halde bu iki eşitlikten $T + W = [(T \cap W) \oplus T'] + W = T' + W = X$ olur. Ayrıca $T' \cap W = (T' \cap T) \cap W = T' \cap (T \cap W) = 0$ olması sebebiyle $T' \oplus W = X$ elde edilir. Teorem 2.7.6 kullanılarak ve $\text{Rad}(T') \subseteq \text{Rad}(T) = 0$ iken $\text{Rad}(X) = \text{Rad}(T') \oplus \text{Rad}(W) = \text{Rad}(W)$ olduğu görülür. Hipotezden

$X = T + W \subseteq \text{Rad}(X) + W = \text{Rad}(W) + W \subseteq W$ olur. Böylece $X = W$ olup $T \ll X$ bulunur. $\square$

3.3.7. Yardımcı Teorem X modül $T, W \subseteq X$ için aşağıdaki denk koşullar sağlanır;

(i) T, X de W ss-tümleyenine sahiptir.

(ii) $T + W = X$, $T \cap W \subseteq \text{Rad}(W)$ ve $T \cap W$ yarı basittir.

(iii) $T + W = X$, $T \cap W \ll W$ ve $T \cap W$ yarı basittir (Kaynar ve ark, 2020).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) W, T nin ss-tümleyeni ise $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq \text{Des}_s(W)$ yazılır. Buradan $T \cap W \subseteq \text{Rad}(X) \cap \text{Des}(X)$ olup Yardımcı Teorem 3.3.5 den $T \cap W$ basit alt modüllerin toplamı olup $T \cap W$ yarı basit bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq \text{Rad}(W)$ ve $T \cap W$ yarı basit olsun. Önerme 3.3.6 dan $T \cap W \ll Z$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $X = T + W$, $T \cap W \ll W$ ve $T \cap W$ yarı basit olsun. $T \cap W \subseteq \text{Des}_s(W)$ olup istenen elde edilir. $\square$

3.3.8. Önerme X (bol) ss-tümlenmiş modül olduğu için X in her bölüm modülü (bol) ss-tümlenmiştir (Kaynar ve ark, 2020).

3.3.9. Tanım X modül $W \subseteq T \subseteq X$ iken $T/W \ll X/W$ ise T alt modülü W alt modülü üzerinde adı verilir (Clark ve ark., 2006).

3.3.10. Teorem X modülünün T ve W alt modülleri verilsin T nin W nin üzerinde olması için gerek ve yeter şart $T + Z = Z$ koşulunu sağlayan her $Z \subseteq X$ için $W + Z = X$ olmasıdır (Clark ve ark., 2006).

Kanıt. ($\Rightarrow$) T, W iken $T/W \ll X/W$ dir. $T + Z = X$ olan $Z \subseteq X$ alalım. Bu takdirde $X/W = (T + Z)/W = (T/W) + (Z + W)/W$, $T/W \ll X/W$ olduğu için $(Z + W)/W = X/W$ ve $Z + W = X$ dir.

($\Leftarrow$) $(T/W) + (E/W) = X/W$ olan $E/W \subseteq X/W$ iken $(T + E)/W = X/W$ olduğu için $T + E = X$ olur. Hipotez gereğince $W + E = X$ olup $W \subseteq E$ olduğu için $E = X$ dir. Buradan $T/W \ll X/W$ olduğundan T, W nin üzerindedir. $\square$

3.3.11. Tanım X modülü $T' \oplus W = X$ in bir parçalanışına sahiptir, $T' \subseteq T$ ve $T \cap W \subseteq Des_S(W)$ ise, her $T \subseteq X$ modülüne ss-yükseltilebilir adı verilir (Eryılmaz, 2020).

3.3.12. Tanım X modülünün $T \subseteq X$ alt modülü verilsin. iken X/T nin $(W + T)/T$ direkt toplam terimi için $Z + T = W + T$ ve $Z \subseteq W$ olan her X in Z direkt toplam terimi mevcutsa T alt modülüne X de hemen hemen güçlü yükseltilebilirdir (QSL) adı verilir (Alkan, 2009).

3.3.13. Teorem X ss-yükseltilebilir modülünün her direkt toplamı da ss-yükseltilebilirdir (Eryılmaz, 2020).

Kanıt. T, X in keyfi direkt toplam terimi ise $T \oplus T' = X$ olacak şekilde X in T' alt modülü vardır. X ss-yükseltilebilir olduğu için, X in $Z, W \subseteq T$ alt modülleri için $W + Z = X, W \cap Z \subseteq Des_S(Z)$ iken $W \oplus (T \cap Z) = T$ parçalanışı vardır. Böylece $W \cap (T \cap Z) = (W \cap T) \cap Z = W \cap Z$, $W \cap Z$ yarı basit olur. $W \cap Z \ll X$ ve $W \cap Z \ll T$ olduğu için $W \oplus (T \cap Z) = T$ iken $W \cap Z \ll T \cap Z$ bulunur ki bu ise T ss-yükseltilebilir olduğunu gösterir. $\square$

3.3.14. Teorem Küçük radikale sahip bir X modülü için aşağıdaki denklikler sağlanır;

- (1) X , ss-yükseltilebilirdir.
- (2) X yükseltilebilir ve $Rad(X) \subseteq Des(X)$ dir (Eryılmaz, 2020).

3.3.15. Teorem S halkası için aşağıdaki denklikler sağlanır;

- (1) ${}_S S$, ss-yükseltilebilirdir.
- (2) ${}_S S$, ss-tümlenmiştir.
- (3) Her sol S -modülü ss-tümlenmiştir (Eryılmaz, 2020).
- (4) S yarı mükemmel ve $Rad(S) \subseteq Des({}_S S)$

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) ispatı açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) (Kaynar ve ark, Teorem 41) den ispatı açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) Teorem 3.3.14 ten ispatı açıktır. $\square$

3.3.16. Teorem X ss-yükseltilebilir, $(T + W)/W, X/W$ nın direkt toplam terimi olduğu için X in her direkt toplam terimi olan T için X/W ss-yükseltilebilirdir (Eryılmaz, 2020).

3.3.17. Teorem X zayıf dağılımlı modül iken $T \subseteq X$ ise X/T ss-yükseltilebilirdir (Eryılmaz, 2020).

Kanıt. $W \oplus Z = X$ olduğu için $X/T = [(W + T)/T] + [(Z + T)/T]$ ve $T = T + (W \cap Z) = (T + W) \cap (T + Z)$. Böylece $X/T = [(W + T)/T] \oplus [(Z + T)/T]$ bulunur. Buradan X/T Teorem 3.3.16 ya göre ss-yükseltilebilirdir. $\square$

3.4. SS-Yarı yerel Modüller

3.4.1. Tanım X in $T, W \subseteq X$ alt modülleri verilsin. W, T nin zayıf tümleyeni ve $T \cap W$ yarı basit ise, W ya T nin bir zayıf ss-tümleyeni denir (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.4.2. Yardımcı Teorem X modülünün T ve W alt modülleri için verilenler eş değerdir;

- (i) $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ dir.
- (ii) T, W zayıf ss-tümleyenine sahiptir.
- (iii) $T + W = X, T \cap W \subseteq Rad(X)$ ve $T \cap W$ yarı basittir (Olgun ve Türkmen, 2020).

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ ise, Yardımcı Teorem 3.3.5 ile $Des_s(X) = Rad(X) \cap Des(X)$ olduğundan $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ olup $T \cap W$ yarı basittir. Diğer yandan, $T \cap W \subseteq Rad(X)$ olup $T \cap W \ll X$ dir. Böylece W, T alt modülünün zayıf tümleyenidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) W, T nin X de zayıf tümleyeni ve $T \cap W$ yarı basit iken $T + W = X$ ve $T \cap W \ll X$ olup $T \cap W \subseteq Rad(X)$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $T + W = X, T \cap W \subseteq Rad(X)$ ve $T \cap W$ yarı basit, $T \cap W \subseteq Rad(X)$ ve $T \cap W \subseteq Des(X)$ olup $T \cap W \subseteq Rad(X) \cap Des(X) = Des_s(X)$ dir. $\square$

3.4.3. Tanım Her alt modülü zayıf-ss-tümleyene sahip olan modüle ss-yarı yerel modül adı verilir (Olgun ve Türkmen, 2020).

ss-yarı yerel modüller yarı yerel iken yarı yerel bir modülün ss-yarı yerel olması gerekmez.

Bunu örnekle açıklamadan önce aşağıdaki Yardımcı Teoremi inceleyelim.

3.4.4. Yardımcı Teorem $Des(X) = 0$ olan ss-yarı yerel bir X modülü sıfır modüldür (Olgun ve Türkmen, 2020).

Kanıt. $T \subseteq X$ olsun. Hipotez uyarınca, $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ olacak şekilde $W \subseteq X$ vardır. Buradan $T \cap W \subseteq Des_s(X) \subseteq Des(X) = 0$ ve böylece $T \oplus W = X$ dir. Dolayısıyla $X = Des(X) = 0$ dir. $\square$

3.4.5. *Örnek* $\mathbb{Z}$ - modül olan $X = \mathbb{Q}$ yu göz önünde bulunduralım. O zaman X in maksimal alt modülü mevcut olmadığı için $X = Rad(X)$ dir. Böylece $X/Rad(X) = 0$ yarı basittir. Bu nedenle X yarı yereldir. Kabul edelim ki X ss-yarı yerel olsun. $Des(X) = 0$ olduğu için Yardımcı Teorem 3.4.4 e göre $X = 0$ çelişkisi çıkar. Bu nedenle X ss-yarı yerel bir modül olmaz (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.4.6. Önerme ss-yarı yerel bir X modülü için $T, W \subseteq X$ ve $T + W = X$ ise $W' \subseteq W$ olacak şekilde T alt modülünün X de W' zayıf ss-tümleyeni vardır (Olgun ve Türkmen, 2020).

Kanıt. $T \cap W = Z$ olsun. X ss-yarı yerel olduğundan, $Z + E = X$ ve $Z \cap E \subseteq Des_s(X)$ olan $E \leq X$ vardır. Modüler kurala göre $W \cap X = W \cap (Z + E) = Z + (W \cap E) = W$ yazılır. Buradan $T + W = T + (Z + (W \cap E)) = T + (W \cap E) = X$ dir. Ayrıca $T \cap (W \cap E) = (T \cap W) \cap E = Z \cap E \subseteq Des_s(X)$ olması sebebiyle $W \cap E$ X de T nin zayıf-ss-tümleyeni olduğu görülür. $\square$

3.4.7. Önerme Yarı yerel X modülü için $Rad(X) \subseteq Des(X)$ olsun. O halde X ss-yarı yerel dir (Olgun ve Türkmen, 2020).

