

T.C.  
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
ELEKTRONİK VE BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**GÖRÜNTÜ İŞLEMEDE FİNSLER GEOMETRİSİ YAKLAŞIMLARI**

Haydar KILIÇ  
DOKTORA TEZİ

TEZ DANIŞMANI  
Dr.Öğr.Üyesi Salim CEYHAN

BİLECİK, 2022

10474249

## BEYAN

"Görüntü İşlemede Finsler Geometrisi Yaklaşımları" adlı doktora tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |                     |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------|---|
| Bu çalışmanın,<br>Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda;<br>projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise<br>ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir. |  |                     |   |
| DESTEK ALINMIŞTIR                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  | DESTEK ALINMAMIŞTIR | X |
| Destek alındı ise;                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |                     |   |
| Destekleyen kurum;                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |                     |   |
| Desteğin Türü                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  | Proje Numarası      |   |
| 1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |                     |   |
| 2- TUBİTAK                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |                     |   |
| Diğer;...                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |                     |   |
| ETİK KURUL onayı var ise;                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |                     |   |
| ETİK KURUL karar tarih/sayı:                                                                                                                                                                                                                                                                              |  | .../...             |   |

Haydar KILIÇ

30/06/2022

İmza

## ÖNSÖZ

Araştırma, genel olarak beklenenden daha çok, tesadüfün bir meyvesi gibi görünür. Tüm planlara ve hedefe yönelik çalışmaya rağmen, en ilginç sonuçlar tesadüfen ortaya çıkıyor gibi görünüyor, birdenbire ve aniden. Fakat, gerçek olan şu ki, bir yanda bilgi birikimi, deneyim ve beceri, diğer yanda yaratıcılık ve ilham, çoğu zaman görünüşte birbiri ile bağlantısız bir dizi olay sonucu oluşur. Sonuçta, bu olaylar bir süre sizi mayaladıktan sonra, ilginç bir fikrin ortaya çıkmasını tetiklemek için küçük bir kıvılcıma ihtiyaç vardır. Bu anlamda, bu tezi ben hazırlamış olsam da, bana ilham veren birçok kişinin değerli katkılarından uzak durmadım. Bu nedenle, aşağıda teşekkür ettiklerim, bir teşekkürden daha fazlasını haketmektedir.

İlk olarak, ülkemizin kurucusu, bizleri fikirleri ile bilime, sanata ve medeniyete yönlendiren saygıların en büyüğünü hakeden, ayrıca bu doktora tezini Türkçe yazma imkanı veren Mustafa Kemal Atatürk'e şükran ve saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanmasında değerli zamanlarını ayırarak danışmanlık yapan sayın hocam Dr.Öğr. Üyesi Salim CEYHAN'a, engin yol göstericiliği ile teknik meselelere bakış açımı değiştiren değerli hocam Prof.Dr. Ömer Nezih GEREK'e ve sabırla bana fikirlerini aktardığı için sayın hocam Doç.Dr. Mehmet KOÇ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmayı detaylı inceleyerek bu doktora tezinin çıkmasına olanak sağlayan diğer tez jurilerim sayın Prof.Dr. Gülçin ÇİVİ BİLİR ve Prof.Dr. Mehmet KURBAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, annem, babam, kardeşim ve arkadaşlarıma bu değerli çalışmanın hazırlanmasında bana güç verdikleri için teşekkür ederim.

**Haydar KILIÇ**

**30/06/2022**

## ÖZET

### GÖRÜNTÜ İŞLEMEDE FİNSLER GEOMETRİSİ YAKLAŞIMLARI

Bu doktora tezinin temel amacı zorlu görüntüler denilen görüntülerde yeni bir görüntü işleme uygulaması geliştirmek idi. Geliştirilen yeni teknolojinin görüntü işleme operasyonlarından gürültü giderme, kenar algılama ve ilerisi olan segmentasyon işlemlerine uygulamak temel motivasyon olmuştur. Esasen, görüntü işlemedeki bir çok uygulamanın başarısı temel olarak iyi bir ön işleme adımına bağlıdır. Bu ön işleme adımlarının temelinde mükemmel bir matematik dilinden ortaya çıkan kısmi türevli yapılar yer almaktadır.

Dünyada görüntü işleme alanındaki bir çok gelişme, dahiyane seyreden matematik düzen içindeki türevli yapıları okuyarak ve geliştirerek ortaya çıkmıştır. Çok önceleri Öklid ölçümleri ile yapılan hesaplar, yerini Riemann ölçümleri ile yapılan hesaplara bırakmıştır. Günümüzde, teknoloji alanında kararlılık ve hasasiyetle yapılan tüm deneyler Finsler ölçümleri ile yapılmaktadır. Çünkü, Finsler metrikleri lineer olmayan ve anizotropi içeren ortamlarda en iyi sonuçları vermektedir.

Tezin ilk bölümünde literatürde var olan segmentasyon çalışmalarından bahsedilmiş, Finsler yapısını anlamak amacıyla öncelikle Riemann yapılarını anlamak gerektiğinden, ikinci bölümde Riemann modeli ile segmentasyon işlemi incelenmiştir. Riemann modelindeki segmentasyon işlemi, bir enerji integraline dayanmaktadır. Dolayısıyla görüntünün yapısındaki ışık geçişleri veya enerji geçişleri büyük rol oynamaktadır. Bu modelde, başlangıç eğrisi ile verilen bir eğrinin evrimi kısmi türevlerle yönlendirildiğinden, aslında bir gradyan akışı söz konusudur. Bu nedenle, ışık geçişleri belirgin olmayan zorlu görüntülerde iyi sonuçlar alınamamaktadır. Eğer model tanımlanırken eğriyi yönlendirecek yön bilgileri ile bir tanımlama yapılırsa, başlangıç eğrisinin zorlu görüntülerde bile yön bilgisi kullanarak evrimi sağlanabilir. Böyle bir model ise Finsler modeli ile mümkündür. Doğal olarak, tezin üçüncü bölümünde Finsler eğri evrimi tartışılmış, matematiksel yapıları incelenmiştir. Buradan Finsler anlamında eğri evrilimi için maliyet fonksiyonu iki türlü belirlenmesi gerektiği anlaşılmıştır. Birincisi başlangıç eğrisi üzerindeki herhangi bir noktayı içine alan ve görüntüdeki en büyük değişimi veren yönü maliyet fonksiyonu olarak seçmeli İkincisi ise seviye eğrileri ile mesafe ölçümü yapan bir maliyet fonksiyonu belirlemek olacaktır. Her ikiside maliyetli olduğundan, tezin dördüncü bölümünde görüntülerde enerji minimizasyonuna olanak sağlayan ve esnek bir metrik kullanımına izin veren Polyakov enerji integrali incelenmiştir. Bu model var olan teknolojiye en gelişmiş enerji

modelidir. Tezin bu bölümünde, yeni bir anizotropik filtre sınıfı için görüntü filtreleme sonuçları ve performans karşılaştırmaları sunulmaktadır. Yeni anizotropik filtre ailesi, Polyakov enerji integralini minimuma indirmek için anizotropik Laplace-Beltrami akışları üreten, kenar koruyucu anizotropik Finsler metriklerinin özel bir seçimiyle elde edilmiştir. Bu yeni anizotropik filtreler gürültülü görüntülere uygulanmış ve gürültü giderme özelliklerine göre karşılaştırılmıştır. Yeni anizotropik filtrelerin, MSE, PSNR, SSIM vb. gibi çeşitli görüntü kalitesi ölçütlerine göre klasik izotropik filtrelerle kıyasla üstün gürültü giderme performansları verdiği deneysel olarak gözlemlenmiştir. Anizotropik filtrelerin, uzayda değişen yapıları sayesinde kenar bilgilerini mükemmel bir şekilde korurken düzgün bölgelerden gelen gürültüyü başarıyla ortadan kaldırması onları önemli hale getirmektedir.

Özetle, bu doktora tezinde Finsler geometrisinin görüntü işleme uygulamalarına yaklaşımları araştırılmış ve matematik modelleri sunulmuştur. Bu modellere dayanarak, yeni anizotropik filtre ailesi önerilmiştir. Önerilen yeni filtreler ile klasik filtreleri karşılaştıran nicel sonuçlar elde edilmiş ve klasik izotropik filtrelerden önemli ölçüde daha iyi performans gösterdiği görülmüştür. Görüntü işlemedeki zorlu görüntüleri işlemekte etkili olan bu filtre ailesini literatüre kazandırarak gelecekte yapılan çalışmalar için yol gösterici olacağı düşünülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Görüntü İşleme, Finsler Metrik, Anizotropik Filtre, Enerji Modeli, Beltrami Çerçevesi

## ABSTRACT

### FINSLER GEOMETRY APPROACHES IN IMAGE PROCESSING

The main purpose of this doctoral thesis was to develop a new image processing application on images called compelling images. Our main motivation has been to apply the newly developed technology from image processing operations to noise removal, edge detection and advanced segmentation operations. Because the success of many image processing applications basically depends on a good preprocessing step. At the basis of these preprocessing steps are partial differential structures that emerge from an excellent mathematical language.

Many inventions in image processing in the world have emerged by reading and developing differential structures in an ingenious mathematical order. Calculations made with Euclidean metrics long ago gave way to calculations made with Riemann metrics. Today, all experiments with stability and precision in the field of technology are carried out with Finsler metrics. Because Finsler gives the best results in non-linear and anisotropic environments.

In the first part of the thesis, segmentation studies in the literature are mentioned, since it is necessary to understand the Riemann structures first in order to understand Finsler, the segmentation process with the Riemann model is examined in the second part. The segmentation process in the Riemann model is based on an energy integral. Therefore, light transitions or energy transitions in the structure of the image play a major role. In this model, since the evolution of a given initial curve is guided by partial differentials, there is actually a gradient flow. For this reason, good results cannot be obtained in difficult images where light transitions are not evident. If a definition is made with the direction information that will guide the curve while defining the model, the evolution of the initial curve can be achieved using direction information even in difficult images. Such a model is possible with the Finsler model. Naturally, in the third part of the thesis, Finsler curve evolution is discussed and its mathematical structures are examined. From this, it is understood that the cost function should be determined in two ways for the curve evolution in Finsler's sense. The first is to choose as the cost function the direction that includes any point on the initial curve and gives the largest change in the image. The second would be to define a cost function that measures distance with level curves. Since both are costly, in the fourth part of the thesis, the Polyakov energy integral, which allows energy minimizations in images and allows the use of a flexible metric, is examined. This model is the most advanced energy model in existing technology. In this part of the thesis, image filtering re-

sults and performance comparisons for a new class of anisotropic filters are presented. The new filters are derived from a special selection of edge-preserving anisotropic Finsler metrics that generate anisotropic Laplace-Beltrami flows to minimize the Polyakov energy integral. This new anisotropic Filters were applied to noisy images and compared according to their noise reduction properties. It has been experimentally observed that the new anisotropic filters give superior noise removal performances compared to conventional isotropic filters according to various image quality criteria such as MSE, PSNR, SSIM, etc. It is important to note that anisotropic filters successfully remove noise from smooth regions while perfectly preserving edge information, thanks to their space-changing nature.

In summary, in this doctoral thesis, the approaches of Finsler geometry to image processing applications are investigated and mathematical models are presented. Based on these models, a new family of anisotropic filters has been proposed. Quantitative results were obtained comparing the proposed new filters with the classical filters and it was seen that they performed significantly better than the classical isotropic filters. It is thought that this filter family, which is effective in processing difficult images in image processing, will be a guide for future studies by bringing this filter family to the literature.

**Keywords:** Image Processing, Finsler Metric, Anisotropic Filter, Energy Model, Beltrami Framework

## İÇİNDEKİLER

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| ÖNSÖZ . . . . .                                          | i         |
| ÖZET . . . . .                                           | ii        |
| ABSTRACT . . . . .                                       | ii        |
| ŞEKİL LİSTESİ . . . . .                                  | viii      |
| TABLO LİSTESİ . . . . .                                  | xiii      |
| ALGORİTMA LİSTESİ . . . . .                              | xiv       |
| SEMBOL LİSTESİ . . . . .                                 | xv        |
| <b>1 Giriş . . . . .</b>                                 | <b>1</b>  |
| 1.1 Segmentasyon Çalışmaları . . . . .                   | 1         |
| 1.2 Aktif Kontur Metodları . . . . .                     | 9         |
| <b>2 Riemann Anlamında Eğrilerin Evrilmesi . . . . .</b> | <b>12</b> |
| 2.1 Teori ve Matematik . . . . .                         | 12        |
| 2.2 Sayısal Hesaplar ve Deneysel Sonuçlar . . . . .      | 17        |
| 2.2.1 Sayısal Hesap . . . . .                            | 17        |
| 2.2.2 Deneysel Sonuçlar . . . . .                        | 18        |
| 2.2.3 Tartışma ve Değerlendirme . . . . .                | 25        |
| 2.3 Parametre Optimizasyonu . . . . .                    | 27        |
| 2.3.1 Genel Optimizasyon . . . . .                       | 27        |
| 2.3.2 Yapay Zeka Optimizasyonu . . . . .                 | 29        |
| 2.3.3 Deneysel Sonuçlar . . . . .                        | 36        |
| 2.3.4 Tartışma ve Değerlendirme . . . . .                | 46        |
| 2.4 Bir Kullanıcı Arayüzü Tasarımı . . . . .             | 48        |
| 2.5 Sonuç . . . . .                                      | 52        |
| <b>3 Finsler Anlamında Eğrilerin Evrilmesi . . . . .</b> | <b>54</b> |
| 3.1 Eğri Evrilimi için Finsler Modeli . . . . .          | 55        |
| 3.2 Enerji Fonksiyonelinin Birinci Varyasyonu . . . . .  | 60        |



|          |                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------|------------|
| 3.3      | Sonuç ve Değerlendirme . . . . .                       | 64         |
| <b>4</b> | <b>Görüntü İşlemeye Finsler Yaklaşımları . . . . .</b> | <b>68</b>  |
| 4.1      | Matematik Model . . . . .                              | 69         |
| 4.1.1    | Riemann (İzotropik) Beltrami Akışı . . . . .           | 70         |
| 4.1.2    | Finsler (Anizotropik) Beltrami Akışı . . . . .         | 73         |
| 4.2      | Yeni Metrik Ailesi . . . . .                           | 75         |
| 4.2.1    | Randers Tipinde Metrikler . . . . .                    | 75         |
| 4.2.2    | Synge-Beil Tipinde Metrikler . . . . .                 | 76         |
| 4.3      | Görüntü Kalitesi Metrikleri . . . . .                  | 78         |
| 4.4      | Görüntü İşleme Uygulamaları . . . . .                  | 80         |
| 4.4.1    | Gürültü Giderme . . . . .                              | 83         |
| 4.4.2    | Kenar Koruma . . . . .                                 | 84         |
| 4.5      | Hesaplamalı Karmaşıklık Analizi . . . . .              | 87         |
| 4.6      | Bir Kullanıcı Arayüzü Tasarımı . . . . .               | 90         |
| 4.7      | Yeni Metrikle Renkli Görüntü İyileştirme . . . . .     | 96         |
| 4.7.1    | Renkli Görüntüler için Beltrami Çerçevesi . . . . .    | 97         |
| 4.7.2    | DeneySEL Sonuçlar . . . . .                            | 100        |
| 4.8      | Sonuç . . . . .                                        | 104        |
| <b>5</b> | <b>Sonuçlar ve Değerlendirme . . . . .</b>             | <b>106</b> |
|          | <b>Kaynaklar . . . . .</b>                             | <b>109</b> |
|          | <b>Ekler . . . . .</b>                                 | <b>116</b> |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 1.1.</b> | Beyin MR görüntüsü . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 2  |
| <b>Şekil 1.2.</b> | Klasik kenar bulucular: (a)Orjinal görüntü, (b)Sobel, (c)Prewitt, (d)Roberts, (e)Canny, (f)Laplacian . . . . .                                                                                                                                        | 3  |
| <b>Şekil 1.3.</b> | Kemik resminde eşikleme uygulaması: (a)Orjinal görüntü, (b)Bölütlenmiş görüntü . . . . .                                                                                                                                                              | 4  |
| <b>Şekil 1.4.</b> | Kümeleme tabanlı segmentasyon: (a)Orjinal görüntü, (b)K-means, (c)PAM, (d)SOM . . . . .                                                                                                                                                               | 5  |
| <b>Şekil 1.5.</b> | Sinir ağları ile bölütleme . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 6  |
| <b>Şekil 1.6.</b> | Beyin MR görüntüleri tümör bölütleme: (a)Oriijinal görüntü, (b)Back Propagation . . . . .                                                                                                                                                             | 7  |
| <b>Şekil 1.7.</b> | Model tabanlı görüntü bölütleme: (a)Oriijinal görüntü (b)MRF . . . . .                                                                                                                                                                                | 7  |
| <b>Şekil 1.8.</b> | Aktif kontur model: (a)Dışa doğru çekilmiş eğri, (b)Nesneyi sarmaya başlayan eğri, (c)Nesneyi sarmış eğri . . . . .                                                                                                                                   | 8  |
| <b>Şekil 1.9.</b> | PDE tabanlı görüntü bölütleme: (a)Başlangıç eğrisi ile orijinal görüntü, (b)Level Set Metod . . . . .                                                                                                                                                 | 9  |
| <b>Şekil 2.1.</b> | Deney 1: $c = -10$ , $\sigma = 1$ , $\rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . . | 20 |
| <b>Şekil 2.2.</b> | Deney 2: $c = -5$ , $\sigma = 1$ , $\rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .  | 20 |
| <b>Şekil 2.3.</b> | Deney 3: $c = -1$ , $\sigma = 1$ , $\rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .  | 20 |
| <b>Şekil 2.4.</b> | Deney 4: $c = 0$ , $\sigma = 1$ , $\rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .   | 21 |
| <b>Şekil 2.5.</b> | Deney 5: $c = 1$ , $\sigma = 1$ , $\rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .   | 21 |

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.6.</b>  | Deney 6: $c = 5, \sigma = 1, \rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .    | 21 |
| <b>Şekil 2.7.</b>  | Deney 7: $c = 10, \sigma = 1, \rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .   | 21 |
| <b>Şekil 2.8.</b>  | Deney [1-7] $c$ 'nin değişimine göre eğri evrimi son durumları . . . . .                                                                                                                                                                               | 22 |
| <b>Şekil 2.9.</b>  | Deney 8: $c = -5, \sigma = 1, \rho = 1$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .   | 22 |
| <b>Şekil 2.10.</b> | Deney 9: $c = -5, \sigma = 1, \rho = 5$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .   | 23 |
| <b>Şekil 2.11.</b> | Deney 10: $c = -5, \sigma = 1, \rho = 10$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . . | 23 |
| <b>Şekil 2.12.</b> | Deney [8-10] $\rho$ 'nun değişimine göre eğri evrimi son durumları . . . . .                                                                                                                                                                           | 23 |
| <b>Şekil 2.13.</b> | Deney 11: $c = -5, \sigma = 1, \rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .  | 24 |
| <b>Şekil 2.14.</b> | Deney 12: $c = -5, \sigma = 5, \rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .  | 24 |
| <b>Şekil 2.15.</b> | Deney 13: $c = -5, \sigma = 10, \rho = 2$ . $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200<br>üncü tekrarlardaki aktif konturlar, $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum,<br>mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . . | 24 |
| <b>Şekil 2.16.</b> | Deney [11-13] $\sigma$ 'nin değişimine göre eğri evrimi son durumları . . . . .                                                                                                                                                                        | 25 |
| <b>Şekil 2.17.</b> | Deney 11,12,13 deki $\sigma$ 'nin değişimine göre düzgünleştirilmiş görün-<br>tüler, $[a,b,c,d]$ : sırasıyla orijinal görüntü, $\sigma = 1, \sigma = 5$ ve $\sigma = 10$ . . . . .                                                                     | 25 |
| <b>Şekil 2.18.</b> | Deney 1-7: Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kon-<br>tur görüntülenmektedir. . . . .                                                                                                                                             | 26 |

|                    |                                                                                                                                                                  |    |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.19.</b> | Deney 8-10:Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .                                                            | 26 |
| <b>Şekil 2.20.</b> | Deney 11-13:Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir. . . . .                                                           | 26 |
| <b>Şekil 2.21.</b> | Genel optimizasyon gösterimi . . . . .                                                                                                                           | 28 |
| <b>Şekil 2.22.</b> | Yapay zeka optimizasyonu gösterimi . . . . .                                                                                                                     | 29 |
| <b>Şekil 2.23.</b> | Kullanılan sezgisel algoritmaların yayın sayıları . . . . .                                                                                                      | 30 |
| <b>Şekil 2.24.</b> | $[a, b, c, d, e, f, g]$ : Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarının her bir deneme sonucunda elde edilen parametre değerleri grafiği . . . . . | 39 |
| <b>Şekil 2.25.</b> | Kenar, evrilme, varyans . . . . .                                                                                                                                | 40 |
| <b>Şekil 2.26.</b> | Testlerde kullanılan görüntüler. . . . .                                                                                                                         | 41 |
| <b>Şekil 2.27.</b> | Başlangıç eğrilerine göre ABC sonuçları. . . . .                                                                                                                 | 41 |
| <b>Şekil 2.28.</b> | Başlangıç eğrilerine göre ACO sonuçları. . . . .                                                                                                                 | 41 |
| <b>Şekil 2.29.</b> | Başlangıç eğrilerine göre BBO sonuçları. . . . .                                                                                                                 | 42 |
| <b>Şekil 2.30.</b> | Başlangıç eğrilerine göre GA sonuçları. . . . .                                                                                                                  | 42 |
| <b>Şekil 2.31.</b> | Başlangıç eğrilerine göre HS sonuçları. . . . .                                                                                                                  | 42 |
| <b>Şekil 2.32.</b> | Başlangıç eğrilerine göre PSO sonuçları. . . . .                                                                                                                 | 42 |
| <b>Şekil 2.33.</b> | Başlangıç eğrilerine göre TLBO sonuçları. . . . .                                                                                                                | 42 |
| <b>Şekil 2.34.</b> | Resimlere göre ABC sonuçları. . . . .                                                                                                                            | 43 |
| <b>Şekil 2.35.</b> | Resimlere göre ACO sonuçları. . . . .                                                                                                                            | 43 |
| <b>Şekil 2.36.</b> | Resimlere göre BBO sonuçları. . . . .                                                                                                                            | 44 |
| <b>Şekil 2.37.</b> | Resimlere göre GA sonuçları. . . . .                                                                                                                             | 44 |
| <b>Şekil 2.38.</b> | Resimlere göre HS sonuçları. . . . .                                                                                                                             | 44 |
| <b>Şekil 2.39.</b> | Resimlere göre PSO sonuçları. . . . .                                                                                                                            | 45 |
| <b>Şekil 2.40.</b> | Resimlere göre TLBO sonuçları. . . . .                                                                                                                           | 45 |
| <b>Şekil 2.41.</b> | Kamufle olmayan ve kamufle görüntü. . . . .                                                                                                                      | 46 |
| <b>Şekil 2.42.</b> | $[a, b, c, d, e, f, g]$ : Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarına göre nesneleri belirgin bir resmin test sonuçları. . . . .                  | 46 |
| <b>Şekil 2.43.</b> | $[a, b, c, d, e, f, g]$ : Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarına göre nesneleri belirgin olmayan bir resmin test sonuçları. . . . .          | 47 |
| <b>Şekil 2.44.</b> | Uygulama Anapano . . . . .                                                                                                                                       | 48 |

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.45.</b> | Resim yükleme ve başlangıç eğrisi oluşturma . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                             | 49 |
| <b>Şekil 2.46.</b> | Uygulama Anapano . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 50 |
| <b>Şekil 2.47.</b> | Algoritma ile hesaplama bölümü . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                          | 50 |
| <b>Şekil 2.48.</b> | Algoritma seçme bölümü . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 51 |
| <b>Şekil 2.49.</b> | Sonuçlar panosu . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 51 |
| <b>Şekil 2.50.</b> | Uygulama Yapay Zeka Algoritması Sonuçları . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 52 |
| <b>Şekil 3.1.</b>  | Biçim detektör kullanılarak evrilen eğri incelemesi . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 66 |
| <b>Şekil 3.2.</b>  | Seviye eğrileri ile Riemann manifoldunda eğri evrimi incelemesi . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 66 |
| <b>Şekil 4.1.</b>  | Polyakov için X dönüşümü gösterimi . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 69 |
| <b>Şekil 4.2.</b>  | Deneylerde kullanılacak görüntüler: (a)Temiz Lena, (b)Gauss gürültülü Lena, (c)Salt-Pepper gürültülü Lena, (d)Damar, (e)Saha . . . . .                                                                                                                                                                            | 81 |
| <b>Şekil 4.3.</b>  | Tablo 4.3 oluşturulurken kullanılan görüntüler . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 83 |
| <b>Şekil 4.4.</b>  | Gauss (solda) ve Salt-Pepper (sağda) gürültü giderme sonuçları: (a) Orijinal, (b) Gauss gürültülü, (c) Salt-Pepper gürültülü; İzotropik filtreler: (d) Beltrami, (e) Gauss, (f) Mean, (g) Median; Anizotropik filtreler: (h) Yeni Randers, (i) Ingarden, (j) N. Miron, (k) Yeni N.Miron, (l) Yeni Metrik. . . . . | 85 |
| <b>Şekil 4.5.</b>  | Kenar detektörlerin performansları: (a)Zero-Cross, (b)Log, (c)Chan, (d)Prewit, (e)Sobel, (f)Canny . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 86 |
| <b>Şekil 4.6.</b>  | Anonim bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültülü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik. . . . .                                     | 87 |
| <b>Şekil 4.7.</b>  | Biomedikal bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültülü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik. . . . .                                 | 88 |
| <b>Şekil 4.8.</b>  | Kamufle bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültülü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik. . . . .                                    | 89 |
| <b>Şekil 4.9.</b>  | Ana pano . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 91 |

|                    |                                                                                                                                 |     |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 4.10.</b> | Görüntü seçme ve gürültü ekleme . . . . .                                                                                       | 91  |
| <b>Şekil 4.11.</b> | Orijinal görüntü ve gürültülü görüntü . . . . .                                                                                 | 92  |
| <b>Şekil 4.12.</b> | Filtre seçme . . . . .                                                                                                          | 92  |
| <b>Şekil 4.13.</b> | Algoritma seçme . . . . .                                                                                                       | 93  |
| <b>Şekil 4.14.</b> | Hesaplamaya başlama . . . . .                                                                                                   | 94  |
| <b>Şekil 4.15.</b> | İstatiksel sonuçlar . . . . .                                                                                                   | 95  |
| <b>Şekil 4.16.</b> | Hesaplama bitince . . . . .                                                                                                     | 95  |
| <b>Şekil 4.17.</b> | Testlerde kullanılan görüntüler . . . . .                                                                                       | 102 |
| <b>Şekil 4.18.</b> | Filtreleme Sonuçları: (a) Orijinal Görüntü, (b) Gürültülü Görüntü, (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Yeni Metrik . . . . . | 104 |

## TABLO LİSTESİ

|                    |                                                                                                              |     |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tablo 2.1.</b>  | Deney veriler tablosu . . . . .                                                                              | 19  |
| <b>Tablo 2.2.</b>  | Ortaya çıkan en iyi maliyetler . . . . .                                                                     | 37  |
| <b>Tablo 2.3.</b>  | Eğitim sonucunda elde edilen en iyi parametre değerleri . . . . .                                            | 37  |
| <b>Tablo 4.1.</b>  | (g) Resmi için $\beta$ ve $dt$ 'nin değişimlerine göre yeni filtre ailesinin en iyi PSNR sonuçları . . . . . | 82  |
| <b>Tablo 4.2.</b>  | (e) Resmi için $\beta$ ve $dt$ 'nin değişimlerine göre yeni filtre ailesinin en iyi PSNR sonuçları . . . . . | 82  |
| <b>Tablo 4.3.</b>  | Resimlere göre yeni filtre ailesinin PSNR sonuçları( $\beta = 1, dt = 0.05$ )                                | 83  |
| <b>Tablo 4.4.</b>  | Gauss gürültüsü eklenerek elde edilen sonuçlar . . . . .                                                     | 84  |
| <b>Tablo 4.5.</b>  | Salt pepper gürültüsü eklenerek elde edilen sonuçlar . . . . .                                               | 85  |
| <b>Tablo 4.6.</b>  | Ortak Bileşenlerin Karmaşıklık Analizi . . . . .                                                             | 90  |
| <b>Tablo 4.7.</b>  | Algoritmaların Karmaşıklıkları . . . . .                                                                     | 90  |
| <b>Tablo 4.8.</b>  | $\beta$ ve $dt$ değişimlerine göre sonuçlar . . . . .                                                        | 103 |
| <b>Tablo 4.9.</b>  | Resimlere göre MSE ve PSNR sonuçları . . . . .                                                               | 103 |
| <b>Tablo 4.10.</b> | Filtreleme sonuçları( $\beta = 3, dt = 0.05$ ) . . . . .                                                     | 103 |

## ALGORİTMA LİSTESİ

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Algoritma 2.1.</b> Görüntü Üzerinde Eğri Evrimi Algoritması . . . . .                                    | 18  |
| <b>Algoritma 2.2.</b> Genel Optimizasyon I . . . . .                                                        | 27  |
| <b>Algoritma 2.3.</b> Genel Optimizasyon II . . . . .                                                       | 28  |
| <b>Algoritma 2.4.</b> Parçacık Sürü Optimizasyonu (Particle Swarm Optimization) . . . . .                   | 31  |
| <b>Algoritma 2.5.</b> Yapay Arı Kolonisi (Artificial Bee Colony) . . . . .                                  | 32  |
| <b>Algoritma 2.6.</b> Karınca Kolonisi Optimizasyonu (Ant Colony Optimization) . . . . .                    | 33  |
| <b>Algoritma 2.7.</b> Genetik Algoritma (Genetic Algorithm) . . . . .                                       | 34  |
| <b>Algoritma 2.8.</b> Armoni Arama Algoritması (Harmony Search Algorithm) . . . . .                         | 34  |
| <b>Algoritma 2.9.</b> Öğrenme Öğretme Tabanlı Optimizasyon (Teaching Learning Based Optimization) . . . . . | 35  |
| <b>Algoritma 2.10.</b> Biocoğrafya Tabanlı Optimizasyon (Biogeography Based Optimization) . . . . .         | 36  |
| <b>Algoritma 3.1.</b> Finsler Anlamında Eğri Evrilimi . . . . .                                             | 65  |
| <b>Algoritma 4.1.</b> İzotropik Beltrami Akışı . . . . .                                                    | 73  |
| <b>Algoritma 4.2.</b> Randers Tipli Anizotropik Beltrami Akışı . . . . .                                    | 77  |
| <b>Algoritma 4.3.</b> Synge-Beil Tipli Anizotropik Beltrami Akışı . . . . .                                 | 78  |
| <b>Algoritma 4.4.</b> Ortak Bileşenlerin Hesabı . . . . .                                                   | 89  |
| <b>Algoritma 4.5.</b> Renkli Görüntüler için İzotropik Beltrami Akışı . . . . .                             | 99  |
| <b>Algoritma 4.6.</b> Renkli Görüntüler için Anizotropik Beltrami Akışı . . . . .                           | 101 |



## SEMBOLLER LİSTESİ

|                                |                                         |
|--------------------------------|-----------------------------------------|
| $(x, y)$                       | Uzamsal koordinatlar                    |
| $\beta$                        | Ölçek parametresi                       |
| $\Delta_g$                     | Laplace-Beltrami operatörü              |
| $\delta_{ij}$                  | Kronocker delta                         |
| $F_{ext}$                      | Eğriye etki eden dış kuvvet             |
| $F_{int}$                      | Eğriye etki eden iç kuvvet              |
| $\gamma_{\mu\nu}$              | Anizotropik metrik                      |
| $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$       | İkinci cins Christoffel sembolü         |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Skaler çarpım, iç çarpım                |
| $\ \cdot\ _g$                  | g-norm, g metriğine göre norm           |
| $\mathbf{K}$                   | Eğrilik vektörü                         |
| $\mathbf{N}$                   | Normal vektörü                          |
| $\mathbf{T}$                   | Teğet vektörü                           |
| $\mathbf{V}$                   | Hız vektörü                             |
| $\mathcal{C}(s, t) = sbt$      | Seviye eğrileri                         |
| $\mathcal{F}$                  | Görüntü özellikleri kümesi              |
| $\mathcal{G}_\sigma$           | $\sigma$ varyanslı Gauss çekirdeği      |
| $\mathcal{H}$                  | Hamiltonyen                             |
| $\mathcal{K}$                  | $\mathcal{C}$ eğrisinin eğrilik vektörü |
| $\mathcal{L}$                  | Langranyen                              |
| $\mathcal{N}$                  | $\mathcal{C}$ eğrisinin normal vektörü  |

|                                 |                                                                     |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{T}$                   | $\mathcal{C}$ eğrisinin teğet vektörü                               |
| $\mathcal{V}$                   | Eğrinin birim hız vektörü                                           |
| $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ | $\vec{u}$ vektörünün $\vec{v}$ vektörüne dik izdüşümü, projeksiyonu |
| $\rho$                          | Kenar bulucu kuvveti, kenar parametresi                             |
| $\Sigma$                        | Görüntü manifoldu                                                   |
| $\sigma$                        | Gauss düzgünleştirme parametresi, varyans                           |
| $\varphi$                       | Yerel maliyet                                                       |
| $c$                             | Büzülme ve açılma parametresi                                       |
| $C^\infty$                      | Sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar ailesi                           |
| $d(.,.)$                        | Mesafe fonksiyonu                                                   |
| $E$                             | Enerji                                                              |
| $E_{ext}$                       | Eğriyi bükülmesini sınırlayan dış güçlerin enerjisi                 |
| $E_{int}$                       | Eğriyi büken iç güçlerin enerjisi                                   |
| $g$                             | $g_{ij}$ metrik tensörünün determinantı                             |
| $g^{ij}$                        | Ters metrik tensör                                                  |
| $g_{ij}$                        | Metrik tensör                                                       |
| $H(.)$                          | Homojenlik fonksiyonu                                               |
| $h_{ij}$                        | Gömme uzayı metriği                                                 |
| $I(x, y)$                       | Görüntü                                                             |
| $L_F$                           | Finsler eğri uzunluğu                                               |
| $L_R$                           | Rieman eğri uzunluğu                                                |
| $M$                             | Manifold                                                            |
| $NM$                            | M manifoldu üzerindeki normal demeti                                |

|           |                                     |
|-----------|-------------------------------------|
| $s$       | Yay uzunluğu parametresi            |
| $S^{n-1}$ | n-boyutlu birim küre                |
| $t$       | Zaman parametresi                   |
| $TM$      | M manifoldu üzerindeki teğet demeti |
| $X$       | Beltrami dönüşümü                   |
| $x^i$     | i-inci koordinat bileşeni           |



## 1. GİRİŞ

Genel olarak herhangi iki boyutlu bir görüntü bir  $I(x, y)$  fonksiyonu ile temsil edilebilir.  $I(x, y)$ ,  $(x, y)$  uzamsal koordinatlarında görüntü bilgisidir. Görüntü tipine bağlı olarak bu bilgi ışık şiddeti, görüntü derinliği, dalga şiddeti veya sıcaklığı olabilir.

Dijital(Sayısal) bir görüntü iki boyutlu ayrık bir fonksiyondur ve uzamsal koordinatlarda sayısallaştırılabilir. Sayısal bir görüntüyü her bir elemanın belirttiği noktaya piksel denilen elemanların oluşturduğu bir matris olarak görebiliriz. Görüntüde ise ilgili eleman o noktadaki görüntünün bir özelliği olan yoğunluk seviyesini tanımlar. Örneğin,

$$\mathcal{F}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \quad (1.1)$$

özellik seviyelerinin ayrık bir kümesi iken  $I(x, y) \in \mathcal{F}_n$  olmak üzere,  $[I(x, y)]_{p \times q}$  matrisi  $p \times q$  boyutunda bir görüntüdür.

Segmentasyon(Bölütleme), görüntüyü birbiri ile kesişmeyen bölgelere ayırmak demektir. Her bir bölge homojen olmasına rağmen, herhangi iki bölgenin birleşimi homojen olamaz. Matematiksel olarak, diyelim ki,  $\mathcal{F}$  tüm piksellerin bir kümesi olsun.  $H(\cdot)$ 'de homojenliği gösterebiliriz, yani  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$  homojen bölgeler olmak üzere,

$$\bigcup_{i=1}^n \mathcal{R}_i = \mathcal{F}, \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset, i \neq j \quad (1.2)$$

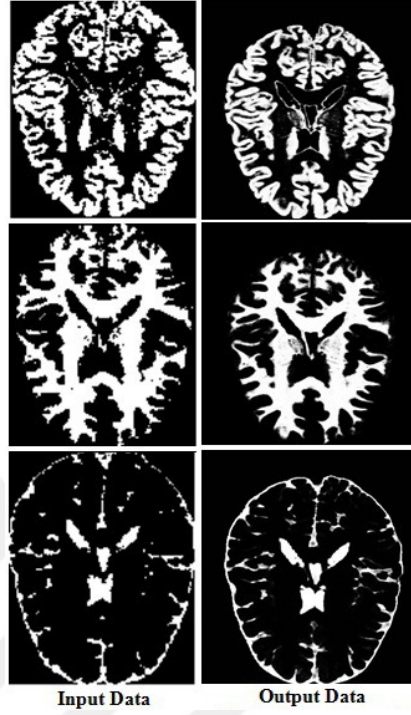
yazılabilir. Böylece her bir  $\mathcal{R}_i$  için  $H(\mathcal{R}_i) = 1$  dir ve  $H(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j) = 0$  dır. Bir başka deyişle, herhangi bir bölgedeki pikseller görüntünün oradaki bir özelliğine(renk, gri seviye, kenar şiddeti, v.s.) göre benzerse o bölgeye homojen denilir (Pal ve Pal, 1993: 1277).

### 1.1. Segmentasyon Çalışmaları

Bu zamana kadar görüntüde kullanılan bilgilere göre bir çok segmentasyon teknikleri kullanılmıştır. Bunlar yaygın kullanımlarına göre bölge tabanlı, kenar tabanlı, eşikleme tabanlı, teori tabanlı, model tabanlı ve kısmi diferensiyel denklem (PDE:Partial Differential Equation) tabanlı olarak altı sınıfa ayrılabilir (Jaglan, Dass ve Duhan, 2019: 359).

Bunlardan ilki olan "bölge tabanlı" tekniğindeki bölgeler aynı görüntü bileşenleri yoğunluğuna sahiptir. Yani bölgeler içerisinde komşu piksellerin oluşturduğu kümeler aynı yoğunluktaki görüntü bilgilerinden oluşur. Bölge büyütme, bölgeleri ayırma veya kaynaştırma

yapılabilir. Komşu piksellerin homojenliğine veya benzerliğine bakılır. Örneğin bölge büyütme metodunda, görüntü homojenliklerine göre ayrı ayrı bölgelere bölütlenir. Her bir bölgedeki pikseller aynı kriterde benzerliğe sahiptir. Bu benzerlikler renk, yoğunluk gibi kriterler olabilir (Javadpour ve Mohammadi, 2016: 95). Aşağıda bu metodla bölütlenmiş bir şekil görmekteyiz.

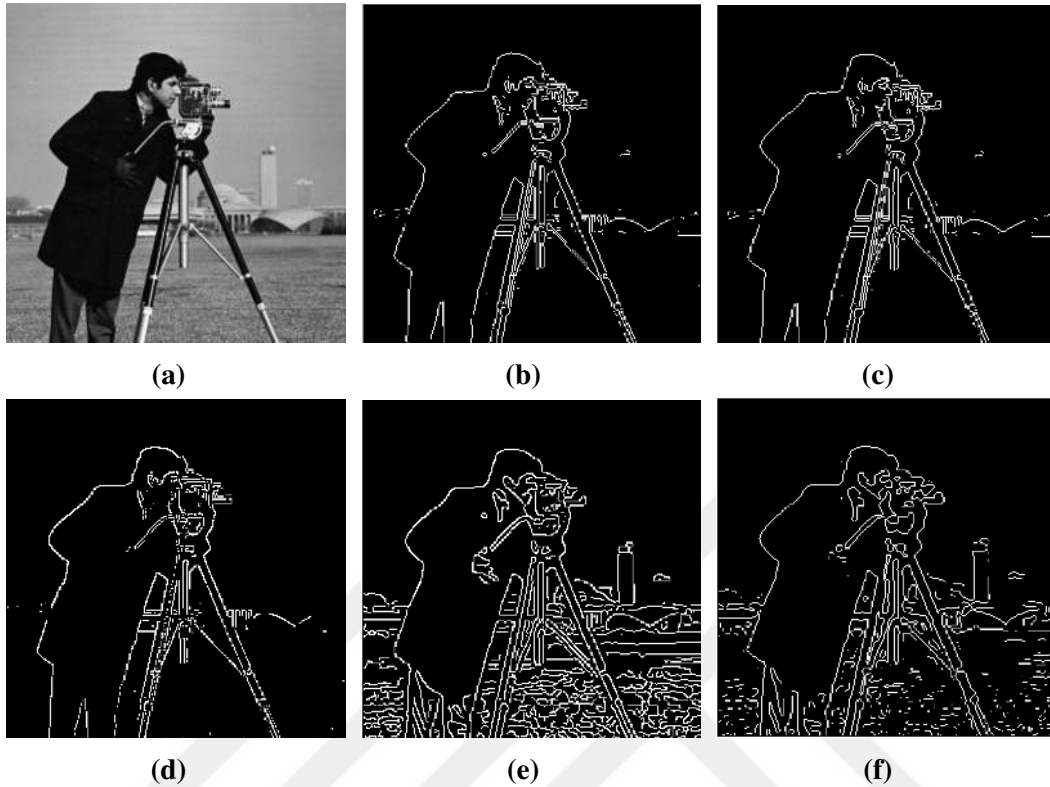


**Şekil 1.1.** Beyin MR görüntüsü (Javadpour ve Mohammadi, 2016: 95)

Bu şekilde dikkat edilirse bölge büyütme metodu ile girdi görüntüsündeki gürültülü bölgelerin gürültüden arındırılarak çıktı olarak daha detaylı ve alt bölgelerin daha belirgin olduğu görülür. Bu da, özellikle medikal görüntüde hastalıkların daha iyi netice ile tanı konulup tedavisine neden olur. (Javadpour ve Mohammadi, 2016: 95) makalesinin iddiasına göre bu yöntemin otomatik prosedürü nedeniyle zamandan tasarruf sağladığı ve görüntü segmentasyonunu iyileştirerek sonraki adımları büyük ölçüde etkilediği için, büyük ölçekdeki görüntü segmentasyonlarında kullanılabilecektir.

