

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat GENÇ

**GOMPERTZ MODELİ, PARAMETRE TAHMİNLERİ VE
UYGULAMALARI**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2014

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GOMPERTZ MODELİ, PARAMETRE TAHMİNLERİ VE
UYGULAMALARI**

Murat GENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 14/08/2014 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Deniz ÜNAL
DANIŞMAN

.....
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Uğur KARABEY
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No:

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere
tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GOMPERTZ MODELİ, PARAMETRE TAHMİNLERİ VE
UYGULAMALARI**

Murat GENÇ

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Danışman :Doç. Dr. Deniz ÜNAL

Yıl: 2014, Sayfa: 111

Jüri :Doç. Dr. Güzin YÜKSEL

:Yrd. Doç. Dr. Uğur KARABEY

Önemli yaşam dağılımlarından biri olan Gompertz Dağılımının özelliklerinin incelendiği bu çalışmada Gompertz Dağılımının kullanım alanları, parametre tahminleri ve güven aralıkları ele alınmış olup kullanılan yöntemler Rekabete Dayalı Hazard Modeli için genişletilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gauss Newton algoritması, Gompertz dağılımı, Güven aralıkları, Parametre tahminleri, Rekabete dayalı risk modeli.

ABSTRACT

MSc. THESIS

**GOMPERTZ DISTRIBUTION, PARAMETER ESTIMATION AND
APPLICATIONS**

Murat GENÇ

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS**

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Deniz ÜNAL

Year: 2014, Pages: 111

Jury :Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL

:Asst. Prof. Dr. Uğur KARABEY

In this study, properties, area of utilization, the parameter estimates and confidence intervals of Gompertz Distribution which is one of the most important model of the life distributions is examined. Moreover, the methods used for Gompertz distribution are expanded for Competing Risk Model.

Key Words: Gauss Newton algorithm, Gompertz distribution, Confidence interval, Parameter estimation, Competing risk model.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sürecinde yoğun iş temposuna rağmen değerli bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan danışmanım Sayın Doç Dr. Deniz ÜNAL'a ve hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde görev yapan çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca verdikleri destekler için kendilerine minnettar kalacağım anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
TABLolar DİZİNİ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	11
3. MATERYAL VE METOD	15
3.1. Materyal	15
3.2. Metod	15
3.2.1. Sıra İstatistikleri	15
3.2.2. Laplace Dönüşümleri	16
3.2.3. Meijer G Fonksiyonu	16
3.2.3. Gauss Newton Algoritması	17
4. GOMPERTZ DAĞILIMI	19
4.1. Temel Gompertz Dağılımı	19
4.1.1. Dağılım Fonksiyonu	19
4.1.2. Momentler	23
4.1.3. Simülasyon	24
4.1.4. İlgili Dağılımlar	27
4.2. Genel Gompertz Dağılımı	28
4.2.1. Dağılım Fonksiyonu	28
4.2.2. Momentler	32
4.2.1. Simülasyon	32
4.2.2. İlgili Dağılımlar	35
5. GOMPERTZ DAĞILIMININ PARAMETRE TAHMİNLERİ	37
5.1. Momentler	37
6. GOMPERTZ DAĞILIMININ PARAMETRE GÜVEN ARALIKLARI	51

6.1. Parametre Tahmini	51
6.2. Güven Aralıkları	64
6.2.1. c Parametresi İçin Güven Aralığı.....	64
6.2.2. λ ve c Parametreleri İçin Ortak Güven Bölgesi	66
7. GOMPERTZ GÜVENİRLİK FONKSİYONU.....	69
7.1. Parametre Tahminleri	69
7.2. Başlangıç Değerlerinin Belirlenmesi.....	75
7.3. Uygulama ve Sonuçlar	78
8. REKABETE DAYALI RİSK MODELİ.....	81
8.1. Siler'in Çalışması	81
8.2 Rekabete Dayalı Hazard Modelinin Yaşam Fonksiyonu İçin Parametre Tahmini.....	82
8.3. Uygulama ve Sonuçlar	88
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	93
KAYNAKLAR	95
ÖZGEÇMİŞ	101

TABLolar DİZİNİ**SAYFA**

Tablo 1.1.	Amerika’da yaşayan erkek bireylere ait on yıllık dönemlere göre belirlenmiş mortalite oranları.....	4
Tablo 7.1.	Cihaz için hesaplanan güvenilirlik değerleri.....	78
Tablo 7.1.	Cihaz için hesaplanan güvenilirlik değerleri.....	78
Tablo 7.2.	Gerçek ve tahmin edilen güvenilirlik değerleri.....	78
Tablo 8.1.	Hindistan nehir lagün sistemi içinde bulunan 78 şişe burunlu yunusa ait 1978-1997 yılları arasındaki yaşam dağılımı.....	89
Tablo 8.2.	33-39 yaş aralığındaki l_x değerleri.....	91
Tablo 8.3.	36-42 yaş aralığındaki q_x değerleri.....	92

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 4.1. $\lambda = 0.01$ için birinci çeyreklik değeri	21
Şekil 4.2. $\lambda = 0.01$ için medyan değeri	21
Şekil 4.3. $\lambda = 0.01$ için üçüncü çeyreklik değeri	21
Şekil 4.4. $\lambda = 0.01$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	22
Şekil 4.5. $\lambda = 0.07$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	22
Şekil 4.6. $\lambda = 1$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	22
Şekil 4.7. $\lambda = 4.22$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	23
Şekil 4.8. $\lambda = 0.01$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	25
Şekil 4.9. $\lambda = 0.07$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	26
Şekil 4.10. $\lambda = 1$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları ...	26
Şekil 4.11. $\lambda = 4.22$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	27
Şekil 4.12. $\lambda = 0.01$ ve $c = 0.5$ için birinci çeyreklik değeri	29
Şekil 4.13. $\lambda = 0.07$ ve $c = 0.7$ için medyan değeri	30
Şekil 4.14. $\lambda = 1$ ve $c = 0.7$ için üçüncü çeyreklik değeri	30
Şekil 4.15. $\lambda = 0.01$ ve $c = 0.5$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	31
Şekil 4.16. $\lambda = 0.07$ ve $c = 0.5$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	31
Şekil 4.17. $\lambda = 1$ ve $c = 0.5$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik	31
Şekil 4.18. $\lambda = 0.01$ ve $c = 1.11$ parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	33
Şekil 4.19. $\lambda = 0.01$ ve $c = 1.2$ parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	34
Şekil 4.20. $\lambda = 0.07$ ve $c = 1.2$ parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	34
Şekil 4.21. $\lambda = 1$ ve $c = 1.2$ parametrelili Gompertz Dağılımı için simülasyon sonuçları	35
Şekil 7.1. Gauss Newton yöntemi uygulanarak elde edilen Gompertz Eğrisi	79

Şekil 8.1. Şişe burunlu yunus verisi kullanılarak elde edilen yaşa karşı l_x değerleri	90
Şekil 8.2. Şişe burunlu yunus verisi kullanılarak elde edilen yaşa karşı q_x değerleri	92

1. GİRİŞ

Aktüerya Bilimi, sigortacılık ve finans başta olmak üzere birçok alandaki riskleri değerlendirmek, ölçmek ve bulunan sonuçlara göre karar vermek için matematiksel ve istatistiksel teknikleri kullanan bir bilim dalıdır. Gelecekte meydana gelebilecek olayların finansal belirtilerinin tespit edilmesinde, analizinde ve çözülmesinde aktüerya bilimlerinin faydalandığı temel araç olasılık ve istatistik yöntemlerdir. Geleneksel aktüerya bilimi genellikle mortalite üzerine yoğunlaşır ve yaşam tablolarının düzenlenmesi ile ilgilenir. Hayat sigortaları ve emeklilik planları aktüerya biliminin iki temel uygulamasını oluşturmaktadır. Aktüerya bilimi bunların yanında finansal organizasyonların sorumlulukları üzerine uygulamalar içerir ve böylece finansal karar vermede etkin bir rol oynar.

Yukarıda kısmen belirtildiği üzere aktüerya bilimleri diğer birçok bilimsel alandan faydalanmaktadır. Bunlar arasında olasılık, istatistik, finans, ekonomi, finansal ekonomi, bilgisayar programlama bulunmaktadır. Tarihsel süreçte aktüerya bilimleri mortalite tablolarını inşa ederken ve primleri belirlerken deterministik modelleri kullanmıştır. Ancak zaman içinde yüksek hıza sahip bilgisayar programlarının geliştirilmesiyle model belirleme yöntemlerinde büyük değişiklikler görülmüştür.

Aktüerya bilimleri özellikle hayat sigortalarında, emekli maaşlarının belirlenmesinde, sağlık giderlerinde ve mülkiyete dair hususlarda uygulama alanı bulmaktadır. Hayat sigortalarında mortalite analizi ve yaşam tablolarının üretilmesi, sağlık sigortalarında hastalık şiddeti, verimlilik gibi oranların analizi aktüerya bilimlerinin çalışma alanı içerisindedir. Ayrıca emeklilik planlarının tasarımı, fonlanması, muhasebesi, idaresi ve yeniden tasarlanması aşamalarında alternatif yöntemlerin maliyet analizi aktüerya bilimlerinin kapsamındadır. Aktüerya bilimleri bu ve buna benzer birçok uygulama alanına sahiptir.

Aktüerya bilimleri kapsamında incelenen bir kavram olan Mortalite oranı, belli bir birim zaman süresince bir kitlede belli bir sebeple ortaya çıkmış ölüm

oranının bir ölçüsüdür. Mortalite oranı, genellikle bir yıl içinde her 1000 kişi içinden ölenlerin sayısı kullanılarak elde edilir.

Birçok farklı mortalite oranı çeşidi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

1. Kaba Ölüm Oranı: Belli bir yıl içinde her 1000 kişi içinde ölenlerin oranıdır.
2. Perinatal Mortalite Oranı: Her 1000 doğumdaki yeni doğan ölümleri ve ölü doğanların toplam sayısı oranıdır.
3. Maternal Mortalite Oranı: Aynı zaman periyodunda her 100,000 anne içinde doğum sırasında ölenlerin oranıdır.
4. Bebek Mortalite Oranı: Her 1000 canlı doğum içinde 1 yılını doldurmadan ölen çocuk oranıdır.
5. Çocuk Mortalite Oranı: Her 1000 canlı doğum içinde 5 yılını doldurmadan ölen çocuk oranıdır.
6. Standartlaştırılmış Mortalite Oranı: Kitle; yaş, cinsiyet gibi standart bir düzende verilmişken ölüm oranlarının beklenen değerinin standart bir karşılaştırma ölçütünü veren orandır.
7. Yaşa Dayalı Ölüm Oranı: Verilen bir yaştaki her 1000 kişi içinde ölenlerin oranıdır.

Yukarıda tanımlanan mortalite oranlarının dışında tıbbi tedavilerin başarılı veya başarısız olmasına göre de mortalite oranı açısından bir ayrım yapılabilmektedir. Bunlar Erken Mortalite Oranı ve Geç Mortalite Oranıdır.

1. Erken Mortalite Oranı: Devam etmekte olan bir tedavinin ilk aşamalarında veya bir akut tedavinin yapılmasından hemen sonraki periyotta gerçekleşen ölüm oranıdır.
2. Geç Mortalite Oranı: Devam etmekte olan bir tedavinin son aşamalarında veya bir akut tedavinin yapılmasından uzun bir zaman sonraki periyotta gerçekleşen ölüm oranıdır.

Yukarıda tanımlanan kaba ölüm oranı tüm kitleye uygulanan bir orandır ve bu nedenle yanlış yorumlanmaya açıktır. Kaba ölüm oranı yaşa (veya cinsiyete) dayalı ölüm oranına ve kitlenin yaş (veya cinsiyet) dağılımına bağlıdır. Hayat standartlarının iyileşmesine bağlı olarak yaşam süresinin beklenen değerinin daha yüksek olmasına rağmen gelişmiş ülkelerde her 1000 kişi içinde ölenlerin oranı, gelişmemiş ülkelere kıyasla daha yüksek olabilir. Böyle bir durumun ortaya çıkmasının sebebi, gelişmiş ülkelerdeki insanların yaş dağılımının gelişmemiş ülkelere kıyasla farklı olmasıdır. Gelişmiş ülkelerde hayat standartlarına bağlı olarak yaşlı nüfus oranı yüksek ancak yeni doğan oranı ve mortalite oranı düşüktür.

Mortalitenin özelliklerini incelemek için mortalite tabloları düzenlenmiştir. Belli bir kitlede seçilen bir zaman aralığında veya doğumdan belli bir yaşa kadar gerçekleşen ölüm oranını gösteren tablolara mortalite tablosu denir. Bu tablolarda mortalite oranları her yaş grubu için ayrı ayrı gösterilir. Mortalite tablolarında bulunan istatistikler, yaşı verilmişken bir kişinin sonraki doğum gününden önce ölme olasılığını gösterir. Dolayısıyla mortalite tabloları yaşam süresinin beklenen değerinin iyi bir tahmininin elde edilmesinde faydalı bir araçtır.

Mortalite tabloları genellikle erkek ve kadınlar için ayrı ayrı düzenlenir. Sigara içme, iş durumu, sosyoekonomik sınıf gibi farklı risklerin etkisini göstermek için başka karakteristik özellikler de mortalite tablolarına dahil edilebilir.

Tablo 1.1. Amerika’da yaşayan erkek bireylere ait on yıllık dönemlere göre belirlenmiş mortalite oranlarını göstermektedir (National Center for Health Statistics, 1997). Bu tabloda x yaşı, l_x yaşam fonksiyonunu, d_x , $(x, x+1)$ yaş aralığında hayatını kaybeden birey sayısını, q_x , bir bireyin x yaşında hayatını kaybetme olasılığını, m_x yaşa bağlı mortalite oranını, L_x , x yaşından $x+1$ yaşına kadar hayatta kalan bireylerin yaşlarının toplamını, T_x , x yaşından itibaren bütün bireylerin hayatını kaybetmesine kadar geçen süredeki yaşlar toplamını, e_x , x yaşında hayatta olan bireylerin kalan yaşam beklentisini temsil etmektedir. Burada

verilen tablo benzeri yaşam tabloları üretilerek yukarıda da belirtilen birçok alanda geleceğe yönelik tahminler yapılabilmektedir.

Tablo 1.1. Amerika’da yaşayan erkek bireylere ait on yıllık dönemlere göre belirlenmiş mortalite oranları

x	l_x	d_x	q_x	m_x	L_x	T_x	e_x
0	100000	1039	0,0104	0,0104	99052	7182893	71,8
1	98961	77	0,0008	0,0008	98922	7083841	71,6
2	98883	53	0,0005	0,0005	98857	6984919	70,6
3	98830	41	0,0004	0,0004	98809	6886062	69,7
4	98789	34	0,0004	0,0004	98771	6787252	68,7
5	98754	30	0,0003	0,0003	98739	6688481	67,7
6	98723	27	0,0003	0,0003	98710	6589742	66,7
7	98696	25	0,0003	0,0003	98683	6491032	65,8
8	98670	22	0,0002	0,0002	98659	6392348	64,8
9	98647	19	0,0002	0,0002	98637	6293689	63,8
10	98628	16	0,0002	0,0002	98619	6195051	62,8
20	97855	151	0,0016	0,0016	97779	5211251	53,3
30	96166	197	0,0021	0,0021	96068	4240855	44,1
40	93762	295	0,0032	0,0032	93614	3290379	35,1
50	89867	566	0,0063	0,0063	89584	2370098	26,4
51	89301	615	0,0069	0,0069	88993	2280513	25,5
60	81381	1294	0,0159	0,016	80733	1508080	18,5
70	64109	2312	0,0361	0,0367	62953	772498	12
75	51387	2822	0,0549	0,0565	49976	482656	9,4
76	48565	2886	0,0594	0,0613	47121	432679	8,9
80	36750	3044	0,0828	0,0865	35228	261838	7,1
90	9878	1823	0,1846	0,2041	8966	38380	3,9
100	528	177	0,3351	0,408	439	1190	2,3

Mortalite tabloları aktüerler için geniş bir çalışma alanı oluşturmıştır. Kullanılan ilk yöntemler parametrik olmayan yöntemlerdir. Moivre (1724) kısa zaman periyotlarında mortaliteye uygun düzgün bir dağılım bularak parametrik yöntemlerle yaklaşımı başlatmıştır. Sonraki zamanlarda yeni parametrik yöntemler önerilmiştir. Büyük çapta ilgi gören ilk parametrik aile Gompertz’in (1825) ortaya attığı aile olmuştur. Makahem (1860) tarafından yeni bir parametre eklenerek bu aile genişletilmiştir. Ogborn (1953) Gompertz Dağılımı üzerinde yapılan çalışmalarla ilgili bir makale kaleme almıştır.

Organizmaların yaşam sürelerini temsil eden modeller içinde en başarılı olanı Gompertz Dağılımı olarak bilinir. Gompertz (1825)'e göre sonsuz küçük zaman aralıklarının her birinin sonunda kişi, bu aralığın başında iken sahip olduğu ölüme karşı kalan gücünü eşit oranlarda kaybeder. Gompertz, $r(t)$ hazard oranını t anında ölüme karşı hassasiyet olarak kabul etmiştir. Buna göre Gompertz'in varsayımı

$$\frac{dr(t)}{dt} = \lambda r(t), t > 0$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilebilir. Gompertz, bu denklemde $\lambda > 0$ olduğunu kabul etmiştir. Buna göre hazard oranı geometrik olarak artmaktadır. Yukarıda verilen diferansiyel denklem çözülerek

$$r(x | \lambda, c) = \lambda e^{cx}, \lambda, c > 0; x \geq 0$$

elde edilir. Buradan Gompertz Dağılımına ait yaşam fonksiyonu

$$\bar{F}(x | \lambda, c) = e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)}, \lambda, c > 0; x \geq 0$$

olup karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \lambda e^{cx} e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)}, \lambda, c > 0; x \geq 0$$

biçiminde bulunur. Gompertz elde ettiği bu sonuçları gerçek bir veri kümesi üzerinde uygulamış ve başarılı sonuçlar elde etmiştir.

Gompertz Dağılımı özellikle aktüerya alanında çalışmalara konu olmuştur. Edmonds (1832) tarafından bu dağılımın yeni özellikleri keşfedilmiştir. Assurance Magazine ve Journal of the Institute of Actuaries arasında yapılan karşılıklı bilgi alışverişi ile dağılıma dair yeni bilgiler ortaya çıkarılmıştır. Bu bilgi alışverişi De

Morgan (1861a,b), Edmonds (1861a,b), Gompertz (1861) ve Sprague (1861) arasında gerçekleşmiştir. De Morgan ve Sprague, Gompertz öncülüğünde destek görmüştür.

Gompertz Dağılımı, aktüerler ve nüfus bilimi ile ilgilenenler tarafından yetişkin insanların yaşam sürelerini betimlemede kullanılmaktadır. Biyoloji ve gerontoloji (yaşlılık bilimi) alanındaki çalışmalarda Gompertz dağılımından faydalanılmaktadır (Tenenbein ve Vanderhoof 1980). Son yıllarda bilgisayar bilimciler, bilgisayar kodlarının başarısızlık oranlarını modellemek için Gompertz Dağılımını kullanmaktadır. Pazarlama biliminde ise bireysel müşteri yaşam süresi seviyesi bu dağılım ile modellenmektedir.

Gompertz Dağılımının kullanım alanlarından bazıları özet olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

1. Yazılım Güvenirliği: Son 30-40 yıllık dönemde yazılım güvenirliliği mühendisliği, yazılım kalitesinin sayısal olarak değerlendirilmesinde merkezi bir rol oynamıştır. Önceden belirlenmiş bir zaman periyodunda yazılım sisteminin başarılı olma olasılığı olarak tanımlanan yazılım güvenirliliği, yazılım kalitesi için en önemli ölçütlerden biri olmuştur. Kesinlik değeri yüksek olan güvenirlilik tahminleri elde etmek için yeni yazılım güvenirlilik modelleri önerilmiştir (Lyu, 1996, Musa, 1999, Musa et al., 1987, Pham, 2000, Xie, 1991).

Homojen olmayan Poisson süreci, sistem güvenirliliğini tahmin etmek isteyen araştırmacıların yanı sıra yazılım mühendisleri arasında da popülerlik kazanmıştır. Ayrıca bu süreç, artık hataları sayısının ön tahmininde de kullanılmaktadır. Bu bağlamda Gompertz Dağılımı özellikle Japon yazılım geliştirme şirketleri tarafından yazılım geliştirme safhasında artık hatalarının sayısını tahmin etmede kullanılmaktadır.

Gompertz eğrisi deterministik bir fonksiyon olduğundan yazılım güvenirliliğini tahmin etmede doğrudan kullanılamaz. Bu nedenle homojen olmayan Poisson süreci temelinde, Ohishi ve ark. (2008) tarafından Gompertz yazılım güvenirlilik modeli adlı stokastik bir model

önerilmiştir. Model, deterministik Gompertz eğrisi ile benzer asimptotik özelliklere sahip olup “Uç Değerlerin İstatistik Teorisi” kullanılarak elde edilmiştir. Yine Ohishi ve ark. (2008) tarafından model parametrelerinin etkin bir şekilde belirlenmesi için EM algoritması geliştirilmiştir.

2. Kanser ile ilgili çalışmalar: Her yıl kanser hastalığından milyonlarca insan hayatını kaybetmektedir. Dünya çapında araştırmalar, milyonlarca insanın da gelecekte kanser nedeniyle ölmesinin beklendiğini göstermektedir. Günümüze kadar kanseri önleme ve cerrahi müdahale alanında çok büyük ilerleme kaydedilmiş ve tıbbi terapiler için birçok ilaç geliştirilmiştir. Biyofiziksel modellerin sadece temel fenomenleri açıklamakla kalmayıp terapi programlarının bilimsel olarak daha iyi planlanmasında klinik tedavi uzmanlarına yol gösterici bir rol üstlenmesi bakımından faydalı olduğu kanıtlanmıştır.