Kanıt. $Rad(X)$ yarı basit iken $Des_s(X) = Rad(X) \cap Des(X) = Rad(X)$ ve $X/Des_s(X) = X/Rad(X)$ modüllerinin her ikisi de yarı basittir. O halde X , ss-yarı yerel dir. $\square$

3.4.8. Önerme ss-yarı yerel X modülünün küçük alt modülü T ise, $T \subseteq Des_s(X)$ dir (Olgun ve Türkmen, 2020).

Kanıt. Hipoteze göre, $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ olan bir W alt modülü mevcuttur. $T \ll X$ ise $W = X$ elde edilir. Böylece $T \cap W = T \cap X = T \subseteq Des_s(X)$ olur. $\square$

3.4.9. *Sonuç* X ss-yarı yerel modül, $Rad(X) \ll X$ verilsin. $Rad(X) \subseteq Des(X)$ dir (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.4.10. *Sonuç* X modülü sonlu üretilmiş olduğundan X modülünün ss-yarı yerel olması için gerek ve yeter şart X in yarı yerel ve $Rad(X) \subseteq Des(X)$ olmasıdır (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.4.11. Teorem X modül, $Rad(X) \ll X$ olan bir X modülü için aşağıdaki denk koşullar verilir;

- (i) X ss-yarı yereldir.
- (ii) X yarı yerel, $Rad(X)$ alt modülü X de zayıf ss-tümleyene sahiptir.
- (iii) X yarı yerel, $Rad(X) \subseteq Des(X)$ dir.
- (iv) X zayıf tümlenmiştir, $Rad(X) \subseteq Des(X)$ dir.
- (v) X zayıf radikal tümlenmiştir ve $Rad(X) \subseteq Des(X)$ dir (Olgun ve Türkmen, 2020).

ss-yarı yerel her modül zayıf tümlenmiş iken zayıf tümlenmiş bir modülün ss-yarı yerel olması gerekmez.

3.4.12. *Örnek* $X = \mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$ -modülü için $Rad(X) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $Des(X) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ ve Artinian modüller zayıf tümlenmiş olduğu için, X zayıf tümlenmiştir. *Sonuç* 3.4.10 a göre X ss-yarı yerel değildir (Olgun ve Türkmen, 2020).

3.5. β^* Bağıntısı

3.5.1. Tanım X modülü ve $S(X) = \{T | T \subseteq X\}$ alt modülleri ailesi verilsin. $T, W \in S(X)$ için $S(X)$ kümesi üzerinde bir β^* bağıntısı $T\beta^*W \Leftrightarrow (T + W)/W \ll A/C$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ biçiminde tanımlıdır (Sökmez, 2011).

3.5.2. Yardımcı Teorem β^* , $S(X)$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Sökmez, 2011).

Kanıt. Yansıma: $\forall T \in S(X)$ için $(T + T)/T = \{T\} \ll X/T$ olduğundan $T\beta^*T$ bulunur. Dolayısıyla β^* bağıntısı, $S(X)$ kümesi üzerinde yansıma özelliğine sahiptir.

Simetri: $T, W \in S(X)$ için $T\beta^*W$ ise $(T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ dir. Buradan da $W\beta^*T$ olduğu açıktır.

Geçişme: $T, W, Z \in S(X)$ elemanları için $T\beta^*W$ ve $W\beta^*Z$ iken $T\beta^*W$ olması sebebiyle $(T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ ve $W\beta^*Z$ olması sebebiyle $(W + Z)/Z \ll X/Z$ ve $(W + Z)/W \ll X/W$ elde edilir. $T\beta^*Z$ olduğunu göstermek için $(T + Z)/Z \ll X/Z$ ve $(T + Z)/T \ll X/T$ olduğunu göstermeliyiz. $(T + Z)/T + Q/T = X/T$ koşulunu sağlayan $Q/T \subseteq X/T$ alt modülünü alalım. Bu takdirde $Z + Q = X$ dir ve bu eşitlikten $(Z + W)/W + (W + Q)/W = X/W$ yazılabilir. Buradan da hipotezde $(W + Z)/W \ll X/W$ olarak verildiğinden $W + Q = X$ bulunur. Benzer şekilde $W + Q = X$ olduğundan $X/T = (T + W)/T + (Q/T)$ yazabiliriz. Yine hipotezde $(T + W)/T \ll X/T$ olduğu göz önüne alınırsa $X/T = Q/T$ elde edilir. Buradan $(T + Z)/T \ll X/T$ elde edilir. Benzer yöntemle $(T + Z)/Z \ll X/Z$ biçiminde yazılabilir. $\square$

3.5.3. Teorem X in, T ve W alt modülleri için aşağıdaki denklilikler sağlanır;

- (1) $T\beta^*W$.
- (2) $T + W + Z = X$ olan her $Z \subseteq X$ için $T + Z = X$ ve $W + Z = X$ sağlanır.
- (3) $T + E = X$ koşulunu sağlayan her $E \subseteq X$ için $W + E = X$ ve $W + F = X$ olan her $F \subseteq X$ için $T + F = X$ dir (Sökmez, 2011).

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $T\beta^*W$ olsun. $T + W + Z = X$ koşulunu sağlayan $Z \subseteq X$ verilsin. $T + W + Z = X$ eşitliğinden $(T + W)/W + (Z + W)/W = X/W$ bulunur. Hipotezde $(T + W)/W \ll X/W$ olduğundan $W + Z = X$ dir. Benzer şekilde $T + Z = X$ eşitliği de görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) $T + E = X$ koşulunu sağlayan X in keyfi bir E alt modülü için $T + E + W = W + E = X$ elde edilir. Benzer şekilde $W + F = X$ eşitliğini doğrulayan her bir $F \subseteq X$ alt modülü için $T + F + W = X$ yazılabilir ve yine hipotezden $T + F = X$ bulunur. Tersine, $T + W + Z = X$ eşitliğini sağlayan $Z \subseteq X$ verilsin. $T + (W + Z) = X$ iken hipotezden $W + (W + Z) = X$ yazılabilir. Böylece $W + Z = X$ elde edilir. Bu adımda T ve W nin rolleri değiştirilerek $T + Z = X$ eşitliğine ulaşılır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $(T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ olduğunu göstermeliyiz. $(T + W)/W + G/W = X/W$ olan $G/W \subseteq X/W$ alt modülü verilsin. Bu takdirde $T + W + G = X$ olup $W \subseteq G$ olduğundan $T + G = X$ olur. Böylece hipotezden $W + G = X$ olup $W \subseteq G$ iken $G = X$ bulunur. Sonuç olarak $(T + W)/W \ll X/W$ sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $(T + W)/T \ll X/T$ olduğu da gösterilebilir. $\square$

3.5.4. Teorem (i) X modülü ve $T \ll X$ verilsin. Bu takdirde $T\beta^*W$ ise keyfi $W \subseteq X$ için $W \ll X$ dir.

(ii) X modülünde bulunan her bir küçük alt modül çifti β^* bağıntısı ile birbirlerine denktir (Sökmez, 2011).

Kanıt. (i) $T \ll X$ ve $T\beta^*W$ iken $W + F = X$ olan $F \subseteq X$ alt modülü verilsin. Böylece $T\beta^*W$ olduğundan $T + F = X$ ve $T \ll X$ iken $F = X$ eşitliğinden $W \ll X$ dir.

(ii) T ve W , X in keyfi küçük alt modülleri ise $T + Z = X$ eşitliğini her $Z \subseteq X$ alt modülü için $Z = X$ ve buradan $W + Z = X$ dir. Ayrıca $W + E = X$ eşitliğini sağlayan $E \subseteq X$ alt modülü için $E = X$ dir. Dolayısıyla $T + E = X$ bulunur. Böylece Teorem 3.5.3 gereği $T\beta^*W$ sonucuna ulaşılır. $\square$

3.5.5. *Sonuç* X modülünde bulunan küçük alt modüllerin kümesi β^* bağıntısına göre tek denklik sınıfı belirtir (Sökmez, 2011).

3.5.6. *Sonuç* X modülünün oyuk olması için gerek ve yeter şart X in tüm öz alt modüllerinin β^* bağıntısına göre birbirine denk olmasıdır (Sökmez, 2011).

Kanıt. X oyuk modül ise X in her bir alt modülü X de küçük alt modüldür. Teorem 3.4.4 (ii) den X in tüm öz alt modülleri birbirine denk bulunur. Tersine, X in tüm öz alt modülleri birbirine denk olduğunu kabul edelim. $T \subseteq X$ keyfi bir alt modülü için $T + W = X$ olan $W \subseteq X$ verilsin. Buradan $T\beta^*W$ olduğundan $W + W = X$ buradan da $W = X$ bulunur. Yani $T \ll X$ olur. Bu da istenendir. $\square$

3.5.7. Teorem X modülü ve $W \subseteq T \subseteq X$ verilsin. T alt modülü W alt modülü üzerinde ise $T\beta^*W$ dır (Sökmez, 2011).

Kanıt. T alt modülü W alt modülünün üzerinde ise $T + E = X$ eşitliğini sağlayan her $E \subseteq X$ için $W + E = X$ dir. Ayrıca $W \subseteq T$ olduğundan $W + Z = X$ eşitliğini sağlayan her $Z \subseteq X$ için $T + E = X$ olduğu açıktır. Teorem 3.5.3 gereği görülür. $\square$

3.5.8. Teorem X modülü ve $T, W \subseteq X$ verilsin. $T\beta^*W$ ise aşağıdaki özellikler mevcuttur;

(1) T ve W alt modüllerinin, X de tümleyenleri varsa aynıdır.

(2) T ve W alt modüllerinin, X de zayıf tümleyenleri varsa aynıdır (Sökmez, 2011).

Kanıt. (1) $Z \subseteq X$ alt modülünün T nin bir tümleyeni olduğunu kabul edelim. $Z, T + Z = X$ olan alt modüllerin minimal olanıdır. $T\beta^*W$ iken Teorem 3.5.3 ten $W + Z = X$ olur. Şimdi Z nin X de W nın bir tümleyeni olduğunu doğrulamak için $W + E = X$ olan bir $E \subseteq Z$ alt modülü alalım. Bu takdirde yine $T\beta^*W$ iken Teorem 3.5.3 ten $T + E = X$ dir. Buradan da Z alt modülü T nin bir tümleyeni ve $E \subseteq Z$ olduğundan $Z = E$ elde edilir. O halde Z, W alt modülünün de bir tümleyeni bulunur. Üstelik β^* bağıntısı simetrik olduğu için benzer işlemlerle W nın tümleyenlerinin ayrıca T nin de birer tümleyeni olduğu görülür.