İkinci bir teknikde "kenar tabanlı" tekniktir. Kenar iki bölge arasındaki sınır olarak düşünüldüğünde, bir bölgeden diğer bir bölgeye geçişlerdeki ani yoğunluk değişimine sahip piksellerin tespiti yapıldığında kenarlar bulunmuş olur. Klasik kenar buluculardan bazıları Sobel, Prewitt, Roberts, Canny ve Laplacian'dir. Bu kenar bulucular görüntünün her bir noktasında gradyan büyüklüklerini yaklaşık olarak hesaplayarak ayrık bir gradyan operatörü oluştururlar. Böylece o noktalardaki yoğunluk geçişinin büyüklüğü hesaplanabilmektedir (Ziou, Tabbone vd., 1998: 537) (Al-Amri, Kalyankar vd., 2010) (Senthilkumaran ve Rajesh, 2008: 749). Aşa-

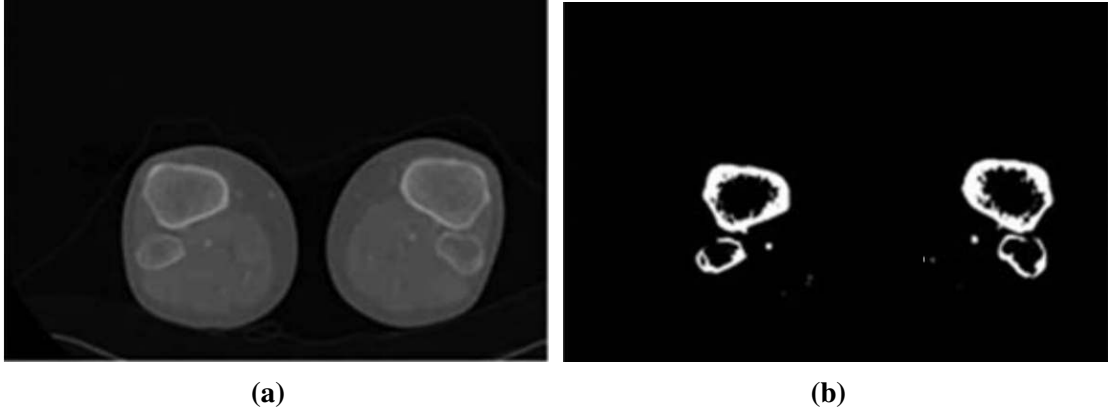
ğıdaki şekilde bu operatörlerle kenarlar MATLAB'ın klasik 'cameraman' görüntüsü üzerinde bulunmuştur.



**Şekil 1.2.** Klasik kenar bulucular: (a)Orjinal görüntü, (b)Sobel, (c)Prewitt, (d)Roberts, (e)Canny, (f)Laplacian

Esas olarak şekilde gösterilen klasik kenar bulucuların uygulama alanları bakımından birisinin diğerine üstünlüğünü karşılaştırmak haksızlık olur. Kullanım amaçlarına göre birisi veya birileri seçilebilir.

Üçüncü teknik "eşikleme" tekniğidir. Bir eşik değeri ile binari (ikili) görüntü denilen sadece iki yoğunluktan oluşan görüntü oluşturulur. Böylece bütün bir görüntü bölütlenmiş olur. Eşikleme tekniğinde farklı gri seviyelerdeki bölgeler bölütlenir. Eşik değeri görüntünün histogramındaki (histogram: çokluk dağılım grafiği) bir değerdir ve görüntüyü iki yoğunluklu bölgeye ayırır (Norouzi vd., 2014: 199). Aşağıda bir kemik görüntüsünün bu yöntemle bölütlendiğini görüyoruz.



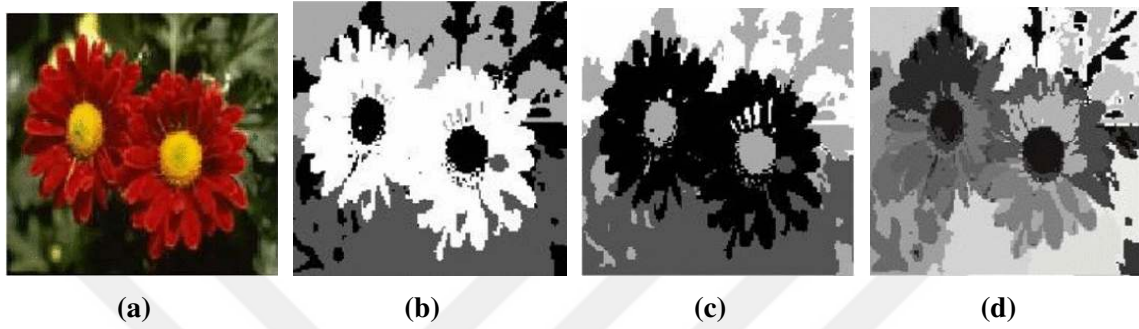
**Şekil 1.3.** Kemik resminde eşikleme uygulaması: (a)Orjinal görüntü, (b)Bölütlenmiş görüntü (Norouzi vd., 2014: 199)

Şekilde, yerel eşikleme yöntemi ile görüntünün farklı bölümleri için farklı eşik değerleri bulmak amacıyla alt görüntülere bölünmüş ve ardından her bir bölüm için farklı eşik değerleri hesaplanmıştır. Yöntemde, görüntü yatay dikey çizgilere bölünürken, her parça hem arka planın hemde nesnenin bir parçasını içerir. Sonuçta interpolasyon ile uygun sonuçlar elde edilir.

"Teori tabanlı" teknikler sınıfında "kümeleme tabanlı" ve "sinir ağları tabanlı" olmak üzere iki tip teknikten bahsedilebilir. Kümeleme tabanlı tekniklerde görüntünün renk, boyut, yoğunluk, doku gibi özelliklerine dayanarak sinir ağlarından farklı olarak denetimsiz bir öğrenme mekanizması ile gruplandırma vardır. Rasgele seçilen kümelerden yapılan hesaplar sonucunda birbirine yakın özellikteki kümeler grup yapılır.

Kümeleme tekniğini bir denetimsiz öğrenme tekniği olarak düşünebiliriz. Pikseller arasında bir benzerlik kriteri tanımlanır ve daha sonra benzer pikseller kümeler oluşturmak için birlikte gruplandırılır. Piksellerin kümeler halinde gruplandırılması, sınıf içi benzerliği en üst düzeye çıkarma ve sınıflar arası benzerliği en aza indirme ilkesine dayanır. Rasgele seçilen kümeler arasındaki uzaklıklar Öklid uzaklığı, Minkowski uzaklığı gibi uzaklık ölçü metodları ile ölçülür. Temel olarak K-means (K-ortalamlar), Partitioning Around Medoids (PAM)(Temsili nesneler civarında bölümlenme) ve Self Organizing Maps (SOM)(Kendini düzenleyen haritalar) metodları ile üç sınıfta incelenebilir. K-means metodunda bir veri kümesi, giriş olarak K sayıda kümeye bölünerek, kümeler arasında benzerliklerin en az, içinde ise en çok olması amaçlanmaktadır. PAM metodunda 'medoid' (medoid: bir veri kümesindeki temsili nesneler) kavramı veri kümesinin temsilci nesneleridir. Bunların veri kümesi içerisindeki ortalama benzersizlikleri en küçüktür. Ayrıca bu metodda K sayıda temsilci nesne, kendisine en yakın nesne ile birlikte K

sayıda küme oluşturur. Dolayısıyla bu metoda ayrıca K-medoids metoduda denir. SOM metodu bir çeşit denetimsiz sinir ağı yapısından oluşmaktadır. Genellikle veri içerisindeki kümeleme ve sınıflandırma işlerindeki gizli biçimleri bulmak için kullanılmaktadır. Bu ağların temel özelliklerinden biri, oluşturulan kümeleri topolojik olarak sıralamasıdır. Yani veri kümelerini topolojik olarak sıralayarak bir grid oluşturur ve küme nesneleri grid bölgelerinin komşuluğu ile eşlenir (Chebbout ve Merouani, 2012: 839).



**Şekil 1.4.** Kümeleme tabanlı segmentasyon: (a)Orjinal görüntü, (b)K-means, (c)PAM, (d)SOM (Chebbout ve Merouani, 2012: 839)

Sinir ağları tabanlı teknikler ise denetimli (supervised) ve denetimsiz (unsupervised) metodlar olarak ikiye ayırabiliriz. Denetimli metodlar uzman insan müdahalesi gerektirirken, denetimsiz metodlar gerektirmez. Bu iki kategorideki yapay sinir ağları metodlarının sınıflandırılması aşağıdaki gibi verilmiştir (Amza, 2012: 1).

- Denetimli Teknikler

- İleri Beslemeli Sinir Ağları (Feed-Forward Neural Networks) (Bebis ve Georgiopoulos, 1994: 27) (Montana ve Davis, 1989: 762)
- Geriye Yayılımlı Sinir Ağları (Back Propagation Neural Networks) (Erb, 1993: 165)
- Kademeli Korelasyon Sinir Ağları (Cascade Correlation Neural Networks) (Fahman, 1990)

- Denetimsiz Teknikler

- Kısıtlı Yeterlikte Sinir Ağları (Constraint Satisfaction Neural Networks) (Lin, Tsao ve Chen, 1992: 679)
- Darbe Bağlı Sinir Ağları (Pulse Coupled Neural Networks) (Ranganath, Kuntimad ve Johnson, 1995: 37)



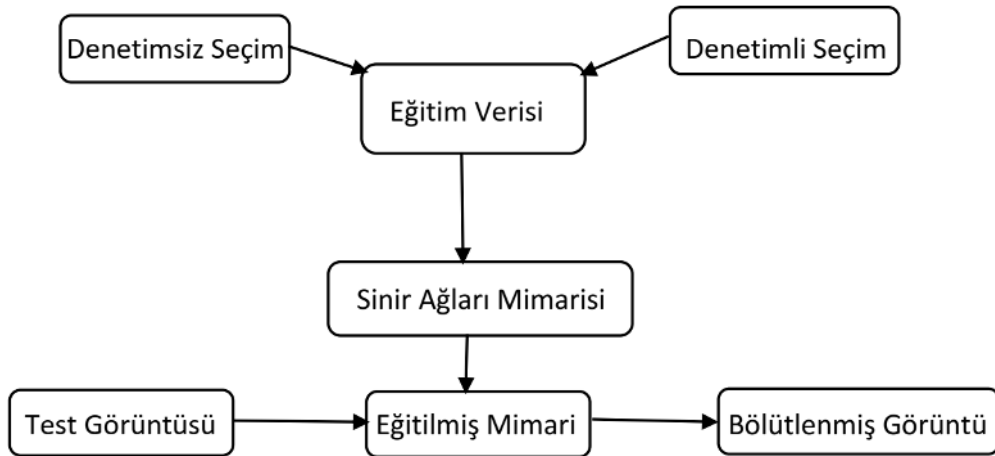
- Salınımlı Sinir Ağları (Oscillatory Neural Networks) (Selverston ve Moulins, 1985: 29)

- Hibrit Teknikler

- Hopfield Sinir Ağları (Hopfield Neural Networks) (Sulehria ve Zhang, 2007: 125)
- Kohonen Sinir Ağları (Kohonen Neural Networks) (Dekker, 1994: 351)

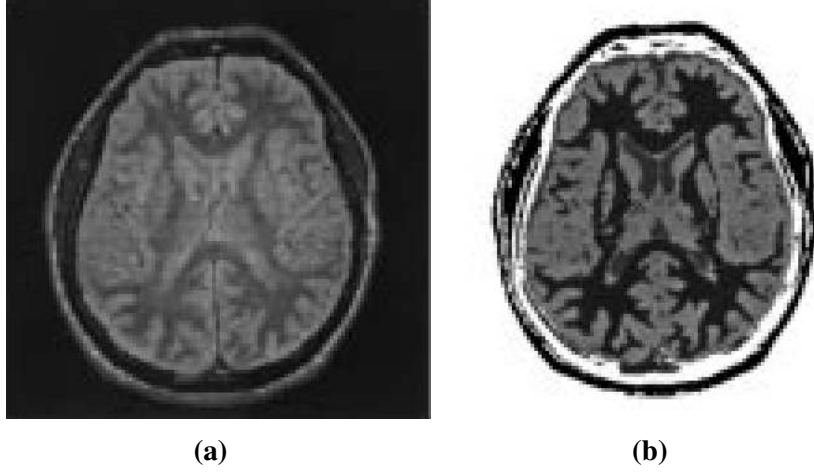
Denetimli (supervised) metodlar bir uzman yardımına ihtiyaç duyar, bunun anlamı görüntü bölütleme için seçilecek eğitim veri setini uzman kişi seçer. Denetimsiz (unsupervised) metodlarda ise bu işlem yarı veya tam otomatiktir. Eğer yarı otomatikse, yani zaman zaman uzman kişi katkısına gerek duyuluyorsa bu metodlar hibrittir diyebiliriz.

Denetimli metodlarda eğitim setini oluşturmak için uzman kişi eğitim görüntülerini seçerek onları manuel olarak belirli sayıda alt bölgelere ayırarak segmentasyonu sağlar. Bu eğitim görüntüleri sinir ağları mimarisine gönderilerek eğitimi yapılır. Daha sonra herhangi bir test görüntüsü girdisi alınarak görüntü bölütlenmiş olur. Denetimsiz metodların bundan farkı, eğitim seti uzman kişi tarafından değil otomatik oluşturulur. Aşağıda bunu anlatan bir diagram görülür:



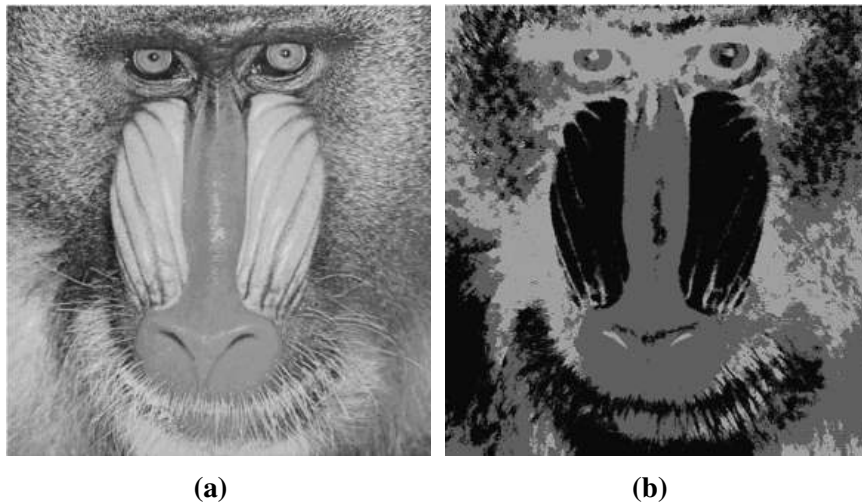
**Şekil 1.5.** Sinir ağları ile bölütleme

Yapay sinir ağları ile yapılan bölütlemeye bir örnek aşağıdaki şekilde görülmektedir. Burada back propagation tekniği ile bölütleme yapılmıştır. Beynin orijinal görüntüsü ile bölütlenmiş şekli görülmektedir.



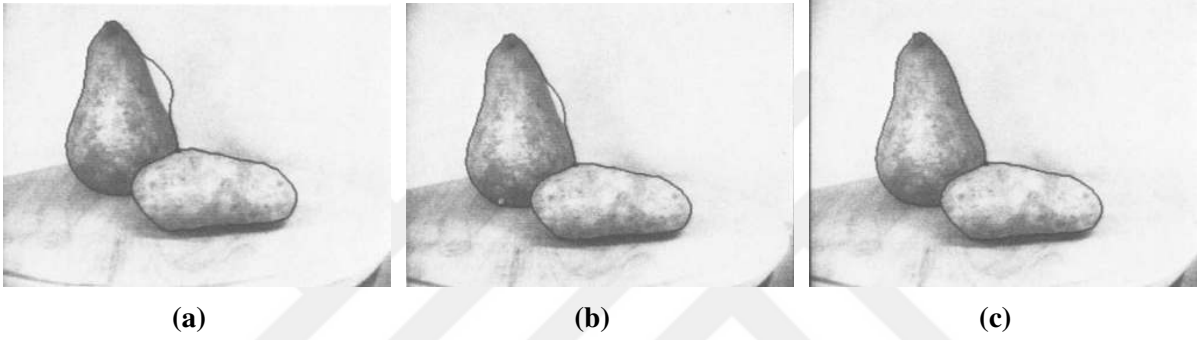
**Şekil 1.6.** Beyin MR görüntüleri tümör bölütleme: (a)Orijinal görüntü, (b)Back Propagation (Alirezaie, Jernigan ve Nahmias, 1997: 194)

Model tabanlı bölütleme teknikleri aslında istatistik modeller kullanılarak görüntü bölütlemesidir. Burada en bilinen metodlar Markov Random Field Model (MRF)(Markov Rasgele Alan Modeli) ve Gaussian Markov Random Field Model (GMRF)(Gauss Markov Rasgele Alan Modeli) dir. Bu modellerde görüntünün bilinmeyen sayıda bölgelerden oluştuğu farzedilir ve her biri bağımsız Markov Random bölgeleri olarak modellenir. İlk olarak bölgelerin en ideal olanları kabaca bölütlenir. Bu işlem görüntüyü pencerelere bölerek yapılabilir. Özelliklerin veya model parametrelerinin hesaplanması ile birbirine çok yakın sonuçlar veren pencereler birleştirilir. Bu modellerin genellikle pürüzlü veya gürültülü görüntülerde iyi sonuçlar verdiği görülmüştür (Azmi ve Norozi, 2011: 156) (Barker ve Rayner, 2000: 587). Aşağıdaki şekilde model tabanlı bölütlemeye bir örnek görülmektedir:



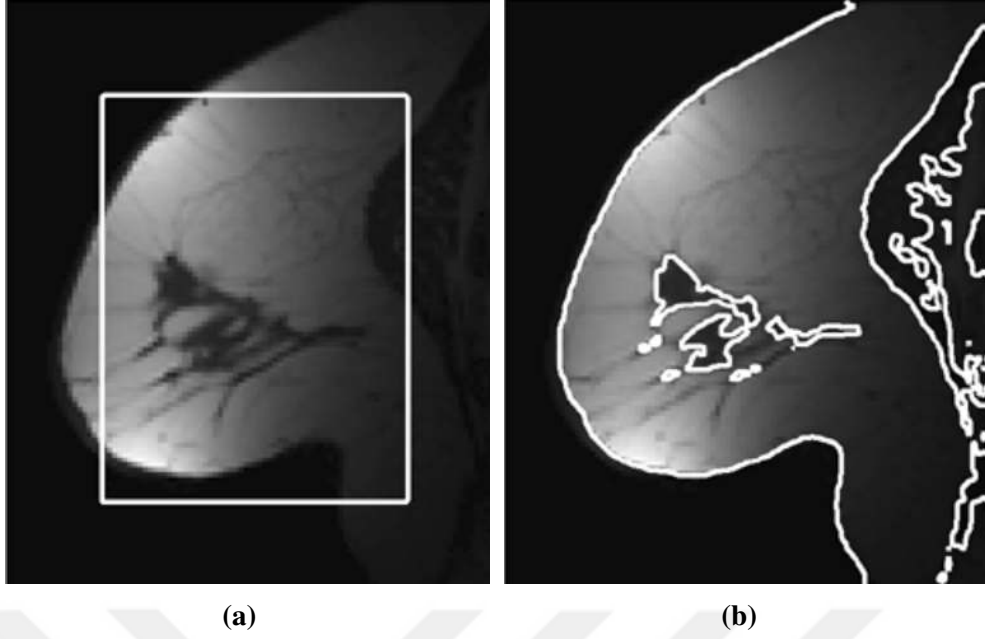
**Şekil 1.7.** Model tabanlı görüntü bölütleme: (a)Orijinal görüntü, (b)MRF (Yang ve Jiang, 2003: 1552)

Son olarak inceleyeceğimiz segmentasyon metodları kısmi diferensiyel denklem (PDE) tabanlı segmentasyon metodlarıdır. PDE tabanlı segmentasyon metodlarının başında Aktif Kontur Model (Aktif Kontur Modeli) gelmektedir. Bu model ilk olarak 1987 yılında ortaya çıkmıştır. Bu modelin temel amacı görüntü bölütleme problemini bir kısmi diferensiyel denklem çerçevesinde ele almaktır. Verilen bir eğrinin hareketi, kısmi diferensiyel denklemlerin bir yüzey veya görüntü üzerindeki çözümü olmaktadır. Dolayısıyla aktif konturlar görüntü içerisinde tanımlanan eğrilerdir ve kendi iç güçleri ile birlikte görüntü verisinden çıkarılan dış güçlerin etkisiyle hareket ederler (Kass, Witkin ve Terzopoulos, 1988: 321). Aşağıdaki şekilde bu modele örnek verilmiştir.



**Şekil 1.8.** Aktif kontur model: (a)Dışa doğru çekilmiş eğri, (b)Nesneyi sarmaya başlayan eğri, (c)Nesneyi sarmış eğri (Kass, Witkin ve Terzopoulos, 1988: 321)

Başlangıçta bir aktif kontur, enerji minimizasyon kriterine göre rasgele konumlara doğru evrilen parametrize edilmiş bir eğri veya yüzeydir. Bu kontur modeli başlangıç koşullarına ve nesnelerin birbiri ile sınır uzaklıklarına duyarlı olması modelin dezavantajlarından biridir. Bu nedenle daha iyi bir aktif kontur modeli Level Set (Seviye Kümesi) Metodu olarak bilinen modeldir. Level Set Metodu'nun temel fikri, eğrilerin veya yüzeylerin daha yüksek boyutlu bir hiperyüzeyin sıfır seviyesindeki kümesi olarak temsil edilmesidir. Dolayısıyla iki boyutlu bir yüzeydeki kapalı bir eğri üç boyutlu sürekli bir uzaydaki yüzeyin sıfır seviyesindeki eğrisi olabilir. Bu metod genellikle diğer modele göre daha doğru sayısal uygulamalar sunmasının yanında görüntüdeki topolojik değişimlere kolayca adaptasyon sağlamaktadır (Li vd., 2011: 2007) (Jiang, Zhang ve Nie, 2009: 1).



**Şekil 1.9.** PDE tabanlı görüntü bölütleme: (a)Başlangıç eğrisi ile orijinal görüntü, (b)Level Set Metod (Li vd., 2011: 2007)

## 1.2. Aktif Kontur Metodları

Aktif kontur metodları genellikle görüntü üzerinde bir başlangıç eğrisi alınarak görüntü üzerindeki nesne sınırlarına doğru bu eğrinin hareketini ve sonunda nesneleri bölütlemesini ele alır. Bu method kısmi diferensiyel denklem ile formüle edilir. Önceki çalışmalar gösteriyor ki aktif konturlar parametrik ve geometrik olarak formüle edilmiştir (Xu, Yezzi ve Prince, 2000: 483).

Parametrik aktif konturlar, Lagrange formülleri içerisinde parametrize edilmiş kontur eğrilerinin deformasyonu ile nesne sınırlarını belirleyen bir modelidir (Xu, Yezzi ve Prince, 2000: 483).

Matematik olarak,

$$\mathcal{C}(s, t) : [0, 1] \times [0, T) \mapsto \mathbb{R}^2 \quad (1.3)$$

kapalı eğri ailesi olarak parametrik aktif konturları tanımlar. Burada  $s$  yay uzunluğu,  $t$  ise zaman parametresidir. Bu eğrinin evrilimi aşağıdaki modelle yönetilir:

$$\gamma \mathcal{C}_t = F_{int} + F_{ext} \quad (1.4)$$

Bu denklemde  $\mathcal{C}_t$ ,  $\mathcal{C}$ 'in zamana göre kısmi türevi,  $\gamma \mathcal{C}_t$  sönmüleme kuvveti,  $\gamma \geq 0$  rasgele bir

sabit,  $F_{int}$  iç kuvvet ve  $F_{ext}$  dış kuvvettir. Burada sönümlleme kuvveti ile iç ve dış kuvvetler sıfıra ulaştığında kontur eğrisi hedefine ulaşır duracaktır.

Geometrik aktif konturlara gelince, bu model temelde eğri evrimi ve seviye seti metoduna dayanır. Eğriler, eğri parametrizasyonundan bağımsız olarak geometrik ölçümlerle hareket ederler. Matematik olarak,  $\mathcal{C}(x, t)$  iki boyutlu skaler bir seviye seti fonksiyonu olsun. Burada "sıfır" seviyesi bir aktif kontur tanımlar. Buna geometrik aktif kontur denir. Bu geometrik aktif kontur eğrisi aşağıdaki formül ile hareket eder:

$$\mathcal{C}_t = \varphi(\kappa + c)|\nabla \mathcal{C}| \quad (1.5)$$

Burada  $\kappa$  eğrilik ve  $c$  bir sabittir.  $\varphi$  ise:

$$\varphi = \frac{1}{1 + |\nabla (\mathcal{G}_\sigma) * I|} \quad (1.6)$$

$I$  görüntüsüne ait bir kenar potansiyel fonksiyonudur.  $\nabla (\mathcal{G}_\sigma) * I$ ,  $\mathcal{G}_\sigma$  gauss çekirdeği ile  $I$  görüntüsünün konvolüsyonudur (Caselles vd., 1993: 1). Seviye eğrisi modelindeki  $\varphi(\kappa + c)$  ise  $\mathcal{C}(x, t)$  seviye eğrisi setlerinin hareket hızını tanımlar.  $\varphi$  durdurma terimi olmak üzere  $\kappa$  eğrinin düzlüğünü,  $c$  ise büzülme ve açılmasını ifade eder.

Parametrik ve geometrik aktif kontur kavramlarına değindikten sonra, bir eğrinin Riemann uzayına ve Finsler uzayına göre evrilmesini inceleyelim. Özetle bir  $I$  görüntüsü içerisindeki  $C$  kontur eğrisi,  $\varphi$  yerel maliyet fonksiyonu bir kenar bulduran fonksiyon olmak üzere, Riemann aktif kontur kavramı:

$$E_{Riemann}(C) = \int_C \varphi(I(C(s)))ds \quad (1.7)$$

integralini minimize eden  $C$  eğrilerinin hareketi ile incelerken,  $\varphi$  yön bağımlı yerel maliyet fonksiyonu ile Finsler aktif kontur kavramı:

$$E_{Finsler}(C) = \int_C \varphi(I(C(s)), I(\dot{C}(s)))ds \quad (1.8)$$

integralini minimize eden  $C$  eğrilerinin hareketi ile inceler.

Bundan sonraki 2.Bölüm'de Riemann anlamında eğri evrim modeli incelenip, buradan 3.Bölüm'de Finsler anlamında eğri evrim modeline geçilip, bu modellerin neden incelendiği ve deneysel sonuçların neyi ifade ettiği detaylı olarak açıklanacaktır. Daha sonra 4.Bölüm'de

Polyakov modelinin detayları verilecek, gri seviyeli ve renkli görüntüler görüntü işleme operasyonları tartışılacaktır.



## 2. RIEMANN ANLAMINDA EĞRİLERİN EVRİLMESİ

Bu bölümde ilgilenilen problemlerden birisi nesnelerin etrafını sınırlayan en kısa kapalı eğrilerdir, bu eğrilere terminolojide geodezikler denilir. Öncelikle analitik olarak bu eğri sınıflarının modeli oluşturulup bu model sayısal olarak hesaplanacaktır. Sayısal hesaplardan elde edilen deney sonuçları detaylı olarak incelenecek, sonra doğal parametreler optimize edilip en iyi neticeye ulaştırılacaktır.

### 2.1. Teori ve Matematik

Nesne çevresini sınırlayan en kısa eğrilere geodezikler dendiğini belirtmiştik. Geodezik aktif kontur kavramı ise en kısa kontur eğrileri olarak açıklanabilir. Matematikte  $x$  ve  $y$  koordinatlarında bir  $C$  yüzeyinin  $z = z_0$  seviyesindeki kontur eğrisi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

$$C(x, y) = z_0 \quad (2.1)$$

Buradan görüldüğü gibi matematiksel olarak nesnenin veya üç boyutlu bir yüzeyin belli bir seviyede iz düşümlerini çizen eğrilere dir.

Bilgisayarlı görme açısından baktığımızda nesneleri sınırlayan kontur eğrileri görüntüdeki nesne kenarları olarak düşünölüp görüntüdeki yüksek ve alçak enerji geçişlerini ifade edebilir. Bu nedenle aktif kontur kavramı bir sebeple enerji ile hareket eden kontur eğrileri olarak düşünölüp nesne sınırlarında ise optimum enerji ile nesneyi çepeçevre saran enerji eğrileri olarak modellenenebilir. Bu modeli  $\mathcal{C}(s) = (x(s), y(s))$  şeklinde bir parametrik eğri olmak üzere, bu eğrinin enerjisini (Kass, Witkin ve Terzopoulos, 1988: 321) aşağıdaki şekilde modellemişlerdir:

$$E = \int_0^1 [E_{int}(\mathcal{C}(s)) + E_{image}(\mathcal{C}(s)) + E_{ext}] ds \quad (2.2)$$

Burada  $E_{int}$  eğriyi bükme iç enerjisi,  $E_{image}$  görüntüye neden olan enerji ve  $E_{ext}$  eğri bükülmesini sınırlayan güçlerin enerjisini ifade eder.

Bu modelden sonra geodezik kavramı ile Geodezik Aktif Konturlar denen model ilk defa (Caselles, Kimmel ve Sapiro, 1997: 61) tarafından sunulmuştur. Temel olarak zamanla evrilen ve görüntü içerisindeki nesneleri saran en kısa kapalı eğriler ya da konturlar hareket

sırasında doğal olarak parçalanabilir ve daha sonra birleşerek nesne sınırlarını sarabilirler. Minimal seviye eğrileri veya geodezik aktif konturlar Riemann uzayındaki bir metriği görüntünün seviye eğrileri ile tanımlarlar.

Bu modelin  $\mathcal{C}(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eğrisi ile ilgili enerji tanımı,  $I : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  nesnelerinin sınırlarını belirlemek istediğimiz görüntü ve  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$E(\mathcal{C}) = \lambda_1 \int_0^1 |\mathcal{C}'(s)|^2 ds + \lambda_2 \int_0^1 |\mathcal{C}''(s)|^2 ds - \lambda_3 \int_0^1 |\nabla I(\mathcal{C}(s))| ds. \quad (2.3)$$

Bu integraldeki ilk iki terim iç enerji olarak bilinir ve konturların düzgünlüğünü kontrol eder. Üçüncü terim ise dış enerji olarak bilinir ve nesneye doğru yönelen konturları kontrol eder.  $\mathcal{C}$  eğrisinin  $E$  enerji fonksiyoneli minimize etmesi istenir. Bu ifade de açık olarak görünen problemlerden birisi parametrelerin kontrolüdür. Parametreler öyle seçilmeli ki hem enerji minimize edilmeli, hem de düzgünlük ve konturların nesneye yaklaşımı temin edilmelidir.

Denklem (2.3)'de  $\lambda_2 = 0$  seçilerek ikinci dereceden süreksizlikler göz ardı edilerek kenarlar oluşturulmuş olur. Böylece eğri içerisinde belirli bir düzgünlük korunurken eğri maksimum kenar noktalarına yerleştirilmiş olur. Genelleştirilmiş bir kenar bulucu  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  azalan bir fonksiyon olarak tanımlansın.  $-\|\nabla I\| = \varphi(\|\nabla I\|)^2 = \varphi(I)^2$  yazılarak genelleştirilmiş bir enerji ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} E(\mathcal{C}) &= \int_0^1 E_{int}(\mathcal{C}(s)) + E_{ext}(\mathcal{C}(s)) ds \\ &= \lambda_1 \int_0^1 |\mathcal{C}'(s)|^2 ds + \lambda_3 \int_0^1 \varphi(\|\nabla I(\mathcal{C}(s))\|)^2 ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bundan sonra (2.4) eşitliğini minimize eden  $\mathcal{C}$  eğrisini bulmak için Maupertuis Prensibi (Bolsinov, Kozlov ve Fomenko, 1995: 473)'nden yararlanılır.

$\mathcal{U}(\mathcal{C}) = -\lambda_3 \varphi(\|\nabla I(\mathcal{C})\|)^2$  ve  $\lambda_1 = \frac{m}{2}$ ,  $m = sbt$  olmak üzere, Maupertuis Prensibi'ne göre  $p(s) = m\mathcal{C}'(s)$  eğrileri  $\int_0^1 \mathcal{L}(\mathcal{C}(s)) ds = \int_0^1 (p\mathcal{C}' - \mathcal{H}) ds$  enerji integralini  $\mathcal{H}$  enerji seviyesinde minimize eder. Buradaki  $\mathcal{H} = \frac{p^2}{m} + \mathcal{U}(\mathcal{C})$  Hamilton fonksiyonu ve  $\mathcal{L} = \frac{m}{2}|\mathcal{C}'|^2 - \mathcal{U}(\mathcal{C}) = p\mathcal{C}' - \mathcal{H}$  Langrange fonksiyonudur (Caselles, Kimmel ve Sapiro, 1997: 61).

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{m} + \mathcal{U}(\mathcal{C}) \text{ eşitliğinden } |p| = \sqrt{2m(\mathcal{H} - \mathcal{U}(\mathcal{C}))} \text{ elde edilerek,}$$



bir sabit  $E_0 = E_{int} - E_{ext}$  enerji seviyesinde

$$\int_0^1 \mathcal{L}(\mathcal{C}(s))ds = \int_0^1 (p\mathcal{C}' - E_0)ds = \int_0^1 p\mathcal{C}'ds - \int_0^1 E_0ds \quad (2.5)$$

yazılabileceğinden ve  $\int_0^1 E_0ds$  sabit olduğundan,  $\int_0^1 p\mathcal{C}'ds$  integralide minimize edilmiş olur. Böylece

$$\int p\mathcal{C}'ds = \int \langle p, \mathcal{C}' \rangle ds = \int |p||\mathcal{C}'|ds = \int \sqrt{2m(E_0 - \mathcal{U}(\mathcal{C}))} \sqrt{\delta_{ij}\mathcal{C}'_i\mathcal{C}'_j}ds \quad (2.6)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int \langle p, \mathcal{C}' \rangle ds = \int \sqrt{g_{ij}\mathcal{C}'_i\mathcal{C}'_j}ds \quad (2.7)$$

olduğundan, (2.6) ve (2.7) denklemlerinin eşitliğinden

$$g_{ij} = 2m(E_0 - \mathcal{U}(\mathcal{C}))\delta_{ij} \quad (2.8)$$

bulunur. Bunun manası şudur, enerji minimizasyon problemi, Riemann uzayında uygun bir geodezik eğri bulma ile eşdeğerdir. Yani, enerji probleminin sonucu, verilen noktalar arasında minimum mesafeli bir eğridir ve Riemann uzayında bu denklem (2.8)'deki  $g_{ij}$  bileşenli metrik ile ölçülür.

Enerjiyi minimuma indiren bir eğri bulma problemi, görüntü üzerindeki enerjilerle birlikte düşünüldüğünde, görüntüdeki enerji geçişleri yüksek hızlı ya da alçak hızlı olabilir. Yüksek hızlı bir enerji değişimi var ise oralarda keskinlikler veya kenarlar vardır denilebilir. Dolayısıyla bu kenarların her bir noktası en az zamanda ilerlerken, en kısa yolu yaparlarsa bir çözüme ulaşılabilir. Bu tamda Fermat İlkesi'nin tanımıdır. Fermat'ın metrik tanımına göre  $g_{ij} = \frac{1}{c^2(I)}\delta_{ij}$  olarak seçilebilir. Burada  $c(I)$ ,  $I$  görüntüsü üzerindeki ışık geçişlerinin hızı olarak düşünüldüğünde, yukarıda aldığımız  $\varphi$  fonksiyonu ile  $c(I) = \frac{1}{\varphi(\nabla I)}$  şeklinde tanımlanabilir (Javaloyes, 2012: 207) (Perlick, 1990: 1319) (Gallego Torromé, Piccione ve Vitorio, 2012: 123511). Böylece (2.7) eşitliği

$$\int \sqrt{g_{ij}\mathcal{C}'_i\mathcal{C}'_j}ds = \int \sqrt{\varphi^2(\nabla I)\delta_{ij}\mathcal{C}'_i\mathcal{C}'_j}ds \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\int_0^1 \varphi(\nabla I(\mathcal{C}(s))) |\mathcal{C}'(s)| ds \quad (2.10)$$

elde edilerek, problem (2.10) integralinin minimizasyonu problemine dönüştürülmüş olur.

$\mathcal{C}$  eğrisinin öklid uzunluğu

$$L = \int |\mathcal{C}'(x)| dx = \int ds \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir ve buradaki  $ds$  Öklid yay uzunluğu veya Öklid metrik olarak bilinir.  $\kappa$ , eğrinin Öklid eğriliğini ve  $\mathcal{N}$  eğrinin herhangi bir noktadaki normalini temsil etsin. Böylece eğri akışı  $\mathcal{C}_t = \kappa \mathcal{N}$  şeklinde ifade edilebilir. Bunun için öncelikle  $q$  herhangi bir parametre olmak üzere  $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(s, t)$  olmak üzere,  $\varphi(\mathcal{C}) = \varphi(|\nabla I(\mathcal{C})|)$  olduğundan, (2.10) eşitliği,  $L_R$  Riemann eğri uzunluğu olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_R(\mathcal{C}) &= \int_0^1 \varphi(\nabla I(\mathcal{C}(q))) |\mathcal{C}'(q)| dq \\ &= \int_0^L \varphi(\nabla I(\mathcal{C}(q))) ds = \int_0^1 \varphi(\mathcal{C}(s, t)) \mathcal{C}_q(s, t) dq \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada şunu söyleyebiliriz, gradyan minimizasyonunu düşünerek, yani eğri akışının minimizasyonu hesaba katılarak, en dik azalış (steepest descent) metoduna göre bir diferensiyel hesap yapılacağından, (2.12) fonksiyonelinin  $t$ 'ye göre türevi alınarak

$$\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} = \int_0^1 \frac{d(\varphi(\mathcal{C}(s, t)))}{dt} |\mathcal{C}_q(s, t)| dq + \int_0^1 \varphi(\mathcal{C}(s, t)) \frac{d(|\mathcal{C}_q(s, t)|)}{dt} dq \quad (2.13)$$

bulunur. Burada,  $\frac{d(|\mathcal{C}_q(s, t)|)}{dt} = \mathcal{T}(s, t) \mathcal{C}_{qt}(s, t)$  denirse,

$\mathcal{T}$ 'nin  $\mathcal{C}$  eğrisinin birim teğeti ve  $\frac{d(\varphi(\mathcal{C}(s, t)))}{dt} = \nabla \varphi(\mathcal{C}) \mathcal{C}_t(s, t)$  oldukları göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} &= \int_0^1 (\nabla \varphi(\mathcal{C}(s, t)) \cdot \mathcal{C}_t(s, t)) |\mathcal{C}_q(s, t)| dq \\ &\quad + \int_0^1 \varphi(\mathcal{C}(s, t)) (\mathcal{T}(s, t) \mathcal{C}_{qt}(s, t)) dq \end{aligned} \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14)'teki ikinci integralde kısmi integrasyon metodu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} &= \int_0^1 (\nabla\varphi(\mathcal{C}(s,t))\mathcal{C}_t(s,t)) |\mathcal{C}_q(s,t)| dq \\ &\quad - \int_0^1 (\varphi(\mathcal{C}(s,t))\mathcal{T}(s,t))_q \mathcal{C}_t(s,t) dq \\ &= \int_0^1 [(\nabla\varphi(\mathcal{C})\mathcal{C}_t) |\mathcal{C}_q| - (\nabla\varphi(\mathcal{C})\mathcal{C}_q) (\mathcal{T}\mathcal{C}_t) - \varphi(\mathcal{C})\mathcal{T}_q\mathcal{C}_t] dq\end{aligned}$$

bulunur.  $s, \mathcal{C}(t)$  eğrisinin yay uzunluğu ve  $\mathcal{T}_q = \mathcal{T}_s |\mathcal{C}_q|$  olduğundan, (2.14) integrali

$$\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} = \int_0^{L(\mathcal{C}(q))} [\nabla\varphi(\mathcal{C}) - (\nabla\varphi(\mathcal{C})\mathcal{T}) \mathcal{T} - \varphi(\mathcal{C})\mathcal{T}_s] \mathcal{C}_t ds \quad (2.15)$$

(2.15)'daki integralde  $\mathcal{T}_s = \kappa\mathcal{N}$  yazılarak

$$\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} = \int_0^{L(\mathcal{C}(q))} [\nabla\varphi(\mathcal{C}) - (\nabla\varphi(\mathcal{C})\mathcal{T}) \mathcal{T} - \varphi(\mathcal{C})\kappa\mathcal{N}] \mathcal{C}_t ds \quad (2.16)$$

elde edilir. Başlangıç anında, (2.16)

$$\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} \Big|_{t=0} = \int_0^{L(\mathcal{C}_0)} [\nabla\varphi(\mathcal{C}_0) - (\nabla\varphi(\mathcal{C}_0)\mathcal{T}) \mathcal{T} - \varphi(\mathcal{C}_0)\kappa\mathcal{N}] \mathcal{C}_t(0) ds \quad (2.17)$$

dir. Eğri üzerindeki bazlar cinsinden  $\nabla\varphi = a\mathcal{T} + b\mathcal{N}$  yazılır ve  $a = \nabla\varphi\mathcal{T}, b = \nabla\varphi\mathcal{N}$  dir. Buna göre (2.17) integralindeki  $\nabla\varphi - (\nabla\varphi\mathcal{T})\mathcal{T} = \nabla\varphi - a\mathcal{T} = b\mathcal{N} = (\nabla\varphi\mathcal{N})\mathcal{N}$  olur ve

$$\frac{d(L_R(\mathcal{C}(q)))}{dt} \Big|_{t=0} = \int_0^{L(\mathcal{C}_0)} [(\nabla\varphi(\mathcal{C}_0)\mathcal{N}) \mathcal{N} - \varphi(\mathcal{C}_0)\kappa\mathcal{N}] \mathcal{C}_t(0) ds \quad (2.18)$$

elde edilir.  $L_R(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{C}$ 'nin bir fonksiyoneli olduğundan (2.18) integrali,  $L_R$ 'nin  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ 'daki Gateaux türevidir (Zhao ve Luo, 2017: 903). Yani, en dik iniş (steepest-descent) metoduna göre,  $L_R(\mathcal{C})$ 'nin yerel minimumu olan başlangıç  $\mathcal{C}_0$  eğrisini bulmak için aşağıdaki diferensiyel eşitlikteki eğri ailesini incelemek gerekecektir. Steepest-descent metodunun detaylarına (Petrova ve Solov'ev, 1997: 361) makalesinden ulaşılabilir.

$$\mathcal{C}_t = \varphi(\mathcal{C})\kappa\mathcal{N} - (\nabla\varphi(\mathcal{C})\mathcal{N}) \mathcal{N} \quad (2.19)$$

## 2.2. Sayısal Hesaplar ve Deneysel Sonuçlar

### 2.2.1 Sayısal Hesap

$\mathcal{C}$  eğrisi,  $u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun bir seviye eğrisi olsun,  $\mathcal{C}$  eğrisi her noktasındaki  $\mathcal{N}$  normal boyunca evrilir. Yani, bir  $\Psi$  skaler fonksiyonu için,  $\mathcal{C}_t = \Psi \mathcal{N}$  yazılabilir.  $u$  yüzeyi  $u_t = \Psi |\nabla u|$  ile yeniden şekillenir. Buna göre  $u$ 'nun evrimi aşağıdaki denklemle verilir (Chen, Giga, Goto vd., 1991: 749):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| / \left( \varphi(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \varphi(I) |\nabla u| \kappa + \nabla \varphi(I) \nabla u \quad (2.20)$$

Burada  $\rho$  kenar parametresi sıfırdan büyük olmak üzere, maliyet fonksiyonu  $\varphi = \frac{1}{1 + |\nabla \hat{I}|^\rho}$  ( $\hat{I}$  düzgünleştirilmiş bir  $I$  görüntüsü) seçilerek, (2.21) denklemi aşağıdaki gibi genişletilebilir.  $c$  hız parametresi, negative seçildiğinde eğri içeri doğru evrilir, pozitif seçildiğinde eğri dışarı doğru evrilir (Caselles vd., 1993: 1), (Malladi, Sethian ve Vemuri, 1995: 158), (Perona ve Malik, 1990: 629).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| / \left( \varphi(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + c \varphi(I) |\nabla u| = \varphi(I) (c + \kappa) |\nabla u| + \nabla u \nabla \varphi \quad (2.21)$$

Buradan anlaşılıyor ki, evrilen eğriyi durduran bir kriter  $\varphi$  dir ve görüntü üzerindeki seviye eğrileri kümesi

$$\mathcal{C}_t = \varphi(I) (c + \kappa) \mathcal{N} - (\nabla \varphi(I) \mathcal{N}) \mathcal{N} \quad (2.22)$$

ile ifade edilir.