Kanser hastalığı ile ilgili birçok model ve modeller ailesi geliştirilmiştir. Özel olarak kanser büyüme oranı ile ilgili üstel (Wheldon, 1988), lojistik (Marusic, Bajzer, Freyer, Vuk-Pavlovic, 1994), Hart–Schochat–Agur (1998), Von Bertalanffy (2001) gibi birçok matematiksel model önerilmiştir. Büyüme oranı ile ilgili matematiksel bir model oluşturmak için Gompertz Dağılımı ve bu dağılımdan türetilen dağılımlar da kullanılabilmektedir. Kanserin Gompertz Dağılımı ile modellenmesi Laird (1964,1965) tarafından önerilmiştir. Laird, birçok veri kümesini kullanarak veriye uygun model uydurma çalışmalarına öncülük etmiş ve artan ortalama jenerasyon zamanı bakımından Gompertz’in büyüme kanununu doğrulamıştır. Gompertz modelinin vivo tümörü verisine iyi uyum sağlayıp sağlamadığını inceleyen birçok deneysel çalışma yapılmış ve modelin veriye iyi uyum sağladığı görülmüştür. Gyllenberg ve Webb (1989), Calderon ve Kwembe (1991), Calderon ve Afenya (2000), Gompertz modelinin psiko-matematiksel olarak doğru olduğunu iddia etmiştir. Ayrıca Konarski ve Molski (2003), Konarski ve Waliszewski

(2003) Gompertz modelinin bazı ilginç fiziksel özelliklerini ortaya çıkarmıştır.

3. Ekonomi: Ekonomide gelir dağılımının matematiksel ifadesi uzun zamandır üzerinde çalışılan bir problemdir. Vilfredo Pareto (1897), gelir dağılımının matematiksel ifadesini nicelik bakımından ilk inceleyen ekonomisttir. Bir ülkenin en zengin kişilerinden oluşan birikimli gelir dağılımının kuyruğunun özelliklerinin belli bir yapıya uyduğunu deneysel olarak göstermiş ve dağılıma adını vermiştir. O zamandan beri gelir dağılımı için “Pareto Kuvvet Kanunu” birçok ülkede farklı dönemlerde kabul görmüştür. Bu kanunun deneysel başarısına rağmen her ülkede kitlenin çoğunluğunu temsil eden düşük gelir bölgelerinin betimlenmesi problemi hali hazırda devam etmektedir. Gelir dağılımı düşük olan kısmı veya gelir dağılımının tamamını temsil eden, parametre sayısı artan çeşitli fonksiyonlar ekonomistler tarafından önerilmiştir. Ancak ülkenin tamamının gelir dağılımını temsil eden en uygun dağılımın (veya yöntemin) hangisi olduğu konusunda bir fikir birliğine varılamamıştır.

Drăgulescu ve Yakovenko (2001), Christian Silva (2005), Yakovenko ve Rosser (2009); Boltzmann–Gibbs dağılımına benzer, üstel tipte bir bireysel gelir dağılımı geliştirmiştir. Chatterjee ve ark. (2004) toplam para miktarı ve acente sayısı sabitken kapalı ekonomik sistemlere ait ideal gaz modeli üzerine çalışmalar yapmıştır. Clementi ve ark. (2007) istatistiksel fizik bağlamında gelir dağılımının büyüklüğü için betimleyici bir model olarak k – genelleştirilmiş dağılımı önermiştir. Willis ve Mimkes (2004), ücretli ve ücretsiz gelirlerin ayrık denemelerinde log–normal ve Boltzmann dağılımlarını kullanmıştır. Moura Jr. ve Ribeiro (2005) Pareto kuvvet kanunu ile birleştirilmiş Gompertz eğrisinin tüm gelir dağılımı için iyi bir betimleyici model olduğunu ve üstel kısmının bireysel gelir dağılımının orta kısmı için iyi bir yaklaşım olarak ortaya çıktığını göstermiştir. Bu modelde Gompertz eğrisi kitlenin

ekonomik olarak düşük kısmı temsil eden büyük kısmını, Pareto eğrisi ise zengin olan kısmı temsil etmektedir.

F. Chami Figueira ve ark. (2010) Moura Jr. ve Ribeiro (2005) tarafından önerilen Gompertz–Pareto dağılımı üzerine bir çalışma yaparak dağılımın gelir dağılımı ile ilgili özelliklerini incelemiştir.

Aktüerya alanında çalışanlar dışında Gompertz dağılımı azda olsa ilgi görmüştür. Johnson ve ark. (1994) Gompertz Dağılımının aşırı uç değerli sansürlü bir dağılım olduğunu göstermiştir.

Gompertz Dağılımının uygulanabilirliği daima bir çalışma konusu olmuştur. Bir dağılımın sağ kuyruğu inceldikçe kuyruktaki verilerin elde edilmesi zorlaşır ve bunun sonucunda önerilen modelin değerlendirilmesi güçleşir. Wang, Müller ve Capra (1998) Gompertz Dağılımına bağlı olarak bu konu ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Gompertz Dağılımı üstel dağılımın bir genellemesi olarak düşünülebilir; çünkü üstel dağılım, bir Gompertz Dağılımlar dizisinin limitidir. Rastgele değişkenler arasında yapılabilen bir dönüşüm yardımıyla da Gompertz Dağılımının üstel dağılımla olan ilişkisi görülebilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günümüzde aktüerya bilimleri giderek popülerleşen bir çalışma alanına sahiptir. Mortalite tabloları ve yaşam dağılımları üzerinde birçok çalışma yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir.

Hayatta olanların yaşa bağlı matematiksel ifadesi ilk kez Moivre (1724) tarafından ortaya atılmıştır. Moivre 1725 yılında yayınladığı çalışmasında, aktüerler tarafından Moivre Hipotezi olarak bilinen bir iddia ortaya atmıştır. Moivre, dünyaya gelen belli sayıda insanın yaşa bağlı olarak sürekli azaldığını ve belli iki yaş arasında bu azalışın aritmetik bir dizi oluşturduğunu iddia etmiştir. Dolayısıyla x yaşından w yaşına kadar hayatta olanların sayısını gösteren l_x değerinin $l_x = k(w - x)$ biçiminde olduğunu kabul etmiştir. Bu bağlamda anlık ölüm oranı

$$\mu_{(x+t)} = \frac{1}{w - (x+t)}, \quad 0 \leq t < w - x \text{ şeklindedir. Ayrıca Moivre (1752) hayat sigortası}$$

matematiğinde geçerli bir çalışma yapmıştır.

Gompertz (1820), mortalite tabloları üzerine çeşitli çalışmalar yapmış ve mortalite tabloları düzenlemiştir. Ayrıca kendi adıyla anılan istatistiksel bir dağılım önermiştir. Gompertz (1820) makalesinde iki ya da daha çok yaşamla ilgili çeşitli yaşam tablolarını incelemek için “akışlar yöntemini” (method of fluxions) kullanmış ve x yaşında hayatta olanların sayısını gösteren l_x değerinin, birimi yıl olan periyotlarda, ya aritmetik ya da geometrik bir dizi şeklinde azaldığını öne sürmüştür. Gompertz bu varsayımın kesin olmadığını ancak zaman periyotları yeterince kısa seçildiği takdirde istenen düzeyde bir kesinliğe ulaşılabilceğini belirtmiştir.

Gompertz (1825)’te mortalite kuralını ortaya atmıştır. Bu kurala göre x yaşında birinin anlık ölüm oranı B ve C parametreleriyle $\mu_x = BC^x$ ile verilebilir. Gompertz daha sonra o zaman kullanılmakta olan çeşitli mortalite tabloları üzerine testler uygulamış ve kuralın $[10,50]$ veya $[15,45]$ gibi belli, sınırlı yaş aralıklarında yaklaşık olarak doğru olduğunu göstermeye çalışmıştır.

Gompertz (1860)’ta 1825 yılında önerdiği kural üzerinde değişiklikler yaparak kuralın doğumdan ölüme kadar tüm yaşamda uygulanabilir hale getirilmesi

için yeni bir çalışma yapmış ve Uluslararası İstatistik Kongresine sunmuştur. 1862 yılında, 1860 ve 1825 yıllarında yayınladığı makaleleri destekleyen ve 1860 yılında yayınladığı makale ile aynı kapsamda bir makale hazırlayıp kraliyet derneğine sunmuştur.

Makeham (1860), Gompertz-Makeham adıyla anılan ölüm kuralını ortaya atmıştır. Makeham'e göre her ne kadar Gompertz Dağılımı yetişkin insanlar için mortaliteyi iyi yansıtsa da daha genç yaşlardaki mortaliteyi yeterince iyi yansıtamamaktadır. Gompertz-Makeham ölüm kuralına göre ölüm oranı yaşa bağlı olmayan bir bileşen (Makeham bileşeni) ile yaşa bağlı ve yaşla birlikte hızla artan bir bileşenin (Gompertz bileşeni) toplamı biçiminde ifade edilebilmektedir. Bu bağlamda Makeham Gompertz Dağılımına ait anlık ölüm oranına sabit bir terim ekleyerek anlık ölüm oranı için A, B ve C parametreleriyle $\mu_x = A + BC^x$ fonksiyonunu önermiştir. Gompertz-Makeham ölüm kuralı, daha çok [30,80] yaş aralığındaki insan ölümlerinin yaş dinamiklerini betimlemek için kullanılmaktadır.

Makeham (1890) yüksek mertebeden türevlerin geometrik bir düzende olduğu varsayımı altında Gompertz Dağılımı ile ilgili yeni bir modifikasyon önermiştir. Buna göre üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemin çözülmesi ile anlık ölüm oranı elde edilmektedir ve $\mu_x = A + Hx + BC^x$ şeklindedir. Bu kural "İkinci Makeham Kuralı" olarak bilinmektedir.

Perks (1932) Gompertz-Makeham dağılımının anlık ölüm oranı için $\mu_x = \frac{A + BC^x}{KC^{-x} + 1 + DC^x}, x > 0$ matematiksel ifadesini önermiştir. Bu ifade $K = D = 0$ için Gompertz-Makeham anlık ölüm oranını verir.

Esas olarak bir modelin güvenilirlik dağılımı üzerinde yapılan çalışmalarda kullanılan Weibull dağılımı, son zamanlarda mortalitenin çeşitli safhaları üzerine yapılan çalışmalarda kullanılmaktadır.

Çin'de mortalite üzerine bir çalışma yapan Yi ve Vaupel (2003) söz konusu çalışmada ortaya attıkları Kannisto modeli ile karşılaştırmak için kullandıkları dağılımlar arasında Weibull Dağılımı da bulunmaktadır.

Ozeki (2005) Karma Weibull dağılımını farklı yaş grupları için kullanmış ve Japon yaşam tablolarının inşasında faydalanmıştır.

Weon (2005) yaşa bağlı şekil parametresi kullanmış ve Weibull dağılımından faydalanarak yeni bir model önermiştir.

Bu tezin 3. bölümünde tezde kullanılan yöntemler, 4. bölümünde Gompertz Dağılımına dair temel bilgiler, 5. bölümünde Gompertz Dağılımının parametre tahminleri, 6. bölümünde Gompertz Dağılımına ait parametrelerin güven aralıkları, 7. bölümünde Gompertz Dağılımından faydalanarak yazılan Gompertz güvenilirlik fonksiyonunun parametre tahminleri, 8. bölümde ise 7. bölümde ele alınan yöntem kullanılarak Rekabete Dayalı Hazard Modelinin parametre tahminleri üzerine çalışılmıştır.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Materyal

Çalışmanın ana materyalini Gompertz Dağılımı üzerine yazılmış çeşitli makaleler ve kitap bölümleri oluşturmuştur. Temel olarak Gompertz'in (1825) "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality", Makeham'ın (1860) "On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies", Chen'in (1997) "Parameter Estimation of the Gompertz Population", Missov ve Lenart'ın (2011) "The Gompertz distribution and Maximum Likelihood Estimation of its parameters - a revision" makalelerinden faydalanılmıştır.

3.2. Metod

3.2.1. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleme verilsin. Bu örneklemden rastgele değişkenlerin küçükten büyüğe sıralanması ile elde edilen $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$; $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ istatistiklerine sıra istatistikleri denir. Bazı istatistiksel terimler sıra istatistikleri kullanılarak ifade edilir. Örnek olarak örneklem genişliği $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ ve örneklem medyanı

$$M = \begin{cases} X_{(n+1)/2} & n \text{ tek ise} \\ \frac{X_{(n/2)} + X_{((n/2)+1)}}{2} & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

verilebilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$; $f_X(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu, $F_X(x)$ dağılım fonksiyonlu sürekli bir kitleden alınmış rastgele bir örneklem ve $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$

bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. Bu durumda j . sıra istatistiğine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{x_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_x(x) [F_x(x)]^{j-1} [1-F_x(x)]^{n-j}$$

biçimindedir.

3.2.2. Laplace Dönüşümleri

f , tanım kümesi $[0, \infty)$ aralığını kapsayan bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-xu} f(u) du$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}\{f\}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. $\mathcal{L}\{f\}$ fonksiyonunun tanım kümesi yukarıda verilen integralin yakınsak olmasını sağlayan tüm x noktalarının kümesidir.

Laplace Dönüşümleri, var olan bir problemin daha basit bir probleme indirgenerek çözülmesinde iyi bir araçtır. Özellikle diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinde kullanılır.

3.2.3. Meijer G Fonksiyonu

Meijer (1936) tarafından ortaya atılan Meijer G-fonksiyonu birçok özel fonksiyonu içeren genelleştirilmiş bir hipergeometrik bir fonksiyondur. Bu fonksiyon C eğrisi boyunca

$$G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds$$

biçiminde tanımlanır (Bateman ve Erdélyi 1953). Burada

- m, n, p, q tamsayıları için $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$
- $a_k - b_j \neq 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$
- $z \neq 0$

şeklindedir.

3.2.4. Gauss Newton Algoritması

Gauss Newton Algoritması lineer olmayan en küçük kareler yöntemi ile eğri uydurma problemlerinde kullanılan bir yöntemdir (Björck, 1996). Newton yönteminin aksine Gauss Newton Algoritması sadece fonksiyon değerlerinin kareler toplamını en küçük yapmak için kullanılır. Gauss Newton Algoritması ikinci türevlerin alınmasını gerektirmediği için en küçük kareler problemlerinde Newton Yöntemine göre daha avantajlıdır.

Bu algoritmada $m \geq n$ olmak üzere $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ fonksiyonları ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ değişkenleri verilsin. Veri kümesine eğri uydurmak için fonksiyon ile veri kümesindeki noktalar arasındaki uzaklıkları temsil eden

$$r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta)$$

artıklarının minimum yapılması gerekir. $S(\beta) = \sum_{i=1}^m [r_i(\beta)]^2$ ifadesini en küçük yapmak için seçilen başlangıç değerleri $\beta^{(0)}$ vektörü ile temsil edilsin. Buna göre iteratif adımlar

$$\beta^{(s+1)} = \beta^{(s)} - \left(D^{(s)T} D^{(s)} \right)^{-1} D^{(s)T} r(\beta^{(s)})$$

formundadır. $S(\beta)$ değeri 0'a yeterince yakın olduğunda iterasyonlara son verilir ve son adımda elde edilen parametre değerleri kullanılarak veriye uyan en iyi fonksiyon elde edilir.

4. GOMPERTZ DAĞILIMI

Gompertz Dağılımı $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, sürekli ve üstel olarak artan başarısızlık oranına sahip bir dağılımdır. Yetişkin insanların ölüm oranının üstel olarak arttığı varsayılır. Bu nedenle Gompertz Dağılımı aktüerya biliminde geniş bir kullanım alanına sahiptir.

4.1. Temel Gompertz Dağılımı

4.1.1. Dağılım Fonksiyonu

Gompertz Dağılımının en çok uygulandığı alan mortalitedir. Bu nedenle öncelikle Gompertz Dağılımının yaşam (sağkalım, güvenilirlik) fonksiyonu verilecektir. Temel Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin yaşam fonksiyonu

$$\bar{G}(x) = P(X > x) = e^{-\lambda(e^x - 1)}, 0 \leq x < \infty, 0 < \lambda < \infty$$

ile verilir (Marshall, 2007). Bu fonksiyon bir yaşam fonksiyonu belirtir; çünkü $\bar{G}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve azalan bir fonksiyon olup $\bar{G}(0) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x) = 0$ 'dır. Verilen fonksiyonda λ bir şekil parametresidir. $\lambda = 1$ olması halinde “ X rastgele değişkeni Standart Gompertz Dağılımına sahiptir.” denir.

X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$G(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda(e^x - 1)}, 0 \leq x < \infty, 0 < \lambda < \infty$$

şeklindedir.

X rastgele değişkeninin yüzdelik dilimlerini veren fonksiyon

$$G^{-1}(p) = \ln \left[1 - \frac{1}{\lambda} \ln(1-p) \right], 0 \leq p < 1$$

biçimindedir. Böylece ilk çeyreklik

$$q_1 = G^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \ln \left[1 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right] = \ln \left[1 + \frac{1}{\lambda} (\ln 4 - \ln 3) \right]$$

ikinci çeyreklik

$$q_2 = G^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \left[1 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \ln 2 \right)$$

ve üçüncü çeyreklik

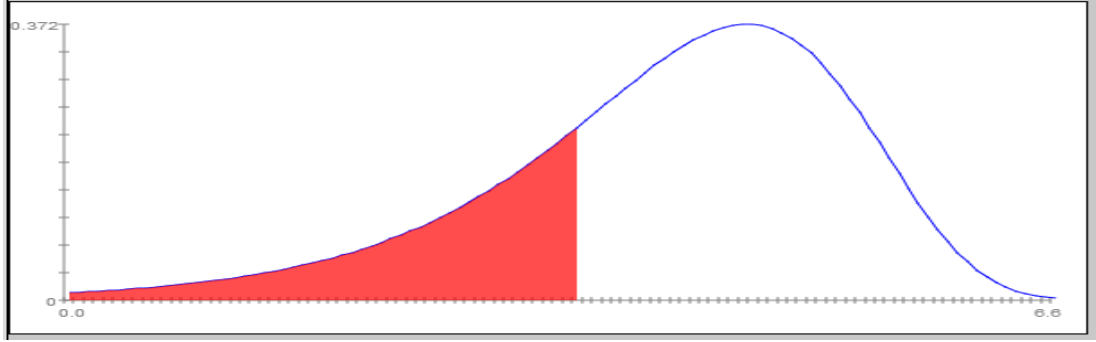
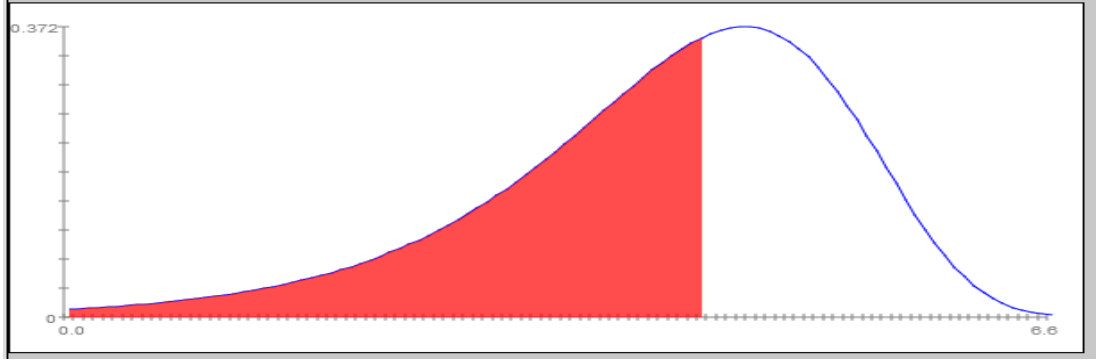
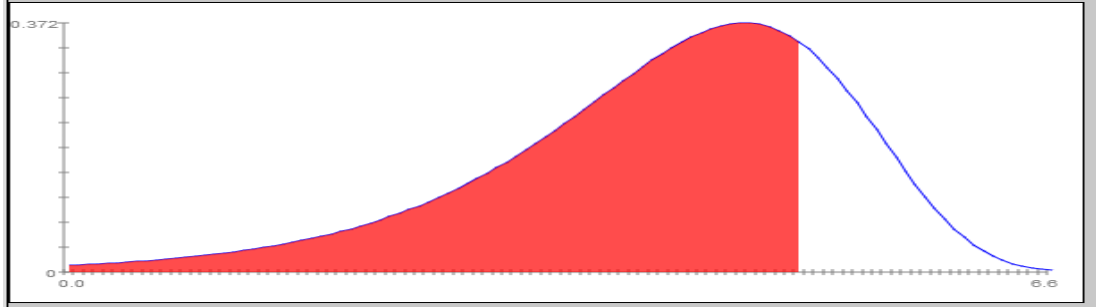
$$q_3 = G^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln \left[1 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{4}\right) \right] = \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \ln 4 \right)$$

olur. Şekil 4.1., 4.2. ve 4.3.'te $\lambda = 0.01$ parametresine karşılık gelen Gompertz Dağılımına ait çeyreklik değerleri verilmiştir.

Temel Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(x) = \lambda e^x e^{-\lambda(e^x - 1)}, 0 \leq x < \infty$$

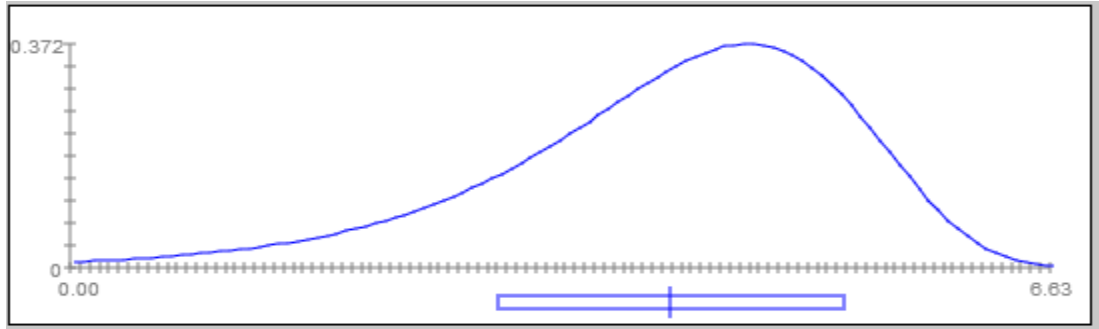
ile verilir.