(2) T nin $Z \subseteq X$ in zayıf tümleyeni olduğunu kabul edelim. Böylece $T + Z = X$ ve $T \cap Z \ll X$ yazılır. Hipotez gereğince $T\beta^*W$ iken Teorem 3.5.3 ten $W + Z = X$ bulunur. W nın X de Z zayıf tümleyenine sahip olduğunu doğrulamak için $(W \cap Z) + F = X$ olan bir $F \subseteq X$ alt modülünü alalım. $W + Z = X$ ve $(W \cap Z) + F = X$ olduğundan *Sonuç* 2.1.17 gereğince $W + (Z \cap F) = X$ ve $Z + (W \cap F) = X$ yazılabilir. Yine $T\beta^*W$ olduğundan $T + (Z \cap F) = X$ bulunur. $Z + (W \cap F) = X$ eşitliğinden de $Z + F = X$ yazılabilir. Tekrar *Sonuç* 2.1.17 gereğince $T + (Z \cap F) = X$ ve $Z + F = X$ olduğundan $F + (Z \cap T) = X$ elde edilir. Hipotezde $T \cap Z \ll X$ olarak verildiğinden $F = X$ dir. Böylece W nın X de Z zayıf tümleyenine sahip olduğu görülür. Üstelik β^* bağıntısının simetrik oluşu kullanılarak W nın her zayıf tümleyeninin ayrıca T nin de bir zayıf tümleyeni olduğu görülür. $\square$

3.5.9. Teorem X modülünün T_1, T_2, W_1, W_2 alt modülleri için $T_1 \beta^*W_1$ ve $T_2 \beta^*W_2$ ise $(T_1 + T_2) \beta^*(W_1 + W_2)$ dir (Sökmez, 2011).

Kanıt. $Z \subseteq X$ olmak üzere $(T_1 + T_2) + (W_1 + W_2) + Z = X$ ise $T_1 \beta^*W_1$ iken $W_1 + T_2 + W_2 + Z = X$ ve $T_1 + T_2 + W_2 + Z = X$ yazılabilir. $T_2 \beta^*W_2$ olması sebebiyle $W_1 + W_2 + Z = X$ ve $T_1 + T_2 + Z = X$ bulunur. Sonuç olarak Teorem 3.5.3 gereği $(T_1 + T_2)\beta^*(W_1 + W_2)$ elde edilir. $\square$

3.6. Goldie*-Yükseltilebilir ve Goldie*-Tümlenmiş Modüller

3.6.1. Tanım (i) X modülünün eğer her $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*W$ koşulunu sağlayacak şekilde X modülünde bir W direkt toplam terimi mevcut ise, X e Goldie*-yükseltilebilir ya da G^* -yükseltilebilir modül adı verilir.

(ii) X modülünün her $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*Z$ koşulunu sağlayacak şekilde X modülünde bir Z tümleyen alt modülü mevcut ise, X e Goldie*-tümlenmiş veya kısaca G^* -tümlenmiş modül adı verilir (Sökmez, 2011).

Her oyuk modül, hem G^* -yükseltilebilirdir hem de G^* -tümlenmiştir (Sökmez, 2011).

3.6.2. Teorem X modülünün G^* -tümlenmiş (G^* -yükseltilebilir) olması için gerek ve yeter şart her $T \subseteq X$ alt modülü için $T + W = Z + W = T + Z$ ($T + W = E + W = T + E$) olan X in en az bir W küçük alt modülünün ve Z tümleyen alt modülünün (E direkt toplam teriminin) mevcut olmasıdır (Sökmez, 2011).

Kanıt. ($\Rightarrow$) X in G^* -tümlenmiş olduğunu kabul edelim. $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*Z$ olan X de bir Z tümleyen alt modülü bulunsun. Böylece $Z + F = X$ ve $Z \cap F \ll Z$ olan bir $Z \subseteq X$ mevcuttur. Teorem 3.5.9 gereğince $T\beta^*(T + Z)$ ve $Z\beta^*(Z + T)$ bağıntıları vardır. Teorem 3.5.8 den de F alt modülü T ve $(Z + T)$ için de bir zayıf tümleyendir.

$W = (Z + T) \cap F \ll X$ olarak seçilirse modüler kuralı yardımıyla,

$$T + W = T + [(Z + T) \cap F] = (Z + T) \cap (T + F) = (Z + T) \cap X = Z + T$$

$$Z + W = Z + [(Z + T) \cap F] = (Z + T) \cap (Z + F) = (Z + T) \cap X = Z + T$$

eşitlikleri elde edilir ve $T + W = Z + W = Z + T$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$) Tersine $T \subseteq X$ alt modülü için W , X in küçük alt modülü ve Z , X de bir tümleyen alt modülü ise, $T + W = Z + W = T + Z$ eşitlikleri sağlansın. $T + H = X$ olan $H \subseteq X$ alalım. Buradan $T + W + H = X$ eşitliği vardır. $T + W = Z + W$ olduğundan $Z + W + H = X$ elde edilir. $W \ll X$ olduğundan da $Z + H = X$ sonucuna ulaşılır. Tersine $Z + K = X$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $K \subseteq X$ verilsin. Böylece $Z + W + K = X$ eşitliği vardır. $T + W = Z + W$ iken $T + W + K = X$ elde edilir. $W \ll X$ olduğundan da $T + K = X$ sonucuna ulaşılır. Böylece $T\beta^*Z$ bağıntısına ulaşılır ve Teorem 3.5.3 gereği X modülü G^* -tümlenmiştir. $\square$

3.6.3. *Sonuç* (i) X in $T \subseteq X$ alt modülü için $Z + W = T$ olan X in Z tümleyen alt modülü ve X de W küçük alt modülü mevcutsa X modülü G^* -tümlenmiştir. X modülünün dağılımlı olması durumunda iddianın ters yönü de gerçekleşir.

(ii) X , G^* -tümlenmiş, $Rad(X) \subseteq T$ iken $T \subseteq X$ ise $Z + W = T$ olan $Z \subseteq X$ tümleyen alt modülü ve $W \ll X$ alt modülü mevcuttur (Sökmez, 2011).

Kanıt. (i) Hipotez ve Teorem 3.6.2 gereğince, X G^* -tümlenmiş modüldür. Tersine X G^* -tümlenmiş ve dağılımlı modül olsun. Bu takdirde $T \subseteq X$ alt modülü için $T\beta^*Z$ olan $Z \subseteq X$ tümleyen alt modülü mevcuttur. Böylece $Z + E = X$, $Z \cap E \ll Z$ ise $E \subseteq X$ vardır. $T\beta^*Z$ iken Teorem 3.5.3 den $T + E = X$ elde edilir. Eşitliğin Z ile kesişimi alınarak X in dağılımlı modül olması kullanılırsa $Z = Z \cap (T + E) = (Z \cap T) + (Z \cap E) = Z \cap T$ eşitliği bulunur. Dolayısıyla $Z \subseteq T$ dir. Ayrıca $T\beta^*Z$ olduğundan Teorem 3.5.8 gereği E , T nin bir zayıf tümleyenidir. Böylece $T \cap E \ll X$ dir. Buradan $T \cap (Z + E) = Z + (T \cap E) = T$ elde edilir. (ii) X modülü G^* -tümlenmiş ve $Rad(X) \subseteq T$ olmak üzere $T \subseteq X$ ise Teorem 3.6.2 gereği $T + Z + W = T + Z = W$ olan X in bir W küçük alt modülü ve bir Z tümleyeni vardır. $W \subseteq Rad(X)$ ve $Rad(X) \subseteq T$ iken $W \subseteq T$ bulunur. Dolayısıyla $Z + W = T$ dir. $\square$

3.6.4. Teorem X G^* -tümlenmiş modülü ve $T \subseteq X$ verilsin. X in her W tümleyen alt modülü için $(T + W)/T$, X/T nin bir tümleyen alt modülü ise; X/T bölüm modülü G^* -tümlenmiştir (Sökmez, 2011).

Kanıt. $T \subseteq Z \subseteq X$ olmak üzere keyfi bir $Z/T \subseteq X/T$ alt modülü verilsin. $Z \subseteq X$ ve X modülü G^* -tümlenmiş olduğundan $Z\beta^*W$ olan X in bir W tümleyen alt modülü mevcuttur. $(Z/T) + (E/T) = X/T$ olan her bir $E/T \subseteq X/T$ alt modülü için $Z + E = X$ eşitliği vardır ve $Z\beta^*W$ ise $W + E = X$ bulunur. Buradan da $[(W + T)/T] + (E/T) = X/T$ sonucuna ulaşılır. Benzer yolla $[(W + T)/T] + E/T = X/T$ eşitliğini sağlayan her $E/T \subseteq X/T$ alt modülü için $(Z/T) + (E/T) = X/T$ eşitliği sağlanır. Yani $(Z/T) \beta^*(W + T)/T$ dir. Ayrıca, W nın X de bir tümleyen alt modül olması kullanılarak hipotez gereğince $(W + T)/T$ nin X/T bölüm modülünde bir tümleyen alt modül olduğu görülür. Sonuç olarak, X/T , G^* -tümlenmiştir. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. β_{ss}^* Bağıntısı

4.1.1. Tanım X modülünün $T, W \subseteq X$ için $(T + W)/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ ve $(T + W)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W$ kapsamaları sağlanıyorsa T ve W alt modüllerine β_{ss}^* bağıntısına göre denktir denir ve $T\beta_{ss}^*W$ ile gösterilir.

4.1.2. Yardımcı Teorem β_{ss}^* bir denklik bağıntısıdır.

Kanıt. Yansıma: Her $T \subseteq X$ için, $T/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ olduğundan $T\beta_{ss}^*T$, olup yansıma özelliği sağlanır.

Simetri: $T\beta_{ss}^*W$ bağıntısı verilsin. Böylece $(T + W)/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ ve $(T + W)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W$ olup buradan $T + W \subseteq Des_s(X) + T$ ve $T + W \subseteq Des_s(X) + W$ kapsamaları sağlanır. $(W + T)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W$ ve $(W + T)/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ olduğundan $W\beta_{ss}^*T$ olup simetri özelliği sağlanır.