Bir  $I : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  görüntüsü üzerinde  $\mathcal{C}$  eğrilerinin evrimini gözlemlemek için,  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eğrileri görüntü üzerinde bir  $u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun seviye eğrileri olduğundan,  $u$ 'nun  $I$  içindeki hareketini gözlemlemek yeterlidir. Hesaplamalarda kullanılacak  $u = (x, y)$ 'nin  $x$  ve  $y$  yönündeki ayrık merkezi fark türevleri;

$$u_x = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta t} \quad (2.23)$$

$$u_y = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\Delta t} \quad (2.24)$$

$$u_{xx} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta t^2} \quad (2.25)$$

$$u_{xy} = \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4\Delta t^2} \quad (2.26)$$

şeklindedir. Bu sayısal türevler kullanarak (2.22) denkleminin sayısal çözümü için aşağıdaki algoritma izlenir.

---

**Algoritma 2.1:** Görüntü Üzerinde Eğri Evrimi Algoritması

---

- 1 Bir örnek  $I(x, y)$  görüntüsü yükle
  - 2 Görüntüyü  $\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$  gauss filtresi ile düzgünleştir:  
Düzgünleştirilmiş görüntü  $\hat{I} = I \otimes \mathcal{G}$
  - 3  $\varphi = \frac{1}{1 + |\nabla \hat{I}|^\rho}$  kenar fonksiyonunu (2.23) ve (2.24) sayısal türevler kullanarak hesapla
  - 4 Görüntü içinde her bir iterasyonda değişecek  $u$  maskını başlangıç eğrisi ile oluştur
  - 5 **for** her bir iterasyon **do**
    - 6 Eğrilik  $\kappa = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}$  ifadesinden  $\kappa$  hesapla[38]
    - 7  $u = u + \Delta t u_t$  şeklinde güncelle
  - 8 **end**
- 

### 2.2.2 Deneysel Sonuçlar

Deneysel neticeler sayısal hesaplarda kullanılan parametrelerin değişimine göre elde edilmiştir. Deneylerde her bir tekrarda kullanılan adım uzunluğu 0.1 alınmış, konturun yakınsama hata eşiği ortalama karesel hata olarak hesaplanmıştır, ayrıca 200 tekrar sonucunda harcanan zaman hesaplanmış, tüm bu değerler Tablo 2.1 de verilmiştir.

**Tablo 2.1.** Deney veriler tablosu

| Deney No. | $\rho$ | $c$ | $\sigma$ | Tekrar Sayısı | Ort. Karesel Hata | Süre(sn) |
|-----------|--------|-----|----------|---------------|-------------------|----------|
| 1         | 2      | -10 | 1        | 200           | 0.019             | 23.1405  |
| 2         | 2      | -5  | 1        | 200           | 0.018             | 22.963   |
| 3         | 2      | -1  | 1        | 200           | 0.04              | 23.1591  |
| 4         | 2      | 0   | 1        | 200           | 0.08              | 23.395   |
| 5         | 2      | 1   | 1        | 200           | 0.023             | 23.0264  |
| 6         | 2      | 5   | 1        | 200           | 0.018             | 23.3839  |
| 7         | 2      | 10  | 1        | 200           | 0.019             | 23.1495  |
| 8         | 1      | -5  | 1        | 200           | 0.019             | 23.1755  |
| 9         | 5      | -5  | 1        | 200           | 0.019             | 23.0988  |
| 10        | 10     | -5  | 1        | 200           | 0.019             | 23.1797  |
| 11        | 2      | -5  | 1        | 200           | 0.018             | 23.265   |
| 12        | 2      | -5  | 5        | 200           | 0.024             | 23.1451  |
| 13        | 2      | -5  | 10       | 200           | 0.023             | 23.1524  |

Tablo 2.1’de,  $c$  evrilme hızı,  $\sigma$  gauss filtre varyansı ve  $\rho$  kenar fonksiyonunun büyük-  
lük derecesi, parametrelerinin çeşitli değerlerine göre başlangıç eğrisinin değişimleri incelen-  
miştir. 1-7 deneylerinde  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 2$  sabit tutulurken,  $c$ ’nin -10,-5,-1,0,1,5,10 değişimlerine  
konturların cevabı incelenmiştir. 8-10 deneylerinde  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$  sabit tutulurken,  $\rho$ ’nin  
1,5,10 değerlerinde konturların cevabı incelenmiş ayrıca kenar görüntüleri alınmıştır. 11-13 de-  
neylerinde  $c = -5$ ,  $\rho = 2$  sabit tutulurken  $\sigma$  1,5 ve 10 değerlerinde konturların davranışları  
incelenmiş olup, kenar görüntüleri ve düzgünleştirilmiş görüntüler alınmıştır.

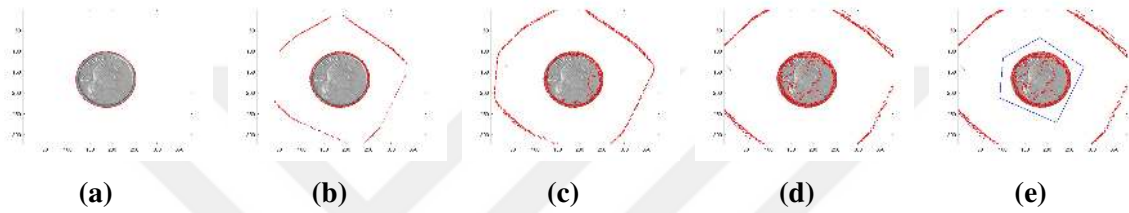
Geodezik aktif kontur modelinin kurulmasında gerekli olan matematiksel temeller  
ile oluşturulan modelin içerisinde parametrelerinin değişimi incelenmiş olup, modelin değişen  
parametrelere cevabı deney sonuçları olarak verilmiş ve görüntüleri sunulmuştur.

#### **Evrilme hızı parametresinin değişiminin incelenmesi:**

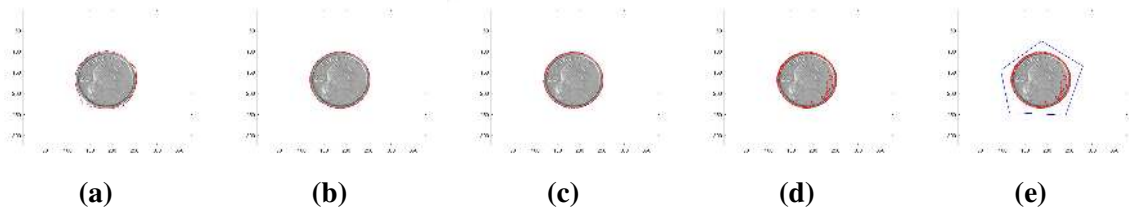
Burada  $c$  evrilme hızı parametresinin değişimi incelenecektir. Bu incelemelerde, Tablo  
2.1’deki 1-7 deneyleri dikkate alınarak yapılacaktır.

Şekil 2.8’de  $c$  evrilme parametresinin, sırasıyla, -10, -5, -1, 0, 1, 5, 10 olduğu du-  
rumlarda eğrinin cevapları gözlemlenmektedir. Dikkat edilirse (a) ve (g) gibi çok küçük ve çok

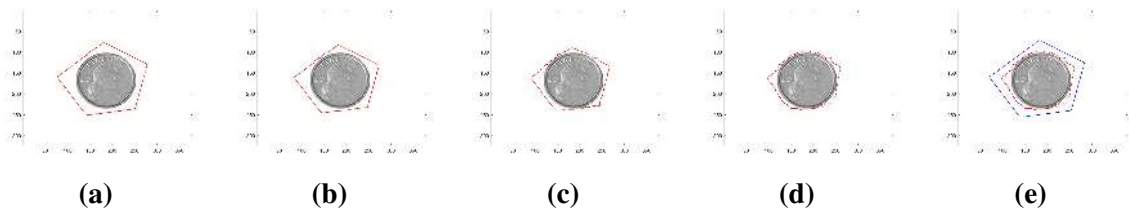
büyük değerlerde eğrinin parçalandığı ve resim üzerine dağıldığı gözlemlenmektedir. Bu durum eğrinin nesneyi çevreledikten sonra görüntüde ilgisiz yerlere dağılmasına neden olmuştur. Ayrıca (b) ve (c) görüntülerine bakılırsa, (b) de eğri (c) ye göre daha hızlı giderek nesneyi sarmış ve parçalanmaya başlamıştır, buradan  $c$  'nin eğrinin evrilme hızını etkilediği açıkça görülmektedir. Bu parametrenin etkisiz olduğu durum ise (d) seçeneğinde görülmektedir. Buradan eğri davranışının bozulduğu, eğrinin içe veya dışa doğru evrilme kararının olmadığı dolayısıyla rasgele hareket ettiği gözlemlenmektedir. (e), (f), (g) seçeneklerine bakılırsa eğri dışa doğru hareket ederek uzay içerisine parçalanmış halde dönmüştür, yani sırasıyla, nesneyi parçalanmış eğriler hızına göre sarmaya çalışmıştır.



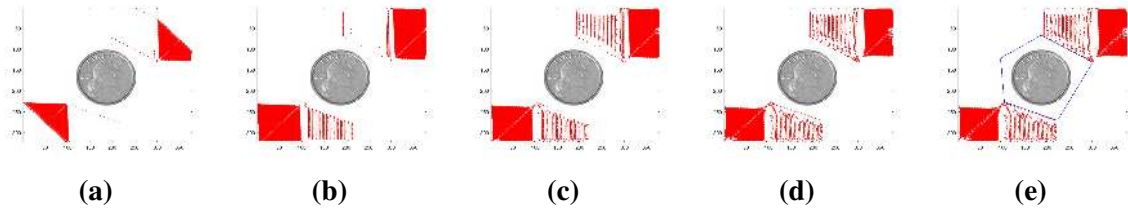
**Şekil 2.1.** Deney 1:  $c = -10$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, e: Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



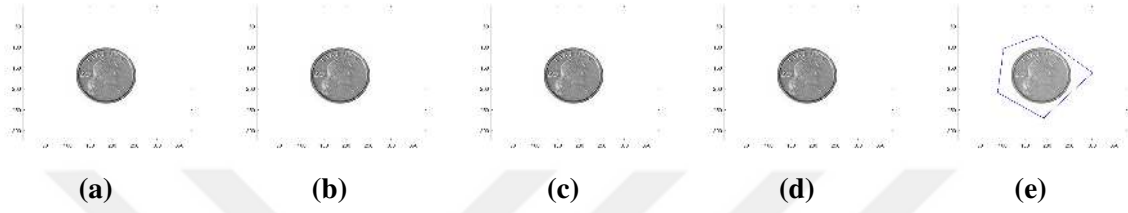
**Şekil 2.2.** Deney 2:  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, e: Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



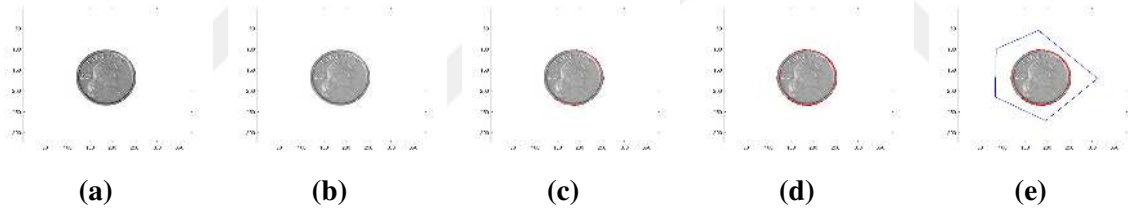
**Şekil 2.3.** Deney 3:  $c = -1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, e: Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



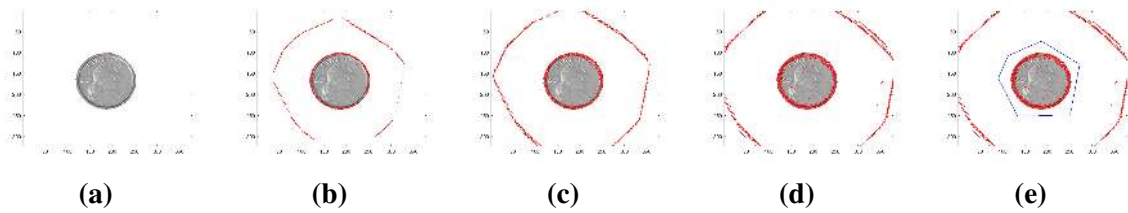
**Şekil 2.4.** Deney 4:  $c = 0, \sigma = 1, \rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.5.** Deney 5:  $c = 1, \sigma = 1, \rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.

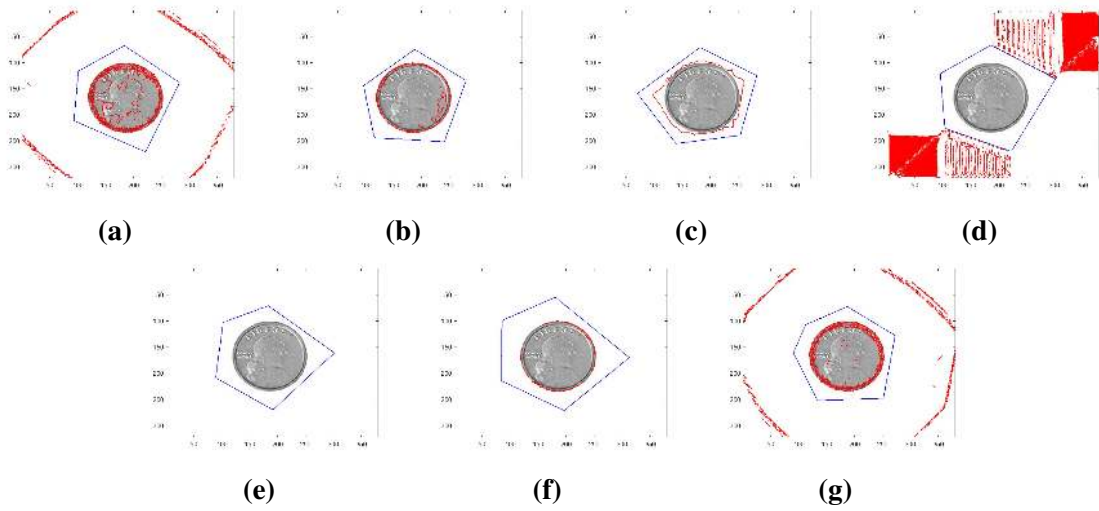


**Şekil 2.6.** Deney 6:  $c = 5, \sigma = 1, \rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.7.** Deney 7:  $c = 10, \sigma = 1, \rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



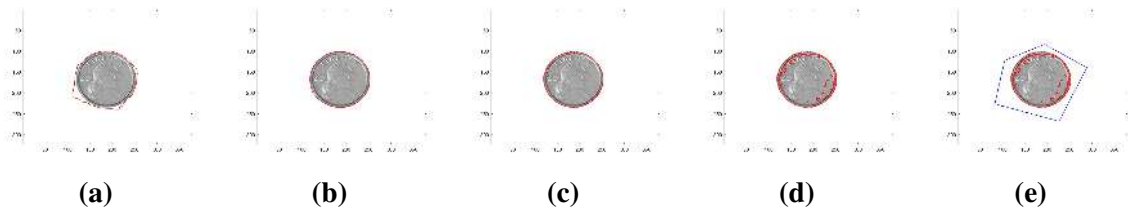


**Şekil 2.8.** Deney [1-7]  $c$ 'nin değişimine göre eğri evrimi son durumları

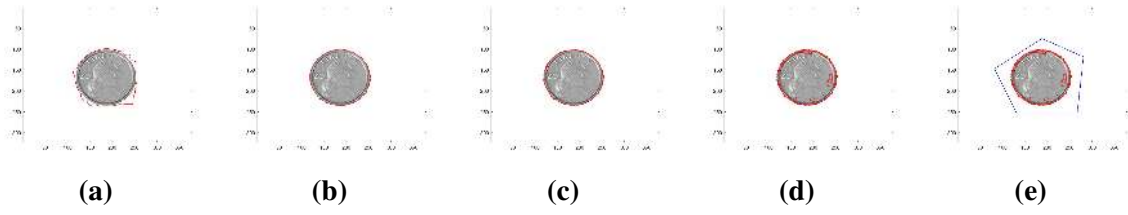
### **Kenar parametresinin değişiminin incelenmesi:**

Burada  $\rho$  kenar parametresinin değişimi incelenenecektir. Bu incelemelerde, Tablo 2.1'deki 8-10 deneyleri dikkate alınarak yapılacaktır.

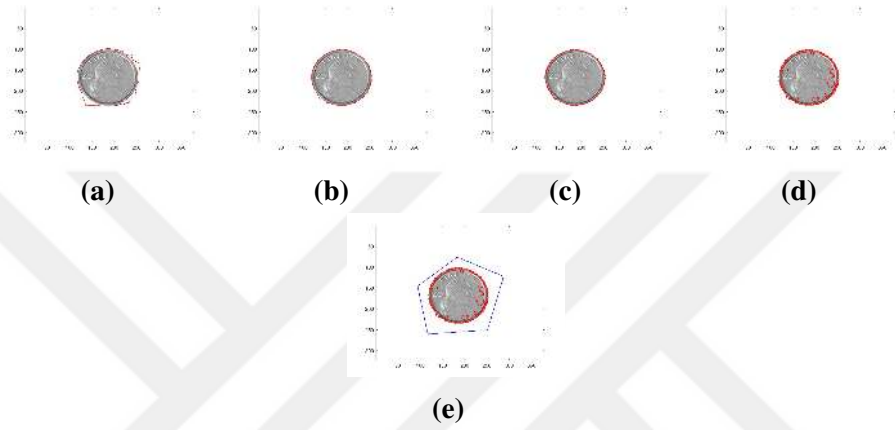
Şekil 2.12'de kenarları güçlendiren veya zayıflatan pozitif bir parametrenin değişimi gözlemlenmektedir. Esasen bir görüntüde görüntünün kullanım amacına göre çok fazla detay istenebilir veya daha az detayda istenebilir. Bu parametre o nedenle görüntü kullanım amacına göre kullanıcı tanımlı olarak görüntü yorumlamaya neden olur. Şekilde görüldüğü kadarıyla parametre büyüdükçe detaylar ve eğri parçalanmaları artmakta, bunun tersi olarak parametre küçüldükçe detayları bulma ihtimali azaldığından, eğrinin hedefe yönelmesi azalacağından eğrilerin rasgele parçalanmalarına sebebiyet vermektedir.



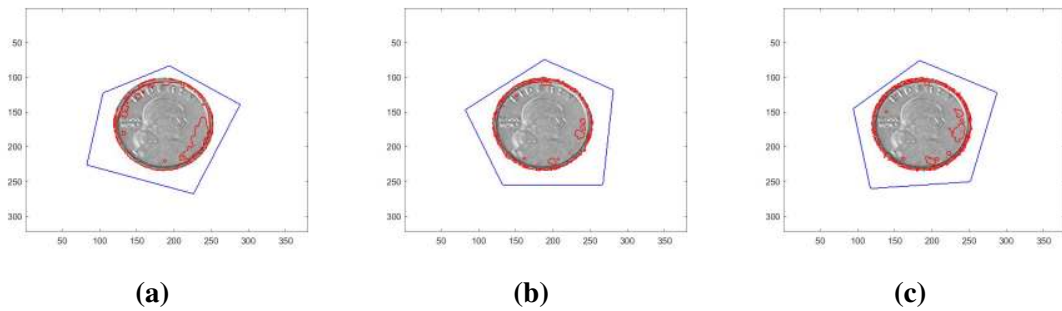
**Şekil 2.9.** Deney 8:  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.10.** Deney 9:  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 5$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, e: Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.11.** Deney 10:  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 10$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar, e: Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



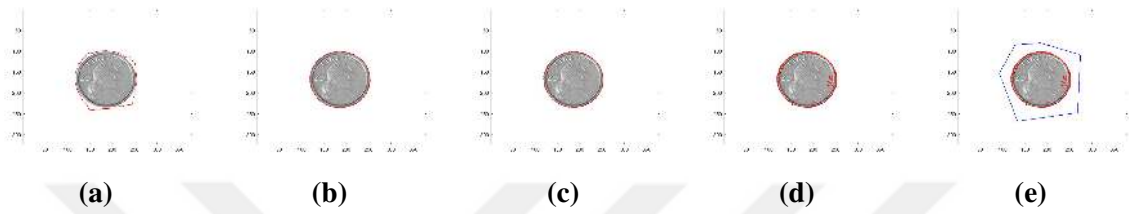
**Şekil 2.12.** Deney [8-10]  $\rho$ 'nun değişimine göre eğri evrimi son durumları

### Gauss filtre varyansının değişiminin incelenmesi:

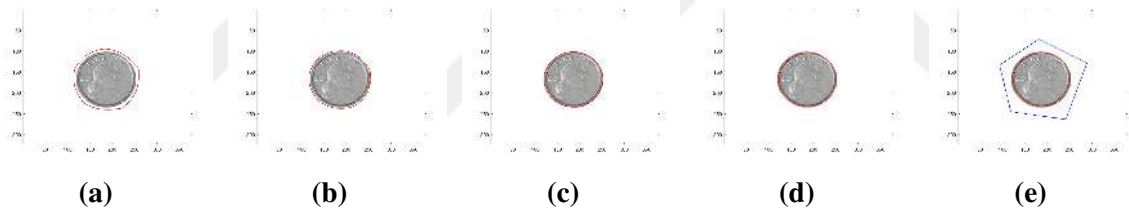
Burada  $\sigma$  gauss filtre varyansının değişimi incelenecektir. Bu incelemelerde, Tablo 2.1'deki 11-13 deneyleri dikkate alınarak yapılacaktır.

Şekil 2.16'da görüntüyü düzgünleştiren  $\sigma$  parametresi incelenmiştir.  $\sigma$  filtre varyansı arttıkça görüntü gürültüden kurtularak daha düzgün bir görüntü elde edilir. Parametre azaldıkça görüntüdeki gürültü belirgin olacağından eğrilerin hareketi rasgeleleşmeye başlar, dolayısıyla

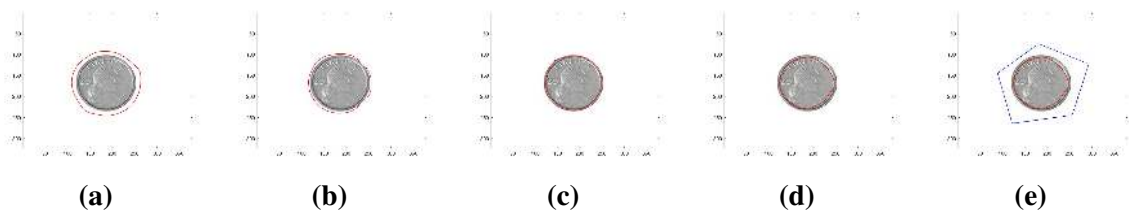
eğri hedefi olan kenarlar yerine parçalanarak rasgele bölgelere yerleşir. Şekil 2.16'da (a)'dan (c)'ye tamamen bu gözlemlenmektedir. (b) ile (c) ye dikkat edilirse parametrenin çok yüksek değerleri görüntüde nesne kenarlarını yok ederek eğrini kenarı bulamadan evrilmesine neden olur. Dolayısıyla görüntüyü düzgünleştirmek, bir başka deyişle gürültüden arındırmak önemlidir, fakat filtrelemede aşırıya kaçılmamalıdır. Şekil 2.17'de bir görüntünün aşırı filtreleme ile nasıl yok olacağı gözlemlenmektedir. Bu nedenle bu parametrenin resme göre optimum değerini kullanmak önemlidir.



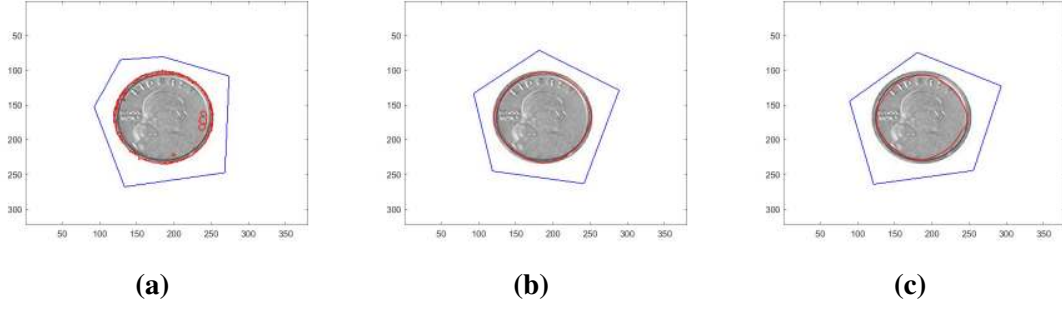
**Şekil 2.13.** Deney 11:  $c = -5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



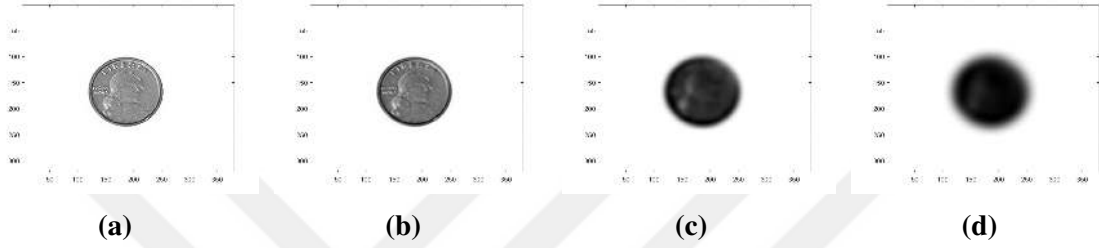
**Şekil 2.14.** Deney 12:  $c = -5$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.15.** Deney 13:  $c = -5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 2$ .  $[a, b, c, d]$ : Sırasıyla 50,100,150,200 üncü tekrarlardaki aktif konturlar,  $e$ : Tekrar sonunda oluşan son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.16.** Deney [11-13]  $\sigma$ 'nun değişimine göre eğri evrimi son durumları

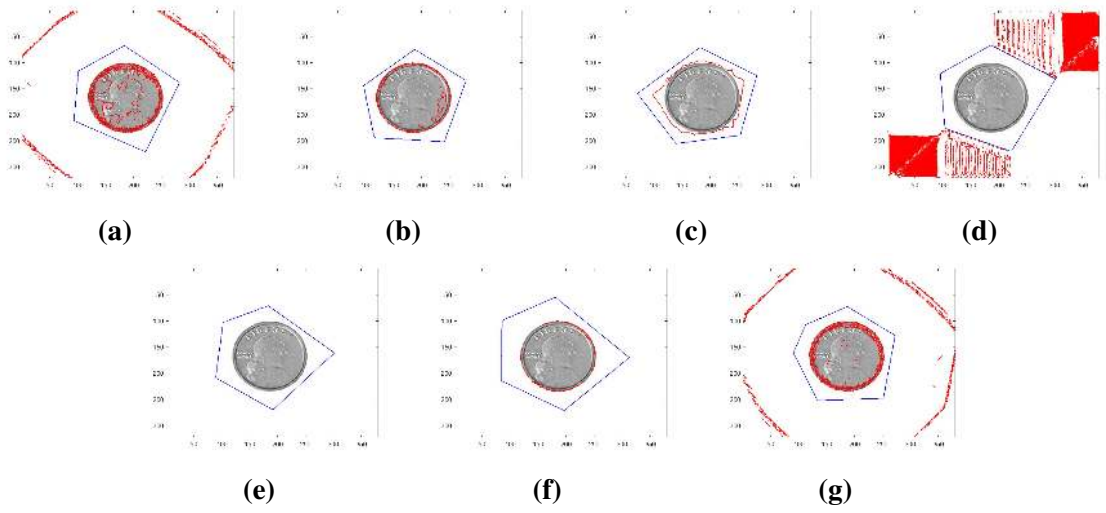


**Şekil 2.17.** Deney 11,12,13 deki  $\sigma$ 'nin değişimine göre düzgünleştirilmiş görüntüler, [a,b,c,d]: sırasıyla orijinal görüntü,  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 5$  ve  $\sigma = 10$ .

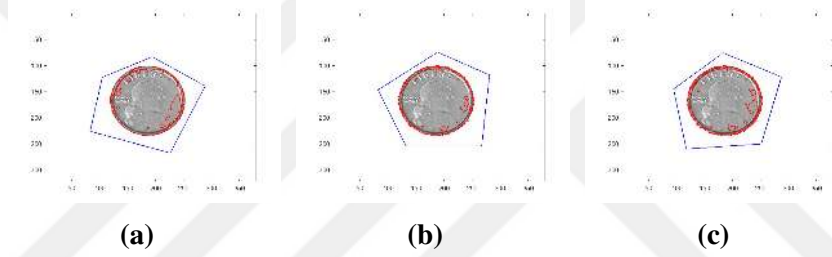
### 2.2.3 Tartışma ve Değerlendirme

Tablo 2.1, parametre optimizasyonunda bir motivasyon sağlaması için oluşturulmuştur. Bu 13 durumda 200 iterasyon çalıştırılmış, çıkan neticeler verilmiştir. İlk yedi deneye bakılırsa evrilme parametresinin değişimi incelenmektedir. Bu parametre negatif durumlarda eğriyi içe doğru, pozitif durumlarda ise dışa doğru evirir. Gereğinden fazla büyük sayılarda ise evrim çok hızlı olacağından eğri parçalanarak dağılır. Sıfır durumunda ise eğri evrilemez sadece bocalar. Dolayısıyla Şekil 2.18'e bakılırsa, soldan sağa ilk görüntüde ve son görüntüde eğrinin parçalanarak yeniden birleşmeye çalıştığı, beşinci görüntüde yeniden birleşemediği, dördüncü görüntüde bocaladığı ve en uygun durumun ise üçüncü durum olduğu görülür.

Tablo 2.1'de, sekizden ona kadar olan durumlarda kenar parametresi incelenmiştir. Kenar parametresinin sıfırdan büyük herhangi bir sayı olması yeterlidir. Tablodaki durumlarda kenar parametresi 1,5,10 değerlerini alırken, diğer parametreler sabit bırakılmıştır. Şekil 2.19'a bakılacak olursa kenar parametresi soldan sağa büyüyerek gitmektedir. Bu durum ise dikkat edilirse nesne üzerinde eğrilerin daha detaylı bir çıkarım yapmasını sağlamıştır.

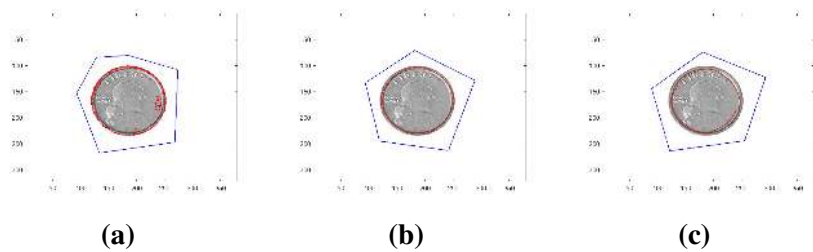


**Şekil 2.18.** Deney 1-7: Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.



**Şekil 2.19.** Deney 8-10: Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.

Tablo 2.1’de Gauss varyansı son üç deneyde birden ona doğru değişmekte iken diğer parametreler sabit kalmaktadır. Dikkat edilmesi gereken nokta, Şekil 2.20’ye bakılırsa birinci ve sonuncu durumlar düzgünleştirmenin ne çok olması ne de az olmasını ifade etmektedir. Örneğin ikinci görüntüde sonuç gayet uygun çıkmıştır.



**Şekil 2.20.** Deney 11-13: Son durum, mavi ile başlangıç eğrisi, kırmızı ile aktif kontur görüntülenmektedir.

Tüm bu deneysel çalışmalardan sonra, "Bu parametreler ne olursa iyi sonuçlar elde edilebilir?, Bunların en optimal sonuçları nedir?" soruları araştırıldı. Bu araştırma için, yapay

zeka algoritmaları ile çalışıldı. Bundan sonraki bölümlerde yapay zeka algoritmaları ile elde edilen optimizasyon sonuçları, bunları elde etmek için yapılan eğitimler ve testler yer alacaktır.

### 2.3. Parametre Optimizasyonu

Önceki bölümde  $c, \rho, \sigma$  parametre değişiminde görüntüdeki eğri hareketinin ve bölütlemenin nasıl olduğu tartışılmıştı. Bu bölümde parametrelerin bu değişimlerin optimum olduğu değerlerin neler olduğu, yapay zeka optimizasyon algoritması olan meta-sezgisel yaklaşımlarla tartışılacaktır.

#### 2.3.1 Genel Optimizasyon

Genel bir optimizasyon probleminde mümkün olan tüm çözümler içerisinde problemin çıktısını maksimize eden en iyi çözüm bulunmaya çalışılır. Basit bir optimizasyon problemi algoritması, Algoritma 2.2’de verilmiştir.

Bu algoritmada optimallik testinin ve yeni tahmini değer  $x_{k+1}$ ’in belirlenmesinin birbirinden

---

**Algoritma 2.2:** Genel Optimizasyon I

---

```
1  $x_0$  çözümünün tahmini başlangıç değerini belirle;  
2  $n$  üst limitini belirle;  
3  $k = 0$ ;  
4 while  $k < n$  do  
5   if  $x_k$  optimal then  
6     Dur;  
7   else  
8      $x_{k+1}$  çözümünün yeni tahmini değerini belirle;  
9   end  
10   $k$ ’yi bir artır;  
11 end
```

---

ayrı şeyler olduğunu görülür. Ancak, sıklıkla optimallik testinden elde edilen bilgiye göre, yeni noktaların hesabı yapılır. Örnek olarak,

$$\text{minimize } f(x) \quad (2.27)$$

bir boyutlu sınır değeri olmayan bir problemin çözümünde, optimallik testi  $f'(x) = 0$  şeklindedir. Eğer  $f'(x_k) \neq 0$ , o zaman  $x_k$  optimal değildir ve  $f'(x_k)$ ’nin işareti  $f$ ’nin  $x_k$  noktalarında azalıp azalmayacağını bilgisini verdiği için  $f$ ’nin  $x_{k+1}$  noktalarının seçiminde nasıl hızlıca değişim göstereceğinin bilgisini de vermektedir. Dolayısıyla optimizasyon problemlerinin çoğun-

daki temel algoritma aşağıdaki şekildedir.

Bu algoritmada görülebileceği gibi çözümlerin beklenen yönü olarak nitelendirilen arama yönü

---

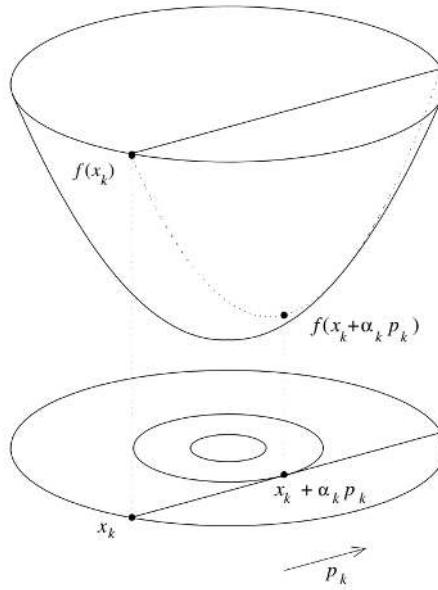
**Algoritma 2.3:** Genel Optimizasyon II

---

```
1  $x_0$  çözümünün tahmini başlangıç değerini belirle;  
2  $n$  üst limitini belirle;  
3  $k = 0$ ;  
4 while  $k < n$  do  
5   if  $x_k$  optimal then  
6     Dur;  
7   else  
8     Arama yönü(search direction)  $p_k$ 'yi belirle;  
9      $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$  şeklinde tahmini bir çözüm üreten adım uzunluğu  $\alpha_k$ 'yi  
     belirle;  
10  end  
11   $k$ 'yi bir artır;  
12 end
```

---

$p_k$  bir başka deyişle çözümleri güncelleyecen yön, hesaplandığında  $\alpha_k$  adım uzunluğu ile çözümleri  $x_{k+1}$  şeklinde günceller. Bu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



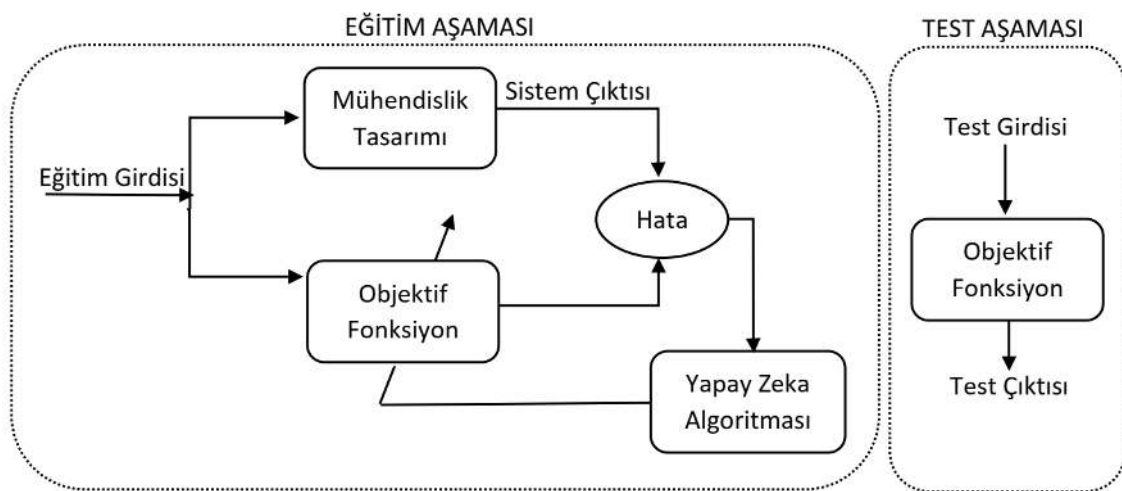
**Şekil 2.21.** Genel optimizasyon ilüstrasyonu (Griva, Nash ve Sofer, 2009)

Yukarıda bahsedilen arama yönlerinin bulunduğu, yada bir çok arama yönleri teşkil eden bölgeye, arama alanı(search area), arama alanlarını teşkil eden uzaya arama uzayı denir. Arama alanına santim santim bakmak, elbette büyük bir enerji sarfiyatına ve zamana neden olacaktır. Öyle bir senaryo gerekir ki, herhangi bir optimizasyon tekniği sadece çözümü yakalama

olasılıklarının yüksek olduğu potansiyel bölgelere odaklanmalıdır. Tabii olarak, herhangi bir optimizasyon problemi bazı kısıtlar gibi karar değişkenleri ve amaç fonksiyonu ile birlikte incelenir. Dolayısıyla,  $P$  bir optimizasyon problemi,  $S$  bir arama uzayı,  $\Omega$  kısıtlamalar kümesi ve  $f$  bir amaç fonksiyonu olmak üzere  $P = (S, \Omega, f)$  optimizasyon probleminin optimal çözümü  $s^*$ , eğer  $f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$  sağlıyorsa amaç fonksiyonunu minimize eder,  $f(s^*) \geq f(s), \forall s \in S$  sağlıyorsa amaç fonksiyonunu maksimize eder (Hussain vd., 2019: 2191).