Şekil 4.1. $\lambda = 0.01$ için birinci çeyreklik değeri (3.393)Şekil 4.2. $\lambda = 0.01$ için ikinci çeyreklik değeri (4.253)Şekil 4.3. $\lambda = 0.01$ için üçüncü çeyreklik değeri (4.939)

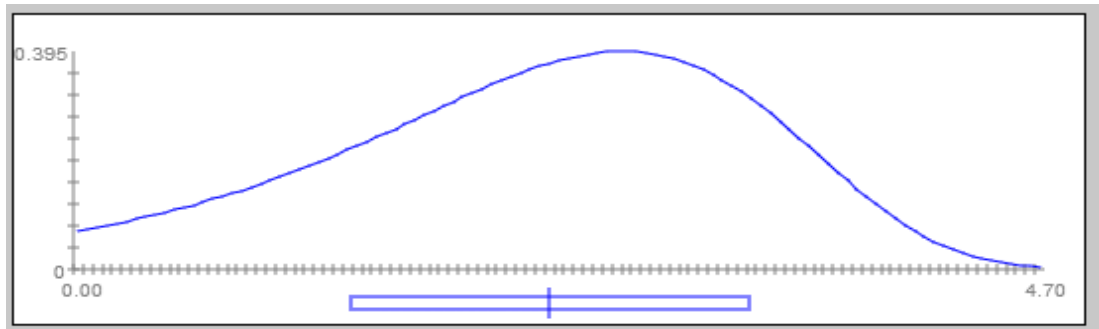
Burada $g'(x) = \lambda(1 - \lambda e^x)e^{x - \lambda(e^x - 1)}$ olup

- $0 < \lambda < 1$ durumunda $1 - \lambda e^x = 0 \Rightarrow x = -\ln \lambda$ olduğundan dağılımın modu $-\ln \lambda$ olur.
- $\lambda \geq 1$ durumunda g fonksiyonu azalandır ve modu 0'dır.

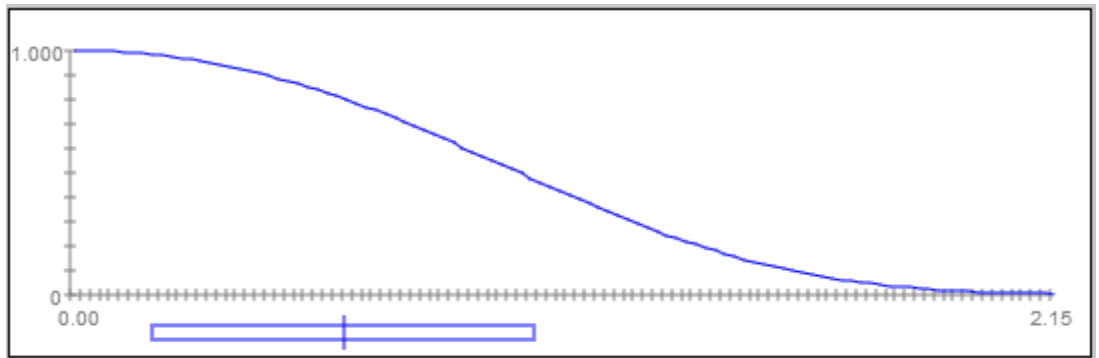
λ parametresinin çeşitli değerleri için Temel Gompertz Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



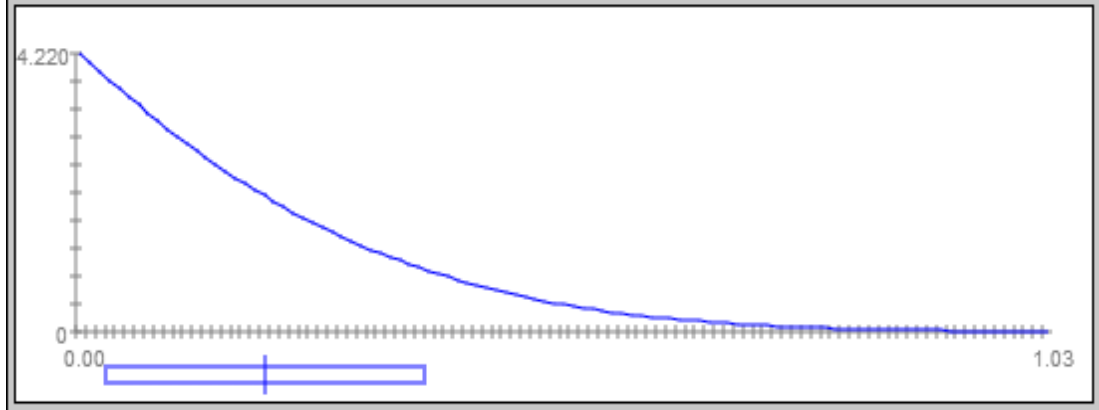
Şekil 4.4. $\lambda = 0.01$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik



Şekil 4.5. $\lambda = 0.07$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik



Şekil 4.6. $\lambda = 1$ parametrelili Gompertz Dağılımına ait grafik

Şekil 4.7. $\lambda = 4.22$ parametrelı Gompertz Dağılımına ait grafik

Temel Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni için anlık ölüm oranı

$$\mu_x = \frac{g(x)}{\bar{G}(x)} = \frac{\lambda e^x e^{-\lambda(e^x-1)}}{e^{-\lambda(e^x-1)}} = \lambda e^x, 0 \leq x < \infty$$

ile verilir. Görüldüğü gibi anlık ölüm oranı, üstel olarak artan bir fonksiyona sahiptir.

4.1.2. Momentler

Temel Gompertz Dağılımına sahip bir rastgele değişkenin momentleri kapalı formda yazılamaz. Ancak beklenen değer ve moment çıkaran fonksiyonu üstel integral olarak bilinen bazı özel fonksiyonlar cinsinden yazılabilir. Burada kullanılacak üstel integral formu

$$E_\lambda(t) = \int_1^\infty u^t e^{-\lambda u} du, t \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, \infty)$$

biçimindedir. Tezin ilerleyen bölümlerinde bu konuya daha geniş yer verilecektir. Şimdilik sadece temel formların verilmesi ile yetinilecektir.

Üstel integral kullanılarak Temel Gompertz Dağılımına sahip X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tx}) \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^x e^\lambda e^{-\lambda e^x} dx, (u = e^x) \\ &= \lambda e^\lambda \int_1^\infty u^t e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda e^\lambda E_\lambda(t) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. X rastgele değişkeninin beklenen değeri ise $E(X) = e^\lambda E_\lambda(-1)$ ile verilir. Çünkü

$$E(X) = \int_0^\infty x \lambda e^x e^\lambda e^{-\lambda e^x} dx = \lambda e^\lambda \int_1^\infty e^{-\lambda y} \ln y dy, y = e^x$$

olup $u = \ln y$, $dv = e^{-\lambda y} dy$ için kısmi integrasyon uygulanması ile

$$E(X) = e^\lambda \int_1^\infty \frac{1}{y} e^{-\lambda y} dy = e^\lambda E_\lambda(-1)$$

elde edilir.

4.1.3. Simülasyon

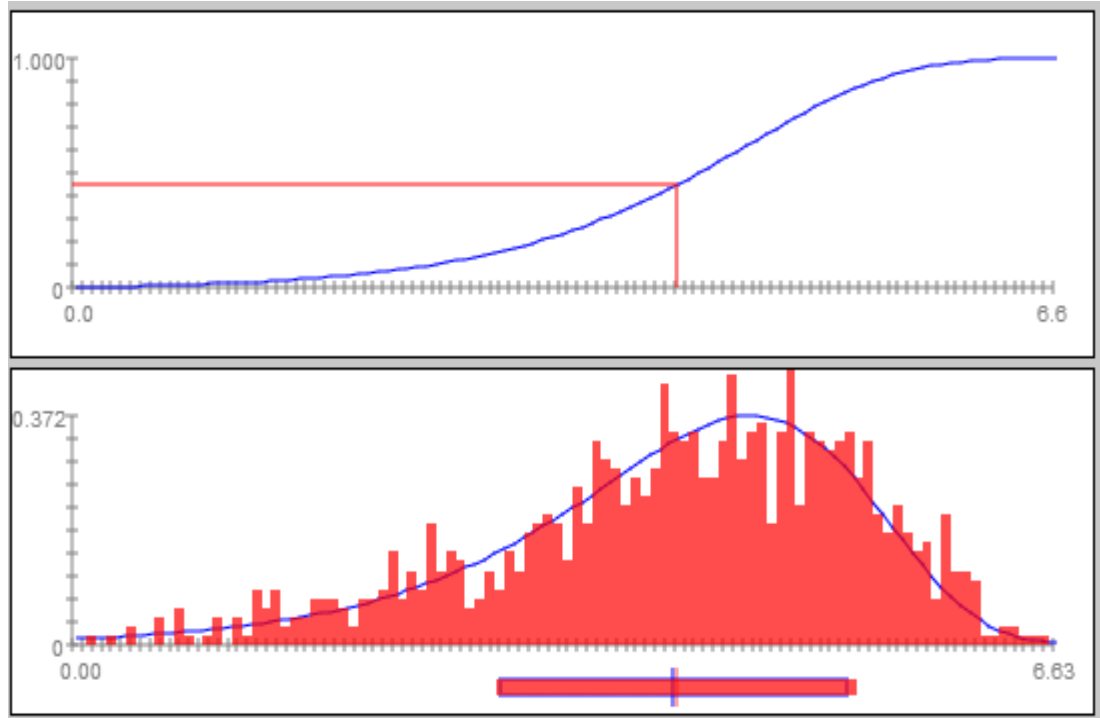
Gompertz Dağılımının yüzdelik dilimlerini veren fonksiyon kapalı bir forma sahip olduğundan rastgele çeyreklik yöntemi ile Gompertz Dağılımı simülasyonu yapılabilir.

$\lambda \in (0, \infty)$ olsun. U rastgele değişkeninin standart düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılın. Bu durumda $1-U$ rastgele değişkeni de standart düzgün dağılıma sahip olur. Böylece

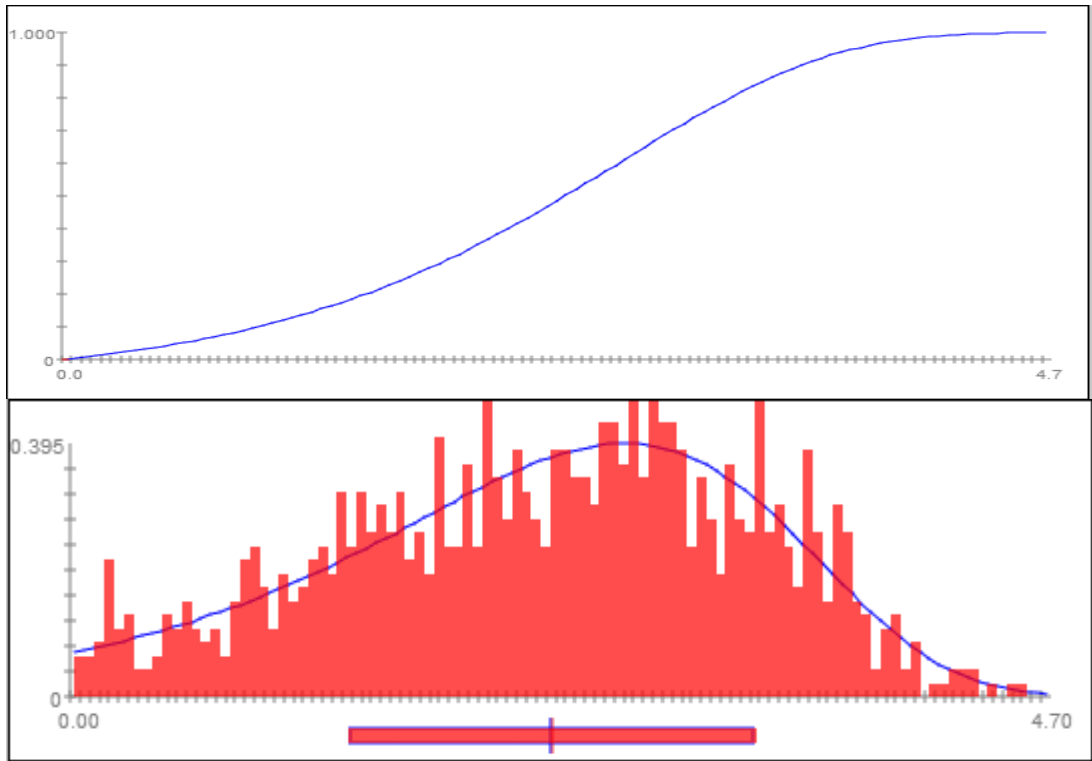
$$X = G^{-1}(1-U) = \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda} \ln(U)\right)$$

rastgele değişkeni λ şekil parametrelili Gompertz Dağılımına sahiptir.

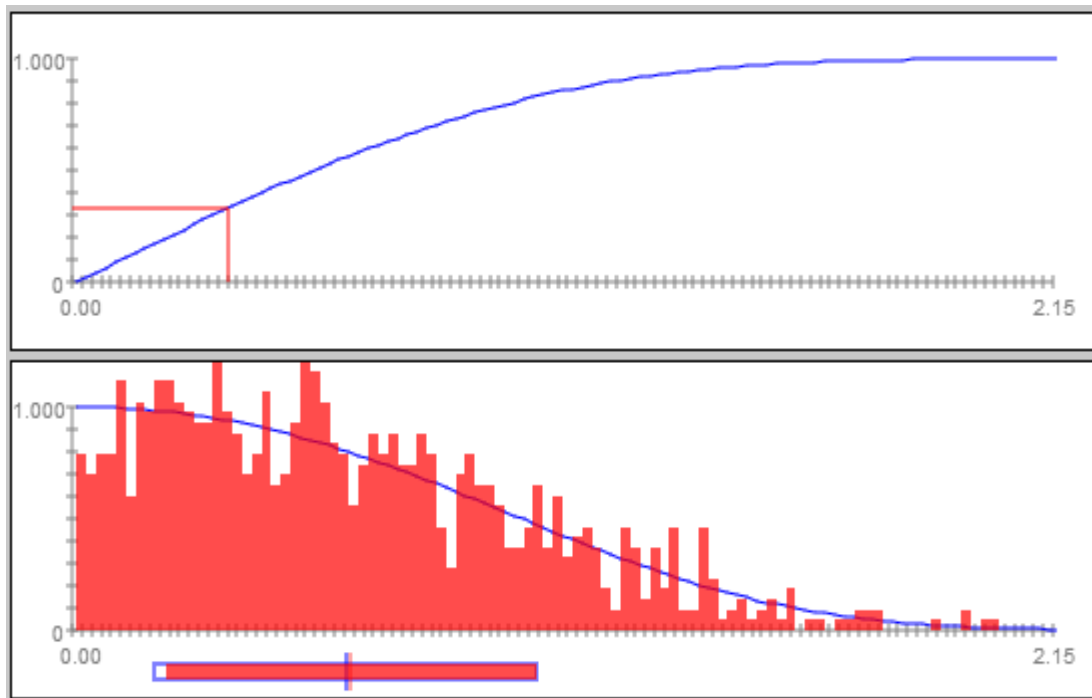
X rastgele değişkeni λ şekil parametrelili Gompertz Dağılımına sahip olsun. X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $G(X)$ standart düzgün dağılıma sahiptir. Buradan $1-G(X)$ rastgele değişkeni de standart düzgün dağılıma sahip olur. Bu bilgiler ışığında aşağıda rastgele çeyreklik yöntemi ile elde edilmiş bazı simülasyon sonuçları gösterilmiştir. Her bir şekil 1000 defa tekrarlanan bir simülasyonun sonuçlarını yansıtmaktadır. Ayrıca tüm şekillerde verilen a parametresine karşılık gelen dağılım fonksiyonu da gösterilmiştir.



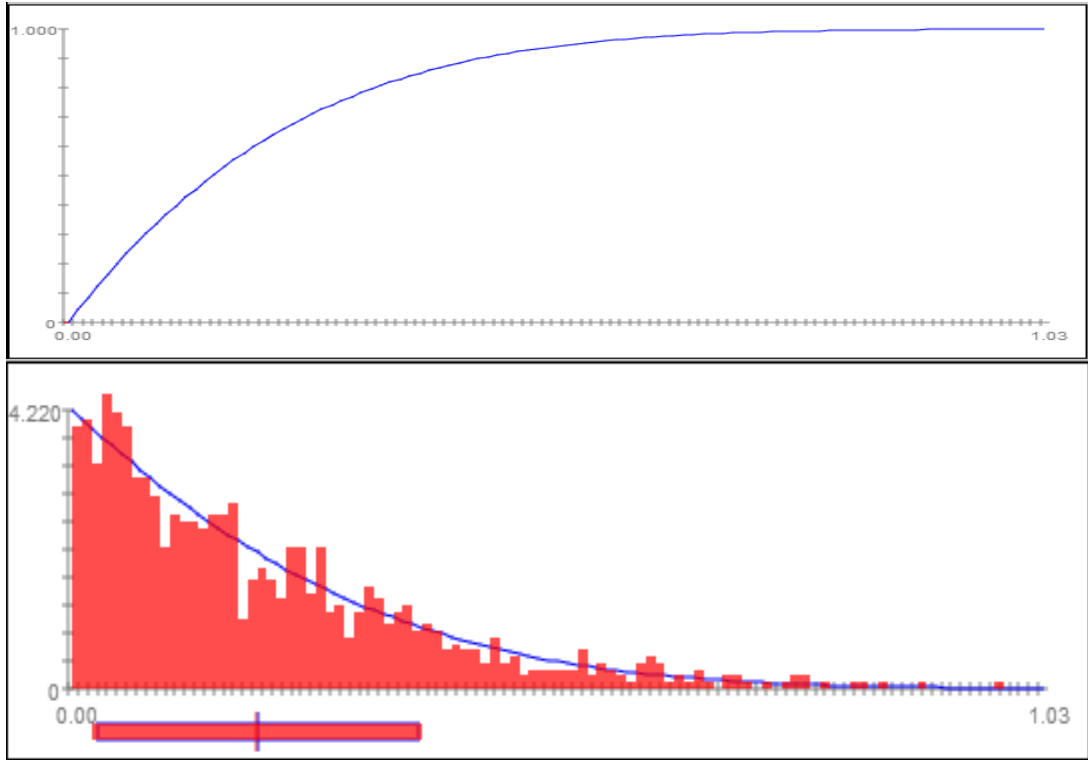
Şekil 4.8. $\lambda = 0.01$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.9. $\lambda = 0.07$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.10. $\lambda = 1$ şekil parametrelili Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.11. $\lambda = 4.22$ şekil parametreli Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları

Görüldüğü gibi simülasyon sonuçları iyi bir yaklaşımı göstermektedir. Her bir grafiğin altında verilen ortalama ve standart sapma çubuklarına bakılarak uyumun iyiliği gözlemlenebilir. Daha kesin sonuçlar için başka istatistiksel yöntemler uygulanabilir.

4.1.4. İlgili Dağılımlar

Gompertz Dağılımının üstel dağılımla ilişkisi daha önce belirtilmişti. Gompertz Dağılımının standart uç değer dağılımı ile ilişkisi kurulabilir. X , minimumlar için standart uç değer dağılımına sahip bir rastgele değişken olsun. X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = e^x e^{-e^x}, x \in \mathbb{R}$$

ile verilir. $X \geq 0$ iken X 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(x) = \frac{f(x)}{P(X \geq 0)} = \frac{e^x e^{-e^x}}{e^{-1}} = e^x e^{-(e^x - 1)}, x \in [0, \infty)$$

olup bu sonuç $X \geq 0$ iken X rastgele değişkeninin dağılımının, standart Gompertz Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösterir.

4.2. Genel Gompertz Dağılımı

4.2.1. Dağılım Fonksiyonu

Temel Gompertz Dağılımı, bir ölçek parametresi eklenerek genelleştirilebilir. Z rastgele değişkeni $\lambda \in (0, \infty)$ şekil parametrelili Temel Gompertz Dağılımına sahip olsun. Bu durumda $c \in (0, \infty)$ olmak üzere $X = \frac{Z}{c}$ rastgele değişkeni λ şekil parametrelili ve c ölçek parametrelili Genel Gompertz Dağılımına sahiptir. Bundan böyle genel Gompertz Dağılımı yerine Gompertz Dağılımı ifadesi kullanılacaktır.

λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni için yaşam fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = \bar{G}(cx) = e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)}, 0 \leq x < \infty$$

ile verilir (Marshall, 2007). Bu durumda dağılım fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)}, 0 \leq x < \infty$$

olur.