Geçişme: $T\beta_{ss}^*W$ ve $W\beta_{ss}^*Z$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} (T + W)/_T &\subseteq (Des_s(X) + T)/_T \text{ ve } (T + W)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W \\ (W + Z)/_W &\subseteq (Des_s(X) + W)/_W \text{ ve } (W + Z)/_Z \subseteq (Des_s(X) + Z)/_Z \end{aligned}$$

Olur. Böylece

$$T + W \subseteq Des_s(X) + T \text{ ve } T + W \subseteq Des_s(X) + W$$

$$W + Z \subseteq Des_s(X) + W \text{ ve } W + Z \subseteq Des_s(X) + Z$$

elde edilir,

$Des_s(X)$ alt modülünün ve β_{ss}^* bağıntısının tanımı kullanılarak $T + Z \subseteq Des_s(X) + T$ ve $T + Z \subseteq Des_s(X) + Z$ bulunur ki bu ise $T\beta_{ss}^*Z$ olduğunu gösterir. $\square$

4.1.3. Önerme $\gamma: X \rightarrow T$ bir epimorfizması için aşağıdaki ifadeler sağlanır;

(1) $W, Z \subseteq X$ ve $W\beta_{ss}^*Z$ ise $\gamma(W)\beta_{ss}^*\gamma(Z)$ bağıntısı vardır.

(2) $W, Z \subseteq T$ ve $W\beta_{ss}^*Z$ ise $\gamma^{-1}(W)\beta_{ss}^*\gamma^{-1}(Z)$ bağıntısı vardır.

(3) $W \subseteq X, C \subseteq Des_s(X), E \subseteq T$ ve $\gamma(W)\beta_{ss}^*E$ ise $W\beta_{ss}^*\gamma^{-1}(E)$ bağıntısı vardır.

Kanıt. (1) X in W ve Z alt modülleri verilsin. $W\beta_{ss}^*Z$ iken $W + Z \subseteq Des_s(X) + W$ ve $W + Z \subseteq Des_s(X) + Z$ kapsaması vardır. Dolayısıyla $\gamma(W) + \gamma(Z) \subseteq Des_s(T) + \gamma(W)$ ve $\gamma(W) + \gamma(Z) \subseteq Des_s(T) + \gamma(Z)$ olup $\gamma(W)\beta_{ss}^*\gamma(Z)$ elde edilir.

(2) $W, Z \subseteq T$ için $W\beta_{ss}^*Z$ olsun. Böylece $W + Z \subseteq Des_s(T) + W$ ve $W + Z \subseteq Des_s(T) + Z$ bir epimorfizma olduğu için $\gamma^{-1}(W) + \gamma^{-1}(Z) \subseteq Des_s(X) + W$ ve $\gamma^{-1}(W) + \gamma^{-1}(Z) \subseteq Des_s(X) + Z$ olup $\gamma^{-1}(W)\beta_{ss}^*\gamma^{-1}(Z)$ dir.

(3) $\gamma(W)\beta_{ss}^*E$, $W \subseteq Des_s(X)$ ve $E \subseteq T$ iken $\gamma(W) + E \subseteq Des_s(T) + \gamma(W)$ ve $\gamma(W) + E \subseteq Des_s(T) + E$ bulunur. γ bir epimorfizma ve $W \subseteq Des_s(X)$ olduğundan $\gamma^{-1}(E) + W \subseteq Des_s(X) + \gamma^{-1}(E)$ ve $\gamma^{-1}(E) + W \subseteq Des_s(X) + W$ elde edilir. Dolayısıyla $W\beta_{ss}^*\gamma^{-1}(E)$ olur. $\square$

4.1.4. Önerme $T, W_1 \subseteq X$ alt modülleri için, $Des_s(X) \subseteq W_2 \subset A$ öyle ki $W_1 + W_2 = X$ ve $T\beta_{ss}^*W_1$ olduğundan $T \not\subseteq W_2$ dir.

Kanıt. $T \subseteq W_2$ olsun. $Des_s(X) \subseteq W_2$ olduğundan $T + W_2 = X$ olduğunu biliyoruz. Buradan $W_2 = X$ çelişkisi çıkar. O halde $T \not\subseteq W_2$ dir. $\square$

4.1.5. Önerme $W \subseteq T$ ve $T \subseteq X$ bir maksimal alt modülü verilsin. $W\beta_{ss}^*Z$ ise $Z \subseteq T$ dir.

Kanıt. $Z \not\subseteq T$ iken $Z + T = X$ olup buradan $W\beta_{ss}^*Z$ ve $Des_s(X) \subseteq T$ den $T + W = X$ olur. Ancak

$W \subseteq T$ olması $T = X$ eşitliğini verir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $Z \subseteq T$ olmalıdır. $\square$

4.1.6. Önerme X modülünün T_1, T_2, W_1, W_2 alt modülleri için $T_1\beta_{ss}^*W_1$ ve $T_2\beta_{ss}^*W_2$ olsun. Bu takdirde $(T_1 + T_2)\beta_{ss}^*(W_1 + W_2)$ ve $(T_1 + W_2)\beta_{ss}^*(W_1 + T_2)$ olur.

Kanıt. $T_1\beta_{ss}^*W_1$ ve $T_2\beta_{ss}^*W_2$ olsun.

$$T_1 + W_1 \subseteq Des_s(X) + T_1 \text{ ve } T_1 + W_1 \subseteq Des_s(X) + W_1$$

$$T_2 + W_2 \subseteq Des_s(X) + T_2 \text{ ve } T_2 + W_2 \subseteq Des_s(X) + W_2$$

Kapsamaları yardımıyla

$(T_1 + T_2)\beta_{ss}^*(W_1 + W_2)$ ve $(T_1 + W_2)\beta_{ss}^*(W_1 + T_2)$ bağıntısı elde edilir. $\square$

4.1.7. *Sonuç* $T, W \subseteq X$ ve $Z \subseteq \text{Des}_S(X)$ iken $T\beta_{ss}^*(W + Z)$ oluyorsa $T\beta_{ss}^*W$ olur.

Kanıt. Önerme 4.1.6 dan ve $0\beta_{ss}^*Z$ nin bir sonucu olarak $Z \subseteq \text{Des}_S(X)$ olduğundan $W\beta_{ss}^*(W + Z)$ olur. Bu durum β_{ss}^* bağıntısının geçişme özelliğinden elde edilir. $\square$

4.1.8. *Sonuç* $T, W_1, \dots, W_n \subseteq X$ için $T\beta_{ss}^*W_i$ $i = 1, \dots, n$ ise $T\beta_{ss}^*\sum_{i=1}^n W_i$ dir.

4.1.9. *Örnek* (i) Her modül çifti β_{ss}^* bağıntısına göre denk olmayabilir örneğin, G bir cisim olmak üzere,

$S = \begin{bmatrix} G & G \\ 0 & G \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in G \right\}$ halkası verilsin. S S -modülünde $X = \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$ alt modülleri birbirine izomorfken β_{ss}^* bağıntısına göre birbirine denk değildir.

(ii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modülde $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ve $\{0\} \times \mathbb{Z}$ alt modülleri de birbirine izomorf olmalarına rağmen, β_{ss}^* bağıntısına göre denk değildirler.

4.1.10. *Sonuç* X modülünün T, W alt modülleri için $T\beta_{ss}^*W$ ise, her $Z \subseteq X$ için $T + W + Z = X$ iken, $T + Z = X$ ve $W + Z = X$ dir.

Kanıt. $T\beta_{ss}^*W$ olsun, $T + W + Z = X$ eşitliğini sağlayan $Z \subseteq X$ verilsin. $T + W + Z = X$, $(T + W)/W + (Z + W)/W = X/W$ bulunur. $(T + W)/W \ll X/W$ olduğu için $W + Z = X$ elde ederiz hipotez yardımıyla benzer şekilde, $T + Z = X$ olduğu gösterilebilir. $\square$

4.1.11. *Sonuç* T ve W , X in küçük ve yarı basit alt modülleriye, o zaman $T\beta_{ss}^*W$ dir.

Kanıt. $(T + W)/W \subseteq \text{Des}_S(X/W)$, $(T + W)/T \subseteq \text{Des}_S(X/T)$ olduğunu kanıtlayacağız. (Birkenmeier ve ark., 2010) gereği $(T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ dir. $\eta_1: X \rightarrow X/T$ ve $\eta_2: X \rightarrow X/W$ doğal homomorfizmalar olsun. $\eta_2(T) = (T + W)/W$ ve $\eta_1(W) = (T + W)/T$ yazılır. T ve W yarı basit alt modüllerinin homomorf görüntüleri olan $(T + W)/W$ ve $(T + W)/T$ bölüm modülleride yarı basittir. Buradan (Kasch, 1982) gereğince ispat tamamlanır. $\square$

4.1.12. Teorem X in T, W alt modülleri için aşağıdaki denklik verilir.

(1) $T\beta_{ss}^*W$.

(2) $T + W + Z = X$ olan her T ve W yarı basit alt modülü ve her bir Z alt modülü için $T + Z = X$ ve $W + Z = X$ eşitlikleri vardır.

(3) X yarı basit olacak şekilde $T, W \subseteq X$ verilsin. $T + E = X$ olan her $E \subseteq X$ için $W + E = X$ bulunur. Ayrıca $W + F = X$ olan her $F \subseteq X$ için $T + F = X$ dir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $T\beta_{ss}^*W$ olsun. $T + W + Z = X$ olan her $Z \subseteq X$ verilsin. $T + W + Z = X$ eşitliğinden $[(T + W)/W] + [(Z + W)/W] = X/W$ yazılabilir. Hipotezde $(T + W)/W \subseteq Des_s(X/W)$ iken $(T + W)/W \ll X/W$ sağlanır. Böylece $W + Z = X$ olduğu görülür. Benzer şekilde $T + Z = X$ olduğu da gösterilebilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $T + E = X$ olan her bir $E \subseteq X$ alt modülü verilsin. Böylece $T + E + W = X$ yazılabilir ve hipotezden $W + E = X$ eşitliği elde edilir. Benzer yolla $W + F = X$ eşitliğini sağlayan her $F \subseteq X$ alt modülü verilsin. Böylece $T + F + W = X$ yazılabilir ve yine hipotezden $T + F = X$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (2) $T + W + Z = X$ olan keyfi $Z \subseteq X$ verilsin. $T + (W + Z) = X$ iken (3) gereği $W + (W + Z) = X$ yazılabilir. Buradan da $W + Z = X$ sonucuna ulaşılır. Uygulanan adımlarda T ve W alt modüllerinin rolleri değiştirilerek benzer yolla $T + Z = X$ olduğu gösterilebilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $(T + W)/W \subseteq Des_s(X/W)$ ve $(T + W)/W \subseteq Des_s(X/T)$ olup $(T + W)/W \ll X/W$ ve $(T + W)/T \ll X/T$ olduğunu göstermeliyiz. T ve W alt modülleri yarı basit olduğundan $(T + W)/W$ ve $(T + W)/T$ bölüm modülleri yarı basittir. (Kasch, 8.1.5. (2)) gereğince $[(T + W)/W] + G/W = X/W$ olan $G/W \subseteq X/W$ alt modülü verilsin. Bu takdirde $T + W + G = X$ olup $W \subseteq G$ olduğundan $T + G = X$ olur. Bu durumda hipotezden $W + G = X$ olup $W \subseteq G$ olduğundan da $G = X$ bulunur. Böylece $(T + W)/W \ll X/W$ sonucuna ulaşılır. Benzer işlemlerle $(T + W)/T \ll X/T$ olduğu da gösterilebilir. Buradan $(T + W)/W \subseteq Des_s(X/W)$ ve $(T + W)/T \subseteq Des_s(X/T)$ olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

4.1.13. *Sonuç* X modülünün küçük ve yarı basit alt modüllerin kümesi, β_{ss}^* bağıntısına göre tek denklik sınıfı belirtir.