### 2.3.2 Yapay Zeka Optimizasyonu

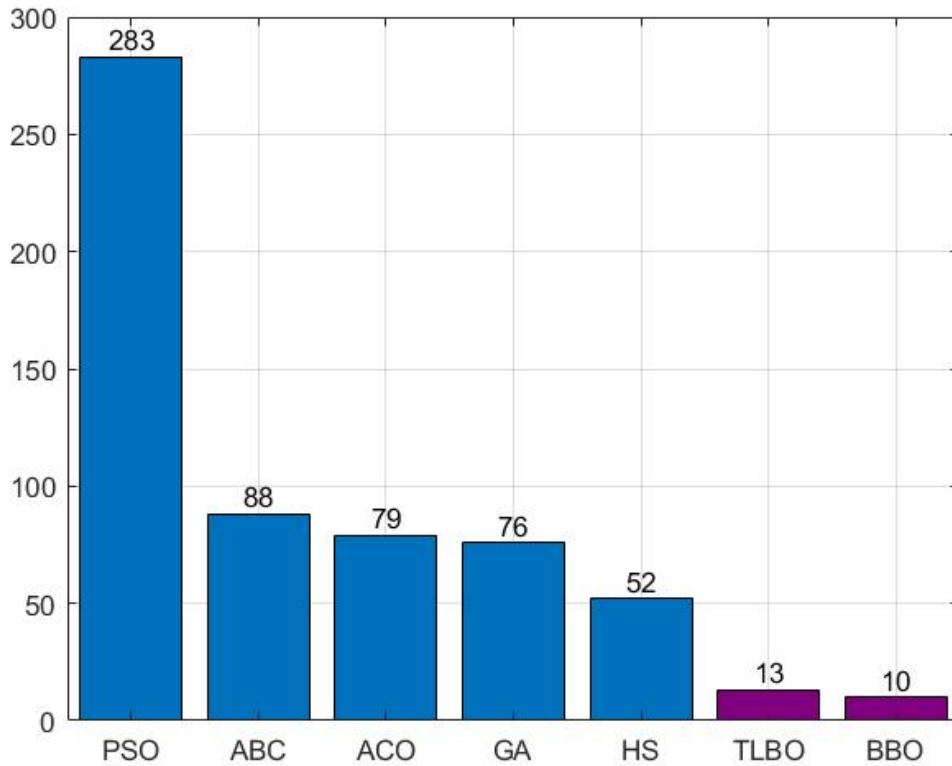
Yapay zeka optimizasyon algoritmaları son zamanlarda karmaşık optimizasyon problemlerinin çözümünde büyük rol almaktadır. Yapay zeka tabanlı algoritmalar genellikle doğal fenomenlerin, yani doğadaki canlıların sosyal davranışlarının benzetimi ile ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla daha sezgisel veya meta-sezgisel adını alırlar ve sezgisel algoritmalar olarak bilinirler. Bir yapay zeka optimizasyonunda temelde iki aşama vardır, bunlar eğitim ve test aşamalarıdır. Eğitim aşamasında optimizasyonu sağlanacak veya optimum parametreleri bulunacak mühendislik probleminden veri setleri oluşturulur, bunlara eğitim seti denilir. Bir eğitim setine sahip mühendislik problemi yapay zeka algoritması ile çözülür. Her bir veri için bir sonuç bulunur. Bulunan sonuçlardan en iyisi test aşaması için saklanır. Bu sonuç yapay zeka algoritmasının bulduğu optimum sonuçtur. Test aşamasında bulunan optimum parametreler yine mühendislik problemi için oluşturulan eğitim setinden farklı bir test seti ile test edilir. Tüm bu aşamaları anlatan diagram aşağıda görülmektedir:



**Şekil 2.22.** Yapay zeka optimizasyonu gösterimi



Aşağıdaki grafikte son yıllardaki sezgisel algoritmalar ile ilgili yayınların sayısı görülmektedir (Hussain vd., 2019: 2191). Bu çalışmada kullanılacak yapay zeka algoritmalarından son zamanlarda en çok yayın çıkaran ilk beş algoritma sırasıyla Particle Swarm Optimization(PSO) (Kennedy ve Eberhart, 1995: 1942),Artificial Bee Colony(ABC) (Karaboga, 2005), Ant Colony Optimization(ACO) (Dorigo, Birattari ve Stutzle, 2006: 28), Genetic Algorithm(GA) (Holland, 1992: 66) ve Harmony Search Algorithm(HS) (Geem, Kim ve Loganathan, 2001: 60) dir. Ayrıca bu algoritmalara ek olarak daha az yayın çıkaranlar arasında yer alan Teaching Learning Based Optimization(TLBO) (Rao, Savsani ve Vakharia, 2011: 303), Biogeography Based Optimization(BBO) (Simon, 2008: 702) algoritmaları da kullanılmıştır.



**Şekil 2.23.** Kullanılan sezgisel algoritmaların yayın sayıları (Hussain vd., 2019: 2191)

Parçacık sürü optimizasyonu gıda kaynakları için yiyecek arayan sürü kuşların davranışlarından esinlenmiştir, PSO’da arama ajanları, yani parçacıkların her biri üç boyutlu vektör kümeleridir ve parçacığın anlık pozisyonu, önceki en iyi pozisyonu ve hızından oluşur. Ayrıca parçacık sürüsü içindeki her üye arama işlemi sırasında ulaşabildiği komşusu hakkında bilgiye sahiptir.

---

**Algoritma 2.4:** Parçacık Sürü Optimizasyonu (Particle Swarm Optimization)

---

```
1 Başlangıç hız limitlerini hesapla;  
2 Başlangıç pozisyonunu belirle;  
3 Başlangıç hızını belirle;  
4 while Durdurma kriteri tamamlanmadığında do  
5   foreach parçacık do  
6     hızı hesapla;  
7     hızı sınırla;  
8     pozisyonu hesapla;  
9     if pozisyon uygun bölgede then  
10      pozisyonu değerlendir;  
11    end  
12  end  
13  Yeni hız sınırlarını hesapla;  
14 end
```

---

Arılar, yiyecek aramak veya çiftleşmek için toplu davranış sergileyen böceklerin en bilinen örnekleri arasındadır. Yapay arı kolonisi algoritmasında, arama ajanları bir arama uzayında optimal yiyecek arayan yapay bal arılarını temsil eder. Bu yiyecek kaynaklarından her biri, belirli bir optimizasyon problemi için olası çözümleri temsil eder, yiyeceğin miktarı ise kaliteyi temsil eder. Arı kolonisinin üyeleri işçi arılar, gözcü arılar ve kaşif arılar olmak üzere üç gruba ayrılır. Bu arı grupları, arıların yiyecek ararken kullandıkları mekanizmalara göre farklı görevlere sahiptir. Örneğin işçi arılar bilinen gıda kaynaklarının çevresini keşfetme ve kovana getirme görevini üstlenirler. Kaşif arılar bilinmeyen yeni besin kaynakları için tüm araziye keşfetme görevini üstlenirler. Gözcü arılar kovana gözetirler, işçi arıların kovanda ilettikleri bilgiye göre yiyecek arayışına çıkarlar.

---

**Algoritma 2.5:** Yapay Arı Kolonisi (Artificial Bee Colony)

---

```
1 Başlangıç yiyecek kaynaklarını rasgele belirle;
2 İşçi arıları bu kaynaklara rasgele gönder;
3 while Sonlandırma kriteri oluşmadıkça do
4     /*İşçi arıların fazı*/;
5     for her bir işçi arı do
6         Komşu bölgelerde yiyecek kaynağı bul;
7         Yeni yiyecek kaynağının fitnessını hesapla;
8         En iyi seçimi uygula;
9     end
10    Her bir yiyecek kaynağı için olasılıkları hesapla;
11    /*Gözcü arıların fazı*/;
12    for her bir gözcü arı do
13        Yukarıda hesaplanan yiyecek kaynağı olasılığına göre, gözcü arıları
            kaynaklara gönder;
14        Komşu bölgelerde yiyecek kaynağı bul; Yeni yiyecek kaynağının fitnessını
            hesapla;
15        En iyi seçimi uygula;
16    end
17    /*Kaşif arıların fazı*/;
18    if herhangi bir işçi arı kaşif arı olursa then
19        Kaşif arıyı rasgele üretilen bir yiyecek kaynağına gönder;
20    end
21    Buraya elde edilen en iyi çözümü sakla;
22 end
23 En iyi çözümü çıkar;
```

---

Doğada karıncalar rasgele hareket ederler ve uygun bir kaynak bulunduğunda arkalarında bir feromon izi bırakarak kolonilerine dönerler. Böylece karıncalar bıraktıkları feromonları veya diğer karıncaların izlediği yolu takip ederek daha önce bulunan besin kaynaklarına yönelebilirler. Doğal olarak bir karınca bir yoldan ne kadar çok gidip gelirse, feromonun dağılması içinde o kadar çok zaman gerekir. Bu nedenle daha kısa yollarda daha fazla feromon

yoğunluğu vardır. Bunun anlamı şudur, eğer bir karınca koloniden besin kaynağına kısa bir yol bulursa, diğer karıncalarında bu yolu takip etme olasılığı yüksektir. Böylece kolonideki karıncalardan çoğunluğunun takip ettiği bir yol, feromon yoğunluğunu artırıp tümünün takip etmesine yol açacağından optimal yol bulunmuş olacaktır.

---

**Algoritma 2.6:** Karınca Kolonisi Optimizasyonu (Ant Colony Optimization)

---

```

1 Başlangıç karınca kolonisini rasgele oluştur;
2 Başlangıç feromon izlerini ve parametrelerini belirle;
3 Başlangıç kolonisinin fitness değerlerini hesapla;
4 Koloninin en iyi çözümünü bul;
5 while Sonlandırma kriteri oluşmadıkça do
6   for her bir karınca do
7     Çözümü bul;
8     Bölgesel feromon izlerini güncelle;
9   end
10  Feromonu güncelle;
11  En iyi karıncayı belirle;
12 end
13 En iyi çözümü çıkar;

```

---

Genetik Algoritma, adından da anlaşılacağı üzere doğadaki birey oluşumunda genetik yapının işlevinden esinlenerek modellenmiştir. En iyi sonucu üreten kromozomun yaşaması prensibinden yola çıkarak en iyi sonuca ulaşma metodudur. Genetik algoritmada bireyler sayı dizilerinden oluşan vektörler, bireyler topluluğunda popülasyon adı verilen matrislerdir. Bireylerdeki yani vektörlerdeki her bir bileşene gen denilir. Bireylerin problem için çözüm olup olmayacağına maliyet fonksiyonu karar verir, en iyi fitness değerlerine sahip bireyler çoğalmaları için seçilir. Böylece bu bireyler çaprazlama neticesinde çocuk bireyler oluşur, bunlar yeni bireylerdir. Yeni gelişip büyümeleri yani mutasyona uğramaları neticesinde popülasyona dahil edilirler. Yeni çocukların oluşması için bu işlemler yeniden tekrarlanır.

Armoni Arama Algoritması, müzisyenlerin mükemmel armoniyi bulmak amacıyla hafızalarında depolanan farklı müzik perdelerini birleştirerek bir armoni oluşturduğu söylenen, armoni doğaçlama sürecinin arkasındaki ilkelerden esinlenen metasezgisel bir yaklaşımdır. Algoritmada mükemmel uyumu bulma süreci, bir optimizasyon probleminde optimal çözümü bulmaya benzer.

---

**Algoritma 2.7:** Genetik Algoritma (Genetic Algorithm)

---

```
1 Başlangıç popülasyonunu rasgele belirle;  
2 Her bir kişinin maliyetini hesapla;  
3 En iyi bireyi belirle;  
4 while Sonlandırma kriteri oluşmadıkça do  
5     Eşleşecek bireylerin seçimini yap;  
6     Yeni bireylerin oluşması için çaprazlama işlemini uygula;  
7     Yeni bireyleri mutasyona uğrat;  
8     Yeni bireylerin fitnessını hesapla;  
9     Yeni bireyleri eski popülasyona gönder;  
10    Düşük fitnesslı bireyleri ele;  
11 end
```

---

---

**Algoritma 2.8:** Armoni Arama Algoritması (Harmony Search Algorithm)

---

```
1 Armoni hafızasını dikkate alma oranını tanımla(Harmony Memory Considering  
   Rate(HMCR));  
2 Ton ayarlama oranını tanımla(Pitch Adjusting Rate(PAR));  
3 Rasgele armonilerle armoni belleği(Harmony Memory(HM)) üret;  
4 while Maksimum iterasyona ulaşılmadıysa do  
5     while Maksimum değışkene ulaşılmadıysa do  
6         if  $(0, 1)$  aralığından seçilen rasgele bir sayı  $< HMCR$  then  
7             Bu değışken için HM'den bir değer seç;  
8             if  $(0, 1)$  aralığından seçilen rasgele bir sayı  $< PAR$  then  
9                 HM'den seçtiğın değere bir miktar ekleyerek ayarla;  
10            end  
11        else  
12            Rasgele bir değer üret;  
13        end  
14    end  
15    Yeni armoni çözümü daha iyiyse al;  
16 end  
17 Güncel en iyi çözümü bul;
```

---

Öğretme Öğrenme Tabanlı Optimizasyonda, bir öğrenci grubundan en iyisi öğretmen olarak seçilir ve öğretmen diğer öğrencilerin oluşturduğu grubun ortalamasını yükseltmek için, bilgisini onlarla paylaşır. Bu aşamaya öğretmen aşaması veya fazı denir. Öğrenci fazında ise, rasgele bir öğrenci diğer öğrencilerle iletişime geçerek onların performansını artırmaya çalışır.

---

**Algoritma 2.9:** Öğrenme Öğretme Tabanlı Optimizasyon (Teaching Learning Based Optimization)

---

```
1 Başlangıç öğrencilerini belirle;
2 Öğrencilerin fitnesslarını hesapla;
3 while durdurma kriteri oluşmadıkça do
4     En iyi öğrenciyi öğretmen olarak seç;
5     Tüm öğrencilerin ortalamasını hesapla;
6     for her bir öğrenci do
7         /*Öğretmen Fazı*/;
8         Öğretmen çarpanını hesapla(1 yada 2 olmalı);
9         Öğrenciyi bu çarpana göre güncelle;
10        Yeni öğrencinin fitness değerini bul;
11        Eğer eski öğrenciden daha iyiyse yenisini al;
12        /*Öğrenci Fazı*/;
13        Rasgele diğerinden farklı bir öğrenci seç;
14        Yeni öğrenciyi eskileri ile kıyasla;
15        Eğer eski öğrenciden daha iyi ise eskisi ile değiştir;
16    end
17 end
```

---

Biocoğrafya canlıların coğrafi dağılımının incelenmesidir. Biocoğrafik modeller türlerin habitatlar arasında nasıl göç ettiklerini, görünümlerini, adaptasyonlarını, evrimlerini ve yok oluşlarını açıklamaya çalışır. Habitattaki tür sayısı arttıkça daha kalabalık hale gelir, daha az tür habitata göç ederek başarılı bir şekilde hayatta kalabilir ve göç oranı azalır. Habitatta tür yoksa göç oranı sıfır olmalıdır. Tür sayısı arttıkça habitat kalabalık hale gelir, daha fazla tür diğer olası habitatları keşfetmek için habitatı terk edebilir ve göç hızı artar.

---

**Algoritma 2.10:** Biocoğrafya Tabanlı Optimizasyon (Biogeography Based Optimization)

---

```
1 Başlangıç popülasyonunu oluştur;  
2 Bireylerin fitnesslarını bul;  
3 while Durdurma kriteri oluşmadıkça do  
4     Çözümleri en iyi fitness değerlerine göre sırala;  
5     Dış ve iç göç oranlarının nesnektif fonksiyon değerlerine göre belirle;  
6     Çözümleri bu orana göre güncelle;  
7     Bireyleri mutasyona uğrat;  
8     Mutasyona uğrayan bireylerin fitnesslarını bul;  
9     Fitness değerlerine göre bireyleri sırala;  
10 end  
11 En iyi sonucu çıkar;
```

---

### 2.3.3 Deneysel Sonuçlar

Optimizasyon problemlerinde optimal çözümü bulmak için bu zamana kadar bir çok algoritma geliştirilmiş, yapıları ve çözüm metodları incelenmiştir. Fakat bunlardan en ilginç olanları sezgisel ve meta-sezgisel yada sezgiüstü algoritmalar olmuştur. Bu algoritmaların bilim adamlarına ilham veren tarafı ise tabiatın işleyisi içerisinde kendiliğinden gelişen optimallik arayışı olmuştur. Bu algoritmaların optimal çözümü bulmak için arama prosesleri özel bir ilgi alanına yönelik yapısal işleyişleri gerçekten inanılmazdır. Bu nedenle bazı modellenen sezgisel algoritmalar en optimal çözüme veya gerçek çözüme çok kısa zamanlarda ulaşabilir.

Bu bölümde daha önceki bölümlerde incelediğimiz  $c$ ,  $p$ ,  $\sigma$  parametrelerinin PSO, ABC, ACO, GA, HS, TLBO, BBO algoritmaları ile en optimal değerlerini bulmaya çalışacağız, bu değerlerde görüntünün yanıtını ayrıca analiz edeceğiz. Algoritmalarla yapılan incelemelerde aşağıdaki tabloda yer alan maliyet değerleri bulunmuştur.

**Tablo 2.2.** Ortaya çıkan en iyi maliyetler

| Algoritma | Ortalama maliyet   | En iyi maliyet     | En kötü maliyet    | Standart Sapma  |
|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|
| ABC       | 0.038413041        | 0.038384332        | 0.038452148        | 1.38E-05        |
| ACO       | <b>0.038388627</b> | <b>0.038370768</b> | 0.038411458        | 7.45E-06        |
| BBO       | 0.038416432        | 0.038391113        | 0.038452148        | 2.01E-05        |
| GA        | 0.038413945        | 0.038391113        | 0.038452148        | 1.85E-05        |
| HS        | 0.038416884        | 0.038370768        | 0.038445367        | 2.09E-05        |
| PSO       | 0.038422083        | 0.038384332        | 0.038465712        | 2.31E-05        |
| TLBO      | 0.038398573        | 0.03837755         | <b>0.038404677</b> | <b>6.51E-06</b> |

Tablodaki değerler algoritmalar 30 kez çalıştırıldıktan sonra elde edilen en iyi sonuçlardır. Tablo 2.2'nin ilk sütununda denemelerde kullanılan yedi algoritma ve iki, üç, dört ve beş sütunlarda onların eğitimleri sonucunda bu algoritmalarla karşılık sırasıyla ortalama maliyet, en iyi maliyet, en kötü maliyet ve popülasyonun standart sapması verilmiştir. Tablodan ortalama maliyetin en iyi değeri ACO algoritmasında olduğu görülmektedir. Yine tablonun üçüncü sütunundan en kötü maliyetler sıralandığında PSO, ABC, BBO, GA, HS, ACO, TLBO şeklinde bir sıralama görülür ki, en kötünün en iyisi olarak TLBO, ve en kötünün ikinci en iyisi olarak ACO çıkmaktadır. Özetle en iyi maliyet sıralaması ACO, HS, TLBO, ABC, PSO, GA, BBO olarak çıkarken, ortalama en iyi maliyet sıralaması ACO, TLBO, ABC, GA, BBO, HS, PSO çıkmaktadır. Dolayısıyla bu çalışmada ACO ve TLBO sonuçlarını ön planda değerlendirmek isabet olacaktır.

**Tablo 2.3.** Eğitim sonucunda elde edilen en iyi parametre değerleri

|      | $\rho$     | $c$         | $\sigma$   |
|------|------------|-------------|------------|
| ABC  | 1.15977333 | -9.84715543 | 1.4948825  |
| ACO  | 0.6852938  | -5.20059159 | 1.49711835 |
| BBO  | 3.27284251 | -4.45830569 | 1.20512633 |
| GA   | 8.5542024  | 9.77491109  | 1.5023567  |
| HS   | 0.78781235 | -5.94257386 | 1.49646862 |
| PSO  | 5.1788286  | -7.16793581 | 2.49949652 |
| TLBO | 0.87238302 | -6.60224216 | 1.48399116 |

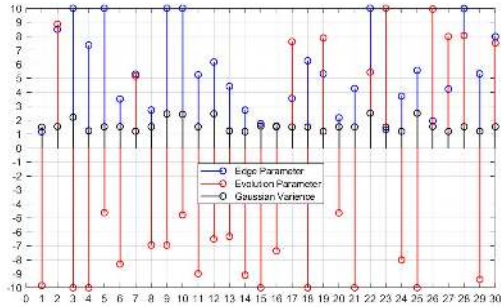


Tablo 2.2’de öne çıkan algoritmaların ACO ve TLBO algoritmaları olduğunu açıklamıştık. Diğer algoritmalarla birlikte eğitimlerin sonucunda parametre değerleri Tablo 2.3 ile verilmektedir. Bu tabloya dikkat edilirse ACO ve TLBO parametre değerlerinin birbirine çok yakın olduğu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla ACO ve TLBO’nun diğerlerine göre üstünlükleri ortaya çıkmaktadır.

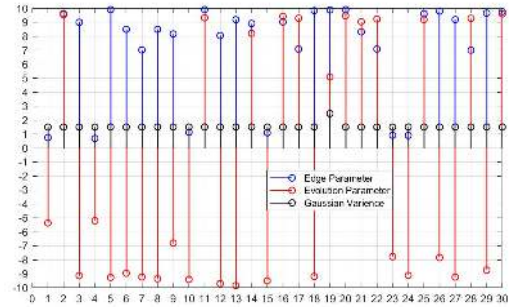
Burada hedeflenen "bir önceki bölümde el ile yapılan deneyler haricinde bir yapay zeka algoritması ile optimum parametreleri bulunabilir mi?" sorusuna cevap vermektir, dolayısıyla amaç algoritma yarıştırmak değil optimum sonucu bulmaktır. Bu nedenle diğer sonuçlarında incelenmesi amacıyla tüm denemelerde bulunan değerler Şekil 2.24 ile tek tek verilmektedir. Diğer bir Şekil 2.25 algoritmaların çıkardıkları tüm sonuçların kutu grafiği ile gösterimi verilmiştir.

Şekil 2.25’de sırasıyla a:kenar parametresi, b:evrilme parametresi, c:Gauss varyansı, d:en iyi maliyet ve e:harcanan zamanın dağılımları kutu grafiği ile incelenmiştir. Kutu grafikleri hakkında detaylı bilgiye (Potter vd., 2006: 97)’dan ulaşılabilir. Birinci seçenek olan kenar parametresine bakıldığında en geniş veri dağılımının TLBO ve ABC algoritmalarında ilginç olarak en dar veri dağılımlarından birisinin ACO algoritması olduğu söylenebilir. Ayrıca BBO, HS, PSO algoritmalarının medyanlarının birbirine yakın olması veri dağılım genişliğinin yakın aralıklarda seyretmesi daha öncede bahsedildiği gibi, ABC, ACO ve TLBO algoritmalarının bu algoritmalarından daha iyi neticelere ulaşmasını sağlamış olması büyük bir olasılıktır. Çünkü anlaşılan o ki bu problem için BBO, HS ve PSO parametre bulma performansında aynı seyrde gitmiştir. İkinci seçenekte veri eğri evrimi parametresinin diyagramına dikkat edilirse PSO hariç tüm algoritmaların medyan değerleri negatife doğru yoğun dağılım göstermektedir. Bu da daha önceki bölümde incelenen deneylerde de evrim hızının bu aralıkta olmasının daha iyi neticeler vermesi tezini kanıtlamakatadır. Ayrıca dağılımlar hemen hemen bütün bir aralığa yani incelenmesi istenilen aralığın tamamına kadar veri taraması yapılmış çoğunlukla ABC, ACO, HS ve TLBO arasında çok bir fark olmadığını gösterir. Üçüncü diyagram olan Gauss varyansının dağılımına bakıldığında algoritmalar arasında ACO ve TLBO birbirine çok yakın dağılım gösterdiği bunun haricinde BBO, GA ve HS’nin de yine birbirine yakın benzerlikler gösterdiği fakat diğer ABC ve PSO tamamen diğerlerinden farklı bir dağılım göstermiştir. Burada varyansın dağılım aralığı ve algoritmanın belirleyiciliği ile yine ACO ve TLBO’nun iyi sonuçlar vermesine neden olmuştur. Maliyet verisine bakıldığında en düşük maliyet aralığında çalışan algoritmalar ABC, ACO ve TLBO olmak üzere BBO ve PSO nun ise yüksek maliyet aralıklarında çalıştığı göz-

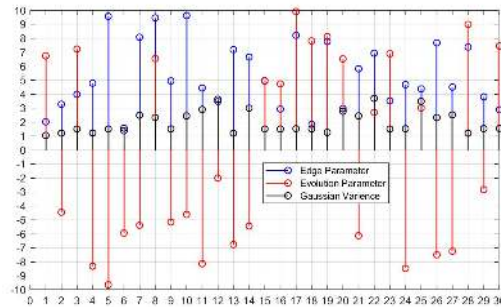
lemlemektedir. Buna nazaran beşinci diagrama bakıldığında ABC, PSO, BBO, GA işini kısa sürede bitirirde ACO, HS ve TLBO diğerlerine göre daha uzun sürede tamamlamaktadır.



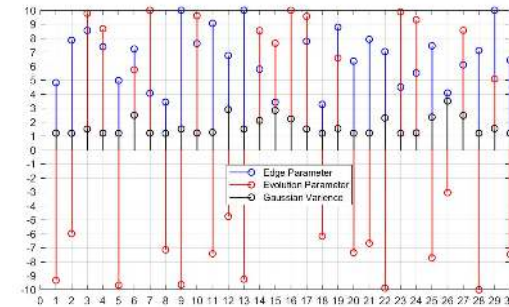
(a)



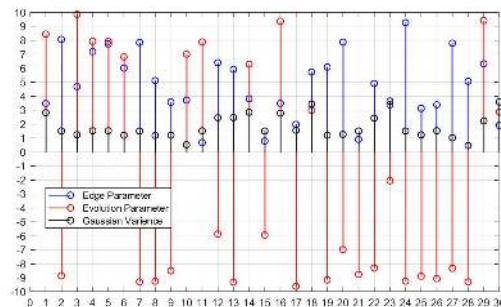
(b)



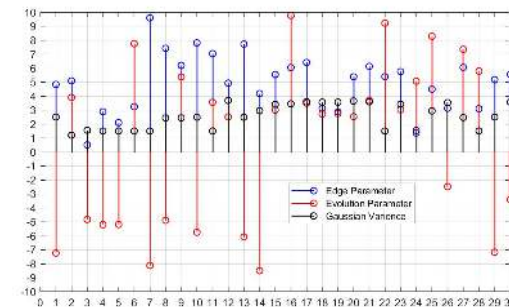
(c)



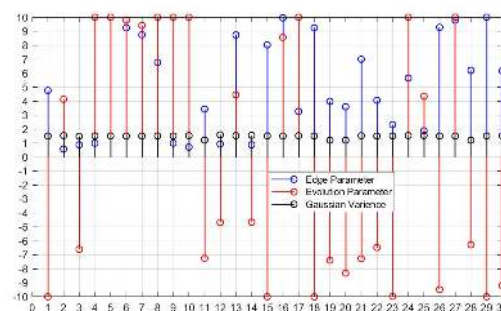
(d)



(e)

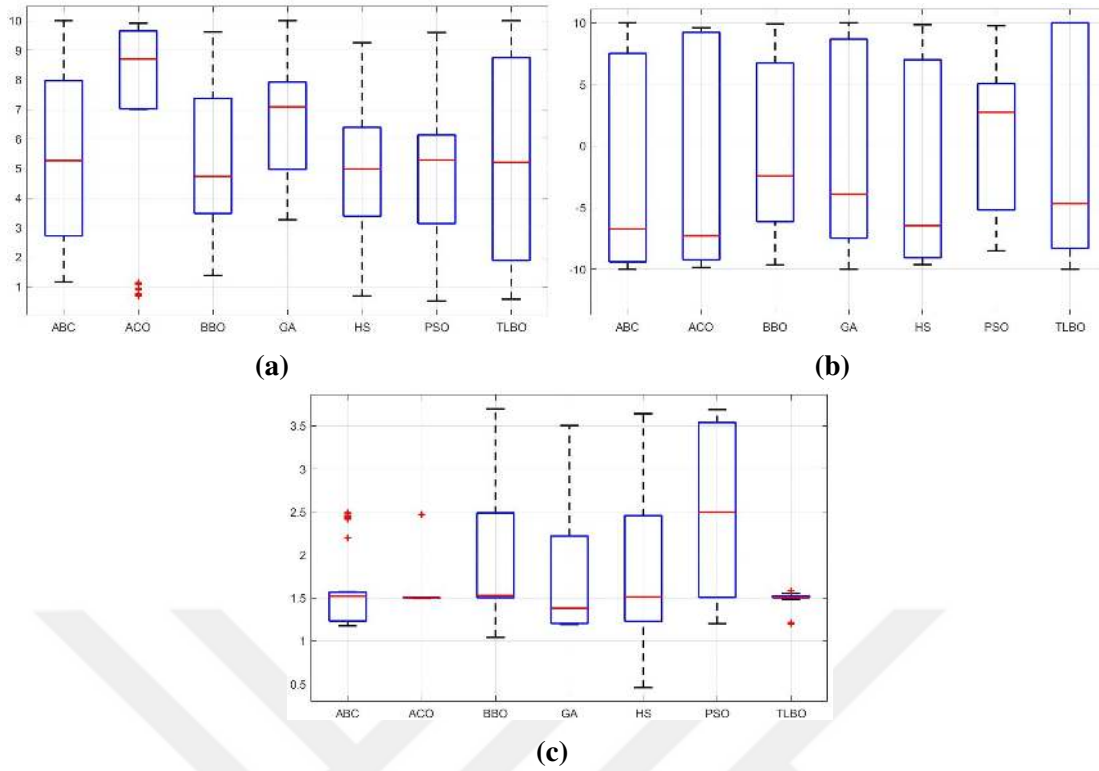


(f)



(g)

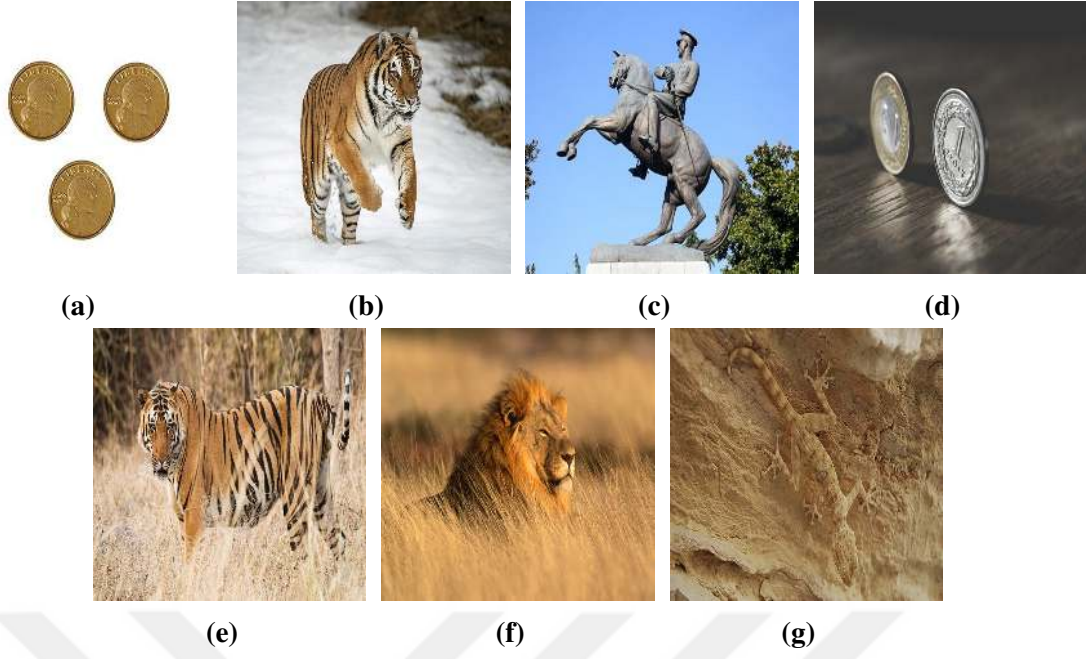
**Şekil 2.24.** [a, b, c, d, e, f, g]: Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarının her bir deneme sonucunda elde edilen parametre değerleri grafiği



**Şekil 2.25.** Kenar, evrilme, varyans

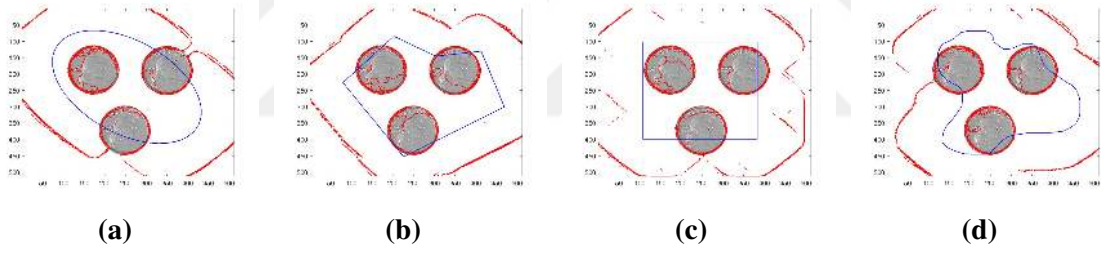
Finalde, bulunan neticeler yedi farklı nitelikte görüntüde test edilmiştir. Test görüntülerin özellikleri aşağıdaki Şekil 2.26’da nesneleri çok belirgin olandan nesneleri görüntü arka planında kamufle edilmiş görüntülere doğru sıralanmıştır. Şekil 2.26 (a)’daki görüntünün nesneleri çok belirgindir, fakat (g)’deki görüntüde nesneler kamufle edilmiştir.

Şekil 2.26’da verilen test görüntüleri için eğri evrimi hareketini incelemek adına dört farklı başlangıç eğrisi ile çalışılmıştır. Şekil 2.27’de örnek olarak ABC algoritması için verilen başlangıç eğrileri ile eğri evrimi sonuçları yer almaktadır. Diğer tüm algoritmalar içinde aynı dört başlangıç eğrisi kullanılmıştır. Deney sonuçlarından elde edilen verilere göre ACO ve TLBO algoritmaları diğer algoritmalara göre daha önde yer aldığı düşünülerek aşağıda Şekil 2.35 ve 2.40’te serbest başlangıç eğrisi ile sonuçları verilmiştir. Serbest başlangıç eğrisinin seçilmesinin nedeni bu eğri diğer üçünün gösterdiği tüm girinti ve çıkıntılara, kısaca karakterine sahiptir. Ayrıca ACO ve TLBO’ya göre daha az iyi sonuç veren algortmada Şekil 2.34’de verilmiştir.