X rastgele değişkeninin yüzdelik dilimlerini veren fonksiyon

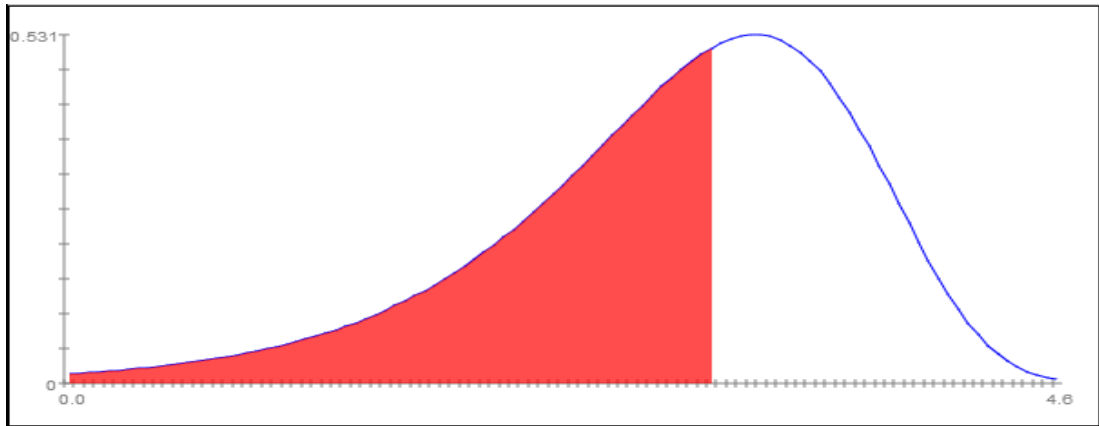
$$F^{-1}(p) = \frac{1}{c} \ln \left[1 - \frac{c}{\lambda} \ln(1-p) \right], 0 \leq p < 1$$

biçimindedir. Dikkat edilirse $F^{-1}(p) = \frac{1}{c} G^{-1}(p)$ ' dir. Böylece birinci çeyreklik

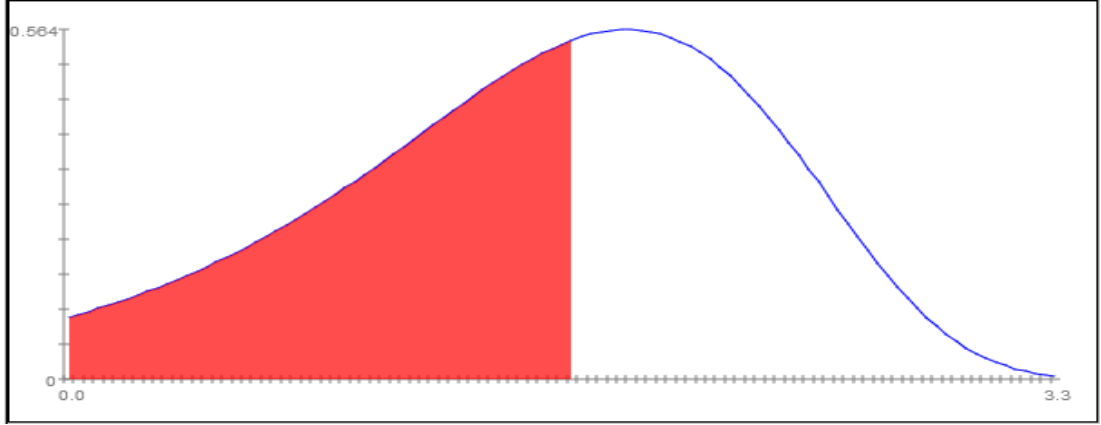
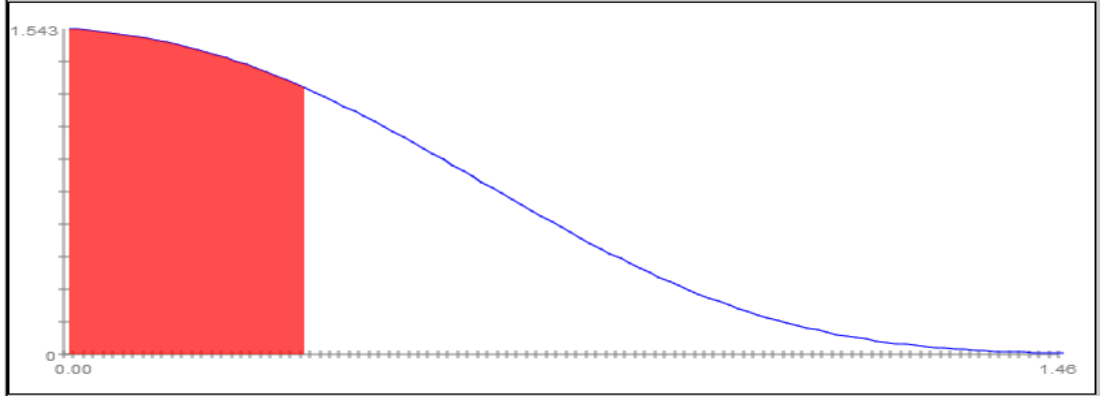
$$q_1 = \frac{1}{c} \ln \left[1 + \frac{c}{\lambda} (\ln 4 - \ln 3) \right], \text{ ikinci çeyreklik } q_2 = \frac{1}{c} \ln \left(1 + \frac{c}{\lambda} \ln 2 \right) \text{ ve üçüncü}$$

$$\text{çeyreklik ise } q_3 = \frac{1}{c} \ln \left(1 + \frac{c}{\lambda} \ln 4 \right) \text{ olur. Aşağıdaki grafiklerde } \lambda = 0.007 \text{ ve } b = 0.7$$

parametrelerine karşılık gelen Gompertz Dağılımına ait çeyreklik değerleri verilmiştir.



Şekil 4.12. $\lambda = 0.01$ ve $c = 0.7$ için birinci çeyreklik değeri (2.977)

Şekil 4.13. $\lambda = 0.07$ ve $c = 0.7$ için ikinci çeyreklik değeriŞekil 4.14. $\lambda = 1$ ve $c = 0.7$ için üçüncü çeyreklik değeri

Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

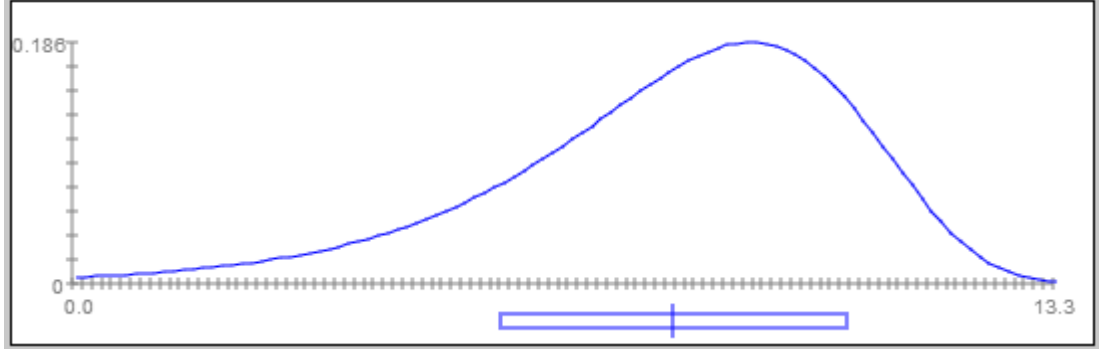
$$f(x) = \lambda e^{cx} e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)}, 0 \leq x < \infty$$

ile verilir. $f(x) = cg(cx)$ olduğu göz önüne alınarak Temel Gompertz Dağılımı için elde edilen sonuçlar, Gompertz Dağılımı için genelleştirilebilir.

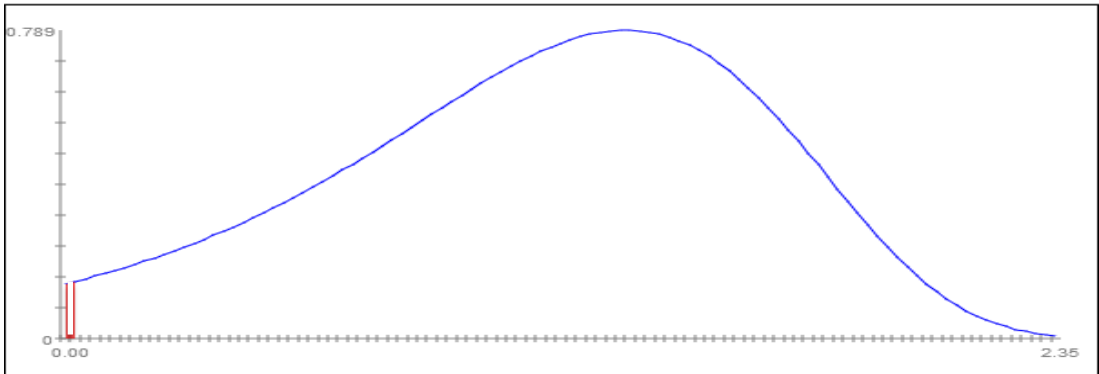
- $0 < \frac{\lambda}{c} < 1$ durumunda dağılımın modu $-\frac{1}{c} \ln \frac{\lambda}{c}$ olur.

- $\frac{\lambda}{c} \geq 1$ durumunda f fonksiyonu azalandır ve modu 0'dır.

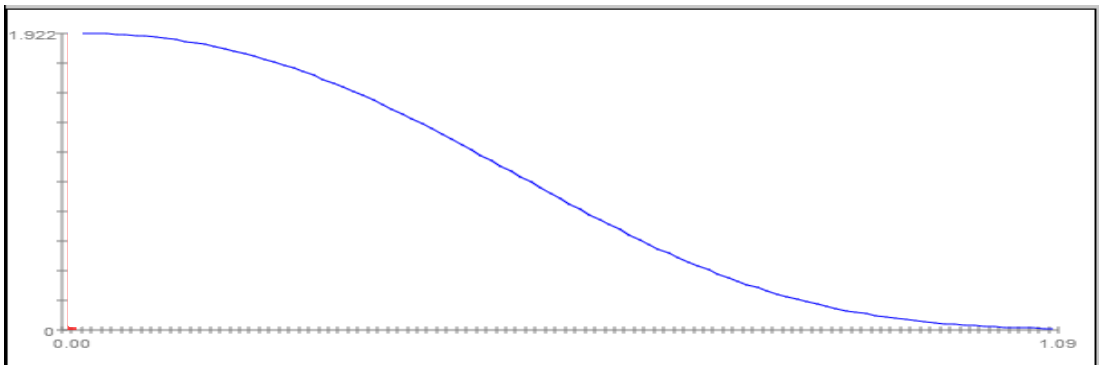
λ ve c parametrelerinin çeşitli değerleri için Gompertz Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.15. $\lambda = 0.01$ ve $c = 0.5$ parametreli Gompertz Dağılımına ait grafik



Şekil 4.16. $\lambda = 0.07$ ve $c = 0.5$ parametreli Gompertz Dağılımına ait grafik



Şekil 4.17. $\lambda = 1$ ve $c = 0.5$ parametreli Gompertz Dağılımına ait grafik

Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni için anlık ölüm oranı

$$\mu_x = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda e^{cx}, 0 \leq x < \infty$$

ile verilir. Görüldüğü gibi anlık ölüm oranı üstel olarak artan bir fonksiyona sahiptir.

4.2.2. Momentler

Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, Temel Gompertz Dağılımından faydalanarak

$$M(t) = m\left(\frac{1}{c}t\right) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_{\frac{\lambda}{c}}\left(\frac{1}{c}t\right), t \in \mathbb{R}$$

ile verilir. Burada m , Temel Gompertz Dağılımına ait moment çıkaran fonksiyonudur. Ayrıca $E(X) = \frac{1}{c} E(Z)$ olduğundan X rastgele değişkeninin

beklenen değeri $E(X) = \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_{\frac{\lambda}{c}}(-1)$ olur.

4.2.3. Simülasyon

$\frac{\lambda}{c} > 0$ olsun. U rastgele değişkeninin standart düzgün dağılıma sahip olduğu varsayalım. Böylece

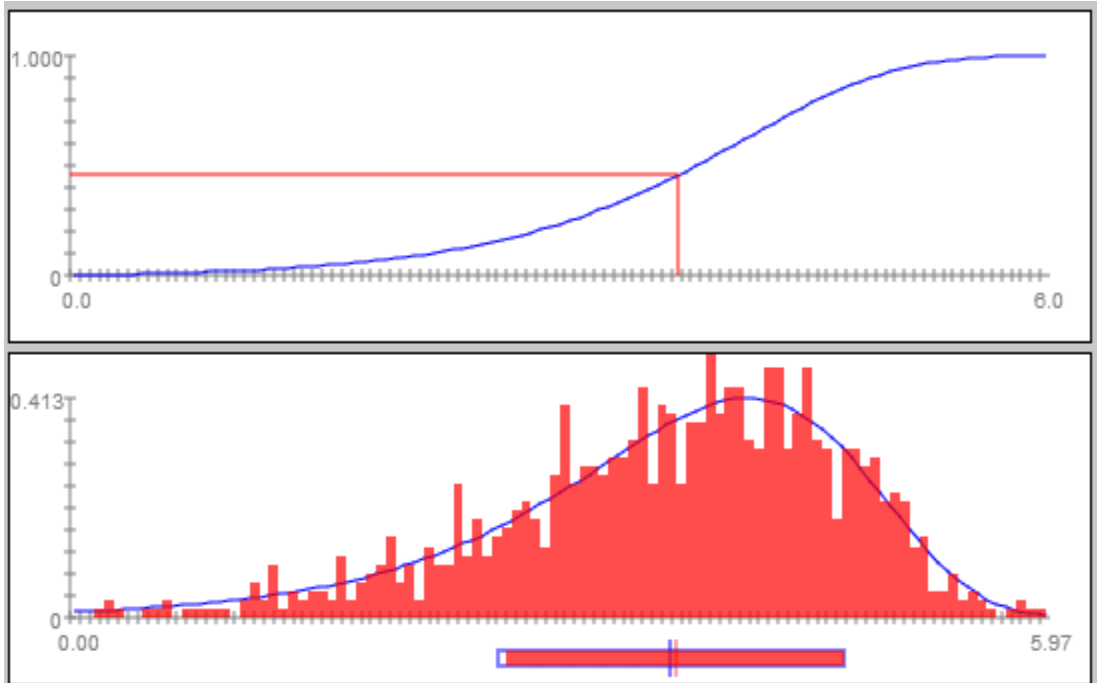
$$X = \frac{1}{c} \ln\left(1 - \frac{c}{\lambda} \ln(U)\right)$$

rastgele değişkeni λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımına sahiptir.

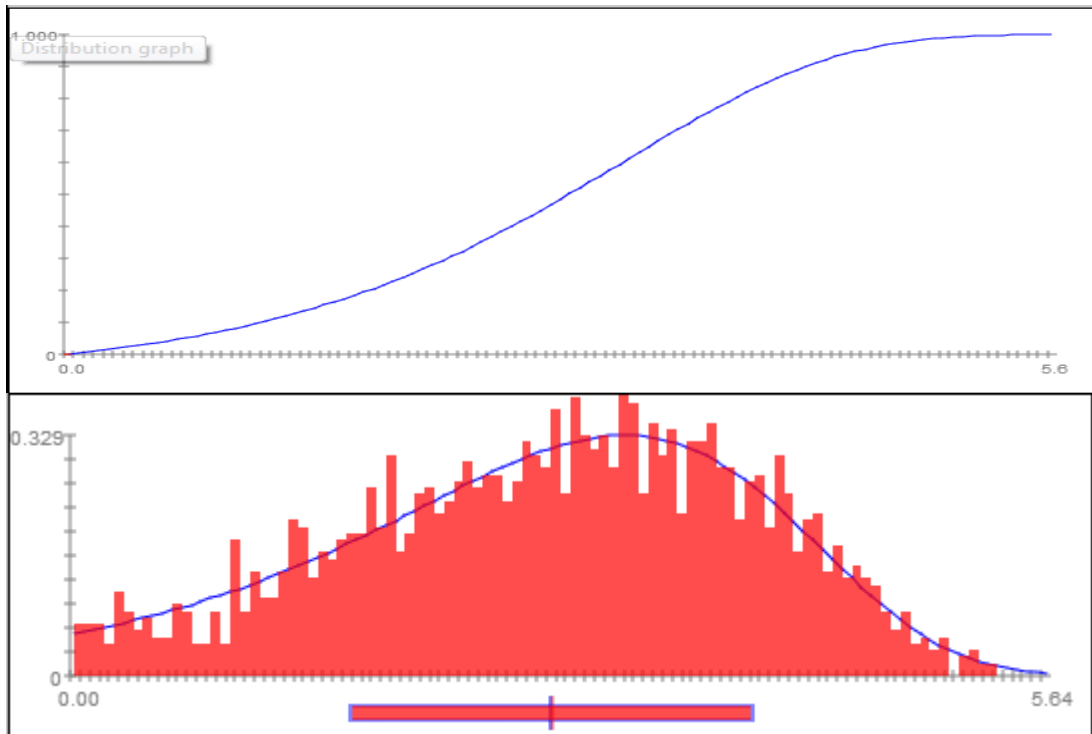
X rastgele değişkeni λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımına sahip olsun.

$U = e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)}$ rastgele değişkeni, standart düzgün dağılıma sahip olur.

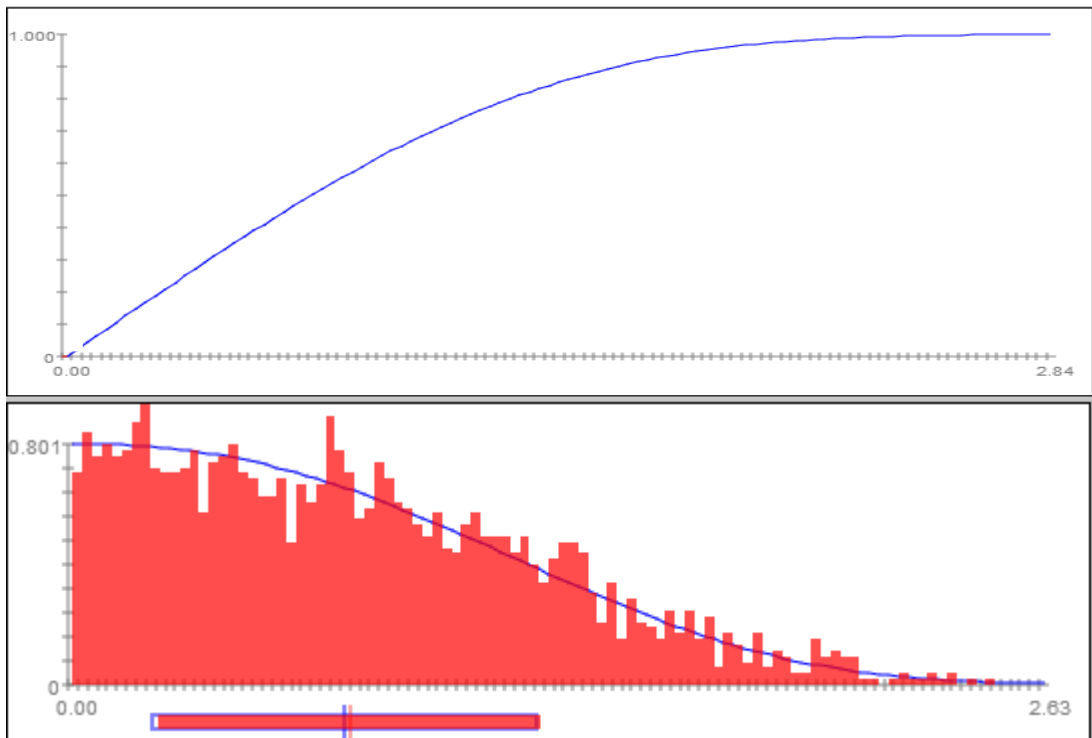
Bu bilgiler ışığında aşağıda rastgele çeyreklik yöntemi ile elde edilmiş bazı simülasyon sonuçları gösterilmiştir. Her bir şekil 1000 defa tekrarlanan bir simülasyonun sonuçlarını yansıtmaktadır. Ayrıca tüm şekillerde verilen λ ve c parametrelerine karşılık gelen dağılım fonksiyonu da gösterilmiştir.



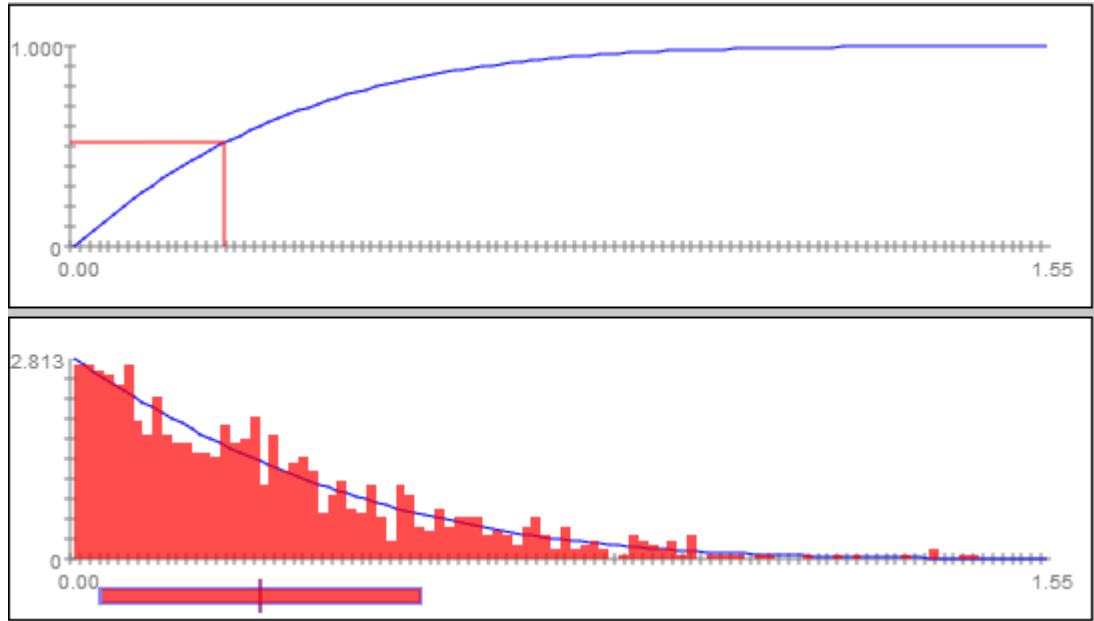
Şekil 4.18. $\lambda = 0.01$ ve $c = 1.2$ parametrelili Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.19. $\lambda = 0.07$ ve $c = 1.2$ parametrelı Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.20. $\lambda = 1$ ve $c = 1.2$ parametrelı Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları



Şekil 4.21. $\lambda = 4.22$ ve $c = 1.2$ parametrelili Gompertz Dağılımı için dağılım fonksiyonu ve simülasyon sonuçları

Görüldüğü gibi simülasyon sonuçları iyi bir yaklaşımı göstermektedir. Her bir grafiğin altında verilen ortalama ve standart sapma çubuklarına bakılarak uyumun iyiliği gözlemlenebilir.

4.2.4. İlgili Dağılımlar

Gompertz Dağılımının üstel dağılımla ilişkisi daha önce belirtilmişti.

X rastgele değişkeni λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımına sahip olsun. $k \in (0, \infty)$ için $Y = kX$ rastgele değişkeni tanımlansın. Bu durumda Y rastgele değişkeni $\frac{k}{c}$ şekil parametrelili ve $\frac{\lambda}{c}$ ölçek parametrelili Gompertz Dağılımına sahip olur.

X rastgele değişkeni, $c > 0$ ölçek parametrelili minimumlar için uç değer dağılımına sahip olsun. V , minimumlar için standart uç değer dağılımına sahip olmak üzere $X = \frac{1}{c}V$ alınsın. Dikkat edilirse $X \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$V \geq 0$ olmasıdır. O halde $X \geq 0$ verilmişken X 'in koşullu olasılığı ile $V \geq 0$ verilmişken $\frac{1}{c}V$ 'nin koşullu olasılığı aynıdır. Daha önce $V \geq 0$ verilmişken V 'nin koşullu olasılığının Standart Gompertz Dağılımı olduğu gösterilmişti. O halde $X \geq 0$ verilmişken X 'in dağılımı, 1 şekil parametrelili, $\frac{1}{c}$ ölçek parametrelili Gompertz Dağılımı olur.

5. GOMPERTZ DAĞILIMININ PARAMETRE TAHMİNLERİ

5.1. Momentler

Bu bölümde Gompertz Dağılımının parametrelerinin tahminleri üzerinde durulacaktır. Parametreler en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilecektir. Parametre tahminleri için Laplace Dönüşümü ve Meijer G fonksiyonundan yararlanılacaktır.