4.1.14. Teorem $T, W \subseteq X$ alt modülleri için $T\beta_{ss}^*W$ ise T, W nın mevcutsa ss-tümleyenleri aynıdır.

Kanıt. $Z \subseteq X$ alt modülünün T nin bir ss-tümleyeni olduğunu kabul edelim. Böylece Z alt modülü $T + Z = X$ eşitliğini sağlayan alt modüllerin minimal olanıdır. Ayrıca $T \cap Z \ll Z$ dir ve $T \cap Z$ yarı basittir. $T\beta_{ss}^*W$ olduğundan Teorem 4.1.12 gereği $W + Z = X$ olur. Şimdi $Z \subseteq X$ nin W alt modülünün bir ss-tümleyeni olduğunu gerçeklemek için $W + E = X$ olan bir $E \subseteq Z$ alalım. Bu takdirde yine $T\beta_{ss}^*W$ olduğu için Teorem 4.1.12 den $T + E = X$ bulunur. Böylece Z alt modülü T nin bir ss-tümleyeni ve $E \subseteq Z$ olduğu için $Z = E$ bulunur. (Kasch, 1982) den $T \cap Z$ nin yarı basit ve $E \subseteq Z$ için $T \cap E$ yarı basit olması kullanılarak $T \cap E$ nin yarı basit olduğu görülür. Dolayısıyla Z alt modülü W nın da bir ss-tümleyenidir. Üstelik β_{ss}^* bağıntısı simetrik olduğu için aynı yöntemle W nın ss-tümleyenlerinin aynı zamanda T nin de ss-tümleyeni olduğu görülür. $\square$

4.1.15. Teorem X modülünün yarı basit olan $T, W \subseteq X$ için $Z \subseteq Des_s(X)$ olsun. Bu takdirde $T\beta_{ss}^*W \Leftrightarrow T\beta_{ss}^*(W + Z)$ dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $T\beta_{ss}^*W$ olsun. $T + (W + Z) + E = X$ olan her bir $E \subseteq X$ için $T + (W + Z) + E = X$ ve $Z \subseteq Des_s(X)$ olduğundan $T + W + E = X$ bulunur. $T + W + E = X$ ve $T\beta_{ss}^*W$ olduğu kullanılarak Teorem 4.1.12 den $T + E = X$ ve $W + E = X$ yazılır. Böylece $T + E = X$ ve $(W + Z) + E = X$ sonucuna ulaşılır. Yine Teorem 4.1.12 gereği $T\beta_{ss}^*(W + Z)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $T\beta_{ss}^*(W + Z)$ verilsin. $T + W + E = X$ olan her $E \subseteq X$ alt modülü için $T + (W + Z) + E = X$ yazılabilir. Ayrıca $T\beta_{ss}^*(W + Z)$ olduğundan Teorem 4.1.12 gereği $T + E = X$ ve $(W + Z) + E = X$ bulunur. $Z \subseteq Des_s(X)$ kabulünden de $W + E = X$ elde edilir. O halde Teorem 4.1.12 gereği $T\beta_{ss}^*W$ elde edilir. $\square$

4.1.16. Teorem $Des_s(X) = 0$ olan X in X_1 alt modülü ve yarı basit olan X_2 alt modülü verilsin. $X_1 \oplus X_2 = X$, $T \subseteq X$ ve $T\beta_{ss}^*X_1$ ise $X_2 \oplus T = X$ eşitliği sağlanır.

Kanıt. Kabul edelim ki $T\beta_{ss}^*X_1$ olsun. $X_1 \oplus X_2 = X$ eşitliğinden X_2 alt modülü X_1 in bir ss-tümleyenidir. Dolayısıyla $T\beta_{ss}^*X_1$ olduğundan da X_2 alt modülü yarı basit olup Teorem 4.1.14 den T nin de bir ss-tümleyeni bulunur. Buradan $X_2 + T = X$ ve $X_2 \cap T \ll X_2$ yazılabilir. X_2 yarı basit olduğundan $X_2 \cap T$ de yarı basittir. Dolayısıyla $X_2 \cap T \subseteq Des_s(X)$ dir. Hipotezden $Des_s(X) = 0$ kullanılarak $X_2 \cap T \subseteq Des_s(X) = 0$ bulunur ve $X_2 \oplus T = X$ sonucuna ulaşılır. $\square$

4.1.17. Teorem X S -modülünün yarı basit T alt modülü ve S nin I ideali verilsin. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $IT\beta_{ss}^*I^nT$ dir. Özel olarak $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $I\beta_{ss}^*I^n$ olur.

Kanıt. İspatı n üzerine tümevarım uygulayarak yapalım. $n = 1$ iken β_{ss}^* yansıyan bir bağıntı olduğundan $IT\beta_{ss}^*IB$ sağlanır. Şimdi $n > 1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Kabul edelim ki $[IT/I^nT] + [W/I^nT] = X/I^nT$ eşitliğini sağlayan $W \subseteq X$ verilsin. Bu takdirde $IT + W = X$ dir. Buradan da $I^2T + IW = IX, \dots, I^nT + I^{n-1}W = I^{n-1}X$ eşitlikleri vardır. Bu eşitlikler kullanılarak, $X = IT + W \subseteq IX + W = I^2T + IW + W \subseteq I^2X + IW + W = I^3T + I^2W + IW + W \subseteq \dots \subseteq I^nT + I^{n-1}W + \dots + IW + W \subseteq I^nT + W \subseteq X$ bulunur. Böylece $W/I^nT = X/I^nT$ dir. Bölüm modülü yarı basit olup $(IT + I^nT)/I^nT \ll X/I^nT$ ve $(IT + I^nT)/IT = \{IT\} \ll X/IT$ dir. Ayrıca hipotez gereği T yarı basit olduğundan (Kasch, 8.1.5. (3)) gereğince $(IT + I^nT)/I^nT$ yarı basittir. Böylece $(IT + I^nT)/IT \subseteq Des_S(X/IT)$ ve $IT + (I^nT/I^nT) \subseteq Des_S(X/I^nT)$ olduğundan $IT\beta_{ss}^*I^nT$ dir. $\square$

4.1.18. Önerme X modülü zayıf-ss-tümlenmiş ise, X in her yarı basit alt modülü X de zayıf-ss-tümleyen alt modüle β_{ss}^* bağıntısı ile denktir.

Kanıt. X zayıf ss-tümlenmiş modül, $T \subseteq X$ yarı basit olsun. X zayıf-ss-tümlenmiş olduğu için $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_S(X)$ olan bir $W \subseteq X$ mevcuttur. Burada T de W nın zayıf-ss-tümleyenidir. Üstelik β_{ss}^* bağıntısı yansıma özelliğine sahip olduğu için $T\beta_{ss}^*T$ yazılabilir. Böylece X in her yarı basit alt modülü X in zayıf-ss-tümleyen alt modülüne denk olur. $\square$

4.1.19. Sonuç X modülünün zayıf-ss-tümlenmiş her $T \subseteq X$ yarı basit alt modülü için $T + W = Z + W = T + Z$ eşitliklerini sağlayan X de küçük ve yarı basit olan bir W alt modülü ve X de zayıf-ss-tümleyen olan bir Z alt modülü vardır.

Kanıt. X modülünün zayıf-ss-tümlenmiş olduğunu kabul edelim. Önerme 4.1.18 den X in her yarı basit T alt modülü için $T\beta_{ss}^*Z$ olan X in Z zayıf-ss-tümleyen alt modülü mevcuttur. Buradan $Z + E = X$ ve $Z \cap E \subseteq Des_S(X)$ olan bir $E \subseteq X$ bulunabilir. Önerme 4.1.6 gereğince $T\beta_{ss}^*(T + Z)$ ve $Z\beta_{ss}^*(Z + T)$ dir. $\square$

4.1.20. Uyarı Önerme 4.1.6 sonlu toplam için gerçekleşir, ancak sayılabilir sonsuz toplama için gerçekleşmez. Örnek olarak $S = \mathbb{Z}$ ve $X = \mathbb{Q}$ alınırsa, $Des_S(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{Z} \frac{1}{n}$

biçiminde olur. Burada $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{Z} \frac{1}{n} \subseteq Des_S(\mathbb{Q})$ olduğundan $\mathbb{Z} \frac{1}{n} \beta_{ss}^* \{0\}$ dır. Eğer Önerme 4.1.6 sayılabilir toplanlar içinde gerçekleşseydi, $\mathbb{Q} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{Z} \frac{1}{n} \beta_{ss}^* \{0\}$ olurdu. Bu ise $\mathbb{Q} \subseteq Des_S(\mathbb{Q})$ çelişkisini getirirdi. O halde Önerme 4.1.6. sayılabilir sonsuz toplamda sağlanamaz.

4.1.21. Tanım X modülünün β_{ss}^* bağıntısına göre alt modüllerinin denklik sınıflarının kümesini $T_{\beta_{ss}^*}(X)$ ile gösterelim. Yani $\bar{T}_{\beta_{ss}^*} = \{W | T\beta_{ss}^*W\}$ olmak üzere $L_{\beta_{ss}^*}(X) = \{\bar{T}_{\beta_{ss}^*} | T \subseteq X\}$ biçiminde tanımlanır.