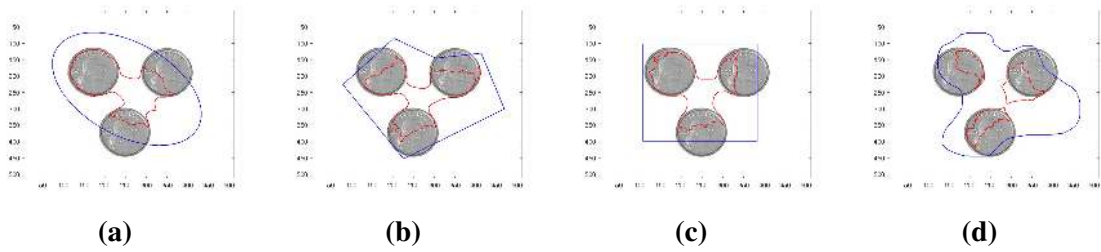


**Şekil 2.26.** Testlerde kullanılan görüntüler.

**Başlangıç eğrilerine göre algoritmaların test sonuçları:**

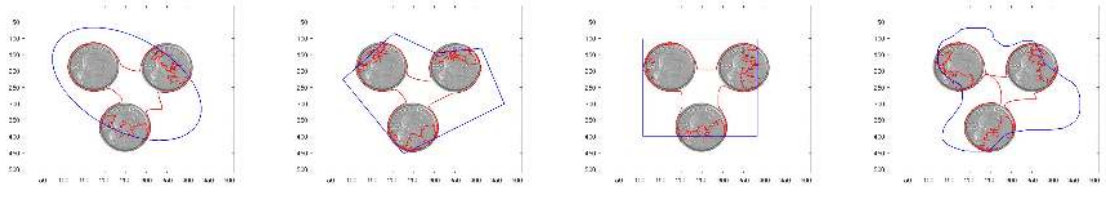


**Şekil 2.27.** Başlangıç eğrilerine göre ABC sonuçları.



**Şekil 2.28.** Başlangıç eğrilerine göre ACO sonuçları.





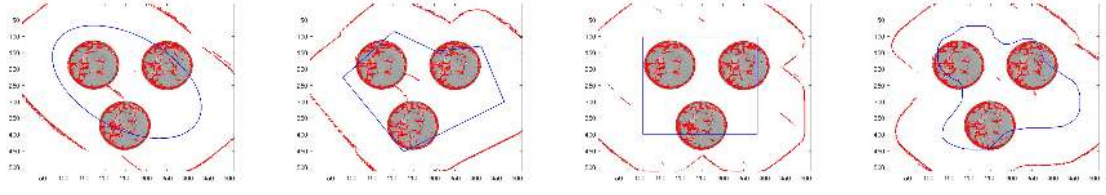
(a)

(b)

(c)

(d)

**Şekil 2.29.** Başlangıç eğrilerine göre BBO sonuçları.



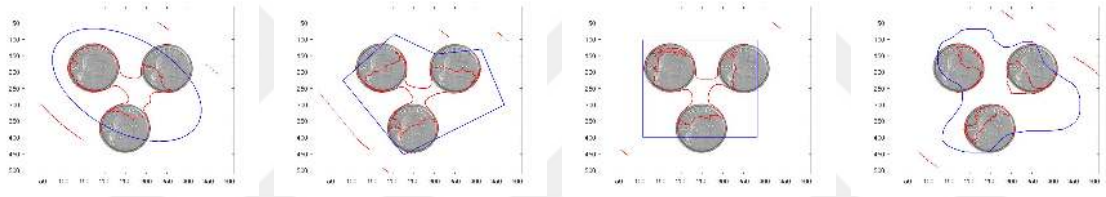
(a)

(b)

(c)

(d)

**Şekil 2.30.** Başlangıç eğrilerine göre GA sonuçları.



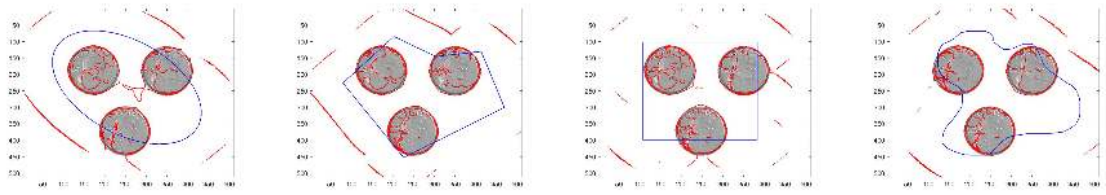
(a)

(b)

(c)

(d)

**Şekil 2.31.** Başlangıç eğrilerine göre HS sonuçları.



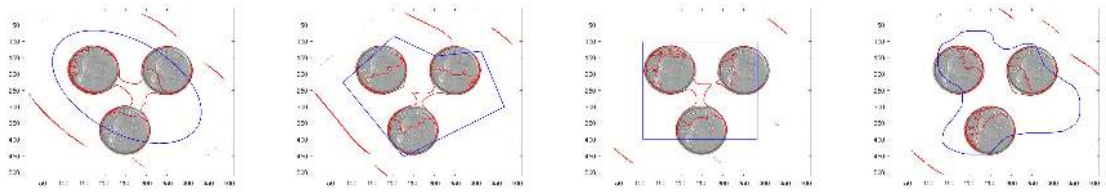
(a)

(b)

(c)

(d)

**Şekil 2.32.** Başlangıç eğrilerine göre PSO sonuçları.



(a)

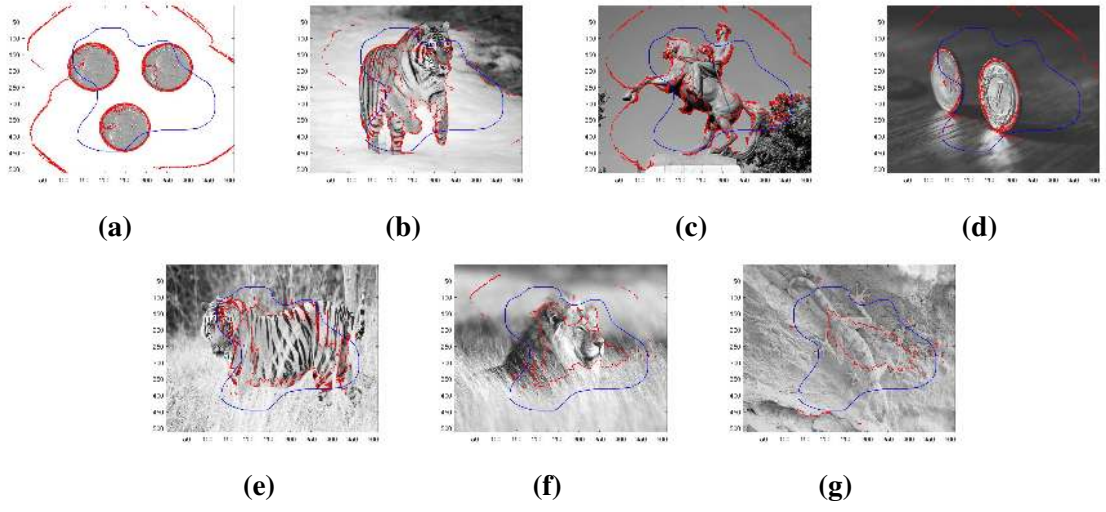
(b)

(c)

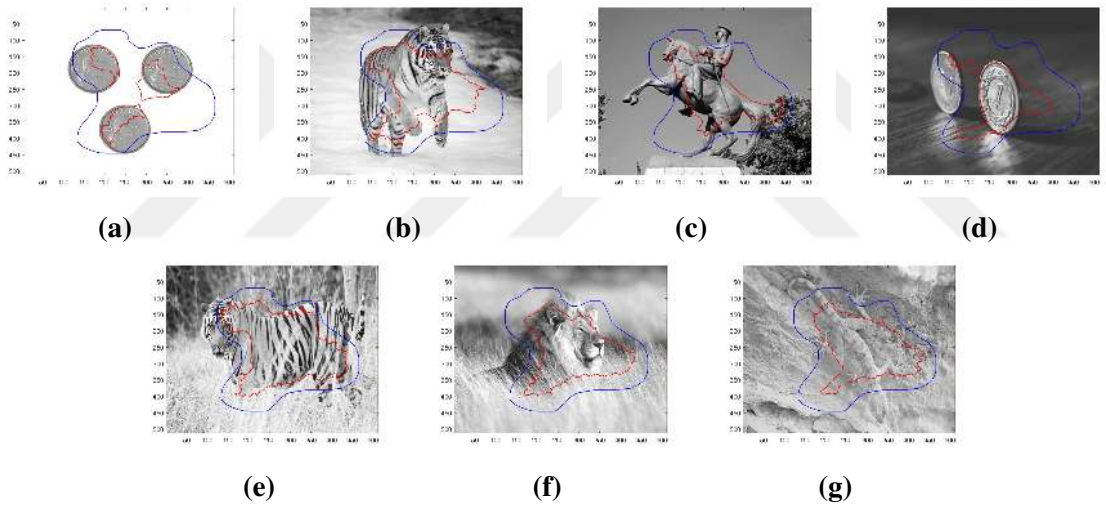
(d)

**Şekil 2.33.** Başlangıç eğrilerine göre TLBO sonuçları.

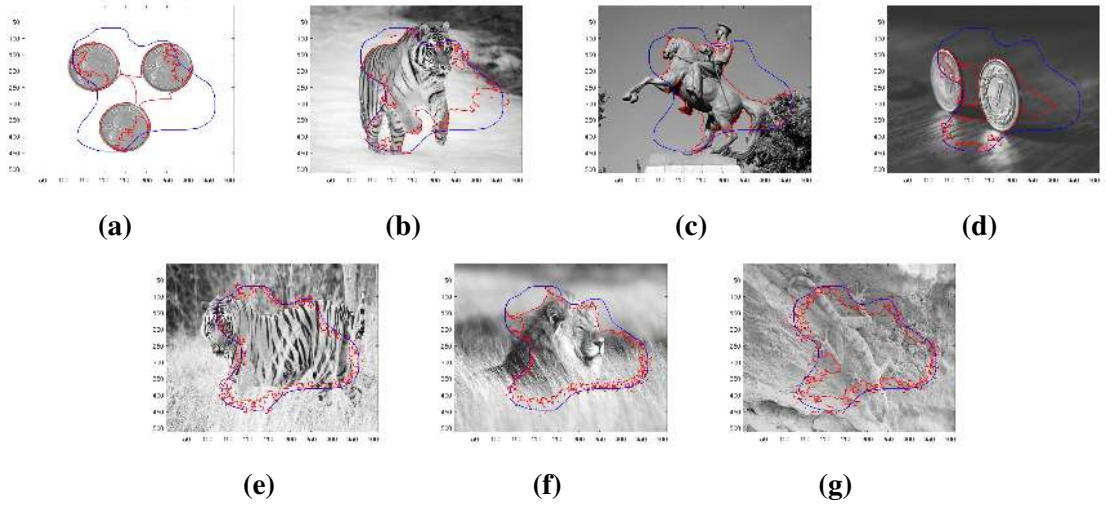
**Değişik nitelikte resimlere göre algoritmaların test sonuçları:**



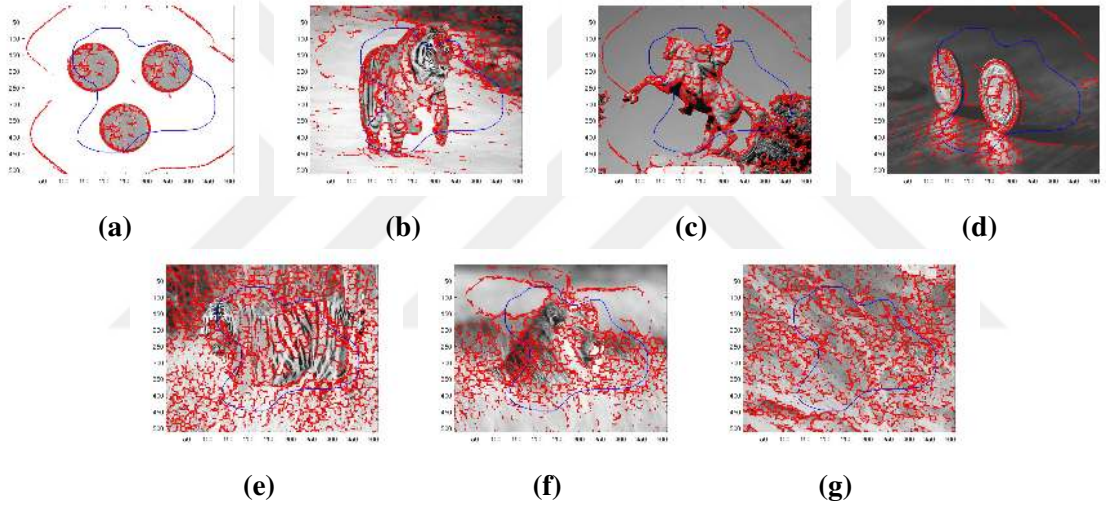
**Şekil 2.34. Resimlere göre ABC sonuçları.**



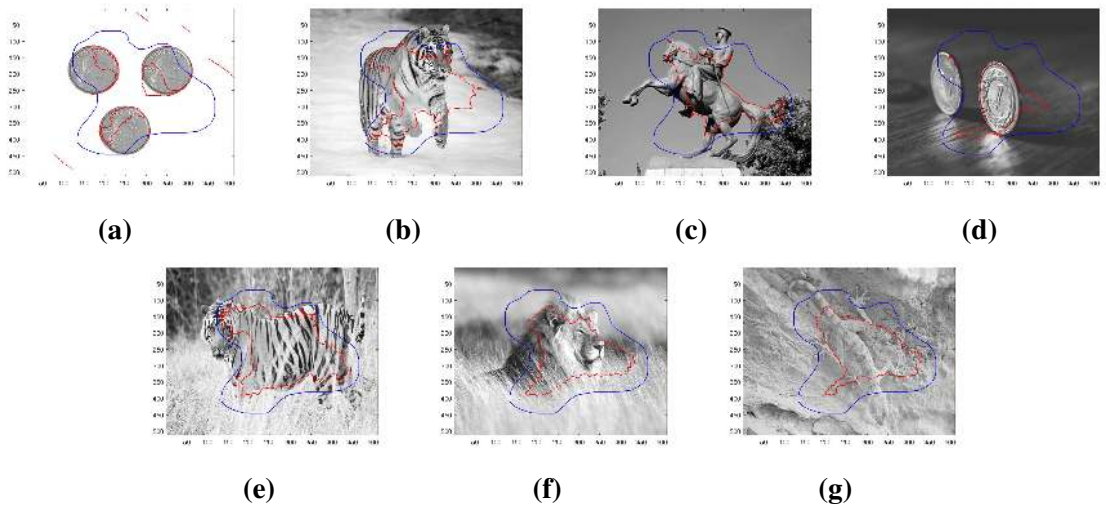
**Şekil 2.35. Resimlere göre ACO sonuçları.**



Şekil 2.36. Resimlere göre BBO sonuçları.

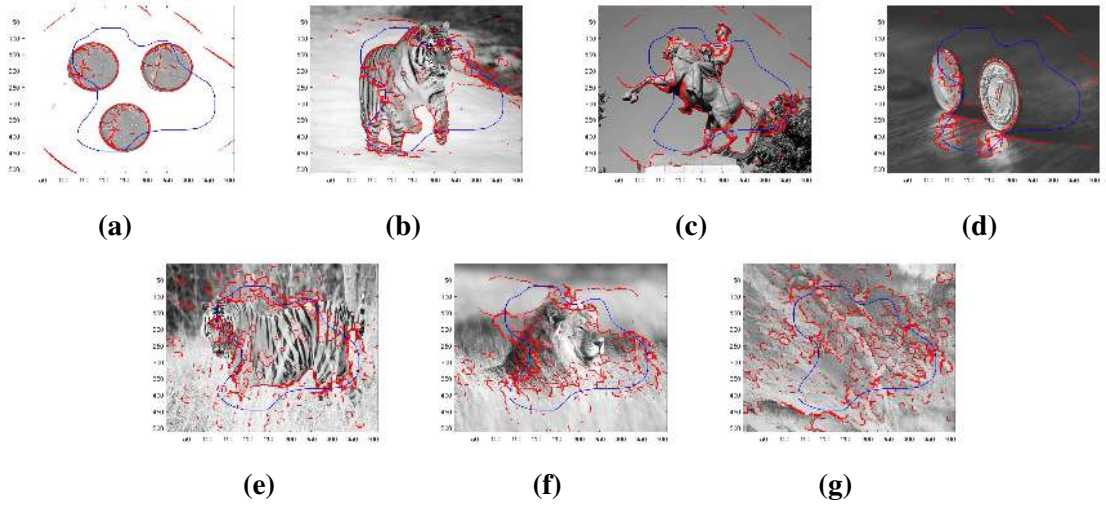


Şekil 2.37. Resimlere göre GA sonuçları.

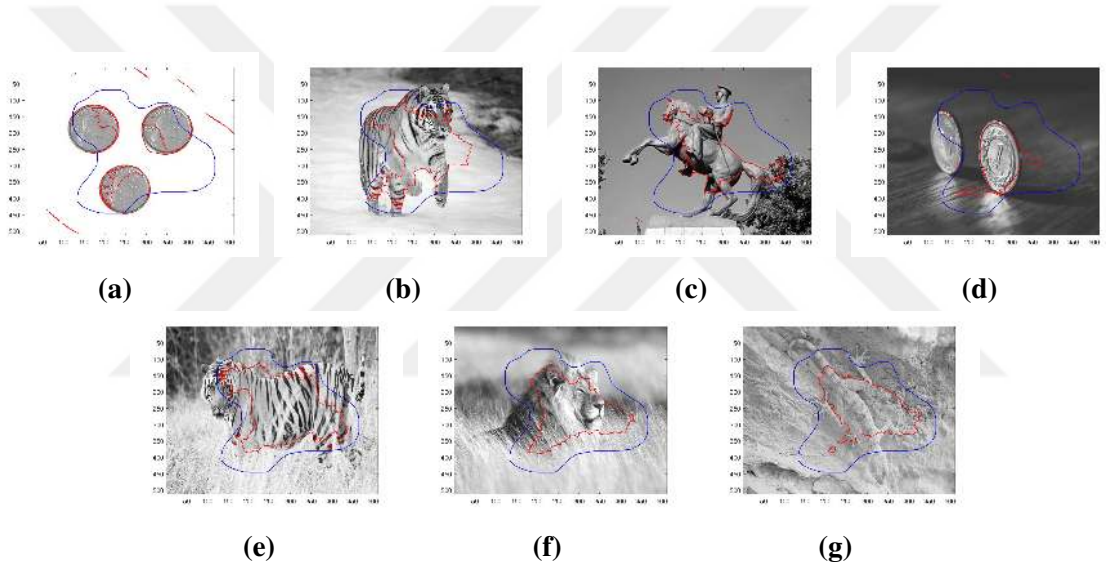


Şekil 2.38. Resimlere göre HS sonuçları.





**Şekil 2.39.** Resimlere göre PSO sonuçları.

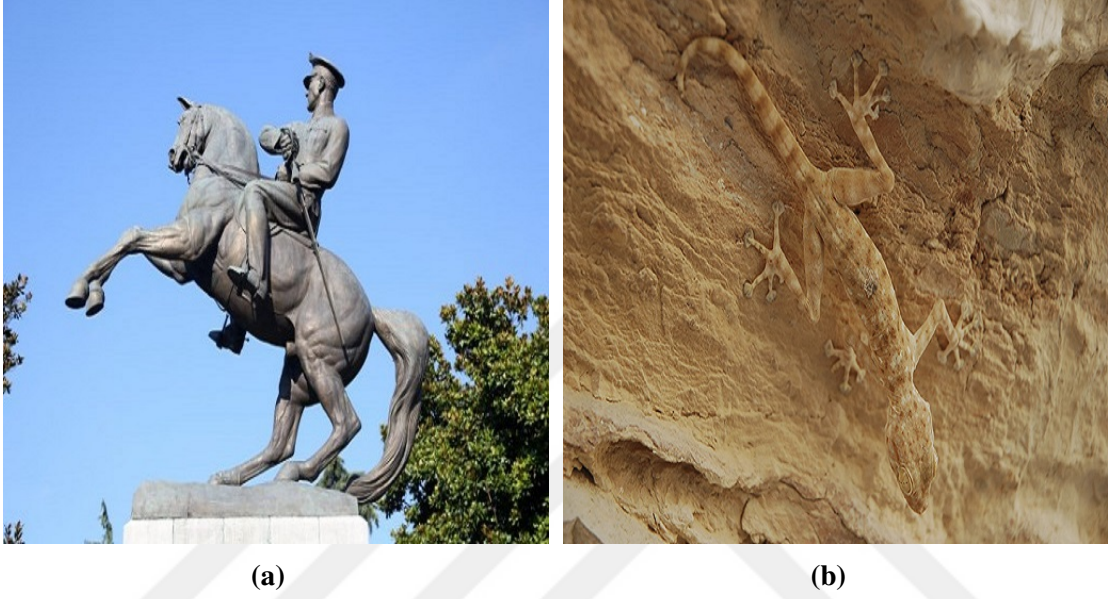


**Şekil 2.40.** Resimlere göre TLBO sonuçları.

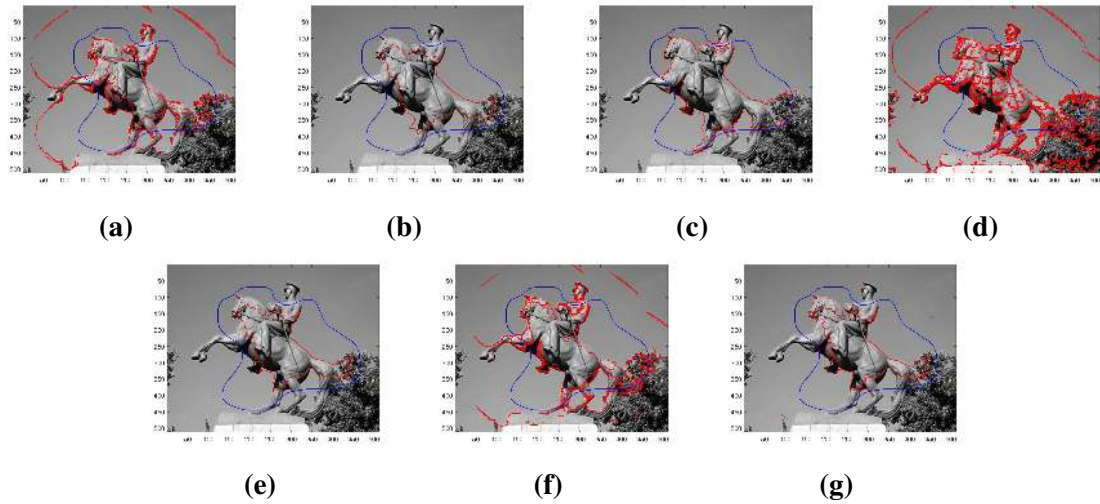


### 2.3.4 Tartışma ve Değerlendirme

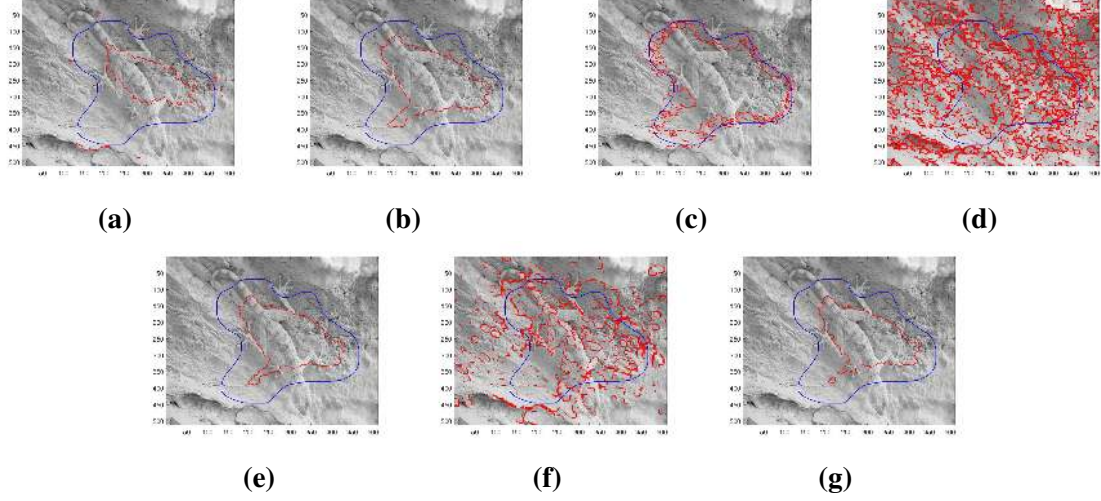
Test için seçilen görüntüler çoğunlukla kamufle görüntülerdir. Bu görüntüler nesneleri belirgin olandan nesneleri belirgin olmayana doğru test edilmiştir. Şekil 2.42’de nesnesi belirgin bir görüntünün tüm algoritmalara göre test sonuçları görülmektedir. Ayrıca Şekil 2.43’de ise nesneleri kamufle edilmiş bir görüntüde yine tüm algoritmaların test sonuçları görülmektedir.



Şekil 2.41. Kamufle olmayan ve kamufle görüntü.



Şekil 2.42.  $[a, b, c, d, e, f, g]$ : Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarına göre nesneleri belirgin bir resmin test sonuçları.



**Şekil 2.43.**  $[a, b, c, d, e, f, g]$ : Sırasıyla ABC, ACO, BBO, GA, HS, PSO, TLBO algoritmalarına göre nesneleri belirgin olmayan bir resmin test sonuçları.

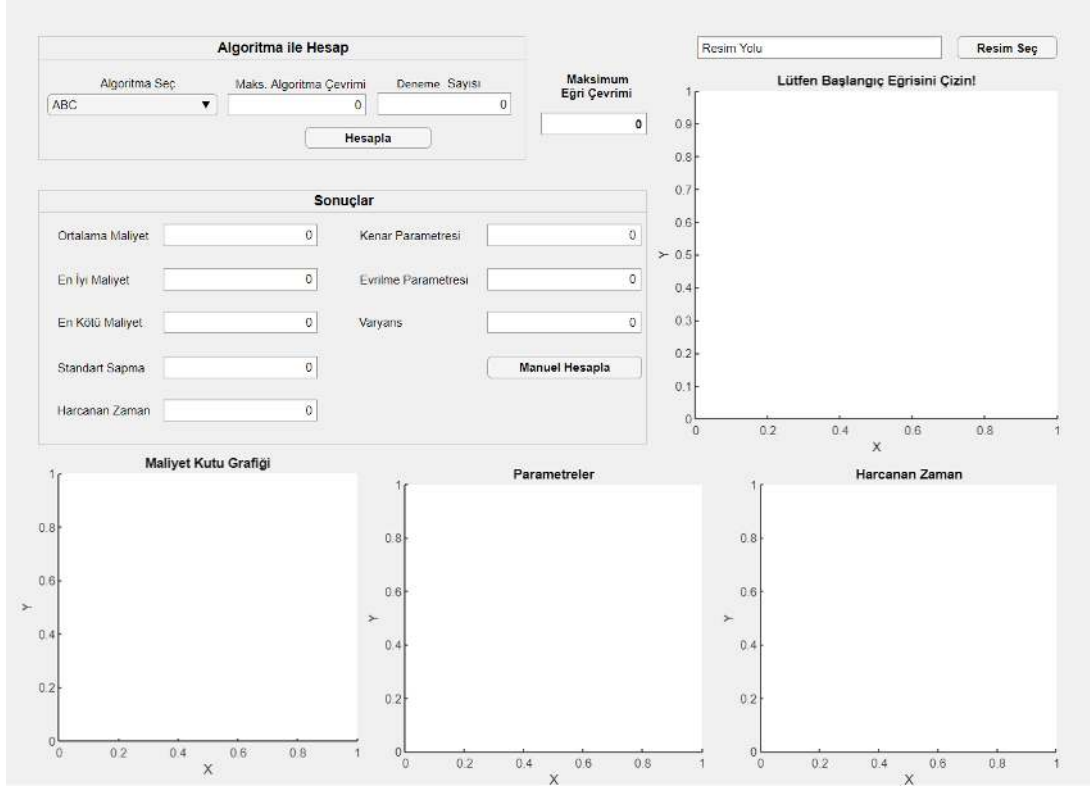
Eğitim aşamasından sonra Şekil 2.40 ta bulunan yedi adet görüntü ile test aşamasına geçildi. Test aşamasında daha önce bu problem için eğitim aşamasında diğer algoritmalarından daha iyi sonuçlar bulan iki algoritmanın öne çıktığı görülmüştür. Şekil 2.40 daki görüntülere dikkat edilirse görüntü içerisinde nesnelerin daha belirgin olduğu görüntüden daha az belirgin olduğu görüntülere doğru bir görüntü setinin, Şekil 2.42 de ACO ile ilgili sonuçları, Şekil 2.43 te TLBO sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlara bakıldığında kamufle edilmiş görüntülerde bile hemen hemen nesne sınırlarına yaklaştığı, nesneleri açık seçik olan görüntülerde nesneyi tanımlamaya çok yaklaştığı görülür. Şekil 2.42 de tüm algoritmaların kamufle edilmemiş bir görüntüdeki yanıtları görülmektedir, burada ABC, GA ve PSO algoritmalarının bulunduğu parametrelerin bu probleme pek uygun olmadığı açık olarak görülmektedir. Buna nazaran diğer algoritmaların sonuçları burada benzerlik gösterse de, Şekil 2.43 de bunun öyle olmadığı bu dört ACO, BBO, HS ve TLBO içinden ACO ve TLBO'nun bulunduğu parametre sonuçlarının daha uygun olduğu görülür.

Testlerde yapılan incelemelerde, nesneleri açıkça görülen görüntülerden kamufle görüntülere kadar test görüntüleri kullanılarak (Şekil 2.26) üç ayrı karakterde başlangıç eğrisi ve bir bu üçünün içerdiği karakteristikde başlangıç eğrileri(Şekil 2.27) ile bulunan sonuçlar incelenmiştir. ACO ve TLBO için Tablo 2.3'de verilen parametre değerleri Şekil 2.35 ve Şekil 2.40 incelendiğinde optimum değerler olarak görülmektedir. Şekil 2.42 ve Şekil 2.43 de elde edilen sonuçlara göre kamufle görüntülerde daha az başarımlı söz konusudur.

## 2.4. Bir Kullanıcı Arayüzü Tasarımı

Burada yapılan çalışmalar detaylı analizler ile oluşturulduğundan bu incelemeleri herhangi bir kullanıcının yapabilmesi için bir kullanıcı arayüzü uygulaması yapıldı. Bu uygulama kişilerin görebilmesi ve paylaşabilmesi için online platformlarda paylaşılacaktır.

Uygulamanın aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bir ana pano içerisinde değişik kullanıcı girdileri ile hesaplamaların yapılacağı alt panolar yerleştirilmiştir.

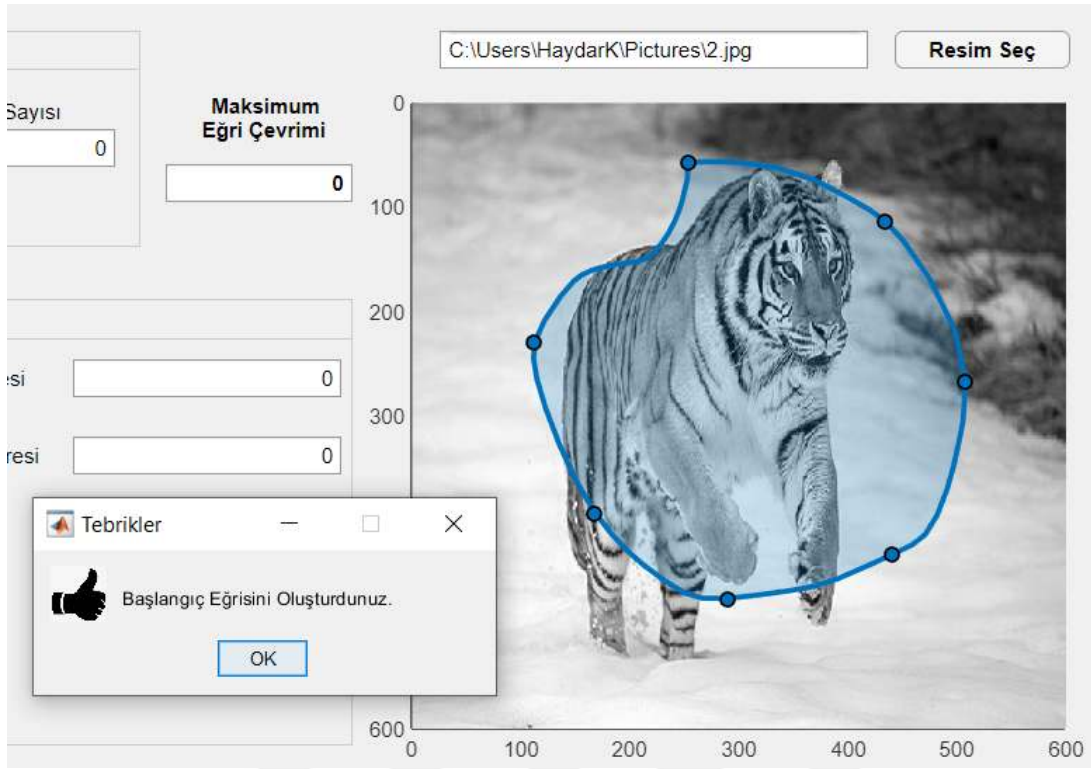


Şekil 2.44. Uygulama Anapano

Kullanıcı uygulamayı çalıştırdığında ilk olarak gelen boş ana panoda, işleyeceği görüntüyü sağ üst köşedeki 'Resim Seç' butonu ile bilgisayarında bulunan herhangi bir yerdeki görüntüyü seçebilecektir. Resim Seç butonunun yanında ayrıca kullanıcı bilgisine sunulan 'Resim Yolu' alanında resmin bilgisayar içerisindeki alt klasörler bilgisi yer almaktadır.

Kullanıcı görüntüyü seçtikten sonra evrilmek istenen başlangıç eğrisini oluşturacaktır. Başlangıç eğrisi kullanıcının resmi yerleştiği yerde fare imleci ile serbest olarak çizeceği bir kapalı eğri olacaktır. Tüm bunların ilüstrasyonu aşağıdaki şekilde görülmektedir. Bu şekilde dikkat çeken bir diğer hususta 'Manuel Eğri Çevrimi' alanıdır, bu alana kullanıcı başlangıç eğrisinin diferensiyel evriminin kaç çevrimde oluşturulması gerektiği bilgisini girecektir. Bu alan hem manuel hesaplarda hem de yapay zeka algoritmaları ile yapılan hesaplarda doldurulacak-

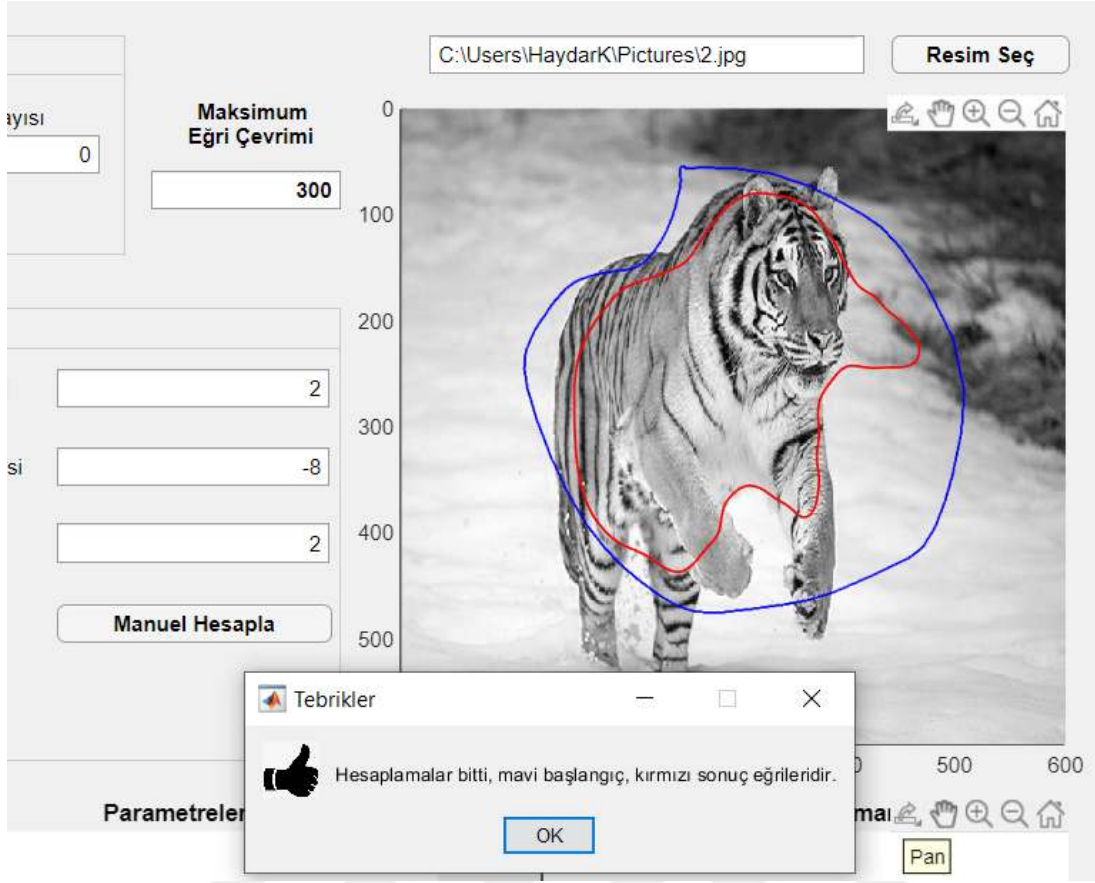
tır.



**Şekil 2.45.** Resim yükleme ve başlangıç eğrisi oluşturma

Başlangıç eğrisi oluşturduktan sonra, iki türlü hesaplama yapılabilecektir. Bunlardan ilki manuel olarak hesap yapmadır, burada parametreler kullanıcı tarafından girilip manuel hesaplama butonuna tıklandığında aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi resmin bulunduğu bölgede, hesaplamaların sonucu mavi başlangıç eğrisi, kırmızı sonuç eğrisi gösterilecektir.





**Şekil 2.46.** Uygulama Anapano

Uygulama kullanıcısı manuel hesapla değilde, yapay zeka algoritmaları ile parametreleri bulmak isterse, aşağıdaki şekilde görülen 'Algoritma ile Hesap' panosunu ve 'Maksimum Eğri Çevrimi' alanını dolduracaktır.

| Algoritma ile Hesap |                         |               | Maksimum Eğri Çevrimi |
|---------------------|-------------------------|---------------|-----------------------|
| Algoritma Seç       | Maks. Algoritma Çevrimi | Deneme Sayısı |                       |
| ABC ▼               | 0                       | 0             | 0                     |
| Hesapla             |                         |               |                       |

**Şekil 2.47.** Algoritma ile hesaplama bölümü

Algoritma ile hesapla panosundan 'Algoritma Seç' menüsünden hesapları hangi algoritma ile yapmak istediğini belirterek 'Hesapla' butonuna basması yeterli olacaktır.

Algoritma Seç

ABC

ABC

ACO

BBO

GA

HS

PSO

TLBO

Maks

**Şekil 2.48.** Algoritma seçme bölümü

Hesaplanmaya başlandıktan sonra aşağıdaki 'Sonuçlar' panosu yapay zeka algoritmasının bulduğu sonuçlar ile otomatik doldurulacaktır.

**Sonuçlar**

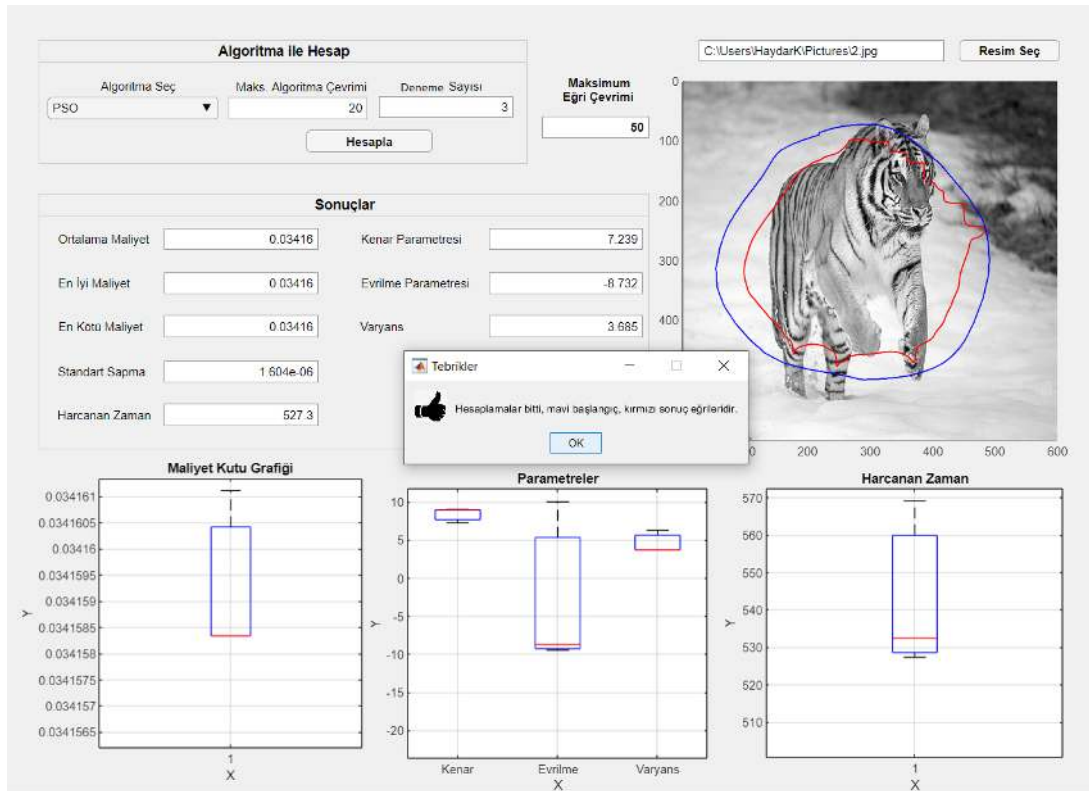
|                  |   |                     |   |
|------------------|---|---------------------|---|
| Ortalama Maliyet | 0 | Kenar Parametresi   | 0 |
| En İyi Maliyet   | 0 | Evrilme Parametresi | 0 |
| En Kötü Maliyet  | 0 | Varyans             | 0 |
| Standart Sapma   | 0 |                     |   |
| Harcanan Zaman   | 0 |                     |   |

Manuel Hesapla

**Şekil 2.49.** Sonuçlar panosu

Yapay zeka algoritması ile yapılan hesaplamaların neticesinde uygulama bir uyarı ile kullanıcıya hesapların bittiğini bildirecektir. Bu bildirim aynı zamanda manuel hesaplar bittiğinde de yapılır. Hesapların neticesinde Ana panonun en altında bulunan grafikler bölümünde Maliyet, Parametreler ve Harcanan zamanın tüm çevrim yada iterasyonlar bittiğinde istatistik-

sel sonuçları sunulacaktır. Ayrıca görüntünün son neticeleride aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi resim bölümünde yer alacaktır.



**Şekil 2.50.** Uygulama Yapay Zeka Algoritması Sonuçları

## 2.5. Sonuç

Kısmi diferensiyel temelli segmentasyon modellerinden biride giriş kısmında da değinilen aktif kontur eğrileridir. Buradaki temel motivasyon, bir kısmı türevli matematik modele sahip eğri akışını izah eden eşitlikle görüntü içerisindeki nesnelerin sınırları belirlenebilir mi? idi. O nedenle bu yapının matematiksel alt yapısının çözülmesi gerekiyordu. Bu bölümde bu çözümler yapıldı ve model içerisindeki her bir bileşenin nasıl çalıştığı izah edilmeye çalışıldı.

Model temel yapısı, bir enerji integraline dayanmaktadır. Dolayısıyla görüntünün yapısındaki ışık geçişleri veya enerji geçişleri burada büyük rol oynamaktadır. Bu enerji geçişlerinde eğrinin evrilmesini sağlayan kısmi türevli yapıda, üç ana değişken yada parametre söz konusudur, bunlar Gauss filtresindeki görüntünün düzgünleşmesini artıran ya da azaltan varyans, kenar bulucu fonksiyonun gücünü artıran yada azaltan kenar parametresi ve eğrinin evrilme hızını etkileyen evrilme parametresidir. Bu parametrelerin belirli bir aralıktaki değişiminin eğri evrimini nasıl etkileyeceği düşünülüp, öncelikle elle belirli değerler girilerek incelenmiş ve so-

nuçları tartışılmıştır. Bunun neticesinde bu parametrelerin aslında optimum değerleri ne olacaktır? Sorusundan hareketle, bu parametrelerin yapay zeka algoritmaları ile optimum değerleri incelenmiştir.

Sonuç olarak, Riemann anlamındaki aktif kontur modellerinde eğrinin evrimi kısmi türevlerle yönlendirildiğinden, aslında bir gradyan akışı söz konusudur. Bu nedenle eğriler, kamufle görüntülerde ışık geçişleri az olduğundan gradyan akışları çok belirgin değildir ve bu nedenle evrilen eğriler nesneyi kavramada zorluk çeker. Eğer model tanımlanırken eğriyi yönlendirecek yön bilgileri ile bir tanımlama yapılırsa eğrinin kamufle görüntülerde bile yön bilgisi nedeniyle evrimi belirlenebilir (Kilic ve Ceyhan, 2021: 693). Böyle bir model ise ancak Finsler anlamında eğrilerin evrilmesi ile mümkündür. Bu model detayları ile bundan sonraki bölümlerde tartışılacaktır.



### 3. FİNSLER ANLAMINDA EĞRİLERİN EVRİLMESİ

Bir uzayın herhangi iki noktası arasındaki uzaklık hesabı için kullanılan fonksiyona metrik denmektedir. Uzayın yapısına bağlı olarak tanımlanan, literatürde çok çeşitli metrikler bulunmaktadır. Bunların en yaygın olarak bilinen örnekleri, düz uzaylar için Öklid metriği ve düz olmayan uzaylar için Riemann ve Finsler metrikleridir. Riemann metriği, tanımlı olduğu uzaydaki herhangi bir noktayı ele alarak ölçüm yapar. Finsler metriği ise uzay üzerindeki bir nokta ve teğet vektörünü kullanarak ölçüm yapar.