Önerme 5.1.1. Gompertz Dağılımının Laplace dönüşümü

$$L(s) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_s\left(\frac{\lambda}{c}\right); \lambda, c > 0 \quad (5.1.)$$

olup burada

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt$$

ile verilir (Abramowitz and Stegun, 1965).

İspat. Gompertz Dağılımının Laplace dönüşümü

$$L(s) = \int_0^{\infty} \lambda e^{\frac{\lambda}{c} (e^{cx}-1)} e^{-sx} dx \quad (5.2.)$$

şeklindedir. Burada $u = e^{cx}$ dönüşümü ile $du = ce^{cx} dx$ bulunur ve

$$L(s) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c} u} u^{-\frac{s}{c}} du$$

yazılır. $E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt, n > 0, \text{Re}(z) > 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$L(s) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_{\frac{s}{c}}\left(\frac{\lambda}{c}\right); \lambda, c > 0$$

elde edilir.

Önerme 5.1.2. Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin n . momentleri

$$E(X^n) = \frac{n!}{c^n} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1^{n-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right) \quad (5.3.)$$

olup burada

$$E_s^n(z) = \frac{1}{n!} \int_1^{\infty} (\ln x)^n x^{-s} e^{-zx} dz$$

genelleştirilmiş integro-üstel fonksiyondur (Milgram, 1985).

İspat. Gompertz Dağılımına sahip bir rastgele değişkenin momentleri Laplace dönüşümü yardımı ile bulunabilir. (3) kullanılarak

$$\begin{aligned} E(X) &= -\frac{d}{ds} L(s) \Big|_{s=0} = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} \frac{1}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}x} \ln x dx \\ E(X^2) &= -\frac{d^2}{ds^2} L(s) \Big|_{s=0} = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} \frac{1}{c^2} e^{-\frac{\lambda}{c}x} (\ln x)^2 dx \\ &\vdots \\ E(X^n) &= -\frac{d^n}{ds^n} L(s) \Big|_{s=0} = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} \frac{1}{c^n} e^{-\frac{\lambda}{c}x} (\ln x)^n dx \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıda $E(X^n)$ momentindeki integral için kısmi integral yöntemi uygulansın. Bunun için $u = (\ln x)^n$ ve $dv = \frac{1}{c^n} e^{-\frac{\lambda}{c}x} dx$ dönüşümleri yapılsın. $du = n(\ln x)^{n-1} x^{-1} dx$ ve $v = \frac{1}{c^n} \left(-\frac{c}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{c}x}$ olur. Bu sonuçlar $E(X^n)$ için verilen eşitlikte uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left[(\ln x)^n \frac{1}{c^n} \left(-\frac{c}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{c}x} \right] - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^\infty \frac{1}{c^n} \left(-\frac{c}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{c}x} n(\ln x)^{n-1} x^{-1} dx \\ &= -\frac{1}{c^n} \cdot \frac{(\ln x)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} \Big|_1^\infty + e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^\infty \frac{n}{c^n} x^{-1} e^{-\frac{\lambda}{c}x} (\ln x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

bulunur.

$$h(x) = \frac{(\ln x)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}}$$

olsun. $h(1) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}}$ olur. Burada her

$x \in (0, \infty)$ için geçerli olan

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x < x-1$$

eşitsizliği kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{x-1}{x} \right)^n \cdot \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} \leq \frac{(\ln x)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} < \frac{(x-1)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}}$$

bulunur. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n \cdot \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} = 1 \cdot 0 = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} = 0$ olduğundan limit sıkıştırma teoremi gereğince

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{e^{\frac{\lambda}{c}x}} = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$E(X^n) = e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} \frac{n}{c^n} x^{-1} e^{-\frac{\lambda}{c}x} (\ln x)^{n-1} dx$$

bulunur. Genelleştirilmiş integro-üstel fonksiyon (Milgram, 1985)

$$E_s^j(z) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} (\ln x)^j x^{-s} e^{-zx} dx$$

veya tanım kullanarak

$$E_s^j(z) = \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial s^j} E_s(z), \quad E_s^0(z) = E_s(z) \quad (5.4.)$$

yazılır. Böylece (5.3.) ile verilen $E(X^n)$ momenti

$$E(X^n) = \frac{n!}{c^n} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1^{n-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu momentin daha yaygın bir gösterimi Meijer G-fonksiyonu kullanılarak

$$E(X^n) = \frac{n!}{c^n} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{n,n+1}^{n+1,0} \quad (5.5.)$$

biçiminde verilir. Burada verilen Meijer G-fonksiyonu genelleştirilmiş bir hipergeometrik bir fonksiyondur. Bu fonksiyon C eğrisi boyunca

$$G_{n,n+1}^{n+1,0} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_m; b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds$$

ile verilir (Bateman ve ark., 1953).

Gompertz Dağılımının momentlerinin integral formunun seriye açılımı genelde daha kolay bir gösterime sahiptir. Genelleştirilmiş integro-üstel fonksiyonun seriye açılımı, $s=1$ ve $z = \frac{\lambda}{c}$ alınarak

$$E_1^{n-1} \left(\frac{\lambda}{c} \right) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(-j)^n} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c} \right)^j}{j!} \right] + \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \ln \left(\frac{\lambda}{c} \right)^{n-j} \Psi_j, \quad (5.6.)$$

olup burada

$$\Psi_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^j}{dt^j} \Gamma(1-t) \quad (5.7.)$$

ile verilir. $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ için

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= 1, \\
\Psi_1 &= \gamma, \\
\Psi_2 &= \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}, \\
\Psi_3 &= \gamma^3 + \gamma \frac{\pi^2}{2} + 2\zeta(3), \\
\Psi_4 &= \gamma^4 + \gamma^2 \pi^2 + 8\gamma\zeta(3) + \frac{3}{20}\pi^4, \\
\gamma &\approx 0.57722
\end{aligned}$$

şeklindedir. γ , Euler-Mascheroni sabiti olarak bilinir. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ise Riemann zeta fonksiyonudur (Abramowitz ve Stegun, 1965). Özel olarak $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) = 1.2021$ ve $\zeta(2) = \frac{\pi^4}{90}$ 'dir. $\zeta(3)$ değeri Apéry sabiti olarak bilinir (Apéry, 1979).

Sonuç 5.1.1. Gompertz Dağılımına sahip X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1\left(\frac{\lambda}{c}\right) \quad (5.8.)$$

biçimindedir. Bu beklenen değer yaklaşık olarak

$$E(X) \approx \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(\frac{\lambda}{c} - \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) - \gamma \right)$$

ile verilebilir. $\frac{1}{4c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^2$ değeri küçüldükçe kesin değere yaklaşım artar.

İspat.

Kesin Değer

(5.3.) kullanılarak Gompertz Dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \int_1^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{\lambda}{c}x} dx \\ &= \frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}} E_1\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Yaklaşık Değer

λ değeri sıfıra yaklaşırken üstel integral $E_1(z) \approx -\gamma - \ln z$ (Abramowitz ve Stegun, 1965) olduğundan (5.8.) ile verilen Gompertz Dağılımına ait beklenen değer $\frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(-\gamma - \ln \frac{\lambda}{c} \right)$ şekline gelir. Burada $\gamma = 0.57722$, Euler-Mascheroni sabitidir

(Pollard ve Valkovics 1992; Kunimura 1998; Missov ve Lenart 2011).

Verilen bu yaklaşık değerın kesinliği yeni bir terim eklenerek artırılabilir. (5.6.)' dan beklenen değerin seriye açılımı

$$E(X) = \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^j}{j!} - \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1-j} \Psi_j \right)$$

olup

$$E(X) = \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^j}{j!} - \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) - \gamma \right)$$

bulunur. λ değeri sıfıra yaklaştığında $\frac{\lambda}{c} \approx -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^j}{j!}$ olduğundan

$$E(X) \approx \frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} \left(\frac{\lambda}{c} - \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) - \gamma \right) \quad (5.9.)$$

elde edilir. $-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^j}{j!}$ ifadesinin işaretinin değişmesi nedeniyle göreceli olarak

büyük bir a değeri için (5.9.) ile verilen ifade olması gerekenden büyük tahmin edilmiştir. Ancak yeni terimlerin eklenmesi ile beklenen değer veya doğum anındaki yaşam beklentisi isteğe bağlı bir kesinlikte bulunmuştur.

Sonuç 5.1.2. Gompertz Dağılımına sahip X rastgele değişkeninin varyansı

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} \left\{ -\frac{\lambda}{c} {}_3F_3 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix}; \frac{\lambda}{c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \left(\gamma + \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) \right)^2 \right] \right\} - \left[\frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1\left(\frac{\lambda}{c}\right) \right]^2 \\ &\approx \frac{1}{c^2} \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{\lambda}{c^3}. \end{aligned} \quad (5.10.)$$

biçimindedir. Yaklaşık değer $a \approx 0$ için geçerlidir. ${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right]$ ise

genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyondur (Askey ve Daalhuis, 2010).

İspat.

Kesin Değer

Bir X rastgele değişkeninin varyansının $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ile verildiğini biliyoruz. X , Gompertz Dağılımına sahipse (5.3.)’dan

$$E(X^2) = \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1\left(\frac{\lambda}{c}\right) \quad (5.11.)$$

olup (5.11.)'in kesin değeri temsil eden gösterimi (5.5.)'te verilen G fonksiyonu kullanılarak

$$E(X^2) = \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{2,3}^{3,0}\left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{matrix} ;1,1 \\ 0,0,0; \end{matrix} \right)$$

biçiminde yazılır. E_s^j nin kuvvet serisi açılımı kullanılarak (Milgram 1985:2.10)

$$E_1^j(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(-l)^{j+1}} \frac{(-z)^l}{l!} + \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \sum_{l=0}^{j+1} \binom{j+1}{l} \ln(z)^{1+j-l} \Psi_l \quad (5.12.)$$

elde edilir. Burada $\Psi_l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^l}{dt^l} \Gamma(1-t)$ ile verilir.

Dikkat edilirse

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(-l)^{j+1}} \frac{(-z)^l}{l!} = (-1)^j z_{j+2} F_{j+2} \left[\begin{matrix} 1_1, \dots, 1_{j+2} \\ 2_1, \dots, 2_{j+2}; \end{matrix} ; z \right]$$

olup ${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$ genelleştirilmiş hipergeometrik

fonksiyondur (Askey ve Daalhuis, 2010). Böylece

$$E(X^2) = \frac{2}{c^2} \left\{ -\frac{\lambda}{c} {}_3F_3 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix} ; \frac{\lambda}{c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \left(\gamma + \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) \right)^2 \right] \right\}$$

olup

$$Var(X) = \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} \left\{ -\frac{\lambda}{c} {}_3F_3 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix}; \frac{\lambda}{c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \left(\gamma + \ln \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right)^2 \right] \right\} - \left[\frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1 \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right]^2$$

bulunur.

Yaklaşık Değer

(5.9.) ve (5.10.) birlikte düşünüldüğünde mümkün yaklaşımlar kolaylıkla görülebilir. Pollard ve Valkovics (1992), λ değeri sıfıra çok yakın iken Gompertz Dağılımının varyansının $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu göstermiştir. Ancak (5.10.)'dan varyansın λ parametresine bağlı olduğu görülmektedir. Sabit c değeri için λ arttıkça varyans azalmaktadır.

$\lambda \approx 0$ iken (5.9.) kullanılarak

$$E(X^2) \approx \frac{1}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} \frac{\pi^2}{6} - e^{-\frac{\lambda}{c}} E(X)^2$$

yazılır ve $e^{\frac{\lambda}{c}} = 1$ için

$$Var(X) \approx \frac{1}{c^2} \frac{\pi^2}{6} \quad (5.14.)$$

bulunur. Dikkat edilirse göreceli olarak büyük olan λ değerleri için (5.14.)'de elde edilen sonuç varyansı olması gerekenden büyük tahmin eder. $\lambda \approx 0$ için

${}_3F_3 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix}; \frac{\lambda}{c} \right]$ değeri 1'e eşittir. Anlık ölüm oranının yüksek olduğu durumlar için

bu değer yaklaşık 0.9 veya 1'dir. Ancak $-2 \frac{\lambda}{c^3}$ anlamlı ölçüde büyük olabilir ve gerekenden büyük olan varyansı küçültebilecek tek terimdir. Dolayısıyla (5.10.) ile verilen ifade (5.14.) ile verilen ifadeden daima daha iyi bir yaklaşım sağlar.

Sonuç 5.1.3. Gompertz Dağılımına sahip X rastgele değişkeninin çarpıklığı

$$\gamma_1 = \frac{\frac{6}{c^3} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{3,4}^{4,0} \left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{smallmatrix} :1,1,1 \\ 0,0,0,0; \end{smallmatrix} \right) - 3m_1 \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{2,3}^{3,0} \left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{smallmatrix} :1,1 \\ 0,0,0; \end{smallmatrix} \right) + 2m_1^3}{\left(\frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} \left\{ -\frac{\lambda}{c} {}_3F_3 \left[\begin{smallmatrix} 1,1,1 \\ 2,2,2 \end{smallmatrix}; \frac{\lambda}{c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \left(\gamma + \ln \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right)^2 \right] \right\} - \left[\frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1 \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right]^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\approx \begin{cases} 4.15\lambda^{0.3} - 5c^{0.49} - 1.48\lambda + 4.31c - 4.96\lambda c, & a > 0 \\ \frac{-12\sqrt{6}}{\pi^3} \zeta(3), & a \approx 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Burada m_1 dağılımın beklenen değerini temsil eder.

İspat.

Kesin Değer

Çarpıklık

$$\gamma_1 = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{Var(X)^{3/2}}$$

ile verilir. Böylece (5.5.) ve (5.10.)’dan kesin sonuç hemen elde edilir. Bu ifadeye denk olan kuvvet serisi (5.6.) ve (5.7.) kullanılarak kolayca bulunur.

Yaklaşık Değer

Yaklaşık sonuç $a \rightarrow 0$ iken üçüncü merkezi moment olan m_3 ’ün limiti olup

$$m_3|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} m_3 = -\frac{2}{c^3} \zeta(3)$$

biçimindedir. (5.14)’den

$$\gamma_1|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{m_3}{Var(X)^{3/2}} = -\frac{12\sqrt{6}}{\pi^3} \zeta(3) \quad (5.15.)$$

ve $0 < \lambda, c \leq 0.2$ yüzeyi içindeki diğer durumlar için yaklaşım lineer olmayan regresyon kullanılarak

$$\gamma_1|_{a>0} \approx c_1 \lambda^{c_2} + c_3 c^{c_4} + c_5 \lambda + c_6 c + c_7 \lambda c$$

uyumu ile elde edilir.

Gompertz Dağılımı için çarpıklık değerinin alabileceği en küçük değer ise (5.15.)'den $\gamma_1 = -1.13955$ 'tir.

Sonuç 5.1.4. Gompertz Dağılımına sahip X rastgele değişkeninin basıklığı

$$\gamma_2 = \frac{\frac{24}{c^4} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{4,5}^{5,0} \left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{smallmatrix} :1,1,1,1 \\ 0,0,0,0,0 \end{smallmatrix} \right) - 4m_1 \frac{6}{c^3} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{3,4}^{4,0} \left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{smallmatrix} :1,1,1 \\ 0,0,0,0 \end{smallmatrix} \right) + 6m_1^2 \frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} G_{2,3}^{3,0} \left(\frac{\lambda}{c} \middle| \begin{smallmatrix} :1,1 \\ 0,0,0 \end{smallmatrix} \right) + 3m_1^4}{\left(\frac{2}{c^2} e^{\frac{\lambda}{c}} \left\{ -\frac{\lambda}{c} {}_3F_3 \left[\begin{smallmatrix} 1,1,1 \\ 2,2,2 \end{smallmatrix} ; \frac{\lambda}{c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \left(\gamma + \ln \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right)^2 \right] \right\} - \left[\frac{1}{c} e^{\frac{\lambda}{c}} E_1 \left(\frac{\lambda}{c} \right) \right]^2 \right)^2} - 3$$

$$\approx \begin{cases} 4.15\lambda^{0.3} - 5c^{0.49} - 1.48\lambda + 4.31c - 4.96\lambda c, & a > 0 \\ \frac{-12\sqrt{6}}{\pi^3} \zeta(3), & a \approx 0 \end{cases}$$

İspat.

Kesin Değer

Basıklık

$$\gamma_1 = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X)^2 E(X^2) - 3E(X)^4}{Var(X)^2} - 3$$

ile verilir. Böylece (5.5.) ve (5.10.)'den kesin sonuç hemen elde edilir. Bu ifadeye denk olan kuvvet serisi (5.6.) ve (5.7.) kullanılarak bulunur. Basıklığın en küçük değerine yaklaşık -0.75 'te ulaştığı görülür.

Yaklaşık Değer

Yaklaşık sonuç $\lambda \rightarrow 0$ iken dördüncü merkezi moment olan m_4 'ün limiti olup

$$m_4|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} m_4 = \frac{3\pi^4}{20c^4}$$

biçimindedir. (5.14.)'dan

$$\gamma_2|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{m_4}{Var(X)^2} - 3 = \frac{12}{5} \quad (5.16)$$

ve $0 < \lambda, c \leq 0.2$ yüzeyi içindeki diğer durumlar için yaklaşım lineer olmayan regresyon kullanılarak

$$\gamma_2|_{\lambda>0} \approx -0.75 + c_1 \lambda^{c_2} + c_3 c^{c_4} + c_7 (\lambda c)^{c_6}$$

uyumu ile elde edilir.

Gompertz Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu konum ve ölçek parametresi kullanılarak yeniden formülize edilebilir. Modun $M = \frac{1}{c} \ln \frac{\lambda}{c}$ olduğu göz önüne alınarak (2) ifadesi $f(x) = ce^{e^{-cM} - e^{c(x-M)} + c(x-M)}$ biçiminde yazılabilir.

En Çok Olabilirlik Tahminleri

Kesikli yaş durum için Ölüm sayısı ve ölüm yılları gözlemlenmişken verilen bir yaş aralığındaki ölüm sayılarının Poisson dağılımına sahip olduğu varsayılabilir. D_x her bir yaş grubundaki ölüm sayısı, E_x , x yaşındaki bir bireyin ölüm maruz kaldığı yıl

sayısı olsun. Bu durumda $\mu(x) = ae^{bx}, a, b > 0$ ifadesinde en çok olabilirlik tahminleri aşağıdaki denklemleri sağlar ve parametre tahminleri elde edilir (Lenart, 2011).

$$\hat{a} = \frac{\sum_x D_x}{\sum_x E_x e^{bx}} \text{ ve } \frac{1}{\sum_x D_x} \sum_x D_x x = \frac{1}{\sum_x E_x e^{\hat{b}x}} \sum_x E_x e^{\hat{b}x} x$$

Sürekli yaş durumu ile ilgili sonuçlar (Lenart, 2011)'de verilmiştir.

6. GOMPERTZ DAĞILIMININ PARAMETRE GÜVEN ARALIKLARI

Bu kısımda iki parametrelili Gompertz Dağılımı

$$f(x) = \lambda e^{cx} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}, x > 0 \quad (6.1.)$$

için parametre tahminleri ve güven aralıkları ele alınacaktır. (6.1.) formunda verilen Gompertz Dağılımının c parametresi için kesin güven aralığı ile λ ve c parametreleri için kesin ortak güven bölgesi elde edilecektir. Bu yaklaşımda verilerin II. Tip sansürlü olmasına izin verilmektedir. Tüm örneklemin $X_1, X_2, \dots, X_n$ olduğu varsayılın. Güven aralıklarının elde edilmesi için sadece ilk k sıra istatistiği olan $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$ değerlerinin bilinmesi yeterlidir.

6.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde Gompertz Dağılımına ait parametrelerin kesin ortak güven bölgesi ve c parametresi için kesin güven aralığı verilecektir. Gompertz Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu (6.1.)'de verildiği gibi

$$f(x) = \lambda e^{cx} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}, x > 0$$

biçiminde olup bu fonksiyonda λ ve c Gompertz Dağılımının parametreleridir. Gompertz Dağılımına ait birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{ct} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{ct} - 1)\right\} dt$$

olup burada $u = \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}$ dönüşümü uygulanırsa

$du = -\lambda e^{cx} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}$ elde edilir. İntegral sınırları ise $u_1 = 1$ ve

$u_2 = \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}$ biçimindedir. Böylece

$$F(x) = - \int_1^{\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}} du = 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}, x > 0 \quad (6.2.)$$

bulunur.

Gompertz Dağılımı ile üstel dağılım arasında bir ilişki kurulabilir. Gompertz Dağılımında $c \rightarrow 0$ olarak dağılımı inceleyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{c \rightarrow 0} \lambda e^{cx} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \lambda e^{cx} \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\} \\ &= \lambda \cdot \exp\left[\lim_{c \rightarrow 0} \left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right\}\right] \end{aligned}$$

olup L'Hôpital Kuralının uygulanması ile

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} f(x) &= \lambda \cdot \exp\left[\lim_{c \rightarrow 0} \left\{-\lambda \left(\frac{xe^{cx}}{1}\right)\right\}\right] \\ &= \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $c \rightarrow 0$ için Gompertz Dağılımı, ortalaması $\frac{1}{\lambda}$ olan üstel dağılıma yakınsar. Ayrıca $Y = \frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)$ dönüşümünün uygulanması ile Y rastgele değişkeninin standart üstel dağılıma sahip olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir (Chen, 1997):

$$J = \left| \frac{dx}{dy} \right| = \left| \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right| = \frac{1}{\frac{\lambda}{c} \cdot c \cdot e^{cx}} = \frac{1}{\lambda e^{cx}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} h(y) &= f(g^{-1}(y)) \\ &= \frac{1}{\lambda e^{cx}} \cdot \lambda e^{cx} \cdot \exp(-y) \\ &= e^{-y}, y > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $Y = \frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)$ dönüşümü altında Gompertz Dağılımı $\lambda = 1$ parametrelili üstel dağılıma dönüşür.