4.1.22. Teorem $L_{\beta_{ss}^*}(X)$ bir monoid yapısına sahiptir.

Kanıt. $+: L_{\beta_{ss}^*}(X) \times T_{\beta_{ss}^*}(A) \rightarrow L_{\beta_{ss}^*}(X)$ işlemini $(\bar{T}_{\beta_{ss}^*}, \bar{W}_{\beta_{ss}^*}) \in L_{\beta_{ss}^*}(X) \times L_{\beta_{ss}^*}(X)$ için $\bar{T}_{\beta_{ss}^*} + \bar{W}_{\beta_{ss}^*} = (\overline{T + W})_{\beta_{ss}^*}$ olarak tanımlanırsa $+$ işleminin birleşme özelliğini sağladığı açıktır. Ayrıca $\bar{0}_{\beta_{ss}^*} \in L_{\beta_{ss}^*}(X)$ bu işleme göre birim elemanıdır. Dolayısıyla $L_{\beta_{ss}^*}(X)$ kümesi bir monoiddir. $\square$

4.2. Goldie-SS-Tümlemiş Modüller

4.2.1. Tanım X in $T \subseteq X$ alt modülü için X de $T\beta_{ss}^*W$ olan bir ss-tümleyen W alt modülü mevcutsa X e Goldie-ss-tümlemiş modül adı verilir.

4.2.2. Önerme X in $T \subseteq X$ alt modülü için $W + Des_S(X) = T + Des_S(X)$ olacak şekilde X in bir W ss-tümleyen alt modülü varsa X Goldie-ss-tümlemiş modüldür.

Kanıt. X Goldie-ss-tümlemiş modül ve $T \subseteq X$ iken $T + W \subseteq Des_S(X) + T$ ve $T + W \subseteq Des_S(X) + W$ olan X in bir W ss-tümleyen alt modülü mevcuttur. Buradan $W + Des_S(X) \subseteq T + Des_S(X)$ ve $T + Des_S(X) \subseteq W + Des_S(X)$ yazılır. Böylece $W + Des_S(X) = T + Des_S(X)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

4.2.3. Önerme X in $T \subseteq X$ alt modülü için W , X in ss-tümleyen alt modülü ve $W + Z = T$ olacak şekilde $Z \subseteq Des_S(X)$ mevcutsa X Goldie-ss-tümlemiş modüldür.

Kanıt. $T\beta_{ss}^*W$ olduğunu göstermeliyiz. $T + W = W + Z \subseteq Des_s(X) + W + Z = Des_s(X) + T$ ve $T + W = W + Z + W \subseteq Des_s(X) + W$ olduğundan, $(T + W)/_T \subseteq (Des_s(X) + T)/_T$ ve $(T + W)/_W \subseteq (Des_s(X) + W)/_W$ olup ispat tamamlanır. $\square$

4.2.4. Önerme X Goldie-ss-tümlemiş modülünde $\forall T \subseteq X$ için $Des_s(X) \subseteq T$ ise $W + Des_s(X) = T$ eşitliği sağlanır. Buradan W ss-tümlemişdir.

Kanıt. $Des_s(X) \subseteq T$ olacak şekilde $T \subseteq X$ olsun. Bu takdirde, $T\beta_{ss}^*W$ olan X in bir W , ss-tümlemiş alt modülü mevcuttur. Buradan $W \subseteq T$ ve $Des_s(X) + (W \cap T) = Des_s(X) + W = T$ olup, istenen elde edilir. $\square$

4.2.5. Önerme Her bol ss-tümlemiş modül Goldie-ss-tümlemişdir.

Kanıt. X bol ss-tümlemiş modül ve $T \subseteq X$ verilsin. $T \subseteq Des_s(X)$ olmak üzere $T\beta_{ss}^*0$ bağıntısının sağlandığı açıktır. Öyleyse $T \not\subseteq Des_s(X)$ olduğunu varsayalım. X ss-yarı yerel olduğu için, $T + W = X$ ve $T \cap W \subseteq Des_s(X)$ olan X in bir W alt modülü mevcuttur. Varsayalım, T yi içeren X de Z , W nın ss-tümleyenidir. Yani $Z + W = X$ ve $Z \cap W \subseteq Des_s(X)$ dir. $Z \subseteq T$ olup, $T = Z + (W \cap T) \subseteq Des_s(X) + Z$ kapsamaları vardır. Buradan $T\beta_{ss}^*Z$ olur. Bu nedenle, X Goldie-ss-tümlemişdir. $\square$

4.2.6. Yardımcı Teorem X modülünün $T \oplus W = X$ olan bir parçalanışı verilsin. $Z, E \subseteq T$ alt modülleri için X de $E\beta_{ss}^*Z$ ise T alt modülünde de $E\beta_{ss}^*Z$ dir.

Kanıt. $Z + F = T$ olan $F \subseteq T$ verilsin. Buradan $(Z + F) \oplus W = X$ dir. Buradan da $Z + (F \oplus W) = X$ yazılabilir. Teorem 4.1.12(1 $\Leftrightarrow$ 3) gereğince X modülünde $E\beta_{ss}^*Z$ iken $E + (F \oplus W) = X$ yazılabilir. Dolayısıyla $(E + F) \oplus W = X$ eşitliği vardır. Ayrıca $T \oplus W = X$ olduğundan $E + F = T$ bulunur.

Benzer şekilde Teorem 4.1.12(1 $\Leftrightarrow$ 3) gereğince $E + H = T$ iken her $H \subseteq T$ alt modülü içinde $Z + H = T$ sağlanacağından T için de $E\beta_{ss}^*Z$ bulunur. $\square$

4.2.7. Teorem X modülü ve $\{a, b\}$ kümesi $End(X)$ in ortogonal idempotent elemanlarının kümesi verilsin. Eğer $aX = T$, $bX = W$, $T \oplus W = X$ ve her $Z \subseteq X$ için $aZ + bZ = Z$ ise X

in Goldie-ss-tümlelenmiş olması için gerek ve yeter şart T ve W nin Goldie-ss-tümlelenmiş olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) X Goldie-ss-tümlelenmiş modülü ve keyfi bir $Z \subseteq X$ alt modülü verilsin. X modülü Goldie-ss-tümlelenmiş olduğu için $Z\beta_{ss}^*E$ olan X de bir E -ss-tümleyen alt modülü vardır. Böylece $E + F = X$ ve $E \cap F \ll E$, $E \cap F$ yarı basit olmak üzere bir $F \subseteq X$ bulunur. $E + F = X$ ve $Z\beta_{ss}^*E$ iken $Z + F = X$ dir. Hipotezden $aF + bF = F$ olduğundan da $Z + aF + bF = X$ elde edilir. $Z + aF \subseteq T$ ve $bF \subseteq W$ olduğu bilindiğinden $Z + aF + W = X$ ve $T + bF = X$ eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca, $T \oplus W = X$ olarak verildiğinden $Z + aF = T$ ve $bF = W$ bulunur. Yine, hipotezden $bX = W$ olduğundan $bE \subseteq bX = bF \subseteq F$ dir. Böylece $E + F = aE + bE + F = aE + F = X$ sonucuna ulaşılır. $aE \subseteq E$ ve E modülü F nin X de bir tümleyeni olduğundan $aE = E$ bulunur. Dolayısıyla X modülünde $Z\beta_{ss}^*aE$ dir. $aE \subseteq T$ olduğu için Yardımcı Teorem 4.2.6 dan T modülünde de $Z\beta_{ss}^*aE$ dir. Ayrıca $aE + aF = T$, eşitliğinin varlığı açıktır. $(aE \cap aF) \ll E = aE$ dir. (Kasch, 1982) den $aE \cap aF$ de yarı basittir. aE yarı basit alt modülü T de bir ss-tümleyendir. Böylece T Goldie-ss-tümlelenmiştir. Benzer şekilde W nin da Goldie-ss-tümlelenmiş olduğu gösterilebilir.

($\Leftarrow$) T ve W modülleri Goldie-ss-tümlelenmiş olmak üzere X modülünün keyfi bir H alt modülünü alalım. Kabul edelim ki $aH = H_1$ ve $bH = H_2$ olsun. $H_1 \subseteq B$ ve B Goldie-ss-tümlelenmiş iken $H_1\beta_{ss}^*E_1$ olan T nin E_1 ss-tümleyen alt modülü mevcuttur. Buradan Teorem 4.1.12 ($1 \Leftrightarrow 3$) gereğince öyle bir F_1 alt modülü vardır ki $F_1 \cap E_1$ yarı basit olup $F_1 + E_1 = T$ ve $F_1 \cap E_1 \ll E_1$ sağlanır. Benzer şekilde $H_2\beta_{ss}^*E_2$ olan W nin E_2 ss-tümleyen alt modülü ve $F_2 + E_2 = W$ ve $F_2 \cap E_2 \ll E_2$ ve $F_2 \cap E_2$ yarı basit olacak şekilde $F_2 \subseteq W$ alt modülü vardır. Önerme 4.1.6 gereği $(H_1 + H_2)\beta_{ss}^*(E_1 + E_2) = H$ yazılabilir. Üstelik $E_1 + E_2 + F_1 + E_2$ ve $(E_1 + E_2) \cap (F_1 + F_2) = (E_1 \cap F_1) + (E_2 \cap F_2) = X$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca $F_1 \cap E_1 \ll E_1$ ve $F_2 \cap E_2 \ll E_2$ olduğundan Teorem 2.1.18 den dolayı $(E_1 + E_2) \cap (F_1 + F_2) = (E_1 \cap F_1) + (E_2 \cap F_2) \ll (E_1 + E_2)$ bulunur. (Kasch, 1982) gereğince $E_1 \cap F_1$ ve $E_2 \cap F_2$ yarı basit alt modüller olduğundan $(E_1 + E_2) \cap (F_1 + F_2)$ modülü de yarı basit alt modüldür, Dolayısıyla $E_1 + E_2, F_1 + E_1$ in X de ss-tümleyenidir. Sonuç olarak, X modülü Goldie-ss-tümlelenmiştir. $\square$

4.2.8. Teorem X Goldie-ss-tümlelenmiş modülü için $T \subseteq X$ verilsin. Bu takdirde X in her W ss-tümleyen alt modülü için $(T + W)/T, X/T$ nin bir ss-tümleyen alt modülü ise X/T bölüm modülü Goldie-ss-tümlelenmiştir.