Finsler anlamında eğrilerin incelenmesi için bazı matematiksel tanımlamalara ihtiyaç vardır. Bunlara bir giriş gerekirse,  $M$ ,  $n$ -boyutlu düzgün bir manifold olsun. Manifold üzerinde bir  $C$  eğrisi  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  alt kümesi üzerinde değer alan bir  $t$  parametresinin fonksiyonu olarak,  $C : t \in [a, b] \mapsto M$  parametrize edilen sürekli bir fonksiyon olsun.  $M$  üzerindeki yerel koordinat sistemine  $x^i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dersek, eğriyi veren manifold üzerindeki noktalar kümesi  $x^i = x^i(t)$ ,  $t \in [a, b]$  şeklindedir ve  $t$  parametresinin türetilabilir fonksiyonlarıdır. Manifoldun her noktasındaki teğet vektör alanının bileşenleri  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$  şeklindedir (Lee, 2006).  $M$  üzerinde Riemann anlamında  $ds$  yay uzunluğu metriği:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada,  $g_{ij}$  pozitif tanımlı simetrik bir metrik tensördür (Lee, 2006). Manifold üzerinde bir  $C$  eğrisinin Riemann anlamında uzunluğu  $L_R(C)$ :

$$L_R(C) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i \dot{x}^j} dt \quad (3.2)$$

olarak yazılır.

Manifoldun  $TM$  teğet demeti üzerinde tanımlı  $F(C(t), \dot{C}(t))$  negatif olmayan bir fonksiyon için eğrinin uzunluğu

$$L_F(C) = \int_a^b F(C(t), \dot{C}(t)) dt \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir.  $L_F(C)$  uzunluk hesabının  $C$  eğrisinin parametrizasyonundan bağımsız olması beklenir. Bunun için  $F(x, y)$ ,  $x \in M$ ,  $y \in T_x M$  1.dereceden  $y$ -ye göre pozitif homojen yani,  $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ ,  $\lambda > 0$  olmalıdır.

Manifold üzerinde tanımlı  $d_F : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\forall p, q \in M$  için

$$d_F(p, q) = \inf_C L_F(C) \quad (3.4)$$

mesafe fonksiyonu ile  $p$  noktasından bir  $q$  noktasına en kısa mesafe ölçülebilir.  $p$  noktasından  $q$  noktasına ölçülen mesafe fonksiyonu tek yönlüdür, yani  $d_F(p, q) \neq d_F(q, p)$ 'dir. Buna göre,  $F(x, y_1 + y_2) \leq F(x, y_1) + F(x, y_2)$ ,  $y_1, y_2 \in T_x M$  konvekslik şartını sağlamak zorundadır. Bu koşullara en uygun metriğin Finsler metriği olduğu aşağıda verilen tanımından kolayca görülür (Rund, 2012).

**Tanım 1** (Finsler Metriği).  $M, n$ -boyutlu düzgün bir manifold olsun. Manifoldun teğet demeti üzerinde tanımlı  $F : TM \rightarrow [0, \infty)$  negatif olmayan fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığında Finsler Metriği denir (Shen ve Shen, 2016).

- *Pozitif Homojenlik:*  $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda > 0$ .
- *Düzgünlük:*  $F(x, y), TM \setminus 0$  teğet demeti üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur.
- *Güçlü Konvekslik:* Herhangi sıfırdan farklı bir  $y \neq 0$  teğet vektör için metrik tensör (Hessian matrisi):

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \quad (3.5)$$

olarak pozitif tanımlıdır.

Böylece türevlenebilir  $F$  Finsler metrikli bir  $M$  manifolduna Finsler manifoldu ve  $(M, F)$ 'ye Finsler uzayı denir (Rund, 2012).

### 3.1. Eğri Evrilimi için Finsler Modeli

Eğri evriliminin Riemann modeli çalışmasından da bilindiği gibi yerel maliyet fonksiyonu  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  görüntü bilgilerinden yazılabilir (Kilic ve Ceyhan, 2021: 693). Verilen bir  $C$  eğrisi üzerinde tanımlı maliyetlerin toplamı  $E(C)$  enerji fonksiyoneli ile gösterilsin ve değeri yerel maliyetlerin eğri boyunca integre edilmesiyle bulunur (Caselles, Kimmel ve Sapiro, 1997: 61), (Melonakos vd., 2008: 412).

$$E(C) = \int_C \varphi(C) ds. \quad (3.6)$$

Enerji fonksiyoneli,  $\varphi$ -ağırlıklı eğri uzunluğu olarak yorumlanabilir. Ayrıca, enerji fonksiyonelinin  $s$  yay uzunluğu parametresine bağlı olması tamamen uzayın geometrisine bağlı olması anlamına gelmektedir. Temel amacımız, Manifold üzerinde  $\varphi$  maliyetlerinin minimum olduğu noktalardan geçme eğiliminde olan ve minimal uzunluklu eğrileri belirlemektir.

$L_2$  anlamında (3.6) enerji fonksiyoneli minimize etmek için argümanı olan  $C$  eğrisini evrilten kısmi türevli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(\nabla \varphi \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} + \varphi C_{ss}, \quad (3.7)$$

burada  $\mathbf{N}$  eğrinin bükülme yönüne doğru olan birim normal vektörüdür.  $\varphi$  yerel maliyeti, azalan sınırlı bir kenar bulucu fonksiyon olarak seçilirse, (3.7) diferansiyel denkleminin çözümü, eğriyi görüntüdeki nesnenin kenarına doğru evriltilir. Esasen,  $\varphi$  ele alınan görüntü işleme problemine uygun herhangi bir biçim algılayıcı (pattern detector) olabilir (Pichon, 2005).

$M = \mathbb{R}^2$  görüntü manifoldunda yön bilgisi tanımlamak için  $\mathbb{R}^2$ 'deki  $S^1 = TM$  birim çemberi kullanılır.  $\forall p \in \mathbb{R}^2$  konumu ve  $\tau \in S^1 = T_p M$  yönü için yön bağımlı desen algılayıcı, yani yerel maliyet  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  şeklinde tanımlanır. Böylece toplam maliyet yalnızca  $C$  eğrisinin konumuna değil, aynı zamanda o konumdaki  $\mathbf{T}$  birim teğet vektörünün yönüne de bağlı olur. Toplam maliyeti veren (3.6) enerji fonksiyoneli,

$$E(C) = \int_C \varphi(C, \mathbf{T}) ds \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır (Melonakos vd., 2008: 412).

Finsler manifoldunda eğri evrilimi modeli için, görüntü manifoldu ile teğet demeti arasındaki ilişkiyi, eğrinin evrilmesinde teğetlerin ve normallerin rolünü inceleyen matematiksel bağıntılar aşağıda verilmiştir.

$C : [0, 1] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  formunda evrilen eğriler ailesi için,  $t_0$  anında evrilen  $C(x, t_0)$  eğrisinin,  $x$  parametresine göre birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{C_x}{|C_x|} = C_s,$$

olarak hesaplanır. Eğrinin  $s$  yay uzunluğu parametresi için,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$ds = |C_x| dx$$

yazılabilir.  $C$  eğrisinin  $\mathbf{K}$  eğrilik vektörü

$$\mathbf{K} = C_{ss} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$$

olarak verilir. Eğrinin daima dış normalı doğrultusunda evrildiği varsayılırsa,

$$\mathbf{V} = \frac{\partial C}{\partial t} \perp \mathbf{T}$$

olur. Eğrilik ve hız vektörleri arasındaki ilişki, Lie türevi yardımıyla şöyle açıklanabilir. Lie türevi eğrinin zamana göre değişimi ile yay uzunluğuna göre değişimi arasındaki farka karşılık gelir. Yani, eğrilik vektörünün birim hız vektörü yönündeki değişimine eşittir (Melonakos vd., 2008: 412). Bu matematiksel olarak,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

*İspat(3.9).*

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] &= \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lie türevi

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

eşit olur.

$|C_x| = \langle C_x, C_x \rangle^{1/2}$  ve  $\frac{\partial}{\partial x} = |C_x| \frac{\partial}{\partial s}$  olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{|C_x|} \right) &= -\frac{1}{2} \langle C_x, C_x \rangle^{-3/2} 2 \langle C_{xt}, C_x \rangle \\ &= -\frac{1}{|C_x|^3} \langle C_{xt}, C_x \rangle \end{aligned}$$

ve Lie türevi şimdi

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{|C_x|^3} \langle C_{xt}, C_x \rangle |C_x| \frac{\partial}{\partial s} \\ &= -\left\langle \frac{C_{xt}}{|C_x|}, \frac{C_x}{|C_x|} \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} \\ &= -\left\langle \frac{C_{xt}}{|C_x|}, \mathbf{T} \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur.  $\langle \mathbf{V}, \mathbf{T} \rangle = \langle C_t, C_s \rangle = 0$  eşitliğinin  $s$ 'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle C_t, C_s \rangle = \langle C_{ts}, C_s \rangle + \langle C_t, C_{ss} \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan  $\langle C_t, C_{ss} \rangle = -\langle C_{ts}, C_s \rangle$  veya

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle = -\langle C_{ts}, T \rangle \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradaki  $C_{ts}$  büyüklüğü

$$C_{ts} = \frac{\partial C_t}{\partial s} = \frac{\partial C_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s},$$

yani

$$C_{ts} = \frac{C_{tx}}{|C_x|}$$

(3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle = -\left\langle \frac{C_{tx}}{|C_x|}, \mathbf{T} \right\rangle \tag{3.12}$$

bulunur. Denklem (3.10)'da (3.12) ifadesi yazılırsa

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = - \left\langle \frac{C_{tx}}{|C_x|}, T \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.13)$$

sonucu elde edilmiş olur.  $\square$

Eğrinin yay uzunluğunun zamana göre değişimi, bu sonucun negatiftir. Yani eğri-  
liğin birim hız büyüklüğündeki negatif değişimine karşılık gelir (Melonakos vd., 2008: 412).  
Matematiksel ifadesi ve ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial t} ds = -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds \quad (3.14)$$

*İspat*(3.14).

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] ds = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial}{\partial s} ds \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial s} ds \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial t} ds \right) = [(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds] \frac{\partial}{\partial s} \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} (1) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial t} ds \right) = [(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds] \frac{\partial}{\partial s} \\ \Rightarrow & -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial t} ds \right) = [(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds] \frac{\partial}{\partial s} \\ \Rightarrow & \left( \frac{\partial}{\partial t} ds \right) = -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $\square$

(3.8) integralinin minimizasyonu için, sürekli bir  $C$  eğrisi,  $E$  enerji fonksiyonelinin yerel minimumu olmalıdır. Riemann anlamında  $E$  enerjisinin yerel minimumlarının sayısını sınırlandırmak için,  $\varphi$  düzgün olarak seçilmelidir. Eğer  $\varphi$  düzgün değilse, eğri çok hızlı bir şekilde istenmeyen bir yerel minimum noktasına doğru evrilir. Bu durumda, eğrinin düzgünleştirici bir filtreden geçirilmesi gerekir (Pichon, 2005).

Finsler anlamında bir gradyan akış modeli, (3.8) enerji integralini minimize edecek şekilde eğriyi evriltten bir modeldir. Bir başka deyişle, gradyan akış enerji değişimini sağlayan bir  $C$  eğrisinin hareketini, yada evrilimini veren bir diferensiyel denklemdir. (3.8) enerji integrali,  $s$  yay uzunluğu yerine  $x$  değişkeni ile yeniden parametrize edilir ve  $\varphi$  'nin birinci dereceden

homojen olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned} E(C) &= \int_C \varphi(C, C_s) ds \\ &= \int_0^1 \varphi\left(C, \frac{C_x}{|C_x|}\right) |C_x| dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Parametreler arasında  $x = x(s)$  birebir ilişkisi yazılabileceğinden

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{|C_x|} \text{ ve } C_s = \frac{C_x}{|C_x|}$$

eşitlikleri kolayca yazılabilir.

### 3.2. Enerji Fonksiyonelinin Birinci Varyasyonu

Anizotropik mesafe fonksiyonelinin (enerji integralinin) birinci varyasyonunu,  $t$  zaman değişimine göre türevini alarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_C \varphi(C, C_s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ \varphi\left(C, \frac{C_x}{|C_x|}\right) |C_x| \right] dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada  $x$  ve  $t$  birbirinden bağımsız parametrelerdir.  $\tau = C_s = \frac{C_x}{|C_x|}$  tanımı, (3.16) 'da yerine yazılırsa,

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 \frac{d}{dt} [\varphi(x, \tau) |C_x|] dx \quad (3.17)$$

ile

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ \varphi\left(C, \frac{C_x}{|C_x|}\right) |C_x| \right] dx \quad (3.18)$$

$$= \int_0^1 \left[ \varphi_x C_t |C_x| + \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| + \varphi \frac{\partial}{\partial t} (|C_x|) \right] dx \quad (3.19)$$

bulunur. Integrand terimlerinin ayrı ayrı integraller olarak alıp, düzenleyelim.

$$E_1 = \int_0^1 \varphi_x C_t |C_x| dx \quad (3.20)$$

$$E_2 = \int_0^1 \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| dx \quad (3.21)$$

$$E_3 = \int_0^1 \varphi \frac{\partial}{\partial t} (|C_x|) dx \quad (3.22)$$

Öncelikle (3.21) 'daki türevi açık olarak hesaplandığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C_x}{|C_x|} \right) &= \frac{C_{xt}|C_x| - C_x \frac{1}{2} \langle C_x, C_x \rangle^{-\frac{1}{2}} 2 \langle C_{xt}, C_x \rangle}{|C_x|^2} \\ &= \frac{C_{xt}|C_x| - \frac{1}{|C_x|} C_x \langle C_{xt}, C_x \rangle}{|C_x|^2} \\ &= \frac{C_{xt} - \frac{C_x}{|C_x|} \langle C_{xt}, \frac{C_x}{|C_x|} \rangle}{|C_x|} \\ &= \frac{C_{xt} - \langle C_{xt}, C_s \rangle C_s}{|C_x|} \\ &= \frac{C_{xt} - C_{xt} C_s^T C_s}{|C_x|} \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C_x}{|C_x|} \right) = \frac{C_{xt}(I - C_s^T C_s)}{|C_x|}$$

olduğu görülür. Uzayda herhangi bir  $\vec{u}$  vektörünün  $\vec{v}$  vektörü üzerine dik izdüşümü, yani projeksiyonu (Young, 1930):

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} \quad (3.23)$$

kullanılarak

$$\text{Proj}_{C_s} C_{xt} = \frac{C_{xt} C_s^T}{|C_s|^2} C_s = C_{xt} C_s^T C_s \quad (3.24)$$



yazılabilir.  $C_{xt}C_s^TC_s$  ve  $\varphi_\tau$  büyüklükleri, sırasıyla, eğrinin teğeti ve normali yönünde olduğundan  $\varphi_\tau \perp C_{xt}C_s^TC_s$  dir.  $\varphi_\tau \cdot C_{xt}C_s^TC_s = 0$  kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| &= \varphi_\tau \frac{C_{xt}(I - C_s^TC_s)}{|C_x|} |C_x| \\ &= \varphi_\tau C_{xt}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,  $E_2$  integrali

$$E_2 = \int_0^1 \varphi_\tau C_{xt} dx \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu integral  $\int u dv = uv - \int v du$  kısmi integrasyon ile yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}u = \varphi_\tau &\implies du = \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_\tau) |C_x| dx, \\ dv = C_{xt} dx &\implies v = C_t\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$E_2 = \varphi_\tau C_t \Big|_0^1 - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_\tau) |C_x| dx \quad (3.26)$$

$$= - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_\tau) |C_x| dx \quad (3.27)$$

elde edilir. Burada  $C_t(0) = C_t(1) = 0$  'dır.

(3.22)'deki  $E_3$  integralindeki türev hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(|C_x|) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle C_x, C_x \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \langle C_x, C_x \rangle^{-\frac{1}{2}} 2 \langle C_{xt}, C_x \rangle \\ &= \frac{\langle C_{xt}, C_x \rangle}{|C_x|} \\ &= \langle C_{xt}, C_s \rangle\end{aligned}$$

ve yerine yazılırsa,

$$E_3 = \int_0^1 \varphi C_{xt} \cdot C_s dx \quad (3.28)$$

bulunur. Burada yine kısmi integrasyon alınarak,

$$u = \varphi C_s \implies du = \frac{\partial}{\partial s}(\varphi C_s) |C_x| dx,$$

$$dv = C_{xt} dx \implies v = C_t$$

olur ve  $\varphi(x, \tau) = \varphi(C, C_s)$  göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} E_3 &= - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s}(\varphi C_s) |C_x| dx \\ &= - \int_0^1 C_t \left( \varphi_x \frac{\partial p}{\partial s} C_s + \varphi_\tau \frac{\partial \tau}{\partial s} C_s + \varphi C_{ss} \right) |C_x| dx \\ &= - \int_0^1 C_t ((\varphi_x C_s) C_s + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s + \varphi C_{ss}) |C_x| dx \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,  $E_t = E_1 + E_2 + E_3$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^1 C_t \varphi_x |C_x| dx - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau |C_x| dx \\ &\quad - \int_0^1 C_t [(\varphi_x C_s) C_s + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s + \varphi C_{ss}] |C_x| dx \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^1 C_t \{ [\varphi_x - (\varphi_x C_s) C_s] - \\ &\quad [ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s ] - \varphi C_{ss} \} |C_x| dx \end{aligned}$$

elde edilir (Pichon, 2005). Burada integral içerisindeki terimler:

$$\begin{aligned}\varphi_x - (\varphi_x C_s) C_s &= (I - C_s C_s^T) \varphi_x \\ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s &= (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau\end{aligned}$$

şeklindedir.  $\varphi_\tau \perp C_s$  olduğundan  $\varphi_\tau$  yerine

$$\varphi_\tau = (I - C_s C_s^T) \varphi_\tau$$

kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau &= \frac{\partial}{\partial s} ((I - C_s C_s^T) \varphi_\tau) \\ &= (-C_{ss} C_s^T - C_s C_{ss}^T) \varphi_\tau + (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) \\ &= (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) - C_{ss} C_s^T \varphi_\tau - C_s C_{ss}^T \varphi_\tau \\ &= (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) - (C_{ss} \varphi_\tau) C_s\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçlar yerine yazılırsa  $E_t$  integrali:

$$E_t = \int_0^1 C_t \{ (I - C_s C_s^T) (\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau) - \varphi C_{ss} \} ds \quad (3.29)$$

elde edilir. Bir  $\int \langle a, b \rangle ds$  integralinin minimum olması için  $b = -a$  olmalıdır. Yani  $\int \langle a, -a \rangle ds = -\int |a|^2 ds$  olmalıdır (Kühnel, 2015). Dolayısıyla  $E_t$  integralinin minimum değer alması için:

$$C_t = -(I - C_s C_s^T) (\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau) + \varphi C_{ss} \quad (3.30)$$

olmalıdır (Pichon, 2005). (3.30) denklemi Finsler anlamında bir eğrinin evrilimini veren diferansiyel denklemdir.

### 3.3. Sonuç ve Değerlendirme

(3.30) denkleminde  $C$ ,  $E$  enerji integralini minimize eden eğri ve  $\varphi$  maliyet fonksiyonudur. Bu denklemde yer alan diğer kısmi türevli bileşenlerin anlamları:

- $C_s$  : Eğrinin birim teğet vektörü.
- $C_s^T$  : Eğrinin birim teğet vektörünün transpozu.

- $\varphi_x$  : Maliyetinin  $x$  konumundaki gradyanı ( $\varphi_x = \nabla_x \varphi$ ). İki boyutta,  $x = (x_1, x_2)$  noktası için  $\nabla_x \varphi = \varphi_{x_1} \vec{i} + \varphi_{x_2} \vec{j}$  dir.
- $\varphi_\tau$  : Maliyetinin  $\tau$  birim teğet vektör yönündeki gradyanı ( $\varphi_\tau = \nabla_\tau \varphi = \tau \nabla \varphi$ ).
- $C_{ss}$  : Eğrinin eğrilik vektörü.

Burada önemli olan  $\varphi$  maliyet fonksiyonun seçimidir. Daha önceden de bahsedildiği gibi bir biçim(pattern) detektör seçilebilir. Kenarlarla ilgilenildiğinden biçim olarak maliyet fonksiyonu yerine yön bağımlı bir kenar bulucu da seçilebilir. Sayısal hesaplamalar için Algoritma 3.1 izlenir.

---

**Algoritma 3.1:** Finsler Anlamında Eğri Evrilimi

---

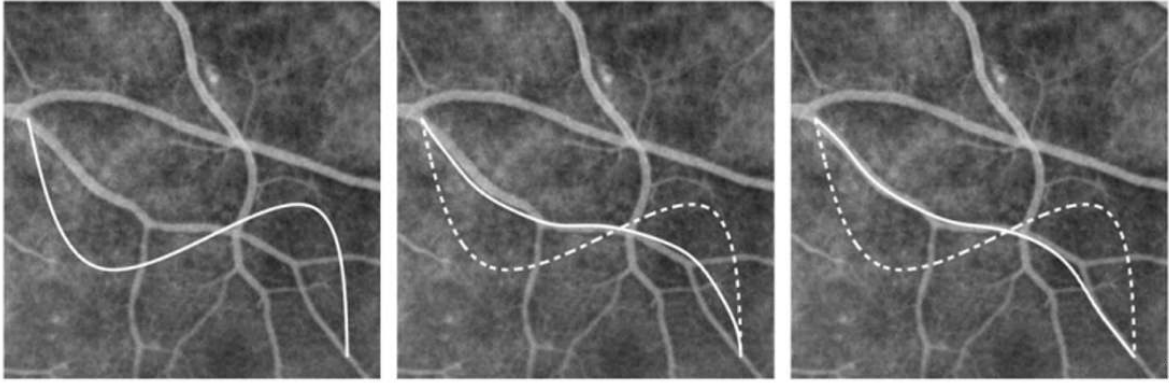
```

1 İşlenecek görüntüyü yükle
2 Gri seviyeli görüntüye çevir
3 Başlangıç eğrisini oluştur
4 for her bir  $t$  için do
5    $C_s = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - C(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta t}$  ve
6    $C_{ss} = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - 2C(x_i, y_j) + C(x_{i-1}, y_j)}{\Delta t^2}$ 
7   merkezi fark ile türevleri hesapla
8   Uygun bir  $\varphi$  maliyet fonksiyonu belirle
9   Merkezi fark türevleri ile  $\varphi_x = \nabla_x \varphi$  hesapla
10   $\tau$  birim teğet yön vektörlerini oluştur
11  Yukarıdaki türev formüllerini kullanarak  $\varphi_\tau = \nabla_\tau \varphi = \tau \cdot \nabla \varphi$  hesapla
12   $C_t = -(I - C_s C_s^T)(\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau) + \varphi C_{ss}$  hesapla
13   $C_{t+1} \leftarrow C_{t+1} + \Delta t C_t$ 
14 end

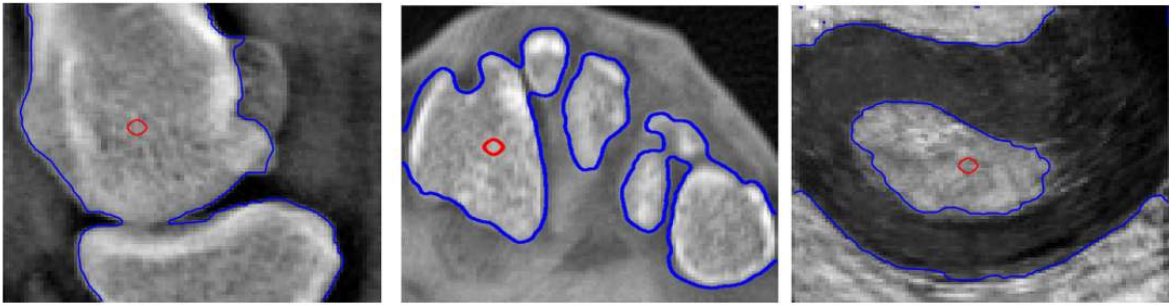
```

---

Bu konudaki (Melonakos vd., 2008: 412) çalışmasında maliyet fonksiyonu başlangıç eğrisi üzerindeki her noktada diktörtgen bir çerçeve alınarak en büyük değişimin olduğu yön olarak seçilmiştir. Şekil 3.1’de soldan sağa başlangıç eğrisi, evrilen eğri ve son durumu görülmektedir. (Estellers vd., 2013: 69) çalışmasında harmonik aktif kontur kullanılarak eğri evrilimi incelenmiş ve maliyet fonksiyonu olarak Riemann manifoldu üzerinde bir kenar algılayıcı metrik kullanılmıştır. Medikal görüntülerdeki sonuçları Şekil 3.2’de görülmektedir. Görüntülerdeki kırmızı ile belirtilen kontur başlangıç eğrisi, mavi ile belirtilen kontur ise eğri evriliminin kenarları çevreleyecek şekildeki sonucudur. İki çalışmada, burada incelenen Finsler eğri evrilimi modelinin kullanımına birer örnektir.



**Şekil 3.1.** Biçim detektör kullanılarak evrilen eğri incelemesi (Melonakos vd., 2008: 412).



**Şekil 3.2.** Seviye eğrileri ile Riemann manifoldunda eğri evrimi incelemesi (Estellers vd., 2013: 69).

Finsler anlamında eğri evrilimi için maliyet fonksiyonu iki türlü belirlenmektedir. Birincisi başlangıç eğrisi üzerindeki noktayı içine alan belli boyutlardaki dikdörtgen çerçeve içerisindeki görüntüdeki en büyük değişimi veren yönü maliyet fonksiyonu olarak seçmek. İkincisi ise seviye eğrileri ile Finsler metriği kullanarak mesafe ölçümü yapan bir maliyet fonksiyonu belirlemektir.

Sonuç olarak Finsler anlamında bir ölçüm yapabilmek için görüntüye en uygun maliyet fonksiyonu belirlemek gerekmektedir. Bu model için, en uygun maliyet fonksiyonu seçimi Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’deki örneklerde olduğu gibi yüksek hesaplamalar gerektirdiğinden, bilgisayar hesaplamaları açısından maliyetli olmaktadır (Kilic ve Ceyhan, 2022+). Fakat literatürde var olan Finsler metriği ile görüntü işleme uygulamaları ile segmentasyon, gürültü giderme gibi işlemlerin üstesinden gelinebilir (Kolmogorov ve Boykov, 2005: 564).

Finsler metrik yaklaşımı ile görüntü işleme uygulamalarına iyi bir çözüm sunan (Zucchini, 1991: 296) (Zucchini, 1993: 269) makalelerinde yer alan ve adını ünlü fizikçi Polyakov’dan alan “Polyakov Action” enerji modelinde görülmektedir. “Polyakov Enerji Modeli” nde enerji integrali görüntünün yapısına uygun bir metrik seçimine imkan vermektedir. Ayrıca görüntü işleme uygulamalarına uygun enerji fonksiyoneli yazılarak gürültü giderme, segmentasyon, kont-

rast geliştirme gibi işlemler yapılabilir (Jelena, 2015) (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997a: 236). Sonraki bölümde, Polyakov enerji integralini minimize eden model kullanılarak görüntü işleme operasyonları tartışılacaktır.



#### 4. GÖRÜNTÜ İŞLEMeye FİNSLER YAKLAŞIMLARI

Gürültü azaltma, görüntü işleme uygulamalarında önemli bir ön işleme adımıdır, ancak kısmi diferansiyel denklemlerin (Partial Differential Equation: PDE) kullanılması bu amaç için nadiren kullanılan bir tekniktir. İlgili bir PDE elde etmek için, bir dönüşüm ile dijital bir görüntünün 2 boyutlu bir manifold olarak 3 boyutlu bir manifolda gömülmesiyle bir Beltrami çerçevesi oluşturulur. Ardından, gömülü bir manifold (görüntü yüzeyi) ile Beltrami çerçevesindeki gömme alanı arasında ölçüme izin veren Polyakov eylemi tanımlanır. Tanımlanan Polyakov eylemi, görüntü manifoldunun ve gömme alanının metriklerine bağlı olan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonel, görüntü işlemede ölçek uzayı yöntemlerini bir araya getirir ve görüntülerin düzgünleştirilmesine ve gürültünün giderilmesine olanak tanır (Sochen, Kimmel ve Malladi, 1998a: 310).

Polyakov enerji integrali(Polyakov Action), görüntü manifoldunun Riemann metriğine ve gömme dönüşümüne göre minimizasyonundan iki ana sonuç verir. İlk olarak, görüntü manifoldu metriği indüklenir. İkinci olarak, bir zaman ölçeği parametresine göre görüntü manifoldunun evrimini veren Beltrami akışı oluşturulur. Görüntü manifoldu metriği, yani indüklenmiş metrik alınarak oluşturulan Beltrami akışı, minimum alan akışıdır. Beltrami akışı, görüntü manifoldu metrik seçimine bağlı olarak izotropik (nokta tabanlı) veya anizotropik (nokta ve yön tabanlı) olabilir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236).

Görüntü yüzeyleri düzensiz yapılar olduğundan, Öklid olmayan metrikler seçilerek yapılan ölçümler daha doğru sonuçlar verme eğilimindedir. Öklid olmayan metrikler iki sınıfta ele alınabilir; Riemann veya Finsler. Görüntü yüzeyinde Riemann metriği seçilerek yapılan ölçümler sadece yüzey üzerindeki nokta dikkate alınarak yapılabilirken, Finsler metriği kullanılarak yapılan ölçümler nokta ve yön dikkate alınarak yapılabilir. Bu metriklerle ilgili özel durumlar literatürde izotropik ve anizotropik durumlar altında incelenmiştir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236), (Balan ve Stojanov, 2013a: 493).

Kısmi diferansiyel denkleme dayalı anizotropik filtreleme teknikleri, görüntü iyileştirme ve gürültü giderme için görüntü işlemede yaygın olarak kullanılmaktadır. Anizotropik filtreler, diğer iyi bilinen filtrelerin istenmeyen etkilerinin üstesinden gelmeleri ve görüntü kalitesini iyileştirmeleri nedeniyle birçok araştırma alanında popüler hale gelmiştir. Klasik filtreleme yaklaşımında, piksel değerleri, önceden tanımlanmış bir piksel komşuluğu etrafındaki doğrusal piksel kombinasyonları ile değiştirilir. Bu tarzdaki filtreler gürültüyü azaltmada iyi performans gösterebilir, ancak kenarları bulanıklaştırma eğiliminde oldukları ve görüntü bil-

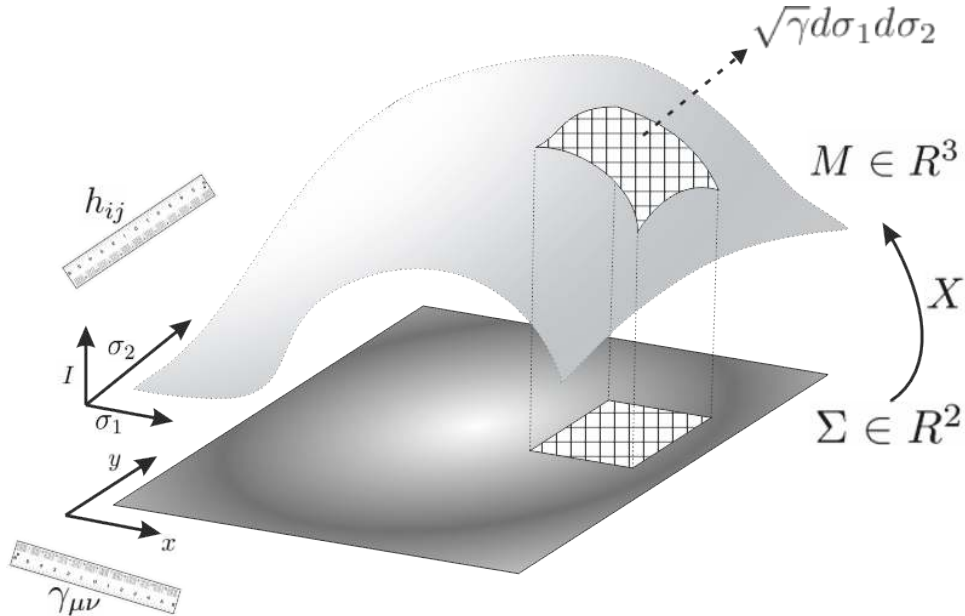
gilerini koruyamadıkları için kenarlarda ve ince ayrıntılarda iyi değildir. Bu eğilimin nedeni, pikselin gürültülü olup olmamasından bağımsız olarak filtrelemeyi gerçekleştirmektedir. Sonuç olarak, filtrelenmiş ve gürültüsüz bir konum, görüntünün kenarlar gibi önemli özelliklerini bozabilir. Anizotropik filtreler, kenar bulanıklığı olmadan gürültüyü azaltır, böylece kenarları korur.

#### 4.1. Matematik Model

$X : (\Sigma, \gamma_{\mu\nu}) \rightarrow (M = R^3, h_{ij})$ ,  $\Sigma$  ile  $M$  manifoldları arasındaki dönüşüm  $i, j = 1, 2, 3$  ve  $\mu, \nu = 1, 2$  olmak üzere, ağırlıklı Polyakov eyleminin Finsler metriğine genişletilmiş hali aşağıdaki forma sahiptir (Bresson, Vanderghyest ve Thiran, 2006: 197).

$$P[X, \gamma_{\mu\nu}, h_{ij}, f] = \int f(X, \gamma_{\mu\nu}, h_{ij}) \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X^j h_{ij}(X) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (4.1)$$

Uygun olarak seçilecek bir  $f(X, \gamma_{\mu\nu}, h_{ij})$  ağırlık fonksiyonu ve  $\gamma$  Finsler metriği ile görüntü işlemedeki bazı problemler örneğin: segmentasyon, rejistrasyon ve obje ekstrasyon ele alınabilir ve benzer çalışmalarla karşılaştırması yapılabilir. Buradaki  $\gamma_{\mu\nu}$ ,  $\Sigma$  manifoldunun,  $h_{ij}$ ,  $M$  manifoldunun metrik tensörüdür,  $\gamma^{\mu\nu}$ ,  $\gamma_{\mu\nu}$ 'nin tersidir. Şekil 4.1'de koordinat dönüşümü gösterimi görülmektedir.



**Şekil 4.1.** Bir görüntü manifoldunda, Polyakov Eylemi için manifold dönüşümü gösterimi (Dominique, 2011)



$(\Sigma, g_{\mu\nu})$  metriği ile donatılmış  $m$ -boyutlu bir görüntü uzayı,  $(M, h_{ij})$ ,  $h_{ij}$  metriği ile donatılmış  $n$ -boyutlu bir özellik uzayı (space-feature),  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ve  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$  olmak üzere bu iki manifold arasındaki dönüşüm  $X : (\Sigma, g_{\mu\nu}) \rightarrow (M, h_{ij})$  dir.  $x \in \Sigma$  görüntü yüzeyi üzerinde bir noktayı ve  $v \in T_x \Sigma$  teğet vektör uzayında bir teğet vektörü gösterecektir.

2-boyutlu bir görüntü  $I$ , (4.2)'deki  $X$  gömmesi ile  $\Sigma$  yüzeyi olarak modellenenir.

$$X : (x^1, x^2) \rightarrow (x^1, x^2, I(x^1, x^2)) \quad (4.2)$$

$x^1, x^2$  yerel koordinatlarında pozitif olarak tanımlanmış, simetrik bir  $g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$  Riemann metriği, görüntü manifoldu üzerinde (4.3)'deki gibi bir uzaklık tanımlar.

$$ds^2 = \langle g_\mu dx^\mu, g_\nu dx^\nu \rangle = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3)$$

$\Sigma$  ve  $M$  manifoldları üzerindeki metrikler, sırasıyla,  $g_{\mu\nu}$  ve  $h_{ij}$  olmak üzere,  $X : \Sigma \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  dönüşümü  $(X, (\Sigma, g_{\mu\nu}), (M, h_{ij}))$  Beltrami çerçevesi tanımlar. Burada  $\mu, \nu \in 1, 2$  ve  $i, j \in 1, 2, 3$  Einstein toplam kuralına göre tekrarlanan indisler üzerinden toplama yapılır.

$M \equiv \mathbb{R}^3$  gömme uzayının metriği  $h_{ij} = \text{diag}(1, 1, \beta^2)$  alınmıştır.  $\beta$  görüntü yoğunluğu ile uzaysal koordinatlar arasındaki bağıl ölçeği(en-boy oranı) gösteren bir pozitif parametredir. Böylece  $M \equiv \mathbb{R}^3$ ,  $\beta$  sayesinde istenilen oranda ölçeklenebilir bir yapı haline gelir (Zosso, Bresson ve Thiran, 2010: 1300). Ayrıca  $\Sigma$  gömülü görüntü manifoldunun  $g_{\mu\nu} = h_{ij} X_\mu^i X_\nu^j$  metriği aşağıdaki formda seçilmiştir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236).

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 I_{x^1}^2 & \beta^2 I_{x^1} I_{x^2} \\ \beta^2 I_{x^1} I_{x^2} & 1 + \beta^2 I_{x^2}^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Burada kısalığın hatırına  $I_{x^\mu} = \frac{\partial I}{\partial x^\mu}$  kullanılmıştır.

#### 4.1.1 Riemann (Izotropik) Beltrami Akışı

$(X, (\Sigma, g_{\mu\nu}), (M, h_{ij}))$  Beltrami çerçevesinde tanımlanan "Polyakov Action", yani Polyakov enerji integrali aşağıdaki gibidir (Polyakov, 1981a: 207).

$$S[X^i, g_{\mu\nu}, h_{ij}] = \int_\Sigma \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X^j h_{ij}(X) dx^1 dx^2 \quad (4.5)$$

buradaki  $g_{\mu\nu}$  metriğinin  $g$  determinanı,

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = 1 + \beta^2 (I_{x^1}^2 + I_{x^2}^2) \quad (4.6)$$

şeklinde olup,  $g_{\mu\nu}$ 'nün tersi,

$$(g^{\mu\nu}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 I_{x^2}^2 & -\beta^2 I_{x^1} I_{x^2} \\ -\beta^2 I_{x^1} I_{x^2} & 1 + \beta^2 I_{x^1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

şeklinde dir. Polyakov enerji integralini minimize etmek için,  $g_{\mu\nu}$  metriği indüklenmiş bir metrik olmalı ve aşağıdaki formda olmalıdır (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236).

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu X^i \partial_\nu X^j h_{ij}(X) \quad (4.8)$$

Bu metrik Polyakov Action'da yerine yazılıp ve  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 2(\dim(\Sigma))$  olduğu düşünülürse, Polyakov enerji integrali aşağıdaki forma dönüşür.

$$S = 2 \int_\Sigma \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (4.9)$$

Bu integral düzgün olmayan yüzeylerin alanını hesaplar. Bu nedenle, (4.9) denkleminde denilebilir ki, eğer görüntü yüzeyi üzerinde indüklenmiş bir metrik seçilirse, yüzey minimal olduğu alanlara doğru evrilir. Polyakov integralinin (4.2) dönüşümüne göre minimizasyonu,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i) = 0 \quad (4.10)$$

şeklinde dir ve parametrizasyondan bağımsızdır (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236).  $X = X(x^1, x^2, t)$  dönüşümler ailesinin,  $X(x^1, x^2, 0) = \Sigma$  başlangıç koşulu ile çözümü Beltrami akışını verir. Beltrami akışı görüntü yüzeyini, onun minimalini bulana kadar aşağıdaki akışla evirir (Balan ve Stojanov, 2013a: 493).

$$\frac{\partial X^i}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i), X^i(0) = \Sigma \quad (4.11)$$

Özel olarak  $\Delta_g$  operatörüne Beltrami operatörü veya Laplace-Beltrami operatörü de-

nilir. Bu operatörle Beltrami akışı

$$\Delta_g X^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2) dönüşümüne dikkat edilirse,  $x^1$  ve  $x^2$  yerel koordinatları sabit olduğundan,  $t$ 'ye göre türevi,

$$\frac{\partial X^i}{\partial t} = \left( 0, 0, \frac{\partial I(x^1, x^2, t)}{\partial t} \right) \quad (4.13)$$

şeklindedir. Buradan, Beltrami akışının sadece  $I$  görüntüsünün özelliklerini etkilediği görülür. (4.13) denklemi (4.12) denkleminde yerine yazılırsa, aşağıdaki izotropik Beltrami akışı elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta_g I \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu I) \quad (4.14)$$

Bu denklemin sağ tarafı açıkca hesaplandığında,

$$\Delta_g I \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{g^{3/2}} (g_{22} I_{x^1 x^1} - 2g_{12} I_{x^1 x^2} + g_{11} I_{x^2 x^2}) \quad (4.15)$$

bulunur. Burada

$$H^3 = \frac{1}{g^{3/2}} (g_{22} I_{x^1 x^1} - 2g_{12} I_{x^1 x^2} + g_{11} I_{x^2 x^2}) \quad (4.16)$$

denilirse, izotropik Beltrami akışı  $\Delta_g I = \frac{H^3}{\sqrt{g}}$  şekline dönüşür (Malladi ve Sethian, 1996: 127).

İzotropik Beltrami akışı görüntü yüzeyinin homojen bölgelerinde yumuşatma yaparak yüzeyi minimal bir alana doğru evirir. Görüntü yüzeyinde şiddetli gradyan geçişlerin olduğu yerlerde yumuşak bir geçiş sağlayarak görüntü kenarlarının korunmasını sağlar. Bu özelliğe "kenar koruma özelliği(edge preservation property)" denilmektedir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236). İzotropik Beltrami akışının algoritması Algoritma 4.1 ile verilmektedir.