Şimdi parametrelerin güven aralıklarının elde edilmesi için Chen (1997)'de verilen aşağıdaki yöntem izlenecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Gompertz Dağılımından alınmış bir örneklem ve $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$ bu örnekleme ait ilk k sıra istatistiği olsun.

$$Y_i = \frac{\lambda}{c}(e^{cx_i} - 1), i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3.)$$

rastgele değişkeni tanımlansın. Yukarıda her $i=1,2,\dots,n$ için Y_i rastgele değişkeninin üstel dağılıma sahip olduğu gösterilmiştir. Bu durumda $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ standart üstel dağılımdan alınmış rastgele bir örnekleme karşılık gelir. $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ bu örnekleme ait sıra istatistiklerini gösterebilir. Şimdi

$$g(x) = \frac{\lambda}{c} (e^{cx} - 1)$$

şeklinde tanımlı $g(x)$ fonksiyonu incelenecektir. Bu fonksiyon x 'e göre kesin artandır. Çünkü

$$g(x) = \frac{\lambda}{c} (e^{cx} - 1) \Rightarrow g'(x) = \frac{\lambda}{c} (ce^{cx}) = \lambda e^{cx} > 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(k)}$ standart üstel dağılımdan alınan örneklemin ilk k sıra istatistiğidir.

$$U = 2 \left(\sum_{i=2}^{k-1} Y_{(i)} + (n-k+1)Y_{(k)} + (1-n)Y_{(1)} \right) \quad (6.4.)$$

ve

$$V = 2nY_1 \quad (6.5.)$$

olsun. O zaman U ve V bağımsız rastgele değişkenlerdir. U ve V sırasıyla $2k-2$ ve 2 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir (Chen, 1997). Bu ifadelerin doğruluğu aşağıda gösterilmiştir.

$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! e^{-y_1 - y_2 - \dots - y_n}, 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \infty$$

biçimindedir. $Z_i = Y_{(i)} - Y_{(i-1)}, i = 2, \dots, n$ ve $Z_1 = Y_{(1)}$ rastgele değişkenleri tanımlansın. $Z_i, i = 1, 2, \dots, n$ rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_{(1)} \\ Z_2 &= Y_{(2)} - Y_{(1)} \\ &\vdots \\ Z_n &= Y_{(n)} - Y_{(n-1)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Y_{(1)} &= Z_1 \\ Y_{(2)} &= Z_1 + Z_2 \\ &\vdots \\ Y_{(n)} &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \end{aligned}$$

yazılır. Dönüşümün jakobiyesi

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

dir. O halde $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = n! e^{-nz_1 - (n-1)z_2 - \dots - (n-i+1)z_i - \dots - z_n}, 0 < z_i < \infty$$

bulunur. Bu fonksiyon için

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = n! e^{-nz_1} \cdot e^{-(n-1)z_2} \cdot \dots \cdot e^{-z_n}, 0 < z_i < \infty$$

yazılır. $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ fonksiyonu, $Z_i, i=1, 2, \dots, n$ rastgele değişkenlerinin ayrı ayrı fonksiyonlarının çarpımı şeklinde yazılabildiğinden $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ rastgele değişkenleri karşılıklı bağımsızdır. Her bir Z_i rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_i(z_i) = (n-i+1) e^{-(n-i+1)z_i} \cdot I_{(0, \infty)}$$

şeklindedir.

$W_i = 2(n-i+1)Z_i$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ele alınsın. Dönüşümün jakobyeni

$$J = \left| \frac{1}{\frac{dw_i}{dz_i}} \right| = \frac{1}{2(n-i+1)}$$

olup

$$h_i(w_i) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} w_i}, 0 < w_i < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $W_i = 2(n-i+1)Z_i$, rastgele değişkeni 2 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Ayrıca U rastgele değişkeni için

$$\begin{aligned} U &= 2 \left(\sum_{i=2}^{k-1} Y_{(i)} + (n-k+1)Y_{(k)} + (1-n)Y_{(1)} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=2}^{k-1} Y_{(i)} + (n-k)Y_{(k)} + Y_{(k)} + Y_{(1)} - nY_{(1)} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^k Y_{(i)} + (n-k)Y_{(k)} \right) - 2nY_{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^k 2(n-i+1)Z_i - 2nZ_{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^k W_i - W_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. $W_i \stackrel{iid}{\sim} \chi_2^2$ olduğundan, χ^2 dağılımını özellikleri kullanılarak $\sum_{i=1}^k W_i \sim \chi_{2k}^2$ ve

$W_1 \sim \chi_2^2$ yazılabilir. $\sum_{i=1}^k W_i$ ile W_1 bağımsız olduğu için

$$U = \sum_{i=1}^k W_i - W_1 \sim \chi_{(2k-2)}^2$$

bulunur. Ayrıca

$$V = 2nY_1 = 2nZ_1 = W_1 \sim \chi_2^2$$

olur. Elde edilen sonuçlardan U ve V rastgele değişkenlerinin bağımsız olduğu açıktır.

U ve V yukarıdaki gibi olmak üzere ξ ve ζ rastgele değişkenleri

$$\xi = \frac{U}{(k-1)V} = \frac{\sum_{i=2}^{k-1} Y_{(i)} + (n-k+1)Y_{(k)} + (1-n)Y_{(1)}}{n(k-1)Y_{(1)}} \quad (6.6.)$$

ve

$$\zeta = U + V = 2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} Y_{(i)} + (n-k+1)Y_{(k)} \right] \quad (6.7.)$$

biçiminde tanımlansın. c parametresi için kesin güven aralığını, λ ve c parametreleri için kesin ortak güven bölgesini elde etmek için aşağıdaki lemmalar kullanılacaktır.

Lemma 6.1. ξ ve ζ rastgele değişkenleri sırasıyla (6.6.) ve (6.7.)’deki gibi tanımlansın. Bu durumda ξ rastgele değişkeni, $2k-2$ ve 2 serbestlik dereceli F dağılımına; ζ rastgele değişkeni ise $2k$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Ayrıca bu rastgele değişkenler birbirinden bağımsızdır (Chen, 1997).

İspat. $U \sim \chi_{2k-2}^2$, $V \sim \chi_2^2$ ve U ile V birbirinden bağımsız olduğu için

$$\frac{\frac{U}{2k-2}}{\frac{V}{2}} = \frac{U}{(k-1)V} = \xi$$

rastgele değişkeni $2k-2$ ve 2 serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir.

U ile V bağımsız χ^2 rastgele değişkenleri olduğundan χ^2 dağılımının toplama özelliği gereğince

$$U + V = \zeta$$

rastgele değişkeni $2k$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir.

χ^2 dağılımına sahip bağımsız iki rastgele değişkenin toplamı ve oranı birbirinden bağımsız olduğundan ξ ve ζ rastgele değişkenler birbirinden bağımsızdır.

Lemma 6.2. Her $0 < a < b$ ve $c \neq 0$ için $g(c) = \frac{e^{cb} - 1}{e^{ca} - 1}$ biçiminde tanımlı fonksiyon kesin artan bir fonksiyondur (Chen, 1997).

İspat. Öncelikle g fonksiyonunun türevini bulunsun.

$$g'(c) = \frac{be^{cb}(e^{ca} - 1) - ae^{ca}(e^{cb} - 1)}{(e^{ca} - 1)^2}$$

biçimindedir. $f(t) = \frac{te^{ct}}{e^{ct} - 1}, t \neq 0$ fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{e^{ct}(1+ct)(e^{ct} - 1) - ce^{ct}te^{ct}}{(e^{ct} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{ct}(e^{ct} - 1 + cte^{ct} - ct - cte^{ct})}{(e^{ct} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{ct}(e^{ct} - 1 - ct)}{(e^{ct} - 1)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Her $y \in \mathbb{R}$ için $e^y \geq 1 + y$ olduğundan $e^{ct} \geq 1 + ct$ yazılabilir. Dolayısıyla her $t \neq 0$ için $f'(t) > 0$ elde edilir. O halde $f(t)$ fonksiyonu t 'ye göre kesin artan bir fonksiyondur. Her $a < b$ için $f(a) < f(b)$ 'dir. Böylece

$$\frac{ae^{ca}}{e^{ca}-1} < \frac{be^{cb}}{e^{cb}-1}$$

ve bu sonucu kullanarak

$$\begin{aligned} be^{cb}(e^{ca}-1) &> ae^{ca}(e^{cb}-1) \\ \Rightarrow be^{cb}(e^{ca}-1) - ae^{ca}(e^{cb}-1) &> 0 \end{aligned}$$

dolayısıyla her $c \neq 0$ için

$$g'(c) > 0$$

yazılır. Sonuç olarak g fonksiyonu, $0 < a < b$ ve $c \neq 0$ için kesin artan bir fonksiyondur.

Lemma 6.3. Her $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ve $c \neq 0$ için

$$\xi(c) = \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{ca_i} - 1) + (n-k+1)(e^{ca_k} - 1) + (1-n)(e^{ca_1} - 1)}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)}$$

fonksiyonu kesin artan bir fonksiyondur (Chen, 1997).

İspat. ξ fonksiyonu

$$\xi(c) = \frac{1}{n(k-1)} \left[\sum_{i=2}^{k-1} \left(\frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1} \right) + (n-k+1) \frac{e^{ca_k} - 1}{e^{ca_1} - 1} + (1-n) \right]$$

biçiminde yazılabilir. Burada $n(k-1) \geq 0$ ve $n-k+1 \geq 0$ 'dır. Herhangi bir $f_i, i \in \mathbb{N}$ fonksiyonu kesin artan bir fonksiyon ise $cf_i, c > 0$ ve $\sum_{i=1}^k f_i$ fonksiyonları da kesin artandır. Ayrıca Lemma 2'den $i = 2, 3, \dots, k$ için $h(c) = \frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1}$ fonksiyonu kesin artandır. O halde ξ fonksiyonu verilen şartlar altında kesin artan bir fonksiyondur.

Lemma 6.4. $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, $c \neq 0$ ve $t > 0$ olsun. Eğer

$$t \neq \frac{\sum_{i=2}^{k-1} a_i + (n-k+1)a_k + (1-n)a_1}{n(k-1)a_1}$$

ise

$$\frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{ca_i} + (n-k+1)e^{ca_k} + (1-n)e^{ca_1}}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)} = t$$

denkleminin tam olarak bir kökü vardır (Chen, 1997).

İspat. Lemma 3 gereğince

$$\begin{aligned}
 \xi(c) &= \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{ca_i} - 1) + (n-k+1)(e^{ca_k} - 1) + (1-n)(e^{ca_1} - 1)}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)} \\
 &= \frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{ca_i} + (-k+2) + (n-k+1)e^{ca_k} + (-n+k-1) + (1-n)e^{ca_1} + (-1+n)}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)} \\
 &= \frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{ca_i} + (n-k+1)e^{ca_k} + (1-n)e^{ca_1}}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)}
 \end{aligned}$$

fonksiyonu her $c \neq 0$ için c 'ye göre kesin artandır.

$$\xi(c) = \frac{1}{n(k-1)} \left[\sum_{i=2}^{k-1} \left(\frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1} \right) + (n-k+1) \frac{e^{ca_k} - 1}{e^{ca_1} - 1} + (1-n) \right]$$

yazılışı kullanılarak limit alınsın. Öncelikle L Hôpital teoremi kullanılarak

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{a_i e^{ca_i}}{a_1 e^{ca_1}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_1} e^{c(a_i - a_1)}$$

yazılır. Her $i = 2, 3, \dots, k$ için $a_i - a_1 > 0$ olduğundan $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1} = \infty$ bulunur. O

halde $\lim_{c \rightarrow \infty} \xi(c) = \infty$ elde edilir.

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{e^{ca_i} - 1}{e^{ca_1} - 1} = 1 \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow -\infty} \xi(c) &= \frac{1}{n(k-1)} \left[\left(\sum_{i=2}^{k-1} 1 \right) + (n-k+1) + 1 - n \right] \\
&= \frac{1}{n(k-1)} [k-2 + (n-k+1) + 1 - n] \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\xi(c) = \frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{ca_i} + (n-k+1)e^{ca_k} + (1-n)e^{ca_1}}{n(k-1)(e^{ca_1} - 1)}$$

eşitliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 0^+} \xi(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \xi(c) \\
&\stackrel{LH}{=} \frac{\sum_{i=2}^{k-1} a_i e^{ca_i} + (n-k+1)a_k e^{ca_k} + a_1(1-n)e^{ca_1}}{n(k-1)a_1 e^{ca_1}} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^{k-1} a_i + (n-k+1)a_k + a_1(1-n)}{n(k-1)a_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla denklemin tam olarak bir kökü vardır.

(6.6.) ve (6.7.)’de tanımlanan ξ ve ζ rastgele değişkenleri,

$Y_{(i)} = \frac{\lambda}{c} (e^{cX_{(i)}} - 1)$ yazılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} \quad (6.8.)$$

$$\zeta = \frac{2\lambda}{c} \left[\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) \right] \quad (6.9.)$$

Teorem 6.1. ve Teorem 6.2., c parametresi için kesin güven aralığını, λ ve c parametreleri için kesin ortak güven bölgesini vermektedir. Bu kısımda $F_{\alpha}(v_1, v_2)$, v_1 ve v_2 serbestlik dereceli F dağılımının α kritik değerini, $\chi_{\alpha}^2(v)$, v serbestlik dereceli χ^2 dağılımının üst α kritik değerini temsil etmektedir.

6.2. Güven Aralıkları

6.2.1. c Parametresi İçin Güven Aralığı

Teorem 6.1. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$, λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımından alınmış n birimlik rastgele bir örneklemin ilk k sıra istatistiği olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ için

$$\varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) < c < \varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) \quad (6.10)$$

ifadesi c parametresi için α anlam düzeyli güven aralığını belirtir (Chen, 1997).

Burada $\varphi(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, t)$ ifadesi

$$\frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} + (1-n)e^{cX_{(1)}}}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} = t \quad (6.11.)$$

denkleminin c için çözümüdür.

İspat. Her $0 < \alpha < 1$ için, Lemma 1'den

$$P \left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) < \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} < F_{\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) = 1 - \alpha$$

yazılır. Lemma 4'ü uygulayarak

$$\begin{aligned} & P \left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) < \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} < F_{\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) \\ &= P \left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) < \frac{\sum_{i=2}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} + (1-n)e^{cX_{(1)}}}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} < F_{\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) \\ &= P \left(\varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) < c < \varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{\alpha}{2}}(2k-2, 2) \right) \right) \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

elde edilir (Chen, 1997). Böylece ispat tamamlanır.

(6.10.) ile elde edilen güven aralığının alt sınırı negatif ise alt limit olarak 0 alınmalıdır. Diğer bir durum ise c için tek yönlü güven aralığının üst sınırı c_U değerini belirlemektir. Böylece c parametresi için α anlam düzeyli (üst) güven aralığı $(0, c_U)$ biçiminde yazılabilir.

Sonuç 6.1. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$, λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımından alınmış n birimlik rastgele bir örneklemin ilk k sıra istatistiği olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ için

$$\varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\alpha}(2k-2, 2)\right) \quad (6.12.)$$

c parametresi için α anlam düzeyli güven aralığının üst sınırıdır (Chen, 1997).

Burada $\varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, t\right)$, Teorem 1’de tanımlanan değerdir.

6.2.2. λ ve c Parametreleri İçin Ortak Güven Bölgesi

Teorem 6.2. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$, λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımından alınmış n birimlik rastgele bir örneklemin ilk k sıra istatistiği olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ için aşağıdaki eşitsizlikler λ ve c parametreleri için α anlam düzeyli ortak güven bölgesini belirtir (Chen, 1997).

$$\begin{cases} \varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2)\right) < c < \varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2)\right) \\ \frac{c \chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} < \lambda < \frac{c \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} \end{cases} \quad (6.13.)$$

Burada $\varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, t\right)$, Teorem 1’de tanımlanan değerdir.

İspat. Lemma 1 ve Lemma 4’ten

$$\begin{aligned}
 & P \left(\varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) \right) < c < \varphi \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) \right) \right. \\
 & \quad \left. \frac{c \chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} < \lambda < \frac{c \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} \right) \\
 & = P \left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) < \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} < F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) \right. \\
 & \quad \left. \chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k) < \frac{2\lambda}{c} \left[\frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} \right] < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k) \right) \\
 & = P \left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) < \frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} < F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k-2, 2) \right) \times \\
 & \quad P \left(\chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k) < \frac{2\lambda}{c} \left[\frac{\sum_{i=2}^{k-1} (e^{cX_{(i)}} - 1) + (n-k+1)(e^{cX_{(k)}} - 1) + (1-n)(e^{cX_{(1)}} - 1)}{n(k-1)(e^{cX_{(1)}} - 1)} \right] < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}^2(2k) \right) \\
 & = 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

bulunur (Chen, 1997).

Sonuç 1’le benzer şekilde parametrelere ait başka bir ortak güven bölgesi aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 6.2. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$, λ ve c parametrelili Gompertz Dağılımından alınmış n birimlik rastgele bir örneklemin ilk k sıra istatistiği olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ için aşağıdaki eşitsizlikler λ ve c parametreleri için α anlam düzeyli ortak güven bölgesini belirtir (Chen, 1997).

$$\left\{ \begin{array}{l} c < \varphi\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, F_{\sqrt{1-\alpha}}(2k-2, 2)\right) \\ \frac{c \chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} < \lambda < \frac{c \chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k)}{2 \left[\sum_{i=1}^{k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-k+1)e^{cX_{(k)}} - n \right]} \end{array} \right. \quad (6.14.)$$

Burada $\varphi(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}, t)$, Teorem 1’de tanımlanan değerdir.

7. GOMPERTZ GÜVENİRLİK FONKSİYONU

Gompertz Dağılımının bir özelliği yazılım güvenilirliği alanında kullanılabilmesidir. Gompertz güvenilirlik büyüme modeli güvenilirlik verilerinin analizinde sık sık kullanılır. Bu bölümün yazılmasında özellikle “http://reliawiki.org/index.php/Gompertz_Models” sitesinden faydalanılmıştır.

Genellikle veri kümesinin düzgün bir eğriye uyması durumunda Gompertz güvenilirlik büyüme modeline başvurulur. Bu amaçla kullanılan Gompertz modeli Virene (1968) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$R = \alpha \lambda^{\theta^T}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \theta < 1, \quad T > 0 \quad (7.1.)$$

Bu modelde

R : T zamanına karşılık gelen gelişim aşamasında sistem güvenilirliğini

α : $T \rightarrow \infty$ için sistem güvenilirliğinin ulaşabileceği üst sınırı (Ulaşılacak en büyük güvenilirlik değeri)

$\alpha\lambda$: Başlangıç anındaki ($T = 0$) güvenilirlik değerini

θ : büyümenin yapısını gösteren parametreyi

temsil etmektedir. θ 'nin küçük değerleri hızlı (erken) güvenilirlik büyümesine, θ 'nin büyük değerleri yavaş güvenilirlik büyümesine karşılık gelir.

Matematiksel modelden görüldüğü gibi Gompertz güvenilirlik modeli üç parametre içermektedir. T_i ve R_i değerleri verilmişken en iyi uyuma sahip eğriyi veren parametre değerleri bulunmalıdır.

7.1. Parametre Tahminleri

p açıklayıcı değişkenli

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

lineer regresyon modelinde

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & \dots & X_{1,p} \\ 1 & X_{2,1} & \dots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{N,1} & \dots & X_{N,p} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

ile verilir. β parametre vektörünün $\hat{\beta}$ kestirici vektörü

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_N \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Burada Y yanıt vektörünü, X açıklayıcı değişkenler matrisini temsil etmektedir. $X^T X$ karesel matrisinin tersinir olduğu varsayımı altında en küçük kareler tahmin edicilerinin vektörü

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

şeklindedir.

Lineer olmayan regresyon ise veri kümesine uydurulan denklemin bir doğru yerine eğri belirtmesi ilkesine dayanır. Lineer regresyonda olduğu gibi eğri ile veri kümesi noktaları arasındaki yatay veya dikey uzaklıkların kareleri toplamının minimum yapılması söz konusudur.

Lineer olmayan regresyon bağlamında Gompertz büyüme modelinin parametre tahminleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

(7.1.) ile verilen Gompertz büyüme Modeli ele alınsın.

$$T_i = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}, i=1,2,\dots,N \quad \text{ve} \quad \delta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \\ \theta \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Y_i = f(T_i, \delta) = \alpha \lambda^{(\theta^{T_i})} \quad (7.2.)$$

tanımlansın. Parametrelerin tahmin edilmesi için Kesilmiş Taylor Serisi, En Küçük Kareler Yöntemi ve Gauss Newton Yöntemi kullanılacaktır. Yöntemler uygulanırken uygun başlangıç değerlerinin seçilmesi gerekir. Uygun başlangıç değerlerinin seçilmesi, uygulanacak iterasyon sayısını azaltmaktadır.

Tahmin edilecek parametreler $(\alpha, \lambda, \theta)$ ve karşılık gelen başlangıç değerleri $(g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)})$ olsun. Öncelikle $(g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)})$ başlangıç noktasındaki Kesilmiş Taylor Serisi üzerinde inceleme yapılacaktır. Tahmin değerleri istenen çözüme yeterince yakınsa $g_i - g_i^{(0)}, i=1,2,3$ farkları sıfıra yaklaşır. Bu durumda bu farkların ikinci ve daha yüksek mertebeden kuvvetleri ile çarpımları ihmal edilebilecek kadar küçük olur. O halde Kesilmiş Taylor Serisinin kullanılması uygundur.

f fonksiyonu verilmişken Kesilmiş Taylor Serisi

$$\begin{aligned} \text{Taylor} = & f(g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial g_1} \bigg|_{(g_i = g_i^{(0)})} (g_1 - g_1^{(0)}) \\ & + \frac{\partial f}{\partial g_2} \bigg|_{(g_i = g_i^{(0)})} (g_2 - g_2^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial g_3} \bigg|_{(g_i = g_i^{(0)})} (g_3 - g_3^{(0)}) \end{aligned}$$

şeklindedir (Seber ve Wild, 1989). Bu seri yardımıyla lineer terimler kullanılarak lineer olmayan bir modele yaklaşım uygulanır ve parametre tahminleri için bilinen Gauss En Küçük Kareler yönteminden faydalanılır.