Kanıt. $T \subseteq Z \subseteq X$ olan keyfi bir $Z/T \subseteq X/T$ alt modülünü alalım. $Z \subseteq X$ ve X modülü Goldie-ss-tümlenmiş olduğundan $Z\beta_{ss}^*W$ koşulunu sağlayan X in W ss-tümleyen alt modülü mevcuttur. $(Z/T) + (E/T) = X/T$ olan her $E/T \subseteq X/T$ alt modülü için $Z + E = X$ eşitliği vardır ve $Z\beta_{ss}^*W$ olduğundan Teorem 4.1.12(1 $\Rightarrow$ 3) gereğince $W + E = X$ elde edilir. Böylece $[(W + T)/T] + E/T = X/T$ sonucuna ulaşılır. Benzer yolla $[(W + T)/T] + E/T = X/T$ eşitliğini sağlayan her $E/T \subseteq X/T$ alt modülü için $(Z/T) + (E/T) = X/T$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Önerme 4.1.3 (1) den $(Z/T)\beta_{ss}^*(W + T)/T$ dir. Buradan, $(W + T)/T$ X/T de Z/T bölüm modülünün bir ss-tümleyen alt modülü olup, X/T Goldie-ss-tümlenmiş bulunur. $\square$

4.2.9. Teorem $T \oplus W = X$ dağılımlı modül olsun. X in Goldie-ss-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter şart W ve T nin Goldie-ss-tümlenmiş modül olmasıdır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) $Z \subseteq T$ verilsin. Hipotezden $E + F = X$, $E \cap F \subseteq \text{Des}_s(X)$ ve $Z\beta_{ss}^*E$ olan X in E, F alt modülleri vardır ilk olarak $Z\beta_{ss}^*(T \cap E)$ olduğunu göstermeliyiz. $Z\beta_{ss}^*E, Z + E \subseteq \text{Des}_s(X) + Z$ ve $Z + E \subseteq \text{Des}_s(X) + E$ ve $Z \subseteq T$ olduğu için $Z + (T \cap E) \subseteq \text{Des}_s(T) + Z$ ve $Z + (T \cap E) \subseteq [(\text{Des}_s(T) + (T \cap E) + (W \cap S) + (\text{Des}_s(W)))] \cap T$ elde edilir. Modüler kuraldan, $Z + (T \cap E) \subseteq \text{Des}_s(T) + Z$ ve $Z + (T \cap E) \subseteq \text{Des}_s(T) + (T \cap E)$ dir. Böylece $Z\beta_{ss}^*(T \cap E)$ olduğu görülür. Bu takdirde, $(T \cap E) + (T \cap F) = T$ ve $(T \cap E) \cap (T \cap F) = T \cap E \cap F \subseteq \text{Des}_s(T \cap E) \oplus \text{Des}_s(W \cap E)$ dir. Bu $T \cap E \cap F \subseteq \text{Des}_s(T \cap E)$ anlamına gelir. Böylece $T \cap E, (T \cap F)$ nin X de ss-tümleyenidir. Bu nedenle T Goldie-ss-tümlenmiştir. Benzer şekilde, W da Goldie-ss-tümlenmiştir.

($\Leftarrow$) $G \subseteq X$, $G_1 = T \cap G$ ve $W \cap G = G_2$ olsun. Böylece $G_1\beta_{ss}^*E_1, F_1 + E_1 = T$ ve $F_1 \cap E_1 \subseteq \text{Des}_s(E_1)$ olacak şekilde $F_1, E_1 \subseteq T$ vardır. Ayrıca $G_2\beta_{ss}^*E_2, F_2 + E_2 = W$ ve $F_2 \cap E_2 \subseteq \text{Des}_s(E_2)$ olacak şekilde $F_2, E_2 \subseteq W$ mevcuttur. Önerme 4.1.6 ile $G\beta_{ss}^*(E_1 + E_2)$ bağıntısı elde edilir. Dahası, $E_1 + E_2 + F_1 + F_2 = X$ ve $(E_1 + E_2) \cap (F_1 + F_2) = (E_1 \cap F_1) + (E_2 \cap F_2) \subseteq \text{Des}_s(E_1) + \text{Des}_s(E_2) \subseteq \text{Des}_s(E_1 + E_2)$ dir. Buradan, $E_1 + E_2$ nin X de bir ss-tümlenmiş alt modül olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla X Goldie-ss-tümlenmiştir. $\square$

4.2.10. *Sonuç* Dağılımlı Goldie-ss-tümlenmiş bir modülün tüm bölüm modülleri de Goldie-ss-tümlenmiştir.

Kanıt. X dağılımlı Goldie-ss-tümleyenmiş modül ve $T \subseteq X$ olsun W modülü X in keyfi bir alt modülü ise hipotezden $W + W' = X$ ve $W \cap W' \subseteq \text{Des}_S(W)$ olan bir $W' \subseteq X$ alt modülü mevcuttur. Böylece her $T \subseteq X$ için $[(W + T)/T] + [(W' + T)/T] = X/T$ yazılabilir. Önerme 3.3.8 den $(W + T)/T/(W' + T)/T$ nin X/T de ss-tümleyenidir. Teorem 4.2.9 ü kullanarak ispatı tamamlayalım. Bunun için $[(W + T)/T \cap (W' + T)/T] + Z/T = (W + T)/T$ eşitliğini sağlayan $Z/T \subseteq (W + T)/T$ alt modülünü alalım. Bu takdirde $[(W + T) \cap (W' + T)] + Z = (W + T)$ bulunur. X dağılımlı olduğundan $[T + (W \cap W')] + Z = (W + T)$ yazılabilir. $W \cap W' \subseteq \text{Des}_S(W)$ iken $W \cap W' \subseteq \text{Des}_S(W + T)$ olur. O halde $W \cap W' \ll W + T$ olduğundan $T + Z = W + T$ olup $T \subseteq Z$ olduğundan $W + T = Z$ bulunur. Böylece $(W + T)/T, (W' + T)/T$ nin X/T de ss-tümleyeni olur. $\square$

4.2.11. Önerme X modülü için $W \subseteq T \subseteq X$ verilsin. Eğer T yarı basit alt modülü W yarı basit alt modülü üzerinde ise $T\beta_{ss}^*W$ dır.

Kanıt. T alt modülü W alt modülünün üzerinde ise Teorem 3.3.10 dan $T + Z = X$ eşitliğini sağlayan her $Z \subseteq X$ için $W + Z = X$ dir. Ayrıca $W \subseteq T$ olduğundan $W + F = X$ eşitliğini sağlayan her $F \subseteq X$ için $T + Z = X$ olduğu açıktır. Dolayısıyla Teorem 4.1.12. gereğince $T\beta_{ss}^*W$ elde edilir. $\square$

4.3. Goldie-SS-Yükseltilebilir Modüller

4.3.1. Tanım X modülü ve her $T \subseteq X$ için $T\beta_{ss}^*Z$ olan X in Z direkt toplam terimi varsa X e Goldie-ss-yükseltilebilir modül adı verilir. X modülü ve her $T \subseteq X$ için $W \subseteq T$ ve $T/W \subseteq \text{Rad}(X/T)$ olan $W \subseteq X$ direkt toplam terimi varsa X modülüne (P^*) -özellikliğini sağlıyordur denir.

4.3.2. Önerme X bir Goldie-ss-yükseltilebilir modül olsun. O halde X (P^*) -özellikliğini sağlayan bir modüldür. $\text{Des}_S(X) \ll X$ ise, önermenin tersi de geçerlidir.

Kanıt. X bir Goldie-ss-yükseltilebilir modül olsun. O zaman X in herhangi bir T alt modülü için $(T + W)/T \subseteq \text{Des}_S(X/T)$ ve $(T + W)/W \subseteq \text{Des}_S(X/W)$ olup $W \oplus W' = X$ direkt toplamı vardır. Buradan $(T + W)/T \ll X/T$ ve $(T + W)/W \ll X/W$ dir. X (P^*) -modüldür. Tersine $T \subseteq X$ olsun. Varsayım olarak $X, (T + W)/T \ll X/T$ ve $(T +$

$W)/W \ll X/W$ olsun $W \oplus W' = X$ parçalanışına sahiptir. Böylece $W + W' = T + W' = X$ ve $(T + W)/W \subseteq (Des_s(X) + W)/W$ olup $\theta : (W + W')/W \rightarrow W'$, $\psi : W'/(T \cap W') \rightarrow (T + W')/T$ izomorfizmaları ve $\gamma : W' \rightarrow W'/(T \cap W')$ epimorfizması için $h = \psi\gamma\theta$ bileşkesi bulunur. Önerme 4.1.6 ya benzer bir argümanla, $T + W/T = h((T + W)/W)$, $(T + W)/W \subseteq (Des_s(X) + W)/W$ olduğu için $(T + W)/W \subseteq (Des_s(X) + T)/T$ kapsaması sağlanır. Dolayısıyla X Goldie-ss-yükseltilebilir modüldür. $\square$

4.3.3. *Örnek* R cisminden katsayılı a ve b belirsizlerinin kuvvet serilerinin bir halkası $S = R[[a, b]]$ olmak üzere $J = Sa + Sb$, S nin bir maksimal idealidir. J nin S -modül olarak parçalanamaz olduğu (Talebi ve ark., Örnek 3.25) den açıktır. Şimdi J nin Goldie-ss-yükseltilebilir modülü ve $T \subsetneq J$ nin $T \not\subseteq Des_s({}_S J)$ olduğunu varsayalım. Buradan $T\beta_{ss}^*0$ veya $T\beta_{ss}^*J$ dir. Sonra $T \subseteq Des_s({}_S J)$ veya $T = J$ olup buradan J nin Goldie-ss-yükseltilebilir modül olmadığı sonucuna ulaşılır.

$X/Des_s(X)$ in yarı basit olması koşuluyla, X modülüne ss-yarı yerel denildiğini (Olgun ve Türkmen, 2020) den hatırlayalım. Buradan ss-tümlemiş modüller ss-yarı yerel dir. Dolayısıyla Goldie-ss-yükseltilebilir modülünün ss-yarı yerel olduğu açıktır.

4.3.4. Yardımcı Teorem X bir Goldie-ss-yükseltilebilir modül ise, $X/Des_s(X)$ yarı basittir.

Kanıt. $T/Des_s(X) \subseteq X/Des_s(X)$ olsun. X Goldie-ss-yükseltilebilir modül olduğu için, $T\beta_{ss}^*W$ olan ve dolayısıyla $(T + W)/T \subseteq (Des_s(X) + T)/T$ ve $(T + W)/W \subseteq (Des_s(X) + W)/W$ kapsamalarını sağlayan X in W direkt toplam terimi vardır. $W \subseteq X$ olduğundan, X in öyle bir W' alt modülü için $W \oplus W' = X$ dir. Buradan $W' + T = X$ dir.