---

**Algoritma 4.1: İzotropik Beltrami Akışı**

---

```
1 Gri seviyeli  $I(x^1, x^2)$  görüntüsünü yükle
2 Görüntü verisini floating point veriye dönüştür
3 Ölçek parametresi  $\beta$ 'yi belirle
4 Adım uzunluğu  $dt$ 'yi belirle
5 for her bir iterasyon do
6    $I(x^1, x^2)$  görüntüsünün merkezi farkını hesapla
7   Her bir noktada Riemann metrik tensörü  $g^{\mu\nu}$  ve determinantı  $g$  yi hesapla
8    $H^3$ 'ü hesapla
9   Laplace-Beltrami operatörü  $\Delta_g I = \frac{H^3}{\sqrt{g}}$  hesapla
10   $I \leftarrow I + dt \cdot \Delta_g I$ 
11 end
```

---

#### 4.1.2 Finsler (Anizotropik) Beltrami Akışı

Polyakov enerji integraline anizotropik bir yapı kazandırmak için, Riemann metriği  $\varphi(x, v)$  Finsler uzantısı ile aşağıdaki gibi manipüle edilir (Shen, 2013a).

$$\gamma_{\mu\nu}(x, v) = g_{\mu\nu}(x) + \varphi(x, v) \quad (4.17)$$

Burada  $x = (x^1, x^2) \in \Sigma$  görüntü yüzeyi üzerinde bir nokta,  $v = (v^1, v^2) \in T_x \Sigma$  o noktadaki teğet vektör ve  $\varphi(x, v)$  pozitif homojen bir tensördür.  $\gamma_{\mu\nu}$  anizotropik metriği görüntü üzerinde Randers tipinde bir Finsler metriğidir. Bu metriğe göre Polyakov integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S[X^i, \gamma_{\mu\nu}, h_{ij}] = \int_{\Sigma} \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_{\mu} X^i \partial_{\nu} X^j h_{ij}(X) dx^1 dx^2 \quad (4.18)$$

Burada  $\gamma$ , Finsler metriğinin determinantı,  $\gamma^{\mu\nu}$  metriğin tersini temsil etmektedir. Böylece Polyakov Eylemi  $\gamma_{\mu\nu}(x, v)$  finsler metriği ile anizotropik bir form almış olur. Bu polyakov eylemini minimize eden Beltrami akışı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_{\mu} (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_{\nu} I) \quad (4.19)$$

Bu akışa anizotropik Beltrami akışı denir. (4.19) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki gibi açıkça hesaplanırsa, Laplace-Beltrami operatörünün Finsler uzaylarına bir genişlemesi elde edilmiş olur.

**Önerme 1.** Laplace-Beltrami operatörünün Finsler uzaylarına genişlemesi,

$$\Delta_\gamma I = \gamma^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.20)$$

olarak verilsin, burada  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ,  $\Sigma$  görüntü manifoldu üzerinde tanımlanan Christoffel sembolünün bileşenleri (Kreyzig, 1991)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\theta} (\gamma_{\theta\nu;\mu} + \gamma_{\mu\theta;\nu} - \gamma_{\mu\nu;\theta}), \quad \gamma_{\mu\alpha;\theta} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\theta} \quad (4.21)$$

şeklindedir.

*Kanıt.* (4.20) denkleminin sağ tarafı  $\frac{\partial \gamma^\nu}{\partial x^\mu} = -\Gamma_{\mu\theta}^\nu \gamma^\theta$  kullanılarak hesaplanırsa (Nguyen-Schäfer ve Schmidt, 2014), aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial x^\mu} \right) \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x^\mu} \right) \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\mu} \cdot \left( \gamma^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \right) + \gamma^\mu \cdot \left( \frac{\partial \gamma^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x^\mu} \right) \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\mu} \cdot \left( \gamma^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \right) + \gamma^\mu \cdot \left( -\Gamma_{\mu\theta}^\nu \gamma^\theta \right) \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x^\mu} \right) \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\mu} \cdot \left( \gamma^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \right) - \gamma^{\mu\theta} \Gamma_{\mu\theta}^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} + \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \end{aligned} \quad (4.22)$$

burada,  $\gamma^\mu$  yüzeyin kontravaryant vektörleri olmak üzere (4.22) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir (Balan ve Stojanov, 2013a: 493).

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma I &= \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \gamma^{\mu\theta} \Gamma_{\mu\theta}^\nu \frac{\partial I}{\partial x^\nu} \\ &= \gamma^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

□

Anizotropik Beltrami akışındaki karmaşık hesaplar ihmal edilerek, akış yaklaşık olarak görüntünün aşağıda verilen  $\Delta_\gamma$  anizotropik Laplace-Beltrami operatörüne indirgenir.

$$\frac{\partial I}{\partial t} \cong \Delta_\gamma I = \gamma^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.24)$$

## 4.2. Yeni Metrik Ailesi

Finsler uzaylarındaki yapılar manifold üzerinde bir nokta ve o noktanın teğet vektörlerini içerdiklerinden anizotropik yapıdadırlar. Finsler'in temel fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Shen, 2013a).

**Tanım 2** (Finsler'in Temel Fonksiyonu). *Bir  $M, n$ -boyutlu türevlenebilir manifold üzerinde  $F : TM \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığında Finsler'in Temel Fonksiyonu denir (Shen, 2013a).*

- *Regülerlik:  $F(x, y)$ ,  $TM \setminus \{0\}$  üzerinde  $C^\infty$  türevlenebilir*
- *Pozitif Homojenlik:  $F(x, y)$ ,  $v \in TM$  teğet vektörlerine göre birinci dereceden pozitif homojendir.*

$$F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v), \forall \lambda > 0 \quad (4.25)$$

- *Güçlü Konvekslik:  $\forall v \in TM \setminus \{0\}$  için  $TM$  üzerinde bir pozitif temel tensör aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$g_{\mu\nu}(x, v) = \left( \frac{\partial^2}{\partial v^\mu \partial v^\nu} \left[ \frac{1}{2} F^2(x, v) \right] \right) \quad (4.26)$$

Burada,  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, \dim(M)$  dır.

Finsler'in Temel Fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki metrikler tanımlanacaktır.

### 4.2.1 Randers Tipinde Metrikler

Randers tipinde Finsler metriğinin temel fonksiyonu aşağıdaki yapıdadır (Stojanov, 2015).

$$F(x, v) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) v^\mu v^\nu} + b_\mu(x) v^\mu \quad (4.27)$$

Burada  $g = g_{\mu\nu}(x)dv^\mu dv^\nu$ ,  $M$  manifoldu üzerinde bir Riemann metriğidir ve  $b = b_\mu(x)dv^\mu$  bir 1-form'dur.  $F$  temel fonksiyonun pozitif tanımlı olması için, 1-form aşağıdaki şartı sağlamalıdır (Shen, 2013a).

$$\|b\|_g = \sqrt{g^{\mu\nu}(x)b_\mu b_\nu} < 1 \quad (4.28)$$

Fakat, (Stojanov, 2015)'da  $b_\mu = \frac{\beta^2 g}{1-g} I_{x^\mu}$  şeklinde tanımlanan 1-form

$$\|b\|_g = \sqrt{\frac{\beta^2 g}{1-g}} > 1 \quad (4.29)$$

eşitsizliğinde görüldüğü gibi bu şartı sağlamamaktadır. Bu nedenle, (Stojanov, 2015)'da önerilen Randers metrik önerisi yerine, yeni bir Randers metriği 1-form'u  $b_\mu = \frac{1}{V} I_{x^\mu}$  olarak aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

- **Yeni Randers Metrik:** Yeni Randers metriğinin Finsler temel fonksiyonu

$$F(x, v) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu} + \left(\frac{1}{V} I_{x^\mu}\right) v^\mu \quad (4.30)$$

şeklinde. Burada  $v \in T_x \Sigma$  yüzey üzerinde bir teğet vektör olmak üzere,  $V = g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu = \|v\|_g^2$  dır. Randers tipinde metrikler için Beltrami akışı Algoritma 4.2'de verilmiştir.

- **Ingarden Metrik:** Ingarden metriğini oluşturmak için, Randers tipli metriklerde 1-formu'nu  $b_\mu = I_{x^\mu}$  olarak, Finsler temel fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulabilir (Stojanov, 2015).

$$F(x, v) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu} + I_{x^\mu} v^\mu \quad (4.31)$$

Ingarden metriği için anizotropik beltrami akışı, Algoritma 4.2'de 12. adımda  $b_\mu = I_{x^\mu}$  alınarak hesaplanabilir.

#### 4.2.2 Synge-Beil Tipinde Metrikler

Synge-Beil tipinde bir Finsler metriğinin temel fonksiyonu aşağıdaki yapıdadır (Stojanov, 2015).

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + c \cdot v_\mu v_\nu \quad (4.32)$$

---

**Algoritma 4.2:** Randers Tipli Anizotropik Beltrami Akışı

---

```
1 Gri seviyeli  $I(x^1, x^2)$  görüntüsünü yükle
2 Görüntü veri tipini 'floating points' olarak değiştir
3  $\beta$  ölçek parametresini gir
4  $dt$  adım büyüklüğünü gir
5 for her bir iterasyon do
6    $I(x^1, x^2)$ 'nin birinci ve ikinci dereceden merkezi farklarını hesapla
7    $\operatorname{argmax}_{v \in T_x \Sigma} (|I(i, j) - I(i + v^1, j + v^2)|)$  kullanarak  $v$ 'nin kontravaryant
   bileşenlerini belirle
8   Her bir noktada  $g_{\mu\nu}$  Riemann metrik tensörünün determinanı  $g$  ve tersi  $g^{\mu\nu}$ 'yi
   hesapla
9    $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \beta^2 (I_{x^\mu x^\alpha} I_{x^\nu} + I_{x^\nu x^\alpha} I_{x^\mu})$  türevlerini hesapla
10   $V = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$  kuadratik normunu hesapla
11   $\frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\mu v^\nu$  türevlerini hesapla
12   $b_\mu = \frac{1}{V} I_{x^\mu}$ ,  $\|b\|_g$  1- form bileşenlerini ve  $\frac{\partial b_\mu}{\partial x^\alpha}$  türevlerini hesapla
13   $\Omega = b_\mu v^\mu$  skaler lineer formunu ve  $G = \sqrt{V}$  g-normunu hesapla
14   $F = G + \Omega$  Finsler temel fonksiyonunu hesapla
15   $\varphi_{\mu\nu} = \frac{\Omega}{G} g_{\mu\nu} - \frac{\Omega}{G^3} g_{\mu\rho} g_{\nu\theta} v^\rho v^\theta + \frac{1}{G} (g_{\mu\theta} b_\nu + g_{\nu\theta} b_\mu) v^\theta + b_\mu b_\nu$  tamamlayıcı metrik
   tensörünü ve tersi  $\varphi^{\mu\nu} = -\frac{\Omega}{F} g^{\mu\nu} + \frac{\Omega + G\|b\|_g^2}{F^3} v^\mu v^\nu - \frac{G}{F^2} (g^{\mu\alpha} b_\alpha v^\nu + g^{\nu\alpha} b_\alpha v^\mu)$  ni
   hesapla
16   $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$  Randers metrik bileşenleri ve onun türevleri
    $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$  ni hesapla
17  Randers metrik bileşenlerinin tersi  $\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}$  ni hesapla
18   $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  Christoffel sembol bileşenlerini hesapla
19   $\Delta_\gamma I = \gamma^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right)$  Laplace-Beltrami operatörünü hesapla
20   $I \leftarrow I + dt \cdot \Delta_\gamma I$ 
21 end
```

---

burada  $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$  manifoldun teğet vektörünün kovaryant bileşenleridir ve  $c = c(I, I_{x^\alpha})$  görüntü manifoldu üzerinde düzgün bir skaler manifold belirtir. Synge-Beil metrikleri  $c$  seçimlerine göre farklılıklar gösterebilir. Aşağıda  $c$ 'nin seçimlerine göre metrikler açıklanmaktadır.

- **Normalize Miron Metriği:**  $c = \frac{1}{V}$  seçilerek tanımlanan metriğe normalize miron metriği denilir (Stojanov, 2015). Synge-Beil tipinde metrikler için Algoritma 4.3 izlenebilir. Algoritmada normalize Miron metrikli bir anizotropik Beltrami akışı hesabı yer almaktadır.
- **Yeni Normalize Miron Metriği:** Yeni normalize Miron metriği  $c = \left(1 - \frac{1}{g}\right) \frac{1}{V}$  alınarak elde edilir. Burada  $1/g$  bir kenar bulucu olarak düşünülebilir, öyleki bu kenar bulucu



homojen veya düz bölgelerde 1, homojen olmayan veya kenar bölgelerinde 0 değerini almaktadır. Dolayısıyla,  $1/g$ 'ye homojen bölge bulucuda denilebilir. Bu metriğin hesabı Algoritma 4.3'nin 11. adımında  $c = \left(1 - \frac{1}{g}\right) \frac{1}{V}$  alınarak yapılabilir.

Burada  $1 - \frac{1}{g}$  ifadesi, temel fonksiyonun anizotropiklik etkisini, görüntü yüzeyinin homojen(izotropik) yerlerinde neredeyse sıfır yaparak anizotropikliğin öne çıkmasına neden olur. Bu nedenle,  $1 - \frac{1}{g}$  ifadesi  $1/g$  ifadesinin tersi bir etkiye sahiptir. Aşağıda  $1 - \frac{1}{g}$  seçilerek yeni bir metrik tanımlanacaktır.

- **Yeni Metrik** Yeni metrik Algoritma 4.3'in 11. adımında  $c = 1 - \frac{1}{g}$  seçilerek tanımlanabilir.

---

**Algoritma 4.3:** Syngé-Beil Tipli Anizotropik Beltrami Akışı

---

```

1 Gri seviyeli  $I(x^1, x^2)$  görüntüsünü yükle
2 Görüntü veri tipini 'floating points' olarak değiştir
3  $\beta$  ölçek parametresini gir
4  $dt$  adım büyüklüğünü gir
5 for her bir iterasyon do
6    $I(x^1, x^2)$ 'nin birinci ve ikinci dereceden merkezi farklarını hesapla
7    $\operatorname{argmax}_{v \in T_x \Sigma} (|I(i, j) - I(i + v^1, j + v^2)|)$  kullanarak  $v$ 'nin kontravaryant
   bileşenlerini belirle
8   Her bir noktada  $g_{\mu\nu}$  Riemann metrik tensörünün determinanı  $g$  ve tersi  $g^{\mu\nu}$ 'yi
   hesapla
9    $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$  kontravaryant teğet bileşenlerini belirle
10   $V = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$  kuadratik normunu hesapla
11   $c = \frac{1}{V}$  skaler fonksiyonunu hesapla
12   $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + c \cdot v_\mu v_\nu$  metriğini hesapla
13   $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  Christoffel sembol bileşenlerini hesapla
14   $K = 1 + c \cdot V, S = -\frac{c}{K}$  metrik krakteristiklerini hesapla
15   $\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + S \cdot v^\mu v^\nu$  ters metriğini hesapla
16   $\Delta_\gamma I = \gamma^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right)$  Laplace-Beltrami operatörünü hesapla
17   $I \leftarrow I + dt \cdot \Delta_\gamma I$ 
18 end

```

---

### 4.3. Görüntü Kalitesi Metrikleri

Görüntü kalitesi ölçümleri görüntü işlemede her zaman tartışılır bir konu olmuştur. Görüntü kalitesi için araştırmacılara fikir veren en önemli metrikler ve matematiksel ifadeleri aşağıda sunulmuştur. Hesaplamalarda “X” orijinal görüntü ve “Y” hesaplanan görüntü olarak alınacaktır. Bu metriklerin detaylı bilgileri referanslarda bulunabilir.

- Ortalama Karesel Hata: Mean Square Error (MSE)

Bu metrik iki görüntü üzerindeki hataları piksel piksel bularak bunların ortalamasını almaktadır. Yani buradaki ana fikir hesaplanan görüntünün ne kadar az hata ile, yada bozunma ile iyileştirildiğidir. Değer 0 ile 1 arasında değişmektedir. Örneğin 0.06 ortalama karesel hata çıkması %6 bozunum olduğunu ifade etmektedir. Matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir(Allen, 1971: 469) (Khosravy vd., 2019: 279).

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - Y_{i,j})^2 \quad (4.33)$$

- Tepe Sinyali Gürültü Oranı: Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)

PSNR bir sinyalin en yüksek gücünün sinyaldeki gürültüye oranıdır. MSE sıfıra yaklaştıkça PSNR büyür ve sonsuza yaklaşır, dolayısıyla rekonstrüksiyonu yüksek bir görüntünün PSNR'si yüksek çıkacaktır. Dolayısıyla işlemde geçmiş görüntüdeki bozunmayı PSNR ile yorumlayabiliriz. PSNR ne kadar sıfıra yakın çıkarsa görüntü yapılandırılması o kadar kötüdür(Poobathy ve Chezian, 2014: 55) (Khosravy vd., 2019: 279).

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (4.34)$$

- Görüntü Doğruluğu: Image Fidelity (IF)

Görüntü doğruluğu iki görüntü arasında kaynak dağılımının ne kadar iyi yapıldığı, görüntü kalitesinden farklı olarak bir işlemin herhangi bir görünür bozulma veya bilgi kaybı olmaksızın bir görüntüyü doğru şekilde oluşturma yeteneğini temsil eder. Örneğin 0.99 çıkan IF değeri %1 bilgi kaybını temsil etmektedir(Silverstein ve Farrell, 1996: 881) (Khosravy vd., 2019: 279).

$$IF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (X(i,j) - Y(i,j))^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (X(i,j))^2} \quad (4.35)$$

- Yapısal Benzerlik Endeksi Ölçüsü: Structural Similarity Index Measure (SSIM)

SSIM dijital resimlerin veri kayıplarından kaynaklanan görüntü kalitesi bozulmasını ölçen bir metriktir. Hesaplanan görüntüdeki SSIM orijinal yani referans görüntünün yapısal kaynaklarına dayanmaktadır. SSIM görüntüdeki kontrast, ışık gibi yapısal yapısal bilgileri kullanarak bir benzerlik yaklaşımı sunar. Örneğin 0.9 çıkan SSIM hesaplanan görün-

tünün orijinal görüntüye yapısal olarak %90 benzediği bilgisini verir (Wang vd., 2004: 600) (Khosravy vd., 2019: 279).

$$SSIM = \frac{(2\mu_X\mu_Y + c_1)(2\sigma_{XY}^2 + c_1)}{(\mu_X^2 + \mu_Y^2 + c_1)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + c_2)} \quad (4.36)$$

$c_1, c_2$  tanımsızlığı ortadan kaldıran küçük sayılar,  $\mu$  mean ve  $\sigma^2$  kovaryansı ifade etmektedir.

- Karşılıklı Bilgi: Mutual Information (MI)

İki görüntünün MI bilgisi, aslında bir görüntünün diğeri ile ilgili ne kadar bilgi içerdiği manasına gelir. Yüksek MI değeri belirsizlikte büyük bir azalma olduğunu, düşük MI değeri küçük bir azalma olduğunu, eğer MI değeri sıfır olursa iki görüntünün birbirinden bağımsız olduğu manasına gelir (Gierlichs vd., 2008: 426) (Khosravy vd., 2019: 279).

$$MI = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (4.37)$$

burada  $H(X) = E\{-\log_2(p(x))\}$ ,  $X$  kaynağının entropisini ve  $H(X, Y)$  ise  $X$  ile  $Y$ 'nin ortak entropisini belirtmektedir.

#### 4.4. Görüntü İşleme Uygulamaları

Bu bölümde, yeni anizotropik görüntü filtreleri tanıtılmakta ve performansları mevcut izotropik ve anizotropik filtrelerle karşılaştırılmaktadır. Geliştirilen anizotropik filtreler, standart görüntü kalitesi metrikleri açısından görüntüde gürültü giderme performanslarına ve filtrelenen görüntülerin kenar koruma özelliklerine göre incelenmiştir. Anizotropik filtrelerin matematiksel çıkarımları, Polyakov integralinin minimizasyonuna dayalı olarak yapılır. Karşılık gelen integrali minimize eden Finsler metrikleri aracılığıyla yeni anizotropik metrikler bulunur. Yeni metrikler, görüntüyü anizotropik Laplace-Beltrami akışıyla güncelleyerek filtreleme gerçekleştirir.

Önerilen metriklerle filtreleme işlemleri Şekil 4.2'deki görüntülere uygulanacak ve sonuçları tablolar ve şekiller halinde değerlendirilecektir. Filtreleme sırasında, algoritmalar 20 iterasyonla çalıştırılmış, ölçek parametresi ve adım uzunluğu parametresi deneysel olarak ayarlanmıştır. Deneysel testler iki bölümden oluşur:

##### I. Gürültü giderme incelemeleri

## II. Kenar koruma incelemeleri

Filtreleme adımı, standart test görüntülerine gürültü eklenerek, anizotropik ve izotropik filtreler uygulanmıştır. Filtrelenen görüntüler ile referans görüntüler önceki bölümde bahsedilen görüntü kalitesi metrikleri ile karşılaştırılmıştır. Burada incelenen filtreler nonlineer filtreler olduğundan filtre parametreleri( $\beta, dt$ ) görüntünün karakteristiklerine göre değişkenlik gösterebilir. O nedenle, Şekil 4.3'deki görüntüler, Tablo 4.1'deki gibi bir deney seti ile incelenmiş ve en iyi sonucun tabloda koyu renkte gösterilen parametreler ile elde edildiği görülmüştür. Tabloda (g) görüntüsüne Gauss gürültüsü eklendikten sonra yeni filtre ailesi ile filtrelenmiş sonuçlar görülmektedir. Buna göre Şekil 4.3'deki tüm görüntüler tabloda görülen en iyi sonuca göre filtrelendiğinde Tablo 4.3 elde edilir.

Anizotropik filtrelemedeki önemli hususlardan biriside, görüntüyü filtrelerken kenarları korumalarıdır. Bu özellik çeşitli uygulamalarda kritik düzeyde önem taşımaktadır. Örnek olarak, biyomedikal uygulamalar ile radar, uydu gibi kamufle görüntüler içeren uygulamalarda önem taşımaktadır. O nedenle kenar koruma bölümünde özel olarak bir damar görüntüsü(Şekil 4.2-(d)) ile kamufle bir saha görüntüsü(Şekil 4.2-(e)) incelenmiştir. Dikkat edilirse bu tarzda görüntüler bulanık ve kendinden gürültüdür, bu nedenle yeni filtre ailesi için bu görüntüler iyi bir kıyaslama olacaktır. Ayrıca bu tarz görüntülerde kenar detayları oldukça yoğun olduğundan, gürültü detaylarını ayırt etmek zorlu bir iştir.

Burada incelenen yapıda anizotropik filtrelerde filtre parametreleri resme göre ayarlanmalıdır. Örneğin Şekil 4.3'deki (g) görüntüsüne göre Tablo 4.1 elde edilirken, Şekil 4.3'deki (e) görüntüsüne göre Tablo 4.2'daki sonuçlar elde edilmektedir. Bu nedenle filtrelemede herhangi bir resim için optimum sonuç elde etmek mümkün olmayabilir.



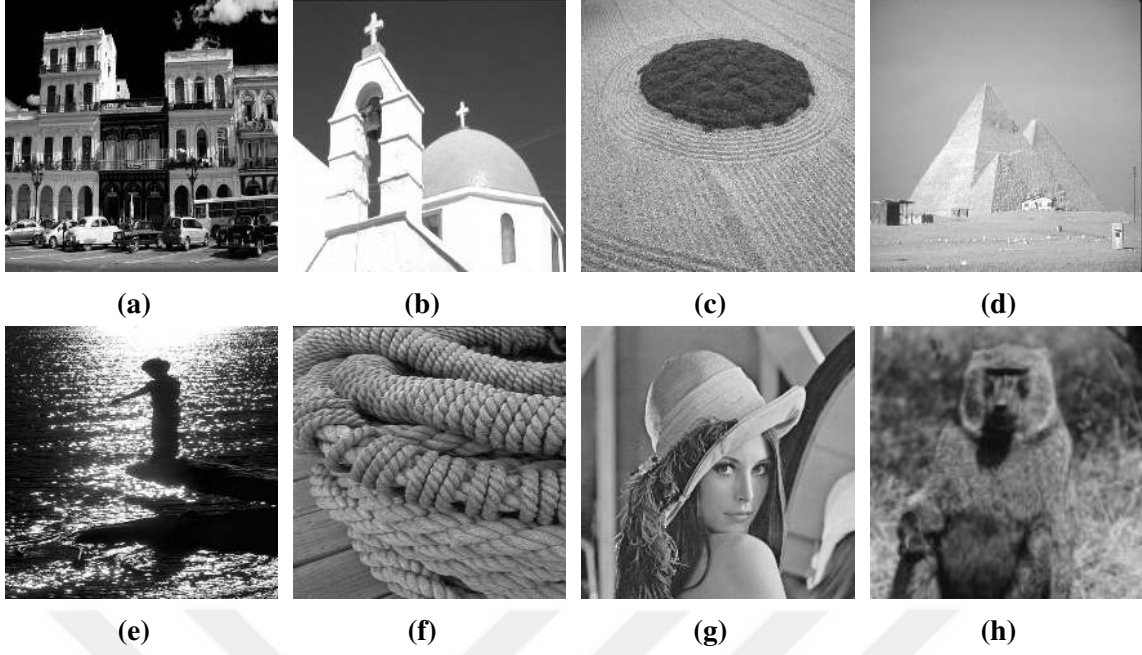
**Şekil 4.2.** Deneylerde kullanılacak görüntüler: (a)Temiz Lena, (b)Gauss gürültülü Lena, (c)Salt-Pepper gürültülü Lena, (d)Damar, (e)Saha

**Tablo 4.1.** (g) Resmi için  $\beta$  ve  $dt$ 'nin değişimlerine göre yeni filtre ailesinin en iyi PSNR sonuçları

| Deney No | $\beta$  | $dt$        | Yeni Metrik        | Yeni N.Miron       | Yeni Randers       |
|----------|----------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1        | 0.01     | 0.05        | 29.07276424        | 29.07276246        | 28.88331646        |
| 2        | 0.01     | 0.1         | 27.85557316        | 27.85557183        | 27.69587485        |
| 3        | 0.01     | 0.2         | 26.30920029        | 26.30919951        | 26.12583929        |
| 4        | 0.01     | 0.01        | 25.54994488        | 25.54994593        | 25.53251623        |
| 5        | 0.2      | 0.05        | 29.10108826        | 29.10036784        | 28.88732012        |
| 6        | 0.2      | 0.1         | 27.91319584        | 27.91265401        | 27.74280465        |
| 7        | 0.2      | 0.2         | 26.31081756        | 26.31049985        | 26.12778134        |
| 8        | 0.2      | 0.01        | 25.56795746        | 25.56838553        | 25.55207659        |
| 9        | <b>1</b> | <b>0.05</b> | <b>29.12977532</b> | <b>29.11314059</b> | <b>28.92343564</b> |
| 10       | 1        | 0.1         | 27.92243105        | 27.90918372        | 27.74705721        |
| 11       | 1        | 0.2         | 26.34546968        | 26.33818676        | 26.17660277        |
| 12       | 1        | 0.01        | 25.44097415        | 25.45212696        | 25.46162674        |

**Tablo 4.2.** (e) Resmi için  $\beta$  ve  $dt$ 'nin değişimlerine göre yeni filtre ailesinin en iyi PSNR sonuçları

| Deney No | $\beta$    | $dt$        | Yeni Metrik        | Yeni N.Miron       | Yeni Randers      |
|----------|------------|-------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1        | 0.01       | 0.05        | 20.93177734        | 20.93177268        | 20.7259785        |
| 2        | 0.01       | 0.1         | 18.91425993        | 18.91425789        | 18.77705696       |
| 3        | 0.01       | 0.2         | 17.56597149        | 17.56597059        | 17.46337661       |
| 4        | 0.01       | 0.01        | 29.42313034        | 29.42311339        | 28.89179445       |
| 5        | 0.2        | 0.05        | 20.93867749        | 20.9368207         | 20.72967739       |
| 6        | 0.2        | 0.1         | 18.91724938        | 18.91643357        | 18.77888131       |
| 7        | 0.2        | 0.2         | 17.5672805         | 17.56692089        | 17.46450907       |
| 8        | <b>0.2</b> | <b>0.01</b> | <b>29.44905086</b> | <b>29.44236004</b> | <b>28.9068617</b> |
| 9        | 1          | 0.05        | 21.09965205        | 21.05633303        | 20.8181537        |
| 10       | 1          | 0.1         | 18.98711751        | 18.96786072        | 18.82153896       |
| 11       | 1          | 0.2         | 17.59729504        | 17.58905657        | 17.48916469       |
| 12       | 1          | 0.01        | 21.09965205        | 21.05633303        | 20.8181537        |



**Şekil 4.3.** Tablo 4.3 oluşturulurken kullanılan görüntüler

**Tablo 4.3.** Resimlere göre yeni filtre ailesinin PSNR sonuçları( $\beta = 1$ ,  $dt = 0.05$ )

| Resim | Yeni Metrik | Yeni Normalize Miron | Yeni Randers |
|-------|-------------|----------------------|--------------|
| (a)   | 22.855233   | 22.83089838          | 22.6766864   |
| (b)   | 27.928344   | 27.92076675          | 27.6320285   |
| (c)   | 24.700099   | 24.69533177          | 24.6038963   |
| (d)   | 29.802221   | 29.7968557           | 29.6173883   |
| (e)   | 21.099652   | 21.0563330           | 20.8181537   |
| (f)   | 26.762323   | 26.75106516          | 26.6229068   |
| (g)   | 29.129366   | 29.11307704          | 28.9205605   |
| (h)   | 26.386066   | 26.37956667          | 26.6703923   |

#### 4.4.1 Gürültü Giderme

Bu bölümde klasik bir anonim görüntü olan Lena üzerine gürültü ekleyerek yukarıda tanıtılan filtrelerin, görüntüyü nasıl ve ne kadar iyileştirdikleri incelenmiştir. Metrikler incelenirken adım büyüklüğü  $dt = 0.05$  ve ölçek parametresi  $\beta = 1$  alınarak, çevrim sayısı 20 ile filtreler çalıştırılmıştır. Gürültü giderme testlerinde Gauss ve salt-pepper gürültüsü ile testler yapılmıştır. Testler yeni filtre ailesi ile diğer iyi bilinen filtrelerle karşılaştırma şeklinde olup, bu kıyaslama yukarıda tanıtılan görüntü kalitesi metrikleri ile edilmiştir. Aşağıdaki tablolarda

görülen sonuçlardan, koyu renkte olanı en iyi sonucu belirtmektedir.

Anizotropik filtreler Yeni Randers, Ingarden, Normalize Miron, Yeni Normalize Miron ve Yeni Metriktir. Diğer filtreler(izotropik) Beltrami, Gaussian, Mean, Median filtrelerdir. Şekillerde en üstte orijinal görüntü ile gürültülü görüntüler, diğer satırlarda ise geleneksel filtreler ile anizotropik filtreler yer almaktadır.

Önerilen filtrelerin iki bağımsız parametresi bulunmaktadır. Bu parametreler ölçek:  $\beta$  ve adım büyüklüğü:  $dt$ 'dir. Test görüntülerinde parametreler PSNR değerlerine göre değerlendirilerek en iyi sonuçlar  $\beta = 1$  ve  $dt = 0.05$  iken alındığı görülmüştür. Deneylerin diğerlerinde bu parametreler ayarlanarak deneyler yapılmıştır.

Sonuç olarak, filtreleme performansları değerlendirilmiş ve Tablo 4.4 ve 4.5 tablolarında karşılaştırılmıştır. Tablo 4.4'de Gauss gürültüsü eklenerek elde edilen sonuçlar, Tablo 4.5'de salt-pepper gürültü eklenerek elde edilen sonuçlar görülmektedir. Performans sıralamaları tabloların son kolonunda görülmektedir. Gauss gürültülü görüntülerin sonuçları için, önerilen Yeni Metrik ile birlikte önerilen diğer metriklerin hepsi klasik ve popüler diğer metriklere göre daha iyi performans sunmuşlardır. Salt-pepper gürültülü metriklerin sonuçları için, median filtrenin ilk sırada olmasının nedeni median filtre özel olarak salt-pepper gürültüsünün karakteristiğine göre ayarlanmış bir filtredir. Fakat mediandan sonra yine en iyi sonuçları önerilen filtreler vermiştir. Her iki gürültü tipi için filtreleme sonuçlarında elde edilen görüntü sonuçları Şekil 4.4'da görülmektedir.

**Tablo 4.4.** Gauss gürültüsü eklenerek elde edilen sonuçlar

| Filtreler          | MSE                | PSNR               | SSIM              | IF                | MI                 | Sıralama |
|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|----------|
| Ingarden           | 0.001309705        | 28.82826672        | 0.794069177       | 0.99983037        | 2.242687698        | 5        |
| Normalize Miron    | 0.001547515        | 28.10365142        | 0.657805686       | 1.00000000        | 1.999225724        | 6        |
| Yeni Randers       | 0.001281317        | 28.92343564        | 0.794718001       | 0.999876761       | 2.243635749        | 4        |
| Yeni N. Miron      | 0.001226552        | 29.11314059        | 0.795900885       | 1.00000000        | 2.248251732        | 2        |
| <b>Yeni Metrik</b> | <b>0.001221863</b> | <b>29.12977532</b> | <b>0.79602522</b> | <b>1.00000000</b> | <b>2.249151847</b> | <b>1</b> |
| Beltrami           | 0.001232584        | 29.09183492        | 0.795772993       | 1.00000000        | 2.246884165        | 3        |
| Gauss              | 0.00412837         | 23.8422139         | 0.410997405       | 1.00000000        | 1.46191881         | 9        |
| Median             | 0.002095173        | 26.78780212        | 0.586454863       | 0.999931211       | 1.835653449        | 8        |
| Mean               | 0.001701198        | 27.69245207        | 0.658238678       | 0.999601954       | 1.990697371        | 7        |

#### 4.4.2 Kenar Koruma

Gürültü filtreleme görüntü işleme uygulamalarında genellikle tek başına bir işlem olarak kabul edilmez. Normalde, gürültü filtrelemenin nedeni bölütleme gibi daha fazla anlamsal bir görüntü işlemede ön adım olarak kullanmaktır. Genellikle, bir kenar algılama adımı gürültü

**Tablo 4.5.** Salt pepper gürültüsü eklenerek elde edilen sonuçlar

| Filtreler       | MSE                | PSNR               | SSIM               | IF                 | MI                | Sıralama |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|----------|
| Ingarden        | 0.001689799        | 27.72165069        | 0.760615578        | 0.999774805        | 2.162890067       | 5        |
| Normalize Miron | 0.002086916        | 26.80495066        | 0.642954189        | 1.000008887        | 2.220145374       | 6        |
| Yeni Randers    | 0.001611749        | 27.92702488        | 0.764977526        | 0.999864619        | 2.176803028       | 4        |
| Yeni N. Miron   | 0.001467996        | 28.33275233        | 0.777920753        | 1.000007435        | 2.224865613       | 3        |
| Yeni Metrik     | 0.001465404        | 28.34042568        | 0.777905368        | 1.000007441        | 2.225185258       | 2        |
| Beltrami        | 0.001492078        | 28.26208368        | 0.775628844        | 1.000007859        | 2.214994318       | 4        |
| Gauss           | 0.006029128        | 22.19745483        | 0.45323612         | 1.000011062        | 3.516718791       | 8        |
| <b>Median</b>   | <b>0.000311034</b> | <b>35.07192355</b> | <b>0.947368091</b> | <b>0.999996349</b> | <b>3.60860497</b> | <b>1</b> |
| Mean            | 0.002307967        | 26.36770319        | 0.630016574        | 0.999628218        | 2.476146994       | 7        |

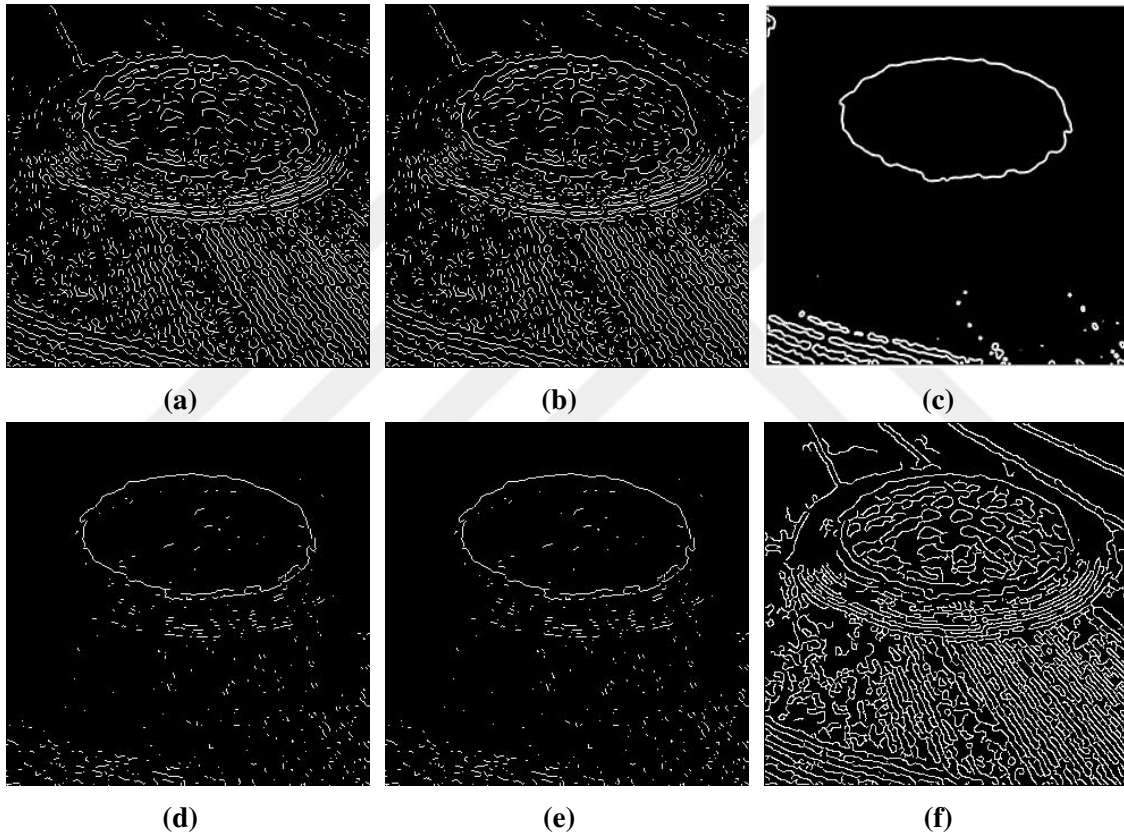


**Şekil 4.4.** Gauss (solda) ve Salt-Pepper (sağda) gürültü giderme sonuçları: (a) Orijinal, (b) Gauss gürültülü, (c) Salt-Pepper gürültülü; İzotropik filtreler: (d) Beltrami, (e) Gauss, (f) Mean, (g) Median; Anizotropik filtreler: (h) Yeni Randers, (i) Ingarden, (j) N. Miron, (k) Yeni N.Miron, (l) Yeni Metrik.



filtrelemeyi takip eder. Anizotropik filtreleri diğerlerinden ayıran özelliklerinden biri güçlü gürültü giderme performanslarına rağmen kenar koruma özelliğidir. Bu bölümde aynı filtre setinin kenar koruma özellikleri incelenmiştir.

Şekil 4.6’da, yapay Gauss gürültüsü eklenerek anonim bir görüntü filtrelenmiş ve Canny edge detektör ile kenarları sunulmuştur. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de görüntüler kendinden gürültülü olduğundan yapay bir gürültü eklenmeden filtreleme yapılmış ve Canny ile kenarları sunulmuştur. Burada Canny kenar detektörü seçilmesinin nedeni diğer kenar detektörlere göre en iyi kenar bulma algoritması olmasıdır. Örneğin Şekil 4.5’de, diğer detektörlere göre, örnek kenarlar yer almaktadır.



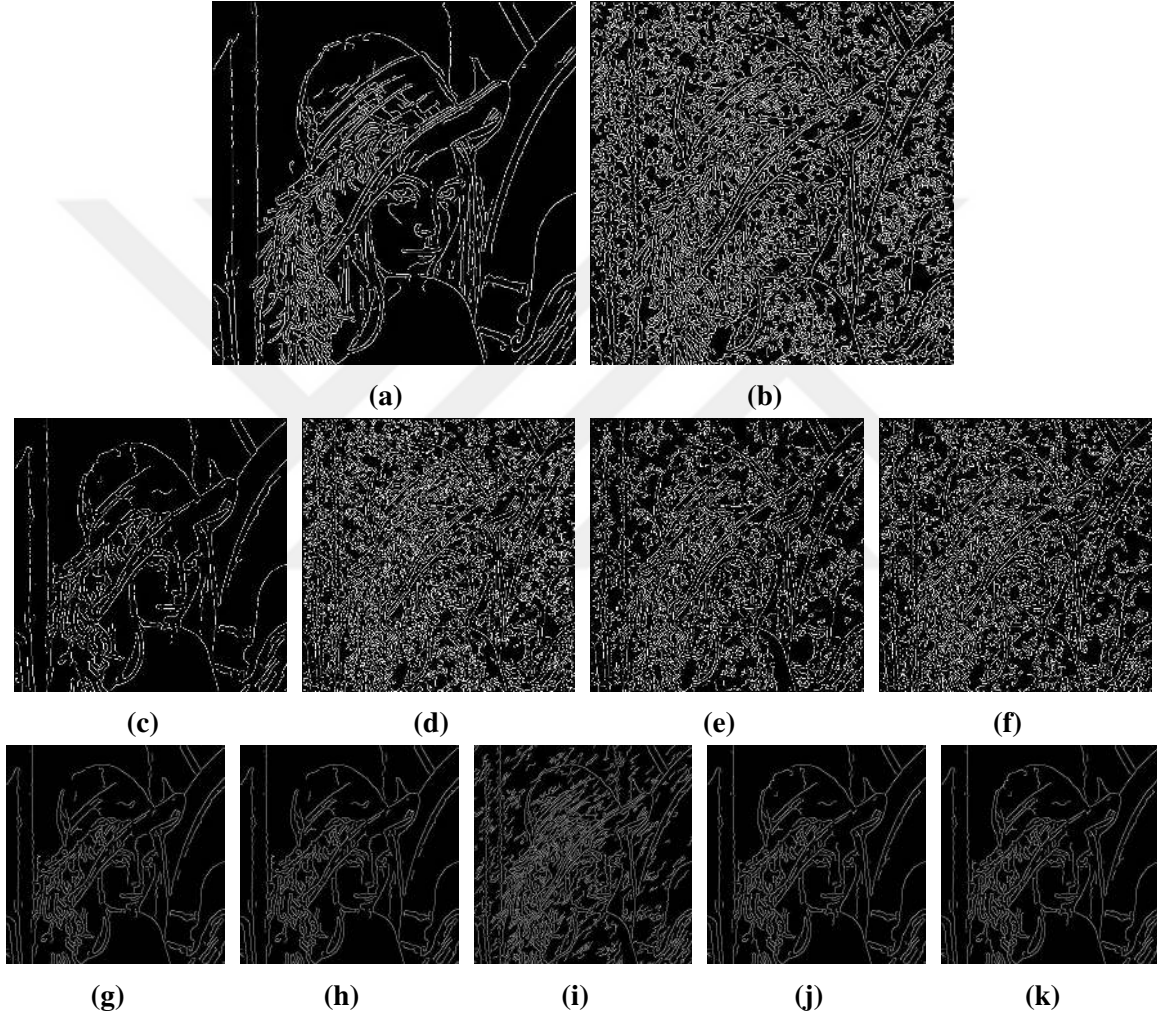
**Şekil 4.5.** Kenar detektörlerin performansları: (a)Zero-Cross, (b)Log, (c)Chan, (d)Prewitt, (e)Sobel, (f)Canny

Şekil 4.6’a bakılırsa, izotropik filtrelerde Beltrami dışında diğer filtrelerin kenar koruma konusunda başarısız oldukları görülmektedir. (d), (e), (f)’deki klasik filtrelerin tutarlı bir kenar çıkarımı için gürültü etkisini tamamen ortadan kaldırmakta başarısız oldukları açıkça görülmektedir. Şekildeki anizotropik filtrelere dikkat edilirse, (i) seçeneğindeki Normalize Miron’un görsel olarak diğer anizotropik filtrelerden daha kötü bir sonuç çıkardığı görülmektedir.