(j) , j . iterasyon sırasını temsil etmek üzere g_1, g_2, g_3 parametrelerinin başlangıç tahminleri $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}$ olsun. Bu tahminlerin vektörü

$$g^{(0)} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $f(T_i, \delta)$ fonksiyonunun Kesilmiş Taylor Serisi açılımı kullanılarak i . gözlem için

$$f(T_i, \delta) \approx f(T_i, g^{(0)}) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial f(T_i, \delta)}{\partial \delta_k} \right]_{\delta=g^{(0)}} (\delta_k - g_k^{(0)}) \quad (7.3.)$$

yazılabilir. Burada δ , parametreler vektörünü, $g^{(0)}$ ise başlangıç tahminleri vektörünü temsil etmektedir. Buradaki terimler için

$$\begin{aligned} f_i^{(0)} &= f(T_i, g^{(0)}) \\ v_k^{(0)} &= \delta_k - g_k^{(0)} \\ D_{ik}^{(0)} &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial f(T_i, \delta)}{\partial \delta_k} \right]_{\delta=g^{(0)}} \end{aligned}$$

atamaları yapılsın. Böylece (7.2.) ile verilen

$$Y_i = f(T_i, \delta) = \alpha \lambda^{(\theta^{T_i})}$$

denkleminde faydalanılarak

$$Y_i \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=1}^3 D_{ik}^{(0)} v_k^{(0)} \quad (7.4.)$$

yazılabilir. O halde

$$Y_i - f_i^{(0)} \approx \sum_{k=1}^3 D_{ik}^{(0)} v_k^{(0)}$$

ve dolayısıyla

$$Y^{(0)} \approx D^{(0)} v^{(0)} \quad (7.5.)$$

lineer regresyon modeli elde edilir. Bu gösterimde

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ Y_2 - f_2^{(0)} \\ \vdots \\ Y_N - f_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 - \left(g_1^{(0)} g_2^{(0)} (g_3^{(0)T_1}) \right) \\ Y_2 - \left(g_1^{(0)} g_2^{(0)} (g_3^{(0)T_2}) \right) \\ \vdots \\ Y_N - \left(g_1^{(0)} g_2^{(0)} (g_3^{(0)T_N}) \right) \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{12}^{(0)} & D_{13}^{(0)} \\ D_{21}^{(0)} & D_{22}^{(0)} & D_{23}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N1}^{(0)} & D_{N2}^{(0)} & D_{N3}^{(0)} \end{bmatrix} \text{ ve } v^{(0)} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $D^{(0)}$ matrisi verilen fonksiyonun parametrelere göre türevlerinin alınması ile elde edilir ve

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_1} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_2^{(0)}} g_3^{(0) T_1} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_1} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_3^{(0)}} g_3^{(0) T_1} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_1} \right)} \ln \left(g_2^{(0)} \right) T_1 \\ g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_2} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_2^{(0)}} g_3^{(0) T_2} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_2} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_3^{(0)}} g_3^{(0) T_2} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_2} \right)} \ln \left(g_2^{(0)} \right) T_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_N} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_2^{(0)}} g_3^{(0) T_N} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_N} \right)} & \frac{g_1^{(0)}}{g_3^{(0)}} g_3^{(0) T_N} g_2^{(0) \left(g_3^{(0) T_N} \right)} \ln \left(g_2^{(0)} \right) T_N \end{bmatrix}$$

yazılır. Buna göre $Y^{(0)} \approx D^{(0)} v^{(0)}$ ifadesi lineer regresyon denklemi formundadır. O halde $D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin tersinir olduğu varsayımı altında $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmini

$$\hat{v}^{(0)} = \left(D^{(0)T} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)T} Y \quad (7.6.)$$

bulunur. Buradan matris formundaki yeni regresyon katsayıları

$$g^{(1)} = g^{(0)} + \hat{v}^{(0)} \quad (7.7.)$$

şeklinde yazılır (http://reliawiki.org/index.php/Gompertz_Models).

$D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin tersinir olmadığı durum ele alınsın. Bu durumda Levenberg-Marquardt algoritması (Moré, 1978) $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmininin elde edilmesinde kullanılabilir. $D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin en büyük öz değeri λ olsun. Levenberg-Marquardt algoritmasına göre $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmini

$$\hat{v}^{(0)} = \left(D^{(0)T} D^{(0)} + \lambda \text{diag} \left(D^{(0)T} D^{(0)} \right) \right)^{-1} D^{(0)T} Y \quad (7.8.)$$

biçiminde bulunur.

Regresyon katsayılarının iyi bir sonuç verip vermediğini kontrol etmek için aşağıdaki yöntem kullanılır. Başlangıç katsayıları $g^{(0)}$ iken

$$Q^{(0)} = \sum_{i=1}^N \left[Y_i - f \left(T_i, g^{(0)} \right) \right]^2 \quad (7.9.)$$

olup ilk iterasyon sonunda elde edilen $g^{(1)}$ katsayılar matrisi kullanılarak

$$Q^{(1)} = \sum_{i=1}^N \left[Y_i - f \left(T_i, g^{(1)} \right) \right]^2 \quad (7.10.)$$

elde edilir (http://reliawiki.org/index.php/Gompertz_Models). Gauss Newton yönteminin gerçek parametre değerlerine yakın sonuçlar vermesi için $Q^{(k+1)} < Q^{(k)}$ olmalıdır. Bu durumda “ $g^{(k+1)}$, $g^{(k)}$ ’dan daha iyi bir tahmindir.” denir. İterasyonlara $Q^{(s-1)} - Q^{(s)} \approx 0$ durumu elde edilene kadar devam edilir. Bu durum elde edildiğinde iterasyon sonlandırılır ve son iterasyonda elde edilen tahminler, parametrelerin tahmini olarak alınır.

7.2. Başlangıç Değerlerinin Belirlenmesi

Lineer olmayan regresyonda iyi başlangıç değerlerinin belirlenmesi önemlidir. Kötü başlangıç değerlerinin seçilmesi yapılacak hesaplamaların daha fazla olması veya çözümden uzaklaşılması gibi sonuçlar doğurabilir. Burada parametre tahminlerinin başlangıç değerlerinin belirlenmesi için Virene (1968) tarafından önerilen yöntem kullanılacaktır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için veri kümesinin

gözlem sayısı eşit üç alt veri kümesine bölünebildiği varsayılır. T_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ zamanlarında ölçülen güvenilirlik değerleri R_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ olsun. Burada

- $m = 3n$, n : her bir alt veri kümesindeki gözlem sayısı
- $T_i - T_{i-1}$ farkları sabit

olmalıdır. Gompertz güvenilirlik denklemi için

$$R = \alpha \beta^{(\theta^T)} \Rightarrow \ln R = \ln \alpha + \theta^T \ln \beta$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \ln R_i = n \ln \alpha + \ln \beta \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_i} \\ S_2 &= \sum_{i=n}^{2n-1} \ln R_i = n \ln \alpha + \ln \beta \sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i} \\ S_3 &= \sum_{i=2n}^{m-1} \ln R_i = n \ln \alpha + \ln \beta \sum_{i=2n}^{m-1} \theta^{T_i} \end{aligned}$$

tanımlansın.

$$\begin{aligned} \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} &= \frac{\ln \beta \left(\sum_{i=2n}^{m-1} \theta^{T_i} - \sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i} \right)}{\ln \beta \left(\sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i} - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_i} \right)} \\ &= \frac{\sum_{i=2n}^{m-1} \theta^{T_i} - \sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i}}{\sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i} - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_i}} \end{aligned}$$

olur. Burada $T_i = T_0 + ir$ formunda olduğundan

$$\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_0 + (i+2n)r} - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_0 + (i+n)r}}{\sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_0 + (i+n)r} - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_0 + ir}} = \theta^{nr}$$

bulunur. Bu denklem θ 'ya göre çözülerek

$$\theta = \left(\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{\frac{1}{nr}}$$

elde edilir. Şimdi α parametresi üzerinde çalışılsın.

$$\frac{S_1 - n \ln \alpha}{S_2 - n \ln \alpha} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_i}}{\sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i}} = \frac{1}{\theta^{nr}}$$

olduğundan

$$\alpha = e^{\frac{1}{n} \left(S_1 + \frac{S_2 - S_1}{1 - \theta^{nr}} \right)}$$

bulunur. Son olarak β parametresi ele alınsın.

$$\frac{S_1 - \ln \beta \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{T_i}}{S_2 - \ln \beta \sum_{i=n}^{2n-1} \theta^{T_i}} = \frac{n \ln \alpha}{n \ln \alpha} = 1$$

olduğundan

$$\beta = e^{\left[\frac{(S_2 - S_1)(\theta^r - 1)}{(1 - \theta^{nr})^2} \right]}$$

bulunur. Özel olarak $r = 1$ alınırsa

$$\alpha = e^{\frac{1}{n} \left(S_1 + \frac{S_2 - S_1}{1 - \theta^{nr}} \right)}$$

$$\beta = e^{\left[\frac{(S_2 - S_1)(\theta^r - 1)}{(1 - \theta^{nr})^2} \right]}$$

$$\theta = \left(\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{\frac{1}{nr}}$$

elde edilir (http://reliawiki.org/index.php/Gompertz_Models). Böylece gerçek parametrelerin tahmininde kullanılacak parametre başlangıç değerleri elde edilmiş olur.

7.3. Uygulama ve Sonuçlar

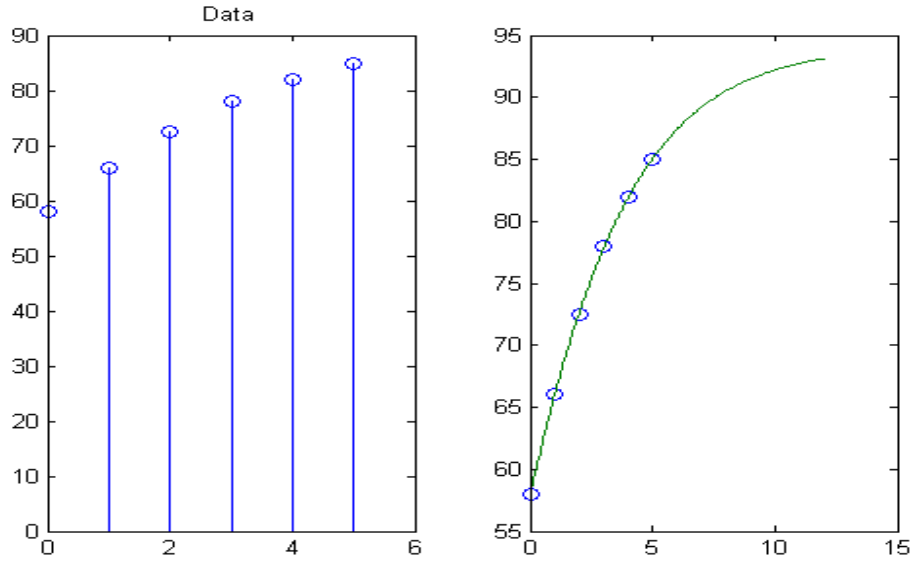
Aşağıdaki tabloda bir cihaz için başlangıç anından itibaren sabit aralıklarla (ay cinsinden) hesaplanan güvenilirlik değerleri verilmiştir. Veriler

Tablo 7.1. Cihaz için hesaplanan güvenilirlik değerleri

Aşama	0	1	2	3	4	5
Güvenilirlik (%)	58	66	72.5	78	82	85

Yukarıda açıklaması verilen yöntem bu veriye uygulansın. Uygulama sürecinde MATLAB programı kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Model: $R = 0.9419(0.6154)^{(0.7318)^T}$, $T = 0, 1, 2, \dots$



Şekil 7.1. : Gauss Newton yöntemi uygulanarak elde edilen Gompertz Eğrisi

Görüldüğü gibi veri kümesi ile büyüme eğrisi iyi bir uyum sağlamıştır. İterasyonlar sonunda Q değerleri arasındaki farklar altı ondalık basamağa kadar sıfırlanmıştır. Ulaşılabilecek en büyük güvenilirlik değeri 0.9704'tür.

Takip eden 6., 7. ve 8. aylardaki güvenilirlik değerleri Tablo 7.2.'de verilmiştir.

Tablo 7.2. Gerçek ve tahmin edilen güvenilirlik değerleri

Aşama	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Güvenilirlik (%)	58	66	72.5	78	82	85			
Güvenilirlik Tahmini (%)	58.33	66.44	73.08	78.36	82.46	85.61	87.97	89.75	91.79

Buna göre tahmin değerleri iyi bir uyum göstermektedir. Çünkü hata değerleri %1'den küçüktür.

8. REKABETE DAYALI RİSK MODELİ

Günümüze kadar yaşam dağılımları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Gompertz (1825)'in önerdiği model bu kapsamdaki ilk modeller arasındadır ve yaşam dağılımları açısından büyük kabul görmüştür. Pearl ve Miner (1935) çeşitli türlerin yaşam eğrilerine uyan matematiksel bir model geliştirilmesi üzerine bir çalışma yapmış fakat başarı gösterememiştir. Daha sonraki dönemlerde Szilard (1959), Sacher ve Trucco (1962), Johnson (1963), Noble ve Hayes (1964), Curtis (1966), Burch (1967), Forbes ve ark. (1970) yaptıkları çalışmalarla alana katkı sağlamıştır. Bu çalışmaların birçoğu yaşlılık dönemi mortalite ile ilgilidir. Gehan ve Siddiqui (1973) hayvan yaşam verisine model uydurma üzerine uygulamalar yapmıştır. Proschan ve Serfling (1974) güvenilirlik teorisinin mortaliteye uygulanması ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

8.1. Siler'in Çalışması

Siler (1979) çalışmasında hayvan mortalitesi için rekabete dayalı bir risk modeli önermiştir. Siler çalışmasında riskin değişim hızının, bir düzeltme sabitiyle risk büyüklüğünün çarpımına eşit olduğunu ve organizmanın bu özelliği sağlayan bir riske uyum sağladığını varsaymıştır. Azalan bir risk için düzeltme sabiti negatif, sabit risk için düzeltme sabiti 0, artan risk için düzeltme sabiti pozitifdir. Siler düzeltme sabiti için sadece burada belirtilen üç durumun geçerli olduğunu kabul etmiştir. Ayrıca bu durumlarda ortaya çıkan risklerin etkileşimli olmadığını varsaymıştır.

Bu yaklaşıma göre risk fonksiyonu a_1, a_2, a_3, b_1, b_3 parametreleriyle

$$h(x) = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 + a_3 e^{b_3 x} \quad (8.1.)$$

şeklinde verilebilir (Siler, 1979). Burada h , toplam risk fonksiyonunu; a_1, a_2, a_3 , risk ağırlıklarını b_1 ve b_3 düzeltme sabitlerini temsil etmektedir.

Yaşam fonksiyonu ise

$$f(x) = \exp \left[-\frac{a_1}{b_1} (1 - \exp(-b_1 x)) - a_2 x + \frac{a_3}{b_3} (1 - \exp(b_3 x)) \right] \quad (8.2.)$$

biçimindedir (Siler, 1979).

8.2. Rekabete Dayalı Risk Modelinin Yaşam Fonksiyonu İçin Parametre Tahmini

Literatürde lineer olmayan regresyon bağlamında Rekabete Dayalı Risk Modeline ait yaşam fonksiyonu için parametrelerin tahmin edilmesi üzerine bir çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle Kesilmiş Taylor Serisi, En Küçük Kareler Yöntemi ve Gauss Newton Yöntemi kullanılarak söz konusu fonksiyonun parametre tahminleri elde edilecektir.

Lineer olmayan regresyon bağlamında Rekabete Dayalı Risk modeline ait yaşam fonksiyonunun parametre tahminleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

a_1, a_2, a_3, b_1, b_3 parametreleriyle (8.2.)'da tanımlanan Rekabete Dayalı Risk Modeli ele alınsın. Bu denklemden faydalanarak

$$T_i = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, N \text{ ve } \delta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Y_i = f(T_i, \delta) = \exp \left[-\frac{a_1}{b_1} (1 - \exp(-b_1 T_i)) - a_2 T_i + \frac{a_3}{b_3} (1 - \exp(b_3 T_i)) \right] \quad (8.3.)$$

tanımlansın. Yöntemler uygulanırken uygun başlangıç değerlerinin seçilmesi gerekir; çünkü uygun başlangıç değerlerinin seçilmesi, uygulanacak iterasyon sayısını azaltmakta ve ıraksama durumunu önlemektedir.

Tahmin edilecek parametreler $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_3)$ olsun. Öncelikle $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, b_1^{(0)}, b_3^{(0)})$ başlangıç noktasındaki Kesilmiş Taylor Serisi üzerinde inceleme yapılacaktır. Tahmin değerleri istenen çözüme yeterince yakınsa $a_i - a_i^{(0)}, i=1,2,3; b_i - b_i^{(0)}, i=1,3$ farkları sıfıra yaklaşır. Bu durumda bu farkların ikinci ve daha yüksek mertebeden kuvvetleri ile çarpımları ihmal edilebilecek kadar küçük olur. O halde Kesilmiş Taylor Serisinin kullanılması uygundur.

f fonksiyonu verilmişken Kesilmiş Taylor Serisi

$$\begin{aligned} \text{Taylor} = & f(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, b_1^{(0)}, b_3^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial a_1} \Big|_{(a_i=a_i^{(0)}, b_i=b_i^{(0)})} (a_1 - a_1^{(0)}) \\ & + \frac{\partial f}{\partial a_2} \Big|_{(a_i=a_i^{(0)}, b_i=b_i^{(0)})} (a_2 - a_2^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial a_3} \Big|_{(a_i=a_i^{(0)}, b_i=b_i^{(0)})} (a_3 - a_3^{(0)}) \\ & + \frac{\partial f}{\partial b_1} \Big|_{(a_i=a_i^{(0)}, b_i=b_i^{(0)})} (b_1 - b_1^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial b_3} \Big|_{(a_i=a_i^{(0)}, b_i=b_i^{(0)})} (b_3 - b_3^{(0)}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu seri kullanılarak lineer olmayan bir modele lineer terimler kullanılarak yaklaşım uygulanır ve parametre tahminleri için bilinen Gauss En Küçük Kareler yönteminden faydalanılır.

(j) j . iterasyon sırasını temsil etmek üzere $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_3)$ parametrelerinin başlangıç tahminleri $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, b_1^{(0)}, b_3^{(0)})$ olsun. Bu tahminlerin vektörü

$$g^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ a_3^{(0)} \\ b_1^{(0)} \\ b_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $f(T_i, \delta)$ fonksiyonunun Kesilmiş Taylor Serisi açılımı kullanılarak i . gözlem için

$$f(T_i, \delta) \approx f(T_i, g^{(0)}) = \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial f(T_i, \delta)}{\partial \delta_k} \right]_{\delta=g^{(0)}} (\delta_k - g_k^{(0)})$$

yazılabilir. Burada δ , parametreler vektörünü, $g^{(0)}$ ise başlangıç tahminleri vektörünü temsil etmektedir. Buradaki terimler için

$$\begin{aligned} f_i^{(0)} &= f(T_i, g^{(0)}) \\ v_k^{(0)} &= \delta_k - g_k^{(0)} \\ D_{ik}^{(0)} &= \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial f(T_i, \delta)}{\partial \delta_k} \right]_{\delta=g^{(0)}} \end{aligned}$$

atamaları yapılsın. Böylece (8.3.) ile verilen

$$Y_i = f(T_i, \delta) = \exp \left[-\frac{a_1}{b_1} (1 - \exp(-b_1 T_i)) - a_2 T_i + \frac{a_3}{b_3} (1 - \exp(b_3 T_i)) \right]$$

denkleminde faydalanılarak

$$Y_i \approx f_i^{(0)} + \sum_{k=1}^p D_{ik}^{(0)} v_k^{(0)} \quad (8.4.)$$

yazılabilir. O halde $Y_i - f_i^{(0)} \approx \sum_{k=1}^p D_{ik}^{(0)} v_k^{(0)}$ olup buradan

$$Y^{(0)} \approx D^{(0)} v^{(0)} \quad (8.5.)$$

lineer regresyon modeli elde edilir. Bu gösterimde

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ Y_2 - f_2^{(0)} \\ \vdots \\ Y_N - f_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 - \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right] \\ Y_2 - \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_2) \right) - a_2^{(0)} T_2 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_2) \right) \right] \\ \vdots \\ Y_N - \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_N) \right) - a_2^{(0)} T_N + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_N) \right) \right] \end{bmatrix},$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{12}^{(0)} & D_{13}^{(0)} & D_{14}^{(0)} & D_{15}^{(0)} \\ D_{21}^{(0)} & D_{22}^{(0)} & D_{23}^{(0)} & D_{24}^{(0)} & D_{25}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N1}^{(0)} & D_{N2}^{(0)} & D_{N3}^{(0)} & D_{N4}^{(0)} & D_{N5}^{(0)} \end{bmatrix} \text{ ve } v^{(0)} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \\ g_5^{(0)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $D^{(0)}$ matrisi verilen fonksiyonun parametrelere göre türevlerinin alınması ile elde edilir. Örneğin $D^{(0)}$ matrisinin birinci satırı için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$D_{11}^{(0)} = \frac{\partial \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]}{\partial a_1^{(0)}}$$

$$= -\frac{1 - \exp(-b_1^{(0)})}{b_1^{(0)}} \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]$$

$$D_{12}^{(0)} = \frac{\partial \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]}{\partial a_2^{(0)}}$$

$$= -x \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]$$

$$D_{13}^{(0)} = \frac{\partial \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]}{\partial a_3^{(0)}}$$

$$= \frac{1 - \exp(b_3^{(0)} x)}{b_3^{(0)}} \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]$$

$$D_{14}^{(0)} = \frac{\partial \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]}{\partial b_1^{(0)}}$$

$$= -\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)^2} \left((1 + b_1^{(0)} x) \exp(-b_1^{(0)} x) - 1 \right)}$$

$$\times \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]$$

$$D_{15}^{(0)} = \frac{\partial \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]}{\partial b_3^{(0)}}$$

$$= \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)^2} \left((1 - b_3^{(0)} x) \exp(b_3^{(0)} x) - 1 \right)} \\ \times \exp \left[-\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} \left(1 - \exp(-b_1^{(0)} T_1) \right) - a_2^{(0)} T_1 + \frac{a_3^{(0)}}{b_3^{(0)}} \left(1 - \exp(b_3^{(0)} T_1) \right) \right]$$

Diğer satırlar için açılımlar benzer şekilde elde edilebilir ve böylece D matrisi oluşturulur:

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{12}^{(0)} & D_{13}^{(0)} & D_{14}^{(0)} & D_{15}^{(0)} \\ D_{21}^{(0)} & D_{22}^{(0)} & D_{23}^{(0)} & D_{24}^{(0)} & D_{25}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N1}^{(0)} & D_{N2}^{(0)} & D_{N3}^{(0)} & D_{N4}^{(0)} & D_{N5}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Buna göre $Y^{(0)} \approx D^{(0)} v^{(0)}$ ifadesi lineer regresyon denklemi formundadır. O halde $D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin tersinir olduğu varsayımı altında $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmini

$$\hat{v}^{(0)} = \left(D^{(0)T} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)T} Y \quad (8.6.)$$

bulunur. Buradan matris formundaki yeni regresyon katsayıları

$$g^{(1)} = g^{(0)} + \hat{v}^{(0)} \quad (8.7.)$$

şeklinde yazılır.