Böylece $X/Des_s(X) = T/Des_s(X) + (W' + Des_s(X))/Des_s(X)$ olduğu görülür. $T \cap W' \subseteq Des_s(W')$, $X/Des_s(X) = [T/Des_s(X)] \oplus (W' + Des_s(X))/Des_s(X)$ iken $X/Des_s(X)$ yarı basittir. $\square$

4.3.5. Önerme X modülü için aşağıdaki denklikler sağlanır;

- (1) X bir Goldie-ss-yükseltilebilir modüldür.
- (2) X ss-yarı yereldir ve $X/Des_s(X)$ in her direkt toplam terimi, X in direkt toplam terimine yükseltilebilir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $T/Des_s(X) \subseteq X/Des_s(X)$ olsun. X bir Goldie-ss-yükseltilebilir modül iken $T\beta_{ss}^*W$ olup $(T + W)/T \subseteq (Des_s(X) + T)/T$ ve $T + W/W \subseteq (Des_s(X) + W)/W$ olacak şekilde $W \subseteq X$ vardır. Böylece $W \subseteq T$ dir. Dolayısıyla $T/Des_s(X) = (W + Des_s(X))/Des_s(X)$ dir. Bu $T/Des_s(X)$ in W ya yükseltilebilir olduğu anlamına gelir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $T \subseteq X$ olmak üzere. $(T + Des_s(X))/Des_s(X) = \bar{T}$, $\bar{X} = X/Des_s(X)$ in direkt toplam terimi olsun. Dolayısıyla (2) ile $Z \oplus E = X$ olacak şekilde $\bar{T} = \bar{Z}$ eşitliği vardır. $T\beta_{ss}^*Z$ olacak şekilde X in Z direkt toplam terimi var olduğundan X Goldie-ss-yükseltilebilirdir. $\square$

4.3.6. *Sonuç* X ss-yükseltilebilir modülse Goldie-ss-yükseltilebilirdir.

Kanıt. X in her T alt modülü bir parçalanışa sahip olduğundan, $X_1 \oplus X_2 = T$ parçalanışında $X_1 \subseteq T$ ve $T \cap X_2 \subseteq Des_s(X)$ için $Des_s(X) = Des(X) \cap Rad(X)$ sağlanır. X ss-yükseltilebilirse X yükseltilebilir olup X in her alt modülü Önerme 4.2.11 den bir direkt toplam terime yükseltilebilir. Böylece X in Goldie-ss-yükseltilebilir olduğu görülür. $\square$

4.3.7. Teorem X Goldie-ss-yükseltilebilir modül $T \subseteq X$ ve X in W direkt toplam terimi verilsin. Eğer $(T + W)/T$, X/T nin direkt toplam terimi ise X/T bölüm modülü de Goldie-ss-yükseltilebilirdir.

Kanıt. $Z/T \subseteq X/T$ ise $Z \subseteq X$ olup X in Goldie-ss-yükseltilebilir modül olduğu kullanılırsa $Z\beta_{ss}^*W$ olduğu için X in W direkt toplam terimi bulunur. $Z\beta_{ss}^*W$ olduğundan

$$\begin{aligned} (Z + W)/W &\subseteq Des_s(X/W) \text{ ve } (Z + W)/Z \subseteq Des_s(X/Z) \text{ dir. Buradan } \frac{(X/T)}{(Z/T)} \cong \\ X/Z, \left[\frac{Z/T + (W + T)/T}{Z/T} \right] &= \left[\frac{(Z + W + T)/T}{Z/T} \right] = \left[\frac{(Z + W)/T + (T/T)}{Z/T} \right] = \\ \left[\frac{(Z + W)/T}{Z/T} \right] &\cong (Z + W)/Z \text{ ve} \\ Z/T + \left[\frac{(W + T)/T}{(W + T)/T} \right] &= \left[\frac{(Z + W + T)/T}{[W + T/T]} \right] = \\ \left[\frac{(Z + W)/T + (T/T)}{[W + T/T]} \right] &= \left[\frac{(Z + W)/T}{[W + T/T]} \right] \cong \end{aligned}$$

$(Z + W)/_{(T + W)} \cong \left[(Z + W)/_W \right] / \left[(T + W)/_W \right]$ şeklindedir. $(Z + W)/_Z \ll X/_Z$ ve $(Z + W)/_Z$ yarı basit olduğundan $\left[(Z/T) + (W + T)/_T \right] /_{Z/T} \subseteq Des_s \left((X/T) /_{(Z/T)} \right)$ dir. $(Z + W)/_W \ll X/_W$ ve $(Z + W)/_W$ yarı basit olduğundan, $(Z + W)/_W$ nın bölüm modülü olan, $Z/T + \left[(W + T)/_T \right] /_{(T + W)/_T} \ll X/T /_{(T + W)/_T}$ ve $\left[(Z/T) + \left[(W + T)/_T \right] /_{(T + W)/_T} \right] /_{Z/T}$ yarı basittir. Böylece $\left[(Z/T) + (W + T)/_T \right] /_{Z/T} \subseteq Des_s \left((X/T) /_{(Z/T)} \right)$ ve $\left[Z/T + (W + T)/_T \right] /_{(W + T)/_T} \subseteq Des_s \left(X/T /_{(W + T)/_T} \right)$ dir.

Hipotez gereğince $(W + T)/_T$, X/T nin bir direkt toplam terimi olduğundan X/T Goldie-ss-yükseltilebilir modüldür. $\square$

4.3.8. *Sonuç* Goldie-ss-yükseltilebilir X modülü verilsin;

- (i) X bir dağılımlı modül ise, her $T \subseteq X$ için X/T bölüm modülü Goldie-ss-yükseltilebilir modüldür.
- (ii) $T \subseteq X$, $\forall e \in End(X)$ idempotent elemanı için $e(T) \subseteq T$ koşulu sağlansın. Bu takdirde X/T bölüm modülü Goldie-ss-yükseltilebilir modüldür.

Kanıt. (i) X Goldie-ss-yükseltilebilir modül olduğundan $T\beta_{ss}^*W$ olacak şekilde, X in W direkt toplam terimi vardır. $T\beta_{ss}^*W$ için $(T + W)/_T \subseteq Des_s(X/W)$ ve $(T + W)/_T \subseteq Des_s(X/T)$ dir. Buradan $W \oplus W' = X$ olacak şekilde bir $W' \subseteq X$ vardır. $X/T = (W + T)/_T + (W' + T)/_T$ eşitliği yazılabilir. X dağılımlı olduğundan $T = T + (W \cap W') = (T + W) \cap (T + W')$ bulunur. Sonuç olarak $X/T = \left[(W + T)/_T \right] \oplus \left[(W' + T)/_T \right]$ dir. X in her W direkt toplam terimi için, $(W + T)/_T$, X/T nin bir direkt toplam terimidir. Teorem 4.3.7 gereğince X/T bölüm modülü Goldie-ss-yükseltilebilirdir.

- (ii) X , W nın keyfi bir direkt toplam terimi olsun. $e : X \rightarrow W$ kanonik projeksiyonunu ele alalım. Bu takdirde $e^2 = e \in End(X)$ dir. Hipotezde $e(T) \subseteq T$ olduğundan $e(T) = T \cap W$

bulunur. Ayrıca W, X in bir direkt toplam terimi olduğu için $W \oplus W' = X$ eşitliğini sağlayan $W' \subseteq X$ mevcuttur. Yani $(T \cap W) \oplus (T \cap W') = T$ eşitliği yazılabilir. Bulunan bu eşitlikler kullanılarak $(W + T)/T = [W \oplus (T \cap W')]/_T$ ve $(W' + T)/_T = [W \oplus (T \cap W)]/_T$ eşitlikleri elde edilir.

Dolayısıyla, $X/T = [(W + T)/T] + [(W' + T)/_T] = [W \oplus (T \cap W')]/_T + (W' + T)/_T$ bulunur. Burada $(W \oplus (T \cap W')) \cap (W' + T) = T$ olduğu gösterilebilir ve böylece, $X/T = [W \oplus (T \cap W')]/_T \oplus (W' + T)/_T$ eşitliği bulunur. Sonuç olarak Teorem 4.3.7 den X/T bölüm modülü Goldie-ss-yükseltilebilirdir. $\square$



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda, Goldie-ss-tümlenmiş modüller kavramını Goldie*-tümlenmiş modüllerin bir özelleştirmesi ve Goldie-ss yükseltilebilir modüller kavramını ise Goldie*- yükseltilebilir modüllerin bir özelleştirmesi olarak ele aldık. Özellikle β^* bağıntısından daha özel olan β_{ss}^* bağıntısı yardımıyla temel modül yapı teoremleri elde ettik. Bu çalışmada tanımlanan ve üzerinde cebirsel hesaplamalar yapılan kavramların birtakım halkalar üzerindeki karakterizasyonları çalışılabilir.



KAYNAKLAR

- Alkan, M. (2009). On τ -lifting Modules and τ -semiperfect Modules, *Turkish Journal of Mathematics*, 117 – 130.
- Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi, 176.
- Anderson, F. W. and Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, 363.
- Birkenmeier, G. F., Mutlu, F. T., Nebiyev, C., Sökmez, N. and Tercan, A. (2010). Goldie*-Supplemented Modules, *Glasgow Mathematical Journal* 52 (A), 41-52.
- Clark, C., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 394s.
- Eryılmaz, F. (2021). SS-lifting modules and rings, *Miskolc Math. Notes* 22, no. 2, 655–662, DOI: <https://doi.org/10.18514/mmn.2021.3245>.
- Facchini, A. (1998). *Module Theory. Progress in Mathematics*, 167, Verlag, Basel: Birkhauser, 281.
- Hungerford, T. W. (1973). *Algebra*. New York: Springer Verlag, 502.
- Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. Teubner: Published for the London Mathematical Society by Academic Press, 372.
- Kaynar, E., Çalışıcı, H. and Türkmen, E. (2020). ss-supplemented Modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics Statistics*, 473-485.
- Lam, T.Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 397.
- Lomp C. (1999). On Semilocal Modules and Rings. *Communs Algebra*, (27), No 4. 1921-1935.
- Olgun, A. and Türkmen, E. (2020). On a Class of Perfect Rings, *Honam Mathematical Journal*, 591-600.
- Pancar, A. (2014). *İnjektif Modüllere Giriş*. Pegem Akademi, 217.
- Sharpe, D. W. and Vamos, P. (1972). The Great Britain: *Injective Modules*, Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield.
- Sökmez, N. (2011). *Goldie*-Tümlemiş ve Goldie*-Radikal Tümlemiş Modüller*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

- Talebi, Y., Hamzekolaee, A. R. M. and Tercan, A. (2014). Goldie-Rad-Supplemented Modules, *An. Șt. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 22(3), 205-218.
- Tuganbaev A. (1999). *Distributive Modules and Related Topics*, Amsterdam: Algebra Logic Appl., vol. 12, Gordon and Breach Science Publishers.
- Varadarajan K. (1979). Modules with supplements, *Pacific J. Math.* 82:559- 564.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Philadelphia: Gordon and Breach, 600.
- Zhou D. X. and Zhang X. R. (2011). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35: 1051-1062.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Fatih GÖMLEKSİZ

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ordu Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans : Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim
Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Programı