$D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin tersinir olmadığı durum ele alınsın. Bu durumda Levenberg-Marquardt algoritması (1978), $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmininin elde edilmesinde kullanılabilir. $D^{(0)T} D^{(0)}$ matrisinin en büyük öz değeri λ olsun. Levenberg-Marquardt algoritmasına göre $v^{(0)}$ parametre vektörünün tahmini

$$\hat{v}^{(0)} = \left(D^{(0)T} D^{(0)} + \lambda \text{diag} \left(D^{(0)T} D^{(0)} \right) \right)^{-1} D^{(0)T} Y \quad (8.8.)$$

biçiminde bulunur.

Q en küçük kareler kriteri, regresyon katsayılarının iyi bir sonuç verip vermediğini kontrol etmek için kullanılabilir. Başlangıç katsayıları $g^{(0)}$ iken

$$Q^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - f \left(T_i, g^{(0)} \right) \right]^2 \quad (8.9.)$$

olup ilk iterasyon sonunda elde edilen $g^{(1)}$ katsayılar matrisi kullanılarak

$$Q^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - f \left(T_i, g^{(1)} \right) \right]^2 \quad (8.10.)$$

elde edilir. Gauss Newton yönteminin gerçek parametre değerlerine yakın sonuçlar vermesi için $Q^{(k+1)} < Q^{(k)}$ olmalıdır. Bu durumda “ $g^{(k+1)}$, $g^{(k)}$ ’dan daha iyi bir tahmindir.” denir. İterasyonlara $Q^{(s-1)} - Q^{(s)} \approx 0$ durumu elde edilen kadar devam edilir. Bu durum elde edildiğinde iterasyon sonlandırılır ve son iterasyonda elde edilen tahminler, parametrelerin tahmini olarak alınır.

8.3. Uygulama ve Sonuçlar

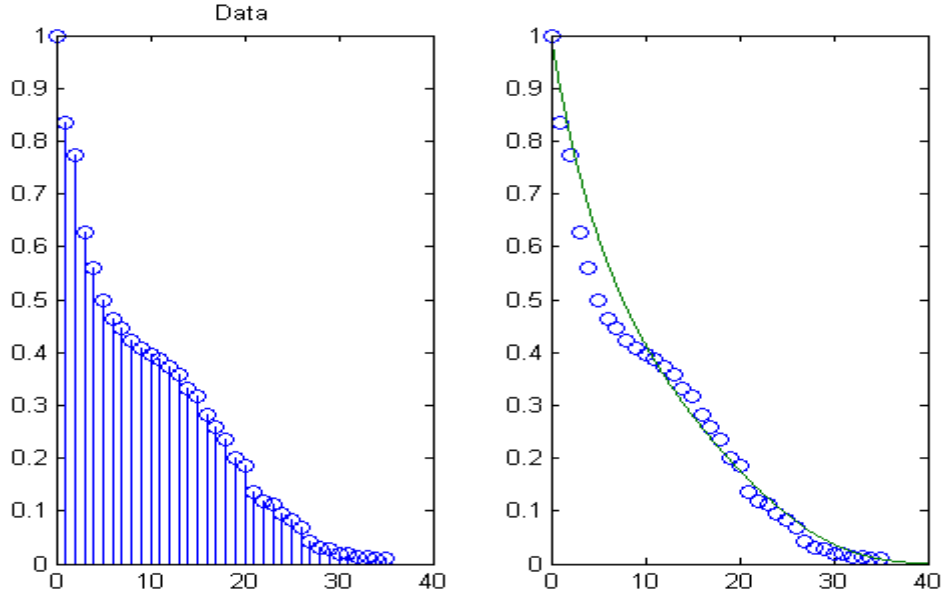
Tablo 8.1.’de Hindistan nehir lagün sistemi içinde bulunan 78 şişe burunlu yunusa ait 1978-1997 yılları arasındaki yaşam dağılımı verilmiştir (Stolen ve Barlow, 2003). Tabloda n_x , x yaşında hayatta olan yunus sayısını, d_x , x ile $x+1$ yaş aralığında ölen yunus sayısını, l_x , x yaşına kadar yaşayan yunusların oranını, q_x geleneksel yaşam tablosu yöntemleri kullanılarak elde edilen mortalite oranlarını temsil etmektedir.

Tablo 8.1. Hindistan nehir lagün sistemi içinde bulunan 78 şişe burunlu yunusa ait 1978-1997 yılları arasındaki yaşam dağılımı

Yaş	Yunus Sayısı	Yunus Yüzdesi	n_x	d_x	l_x	q_x
0	36	16.36	1	164	1	0.164
1	14	6.36	836	64	0.836	0.076
2	32	14.55	773	145	0.773	0.188
3	15	6.82	627	68	0.627	0.109
4	13	5.91	559	59	0.559	0.106
5	8	3.64	500	36	0.5	0.073
6	4	1.82	464	18	0.464	0.039
7	5	2.27	445	23	0.445	0.051
8	3	1.36	423	14	0.423	0.032
9	3	1.36	409	14	0.409	0.033
10	2	0.91	395	9	0.395	0.023
11	3	1.36	386	14	0.386	0.035
12	3	1.36	373	14	0.373	0.037
13	6	2.73	359	27	0.359	0.076
14	3	1.36	332	14	0.332	0.041
15	8	3.64	318	36	0.318	0.114
16	5	2.27	282	23	0.282	0.081
17	5	2.27	259	23	0.259	0.088
18	8	3.64	236	36	0.236	0.154
19	3	1.36	200	14	0.2	0.068
20	11	5	186	50	0.186	0.268
21	4	1.82	136	18	0.136	0.133
22	1	0.45	118	5	0.118	0.038
23	4	1.82	114	18	0.114	0.16
24	3	1.36	95	14	0.095	0.143
25	3	1.36	82	14	0.082	0.167
26	6	2.73	68	27	0.068	0.4
27	2	0.91	41	9	0.041	0.222
28	1	0.45	32	5	0.032	0.143
29	2	0.91	27	9	0.027	0.333
30	0	0	18	0	0.018	0
31	1	0.45	18	5	0.018	0.25
32	0	0	14	0	0.014	0
33	1	0.45	14	5	0.014	0.333
34	0	0	9	0	0.009	0
35	2	0.91	9	9	0.009	1

Yukarıda belirtilen yöntem yaşam fonksiyonu için bu veri kümesi üzerinde uygulansın. Verilerin analizinde MATLAB programından faydalanılmıştır.

Saçılım grafiği ve uydurulan eğri Şekil 8.1.de verilmiştir.



Şekil 8.1. Şişe burunlu yunus verisi için yaşa karşı l_x değerleri

Görüldüğü gibi veri kümesi ile eğri iyi bir uyum sağlamıştır. Bu sonuç 1000 iterasyon sonunda elde edilmiştir. İterasyonlar sonucunda $Q^{(i)}$ değerleri arasındaki fark 8.46×10^{-6} değerine kadar düşmüştür. Bu uyumun iyi olduğunun göstergesidir. Uydurulan eğri ise

$$f(x) = \exp \left[-\frac{0.08}{0.10} (1 - \exp(-0.1x)) - 0.02x + \frac{0.01}{0.1} (1 - \exp(0.1x)) \right]$$

biçimindedir. İşlemler sonunda parametrelerin optimal tahminleri

$$a_1 = 0.08$$

$$a_2 = 0.02$$

$$a_3 = 0.01$$

$$b_1 = 0.10$$

$$b_3 = 0.10$$

şeklinde bulunmuştur.

Buna göre izleyen birkaç yıldaki l_x değerleri tabloda verildiği gibi bulunur.

Tablo 8.2. 33–39 yaş aralığındaki l_x değerleri

Yaş	33	34	35	36	37	38	39
Gerçek l_x değerleri	0.014	0.009	0.009				
Tahmini l_x değerleri	0.017	0.012	0.009	0.0016	0.0009	0.0005	0.0002

Görüldüğü gibi hatalar %1'den küçüktür. Yukarıdaki yöntem ve prosedür aynı veri kümesinin mortalite oranları için de uygulanabilir. Bu işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Saçılım grafiği ve uydurulan eğri şekil 8.2.'de verilmiştir. Görüldüğü gibi veri kümesi ile eğri iyi bir uyum sağlamıştır. Bu sonuç 1000 iterasyon sonunda elde edilmiştir. İterasyonlar sonucunda $Q^{(i)}$ değerleri arasındaki fark 6.99×10^{-18} değerine kadar düşmüştür. Uydurulan eğri ise

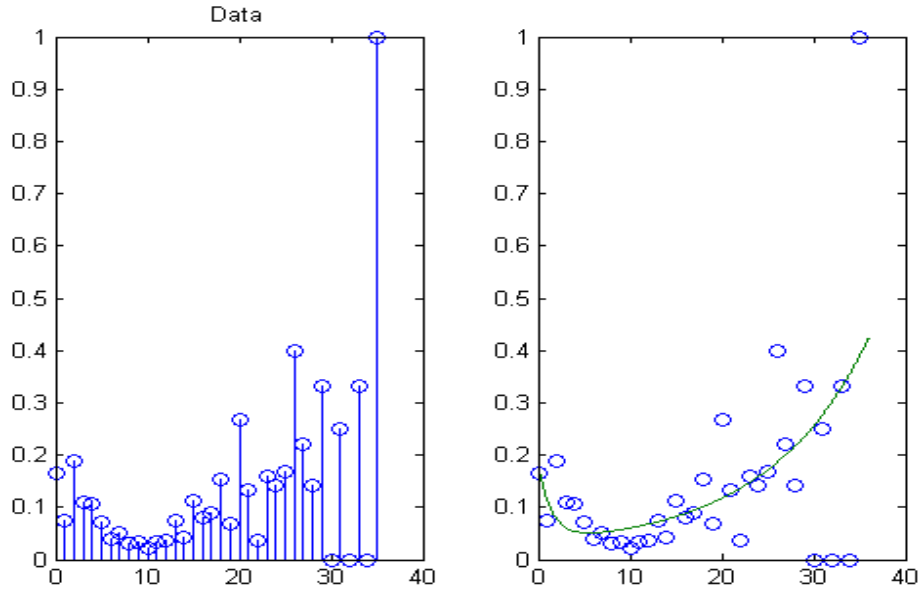
$$h(x) = 0.1465 \exp(-0.6588x) + 0.0213 + 0.0158 \exp(0.09x)$$

biçimindedir.

Buna göre izleyen birkaç yıldaki q_x değerleri tabloda verildiği gibi bulunur.

Tablo 8.3. 36–42 yaş aralığındaki q_x değerleri

Yaş	36	37	38	39	40	41	42
q_x	0.4247	0.4627	0.5042	0.5497	0.5995	0.6540	0.7135

Şekil 8.2. Şişe burunlu yunus verisi için yaşa karşı q_x değerleri

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Aktüerya Bilimi gelecekte meydana gelebilecek olayların finansal belirtilerinin tespit edilmesinde, analizinde ve çözülmesinde kullanılan bir bilim dalıdır. Aktüerya Biliminin ilgilendiği temel alanlardan biri yaşam tablolarının düzenlenmesidir.

Bu tezde özellikleri incelenen Gompertz Dağılımı yaşam tablolarının düzenlenmesinde kullanılan önemli dağılımlardan biridir. Bu bağlamda Gompertz Dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesi ve güven aralıklarının incelenmesi aktüerya bilimi açısından büyük öneme sahiptir.

Bu tezde ayrıntılı bir şekilde değinilen Laplace Dönüşümü ve Meijer G fonksiyonu kullanılarak elde edilen parametre tahminleri, veri kümesinin ilk k sıra istatistiği yardımı ile bulunan güven aralıkları ve bu süreçte değinilen yöntemler Gompertz Dağılımı ile ilgili çalışmalarda iyi bir kaynak olma özelliğine sahiptir. Ayrıca Rekabete Dayalı Risk Modelinin parametre tahminleri için verilen yöntem, çeşitli yaşam modelleri ile ilgili gerçek veriler üzerinde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1965. Handbook of mathematical functions. National Bureau of.
- Afenya E.K., Calderon C.P., 2000. Diverse ideas on the growth kinetics of disseminated cancer cells, Bull. Math. Biol. 62, 527–542.
- Apéry, R., 1979. "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ", *Astérisque* 61: 11–13.
- Apéry, R., Van der Poorten, A., 1979. A proof that Euler missed... The Mathematical Intelligencer, 1 (4), 195-203.
- Askey, R. A., & Daalhuis, A. O., 2010. Generalized hypergeometric functions and Meijer G-function. NIST handbook of mathematical functions, 16 (3), 403.
- Bateman, H., Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G., 1953. Higher transcendental functions (Vol. 2, p. 149). New York: McGraw-Hill.
- Burch, P. R. J., 1967. Nature's time-scale: degenerative disease in man.
- Björck, A., 1996. Numerical methods for least squares problems. Siam.
- Chen, Z., 1997. Parameter estimation of the Gompertz population. Biometrical Journal, 39 (1), 117-124.
- Calderon C., Kwembe T., 1991. Modeling Tumor Growth, Math. Biosci. 103, 97–114.
- Chatterjee A., Chakrabarti B.K., Manna S.S., 2004. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity, Physica A 335, 155.
- Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G., 2007. k-generalised statistics in personal income distribution, Eur. Phys. J. B 57, 187–193.
- Curtis, H. J., 1966. Biological mechanism of ageing. Charles Thomas, Springfield, Illinois, USA.
- d’Onofrio, A., 2005. "A general framework for modeling tumor-immune system competition and immunotherapy: Mathematical analysis and biomedical inferences." Physica D: Nonlinear Phenomena 208.3: 220-235.
- De Moivre, A., 1724. Treatise of Annuities Upon Lives. London.

- De Moivre, A., 1752 Annuities on Lives: With Several Tables, Exhibiting at One View, the Values of Lives, for Different Rates of Interest. in which are Added, Tables for Three and Three and a Half Per Cent. By A. de Moivre,... No. 2. A. Millar.
- De Morgan, A., 1860. On a property of Mr. Gompertz's law of mortality. The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries London: 181–184.
- De Morgan, A., 1861. On the unfair suppression of due acknowledgement to the writings of Mr. Benjamin Gompertz. The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, London, 86–89.
- De Morgan, A., 1861. On Gompertz's law of mortality. The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries London, 214–215.
- Drăgulescu A., Yakovenko V.M., 2001. Evidence for the exponential distribution of income in the USA, Eur. Phys. J. B 20, 585.
- Edmonds, T.R., 1832. Life Tables Founded Upon the Discovery of a Numerical Law. London, U.K.: J. Moyes.
- Figueira F. C., Moura Jr N. J., and Ribeiro M. B., 2011. "The Gompertz–Pareto income distribution." *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390.4: 689-698.
- Forbes, W. F., Sprott, D. A., Feldstein, M., Dounce, A. L., 1970. A model to account for mortality curves of various species. *Journal of theoretical biology*, 29 (2), 293-299.
- Gehan, E. A., Siddiqui, M. M., 1973. Simple regression methods for survival time studies. *Journal of the American Statistical Association*, 68 (344), 848-856.
- Gompertz, B., 1820. "A Sketch of an Analysis and Notation Applicable to the Estimation of the Value of Life Contingencies." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*: 214-332.

- Gompertz, B., 1825. "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies." *Philosophical transactions of the Royal Society of London*: 513-583.
- Gyllenberg M., Webb G., 1989. Quiescence as an explanation of Gompertzian tumor growth, *Growth, Dev. Aging* 53, 25–33.
- Hart D., Shochat E., Agur E., 1998. The growth law of primary breast cancer as inferred from mammography screening trials data, *Br. J. Cancer* 78, 382–387.
- Jay O., S. and Carnes B. A., 1897 "Ever since gompertz." *Demography* 34.1 (1997): 1-15.
- Johnson, H. A., 1963. Redundancy and biological aging. *Science*, 141 (3584), 910-912.
- Johnson, N. L., Kotz S. and Balakrishnan N., 1994. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1, 2nd edn. New York: John Wiley & Sons.
- Kunimura, D. 1998. "The Gompertz Distribution-Estimation of Parameters." *Actuarial Research Clearing House* 2:65-76.
- Laird A. K., 1964 . Dynamics of tumor growth, *Br. J. Cancer* 18, 490–502.
- Lyu, M.R. (Ed.), 1996. *Handbook of Software Reliability Engineering*. McGraw-Hill, New York.
- Makeham, W. M., 1860. "On the law of mortality and the construction of annuity tables." *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*: 301-310.
- Marshall, A. W., and Ingram O., 2007. *Life distributions: Structure of nonparametric, semiparametric, and parametric families*. Springer.
- Marusic M., Bajzer Z., Freyer J.P., Vuk-Pavlovic S., 1994. Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models, *Cell Prolif.* 27, 73–94.
- Meijer, C., S., 1936. "Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte". *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) (in German) 18 (4): 10–39.

- Milgram, M. S., 1985. The generalized integro-exponential function. *Mathematics of computation*, 44 (170), 443-458.
- Lenart, A. (2012). The Gompertz Distribution and Maximum Likelihood Estimation of Its Parameter—A Revision. *Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock*. Molski M. and Konarski J., 2003. Coherent states of Gompertzian growth, *Phys. Rev. E*, 68 Art. No. 021916 Part, 1.
- Moré, J. J., 1978. The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory. In *Numerical analysis* (pp. 105-116). Springer Berlin Heidelberg.
- Musa, J.D., 1999. *Software Reliability Engineering*. McGraw-Hill, New York.
- Musa, J.D., Iannino, A., Okumoto, K., 1987. *Software Reliability, Measurement, Prediction, Application*. McGraw-Hill, New York.
- Noble, F. W., & Hayes Jr, J. E., 1964. A repetitive analog computer for analysis of sums of distribution functions. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 115, 644-652.
- Ohishi, K., Hiroyuki O., and Tadashi D., 2009. "Gompertz software reliability model: estimation algorithm and empirical validation." *Journal of Systems and Software* 82.3: 535-543.
- Ogborn, M. E., 1953. "On the nature of the function expressive of the law of human mortality." *Journal of the Institute of Actuaries*: 170-212.
- Ozeki, M., 2005. Application of Mortality Models to Japan. In *Living to 100 and Beyond Symposium*, Sponsored by the Society of Actuaries, Orlando, Fla.
- pages.ucsd.edu/~dphillips/lifetable_detailed_construction.txt
- Pareto, V., 1964. *Cours d'economie politique*. Librairie Droz.
- Pearl, R., Miner, J. R., 1935. Experimental studies on the duration of life. XIV. The comparative mortality of certain lower organisms. *The Quarterly Review of Biology*, 10 (1), 60-79.
- Perks, W., 1932. "On some experiments in the graduation of mortality statistics." *Journal of the Institute of Actuaries*: 12-57.
- Pham, H., 2000. *Software Reliability*. Springer, Singapore.

- Pollard, J. H., Valkovics, E. J., 1992. The Gompertz distribution and its applications. *Genus*, 15-28.
- Porschan, F., Serfling, R., J., 1974. Reliability and biometry. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, USA.
- reliawiki.org/index.php/Gompertz_Models
- Ribeiro M.B., 2005. Cosmological distances and fractal statistics of galaxy distribution, *Astron. Astrophys.* 429, 65–74.
- Sacher, G. A., Trucco, E., 1962. The Stochastic Theory of Mortality. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 96(4), 985-1007.
- Siler, W., 1979. A competing-risk model for animal mortality. *Ecology*, 750-757.
- Silva A. C., 2005. Applications of physics to finance and economics: returns, trading activity and income, Ph.D. Thesis, University of Maryland.
- Sprague, T.B., 1861. On Mr. Gompertz's law of human mortality, and Mr. Edmonds's claims to its independent discovery and extension. *The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries London*. 9, 288–295.
- Stolen, M. K., Barlow, J., 2003. A model life table for bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) from the Indian River Lagoon system, Florida, USA. *Marine mammal science*, 19 (4), 630-649.
- Szilard, L., 1959. On the nature of the aging process. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 45(1), 30.
- Tenenbein A., Vanderhoof I., 1980. "New Mathematical Models of Select and Ultimate Mortality," *Transactions of the Society of Actuaries*, Vol. 32.
- Virene, E., 1968. Reliability growth and its upper limit (Reliability growth and upper limit estimated by mathematical method applied to space craft and launch vehicle data).
- Wang, J.-L., Müller H.-G., and Capra W. B., 1998. Analysis of oldst-old mortality lifetables revisited. *The Annals of Statistics* 26, 126– 163.
- Weon, B. M., Je, J. H., 2005. Stretched exponential degradation of oxide cathodes. *Applied surface science*, 251 (1), 59-63.

- Wheldon T.E., 1988. *Mathematical Models in Cancer Research*, Hilger Publishing, Boston-Philadelphia.
- Widder, D. V., 1941. *The Laplace Transform*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Willis G., Mimkes J., 2004. Evidence for the independence of waged and unwaged income, evidence for Boltzmann distributions in waged income, and the outlines of a coherent theory of income distribution, e-print.
www.math.uah.edu/stat/special/Gompertz.html
- Xie, M., 1991. *Software Reliability Modelling*. World Scientific, Singapore.
- Yakovenko V.M., Rosser J.B., 2009. Colloquium: statistical mechanics of money, wealth, and income, *Rev. Modern Phys.* 81, 1703–1725.
- Yi, Z., Vaupel, J. W., 2006. Oldest-old mortality in China. In *Human Longevity, Individual Life Duration, and the Growth of the Oldest-Old Population*(pp. 87-110). Springer Netherlands.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Adana’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana’da tamamladı. 2001 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. Lisans eğitimini 2005 yılında tamamlayarak aynı yıl Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinde başladığı tezsiz yüksek lisans eğitimini 2006 yılında bitirdi. 2006-2012 yılları arasında bazı kamu kurumlarında görev yaptı. 2012 yılının sonunda Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı bölümde görevini sürdürmektedir.