Benzer sonuçlar kendinden gürültülü olan damar ve saha görüntülerinde de elde edil-

mektedir. Görülen ş u ki, klasik izotropik filtreler Beltrami dışında, Gauss, Mean ve Median kenar algılama konusunda istenen sonuçlar vermeyerek başarısız olmuşlardır.

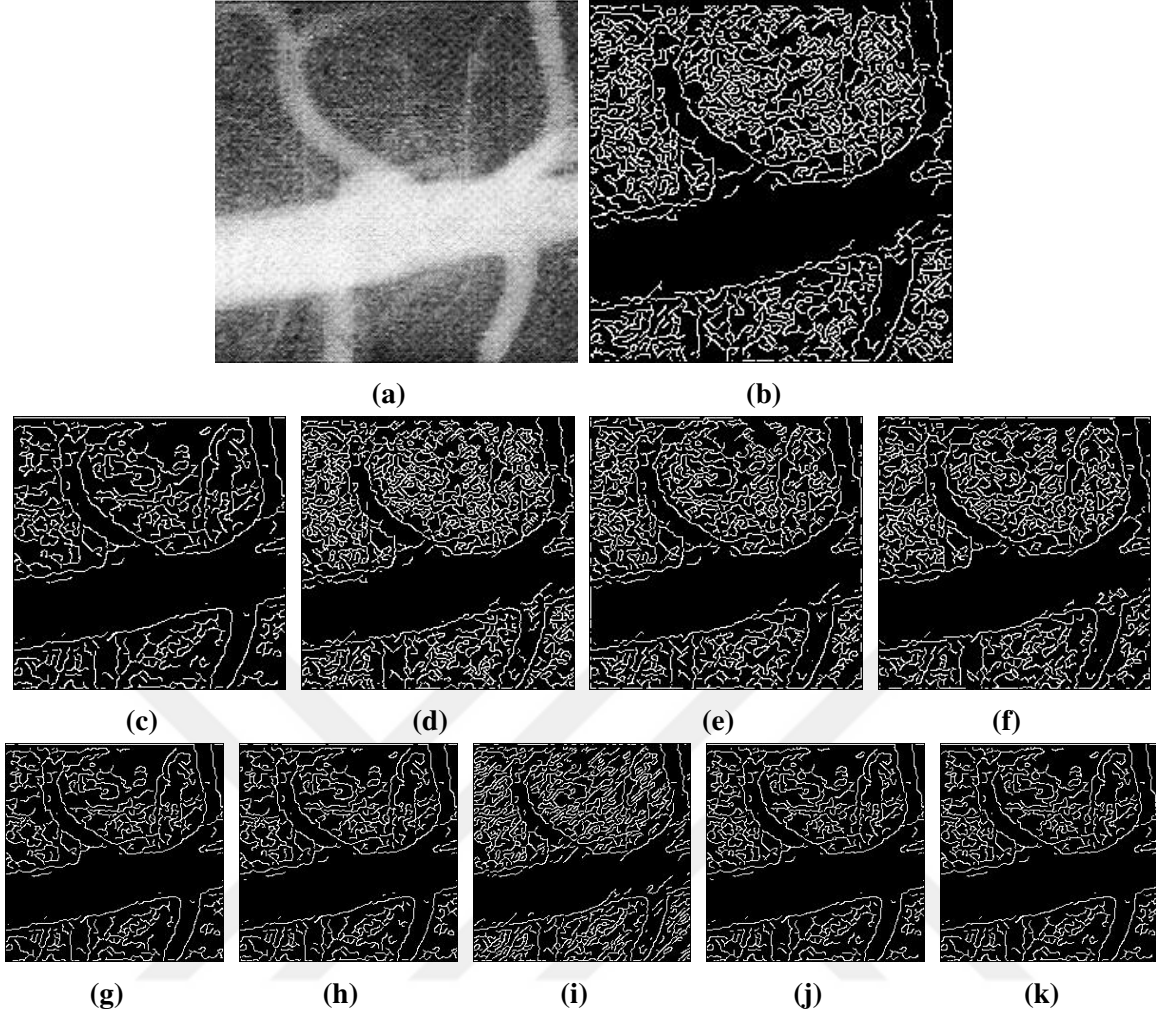
Ş ekil 4.7’teki damar görüntüsü için sonuçlar, önerilen anizotropik filtrelerin, Normalize Miron durumundaki bazı belirsiz kenarlar dışında çok iyi bir performans sergilediklerini gösteriyor. Benzer şekilde Ş ekil 4.8’teki saha görüntüsü, kenarların tutarsız olduğu Normalize Miron durumu dışında, anizotropik filtreler için neredeyse mükemmel kenar algılama sonuçları göstermektedir.



**Ş ekil 4.6.** Anonim bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik.

#### 4.5. Hesaplamalı Karmaşıklık Analizi

Bu bölümde anizotropik ve izotropik filtrelerin karmaşıklık analizi yapılacaktır. Algoritmaların hesaplama süreleri büyük ölçüde paralelleştirme ve algoritma optimizasyonlarına bağlı olduğundan, çarpmaya dayalı karmaşıklık sıralamaları algoritmaların daha adil olarak kar-

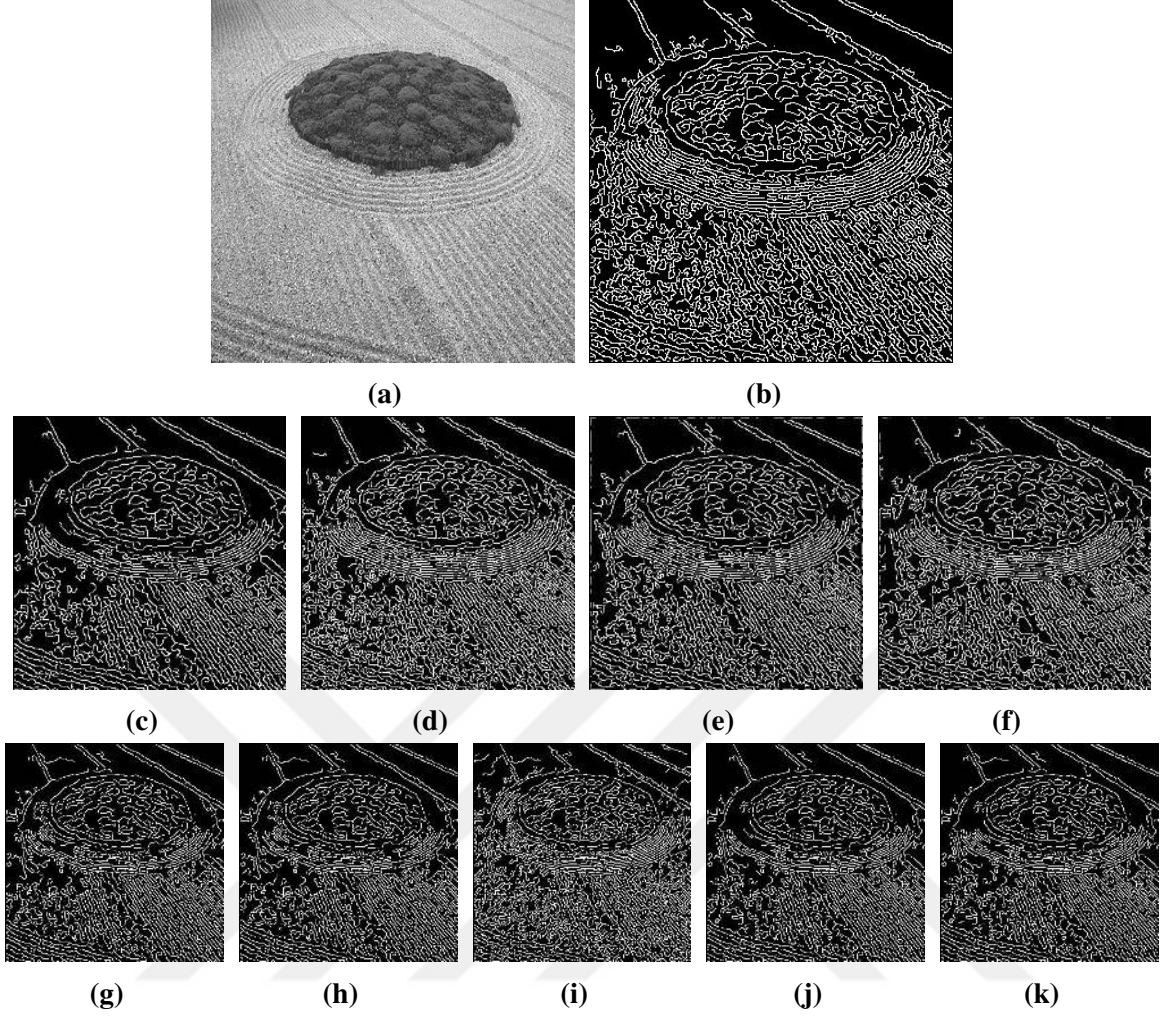


**Şekil 4.7.** Biomedikal bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültülü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik.

şılaştırılmasını sağlar. Burada tanıtılan anizotropik filtreler, gürültülü bir görüntüyü kenarlarını koruyarak filtrelemektedir. Girdi olarak  $n = m \times m$  boyutlu bir görüntü alınarak filtreleme yapılmış olup, iterasyon sayısı  $k = m/25 = \sqrt{n}/25$  olarak alınmıştır.

Gauss, Median ve Mean filtrelerinin matematik modellerine (Bharati vd., 2021: 49)’den ulaşılabilir. Bu formüllerden Gauss, Median ve Mean filtrelerinin karmaşıklığı  $O(n)$ ’dir. Metrik tensör, ters metrik tensör ve kuadratik norm hesapları tüm anizotropik algoritmalar için ortak olduğundan onların karmaşıklık hesapları aşağıda Algoritma 4.4’e göre yapılacaktır.

Algoritma 4.4’a göre her bir eleman  $n$  kez çalışır. Dolayısıyla tüm türevlerin karmaşıklığı  $O(n)$ ’dir.  $g_{\mu\nu}$  metrik tensörü kuadratik türevler ve türev çarpımları ile hesaplanır, yani her bir eleman  $n \times n$  kez çalışır. Böylece  $g_{\mu\nu}$  metrik tensörünün karmaşıklığı  $O(n^2)$  dir. Benzer olarak, ters metrik tensörün ve kuadratik normunda karmaşıklığı aynıdır. Tüm bu ortak bileşenlerin



**Şekil 4.8.** Kamufle bir görüntünün filtrelendikten sonra Canny kenarları: (a) Orijinal, (b) Gürültülü; İzotropik filtreler: (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Median; Anizotropik filtreler: (g) Yeni Randers, (h) Ingarden, (i) N. Miron, (j) Yeni N.Miron, (k) Yeni Metrik.

---

**Algoritma 4.4:** Ortak Bileşenlerin Hesabı

---

```

1 for herbir piksel pozisyon do
2    $\beta$  ve  $v$ 'yi belirle 1. merteden türevleri hesapla:  $I_x, I_y$ 
3   2. mertebeden türevleri hesapla:  $I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$ 
4    $g_{11} = 1 + \beta^2 I_x^2$ 
5    $g_{12} = \beta^2 I_x I_y$ 
6    $g_{22} = 1 + \beta^2 I_y^2$ 
7    $detg = 1 + \beta^2 (I_x^2 + I_y^2)$ 
8    $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ 
9    $V = v^T g_{\mu\nu} v$ 
10 end

```

---

karmaşıklık analiz tablosu Tablo 4.6’de verilmektedir. Bu tablodan faydalanarak tüm anizotropik filtrelerin karmaşıklık hesapları yapılabilir. Randers tipinde metrikler için Algoritma 4.2 ve

Synge-Beil tipinde metrikler için Algoritma 4.3 dikkate alınır, ikisinde karmaşıklığı  $O(n^2)$  olacaktır. Beltrami içinde Algoritma 4.1 gözden geçirilirse,  $H^3$  ifadesi bu algoritmanın karmaşıklığını  $O(n^2)$  yapar. Böylece tüm algoritmaların karmaşıklıkları Tablo 4.7’de özetlenmiştir. Unutulmamalıdır ki, gerçek uygulamalar düşünüldüğünde anizotropik filtrelerin hesaplama süreleri görüntünün özelliklerine göre değişmektedir. Bu nedenle, karmaşıklıklar yalnızca çarpma karmaşıklığının bir sırasını verir. Okuyucuların, paylaşılan kaynakları, kullanıcının bilgisayar platformu altında gerçek çalışma zamanı hızları için test etmeleri önerilir.

**Tablo 4.6.** Ortak Bileşenlerin Karmaşıklık Analizi

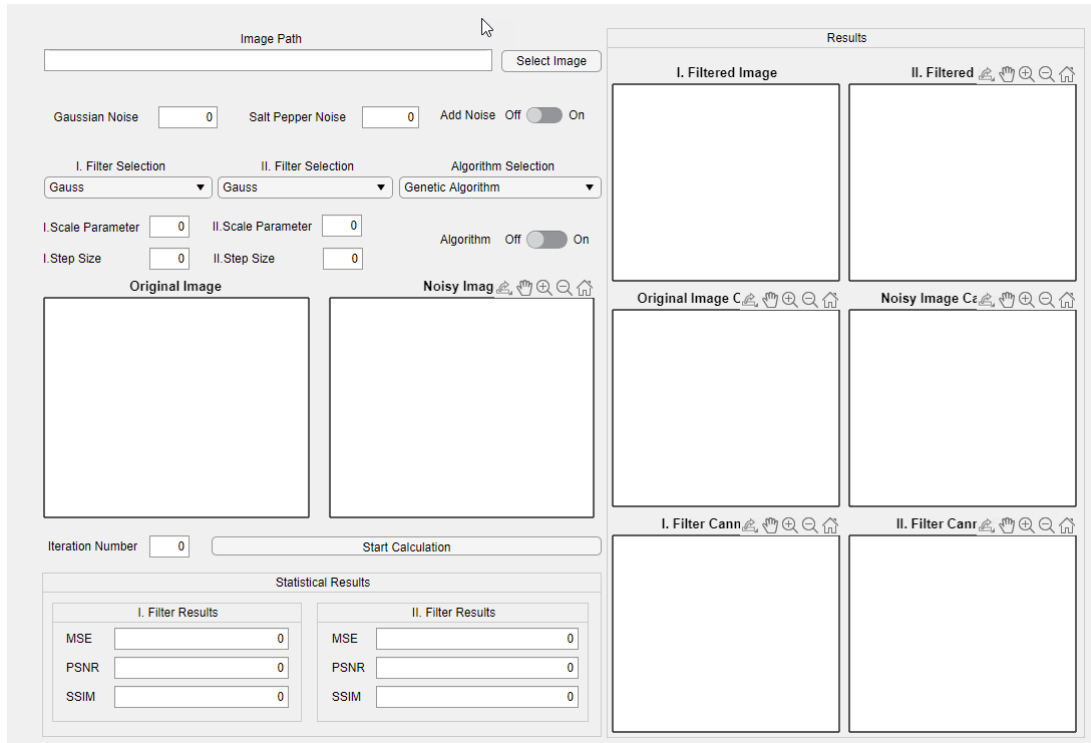
| Algoritma Elemanı                         | Karmaşıklığı |
|-------------------------------------------|--------------|
| Birinci Türevler: $I_x, I_y$              | $O(n)$       |
| İkinci Türevler: $I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$ | $O(n)$       |
| Metrik tensör: $g_{\mu\nu}$               | $O(n^2)$     |
| Ters metrik tensör: $g^{\mu\nu}$          | $O(n^2)$     |
| Kuadratik norm: $V$                       | $O(n^2)$     |

**Tablo 4.7.** Algoritmaların Karmaşıklıkları

| Algoritma     | Karmaşıklığı |
|---------------|--------------|
| Yeni Metrik   | $O(n^2)$     |
| Yeni N. Miron | $O(n^2)$     |
| Yeni Randers  | $O(n^2)$     |
| Ingarden      | $O(n^2)$     |
| N. Miron      | $O(n^2)$     |
| Beltrami      | $O(n^2)$     |
| Gauss         | $O(n)$       |
| Median        | $O(n)$       |
| Mean          | $O(n)$       |

#### 4.6. Bir Kullanıcı Arayüzü Tasarımı

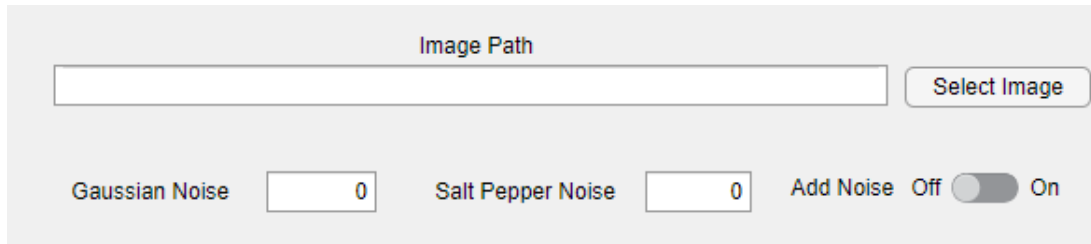
Şekil 4.9’de görebileceğiniz gibi, uygulamanın ana paneli görülmektedir. Genel olarak, herhangi bir görüntünün filtreleme performansları ve kenar koruma performansları, izotropik ve anizotropik filtreler kullanılarak karşılaştırılır.



(a)

**Şekil 4.9.** Ana pano

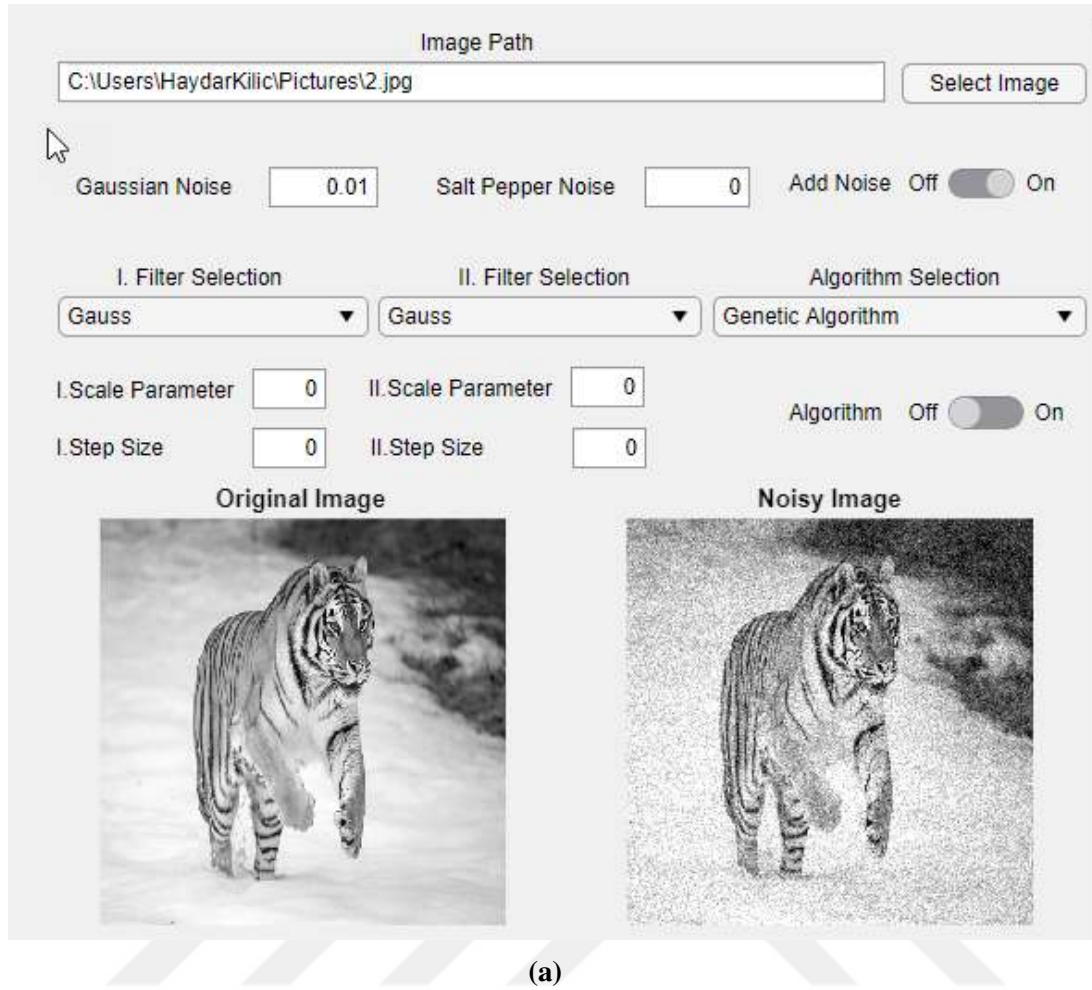
Ana panelin Şekil 4.10 bölümünden kişisel bilgisayarda bulunan herhangi bir görüntü "Select Image" butonuna basarak seçilebilir. Bu bölümde Gauss veya Salt-Pepper gürültüsü de eklenebilir. "Add Noise" anahtarını "On" konumuna getirilmezse gürültü eklenmeyecektir.



(a)

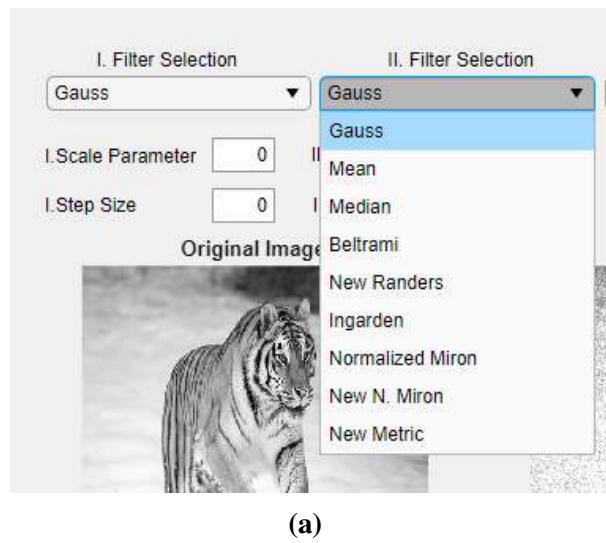
**Şekil 4.10.** Görüntü seçme ve gürültü ekleme

Düğme "On" konumuna getirildiğinde, gürültülü görüntü otomatik olarak Şekil 4.11 gibi görünecektir.



**Şekil 4.11.** Orijinal görüntü ve gürültülü görüntü

Şekil 4.12'deki gibi herhangi iki filtre karşılaştırılmak için seçilebilir.

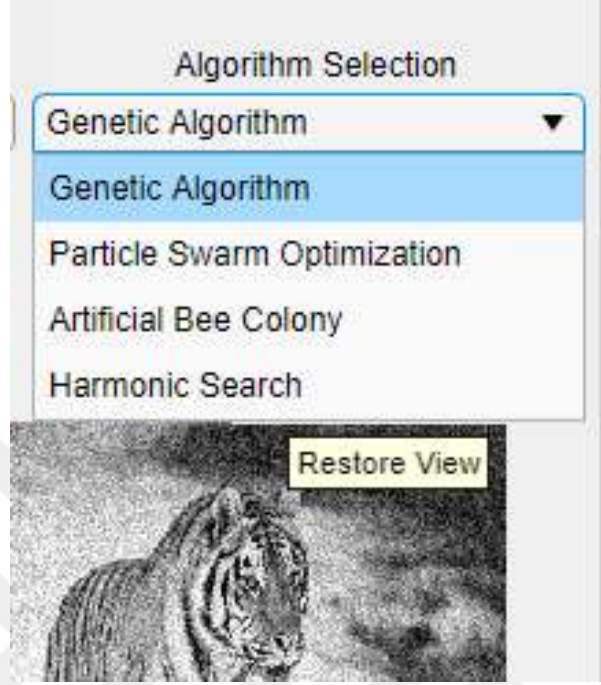


**Şekil 4.12.** Filtre seçme

Her şeyi otomatik olarak hesaplayan bir optimizasyon algoritması için, "scale parametre-



ter" ve "step size" alanlarını boş bırakmalı ve "Algorithm" anahtarı "On" olarak ayarlanmalıdır. Ancak bu istenmiyorsa, her filtre için "scale parameter" ve "step size" bölümleri doldurmalı ve "Algorithm" anahtarı "Off" olarak ayarlanmalıdır. Algoritma Şekil 4.13 gibi seçilebilir.

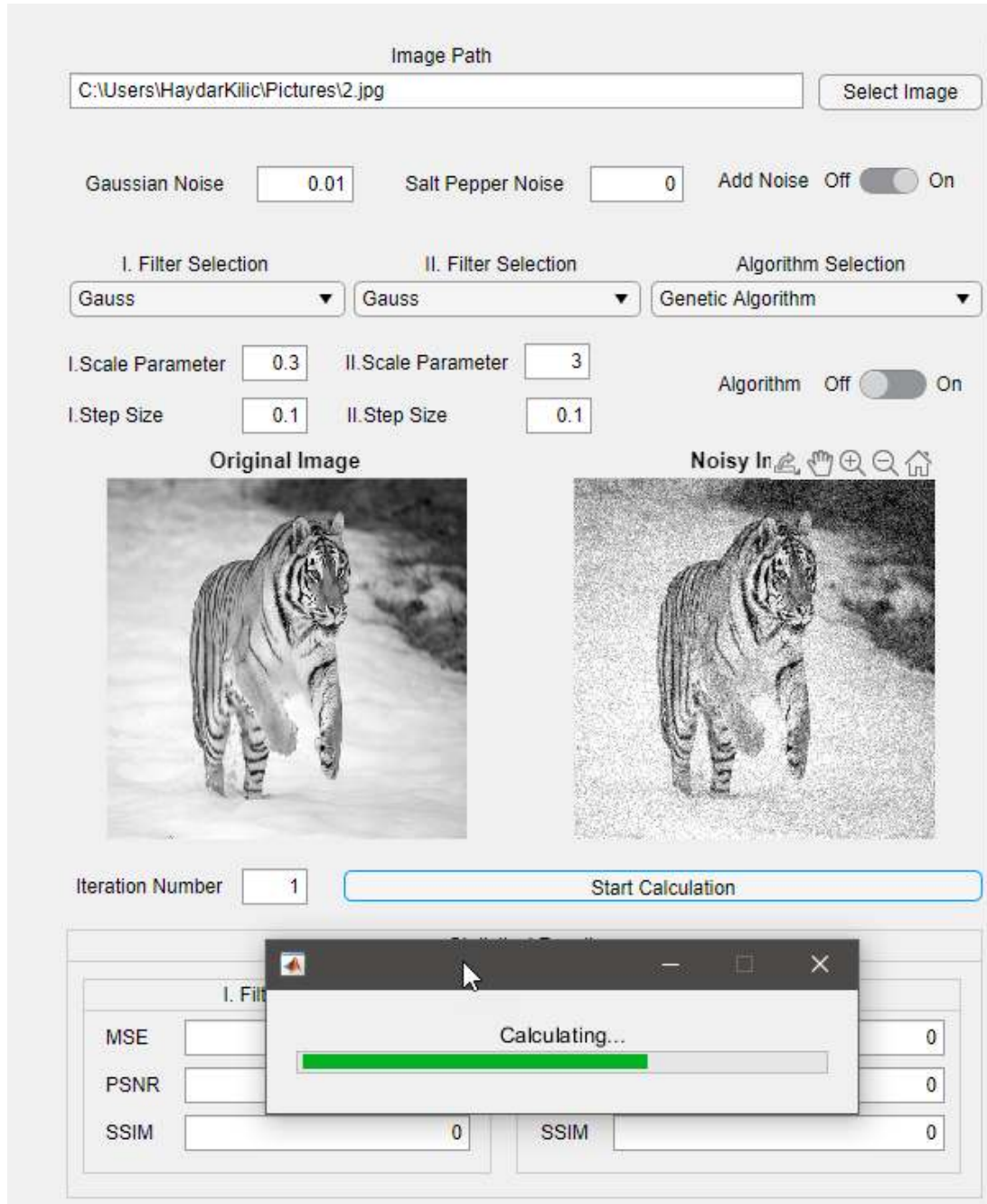


(a)

**Şekil 4.13.** Algoritma seçme

Tüm bunlardan sonra, "iteration number"nı doldurup "Start Calculation" düğmesine basarsanız, hesaplamalar Şekil 4.14'deki gibi başlayacaktır.





(a)

Şekil 4.14. Hesaplamaya başlama

Hesaplamalar bittikten sonra sonuçlar otomatik olarak "Statistical Results" bölümünde Şekil 4.15 gibi görünecektir.

| Statistical Results |          |                    |          |
|---------------------|----------|--------------------|----------|
| I. Filter Results   |          | II. Filter Results |          |
| MSE                 | 0.003684 | MSE                | 0.004319 |
| PSNR                | 24.34    | PSNR               | 23.65    |
| SSIM                | 0.433    | SSIM               | 0.4052   |

(a)

Şekil 4.15. İstatiksel sonuçlar

Tüm bu hesaplamalardan sonra ana panel son görüntüsü Şekil 4.16'deki gibi olacaktır.

Image Path

C:\Users\HaydarKilic\Pictures\2.jpg

Select Image

Gaussian Noise

0.01

Salt Pepper Noise

0

Add Noise

Off

On

I. Filter Selection

Gauss

II. Filter Selection

Gauss

Algorithm Selection

Genetic Algorithm

I. Scale Parameter

0.3

II. Scale Parameter

3

Algorithm

Off

On

I. Step Size

0.1

II. Step Size

0.1

Original Image



Noisy Image



Iteration Number

1

Start Calculation

Statistical Results

I. Filter Results

MSE

0.003684

PSNR

24.34

SSIM

0.433

II. Filter Results

MSE

0.004319

PSNR

23.65

SSIM

0.4052

Results

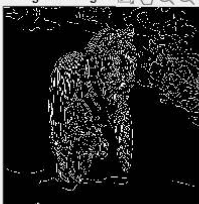
I. Filtered



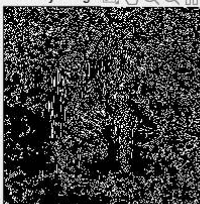
II. Filtered Image



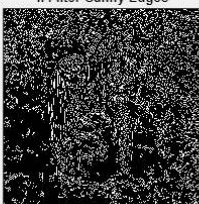
Original Image



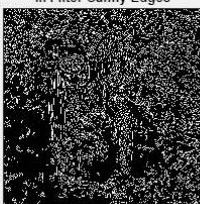
Noisy Image



I. Filter Canny Edges



II. Filter Canny Edges



(a)

Şekil 4.16. Hesaplama bitince

#### 4.7. Yeni Metrikle Renkli Görüntü İyileştirme

Görüntü işleme alanındaki birçok uygulamanın başarısı, büyük ölçüde gürültü giderme ve iyileştirme adımlarının sonuçlarına bağlıdır. Kısmi diferansiyel denklemler, bu ön işleme adımlarında kullanılabilir. Bu türevli yapılar görüntü işlemenin temel matematik yapısını oluşturmaktadır. Genellikle görüntülerdeki enerji minimizasyonlarından böyle PDE yapıları elde edilir, bunun en gelişmiş modeli Polyakov eylemi yada Polyakov enerji integralidir. Polyakov bu integrali kuantum fiziğinde atom altı parçacıkların enerjilerini minimize etmek için modellemiştir. Fakat ilginç bir şekilde integralin matematiksel yapısı esnek bir metrik kullanımına izin verdiği için görüntü işlemede de kullanılabilmektedir. Polyakov eylemi görüntüye uygun bir şekilde modellendiğinde enerji minimizasyon problemi ortaya çıkmaktadır ve bu integrali minimize eden kısmi diferansiyel denklemin Beltrami akışı olduğu ortaya çıkmaktadır. Bunun için öncelikle görüntü, görüntünün uzamsal koordinatlarını ve özelliklerini (yoğunluk ve renkler) koordinatlar olarak kabul eden, görüntünün boyutundan daha yüksek boyutlu bir manifolda gömülür, bu işlemler sırasında tanımlanan dönüşüme Beltrami çerçevesi denilmektedir. Görüntü yüzeyi (gömülü bir manifold) ile Beltrami çerçevesindeki gömme uzayı arasında ölçüme izin veren Polyakov eylemi, görüntü işlemede ölçek uzayı yöntemlerini bir araya getirerek görüntülerin iyileştirilmesine olanak sağlamaktadır (Sochen, Kimmel ve Malladi, 1998b: 310) (Sochen, Gilboa ve Zeevi, 2000: 319).

Beltrami çerçevesine göre Polyakov eyleminin minimizasyonu, görüntü manifoldunu bir zaman parametresine göre güncelleyen Beltrami akışını verir. Beltrami akışı, görüntü manifoldundaki metrik seçimine bağlı olarak izotropik (nokta tabanlı) veya anizotropik (nokta ve yön tabanlı) olabilir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997a: 236). İncelenen görüntü yüzeyleri düzensiz yapılar olduğundan, Öklid olmayan metrikler seçilerek yapılan ölçümler daha doğru sonuçlar verecektir. Öklid olmayan metrikler, Riemann ve Finsler metrikleri olarak iki sınıfta ele alınabilir. Görüntü yüzeyinde Riemann metriği kullanarak yapılan ölçümler sadece yüzey üzerindeki noktalar dikkate alınarak yapılabilirken, Finsler metriği ile nokta ve yön birlikte kullanılarak yapılabilir. Bu metriklerle ilgili özel durumlar literatürde izotropik ve anizotropik olarak incelenmiştir. (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236) (Balan ve Stojanov, 2013b: 493).

Bu bölümde renkli görüntüleri filtreleyerek iyileştirmesini yapan anizotropik yapıda yeni bir filtre tanımlanmıştır. Bu filtre bazı iyi bilinen filtrelerle karşılaştırılarak detayları ile incelenmiştir.

#### 4.7.1 Renkli Görüntüler için Beltrami Çerçevesi

2-boyutlu bir dijital renkli görüntü  $I$ , aşağıdaki  $X$  dönüşümü kullanılarak  $M$  gömülü manifolduna bir  $\Sigma$  gömme manifoldu olarak modellenenir.

$$(x^1, x^2) \rightarrow (x^1, x^2, I^1(x^1, x^2), I^2(x^1, x^2), I^3(x^1, x^2)) \quad (4.38)$$

$\Sigma$  yüzeyindeki  $x^1, x^2$  yerel koordinatlarında simetrik ve pozitif olarak tanımlanmış bir  $g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$  Riemann metriği, görüntü yüzeyi üzerindeki herhangi bir uzaklığın karesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 \quad (4.39)$$

Beltrami çerçevesi  $(X, (\Sigma, g_{\mu\nu}), (M, h_{ij}))$  olarak  $\Sigma$  yüzeyini  $g_{\mu\nu}$  metriği ile ve  $h_{ij}$  metriği ile daha yüksek boyutlu bir Riemann manifoldu  $M$  içine yerleştiren bir  $X$  dönüşümüdür. Bu çalışmada,  $M \equiv \mathbb{R}^5$  gömme alanı ve onun metriği  $h_{ij} = \text{diag}(1, 1, \beta^2, \beta^2, \beta^2)$  Öklid olarak alınır; burada  $\beta$  uzamsal koordinatlar ve görüntü rengi arasındaki göreceli ölçeği (en-boy oranı) gösteren pozitif bir parametredir. Görüntü manifoldunun  $\Sigma$ ,  $g_{\mu\nu} = h_{ij}X_\mu^i X_\nu^j$  metriği indüklenmiş olarak seçilir ve aşağıdaki formdadır (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997a: 236).

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 \sum_{k=1}^3 (I_{x^1}^k)^2 & \beta^2 \sum_{k=1}^3 I_{x^1}^k I_{x^2}^k \\ \beta^2 \sum_{k=1}^3 I_{x^1}^k I_{x^2}^k & 1 + \beta^2 \sum_{k=1}^3 (I_{x^2}^k)^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Burada kısalığın hatırına  $I_{x^\mu}^k = \frac{\partial I^k}{\partial x^\mu}$  kullanılır ve Einstein toplama kuralına göre, tensörlerde tekrarlanan indeksler toplanır.

#### Riemann Metrikli (İzotropik) Beltrami Akışı

Beltrami çerçevesi üzerinde bir Polyakov eylemi şu şekilde tanımlanır (Polyakov, 1981b: 207).

$$S[X^i, g_{\mu\nu}, h_{ij}] = \int_{\Sigma} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X^j h_{ij}(X) dx^1 dx^2 \quad (4.41)$$

burada  $g^{\mu\nu}$  görüntü metriğinin tersini gösterir ve determinantı  $g$  dir,  $\mu, \nu = 1, 2$  ve  $i, j = 1, 2, \dots, \dim(M)$ . Euler-Lagrange denklemlerini kullanarak, (4.38)'deki gömmeye göre Polyakov eyleminin minimizasyonu şu şekilde verilir.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i) = 0 \quad (4.42)$$

Bu işlevsel, yerel koordinatların seçimine bağlı değildir, başka bir deyişle, parametreye bağlı değildir (Sochen ve Zeevi, 1999: 3301) (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997a: 236).

Tek parametrelili bir gömülü görüntü ailesi  $X^k(x^1, x^2; t)$  başlangıç koşulu  $X^k(x^1, x^2; 0) = \Sigma$  ile (4.42) denkleminin çözümüdür.  $t$  parametresi zamandan bağımsızdır (Sochen ve Zeevi, 1999: 3301). Görüntü yüzeyini minimum olana kadar geliştiren izotropik Beltrami akışı aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{\partial X^k}{\partial t} = \Delta_g X^k \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^k), \quad X^k(0) = \Sigma \quad (4.43)$$

$\Delta_g$  ile gösterilen Laplace-Beltrami operatörü, Laplace operatörünün Öklid uzaylarından eğri-likli manifoldlara bir uzantısıdır (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997a: 236).

(4.38) dikkate alındığında,  $x^1$  ve  $x^2$  yerel koordinatlarının  $t$  parametresine göre değişimi sabit olduğundan, aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\left( 0, 0, \frac{\partial I^1}{\partial t}(x^1, x^2, t), \frac{\partial I^2}{\partial t}(x^1, x^2, t), \frac{\partial I^3}{\partial t}(x^1, x^2, t) \right) \quad (4.44)$$

Böylece Beltrami akışı, sadece görüntü renginin  $I^1, I^2, I^3$  özelliklerini etkileyen bir akış haline gelir. (4.44) denklemi (4.43) denkleminde yerine yazılırsa görüntü özellikleri boyunca izotropik Beltrami akışı aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial I^k}{\partial t} = \Delta_g(I^k) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu I^k) \quad (4.45)$$

(4.45) denklemi ile verilen her bir renk kanalı için izotropik Beltrami akışı, görüntü işleme uygulamaları için görüntü yüzeyinin homojen bölgelerinde bir yumuşatma işlemi yapar ve görüntü yüzeyini minimal bir yüzeye doğru geliştirir (Kimmel, Sochen ve Malladi, 1997b: 236).

Bu çalışmada, (4.45)'nin sol tarafı, görüntü renk kanallarının türev hesabı için birinci mertebeden geri fark yaklaşımı ve (4.46) denkleminin türev hesabı için ileri fark yaklaşımı

kullanılarak hesaplanmıştır. Böylece (4.45) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta_g(I^k) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \partial_{x^1}^+ \left( \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{22} \partial_{x^1}^- I^k - g_{12} \partial_{x^2}^- I^k) \right) + \partial_{x^2}^+ \left( \frac{1}{\sqrt{g}} (-g_{12} \partial_{x^1}^- I^k + g_{11} \partial_{x^2}^- I^k) \right) \right] \quad (4.46)$$

burada  $\partial^-$  ve  $\partial^+$  sırasıyla birinci dereceden geri ve ileri fark türevini gösterir. Renkli bir görüntü için izotropik Beltrami akış algoritması Algoritma 4.5’de verilmiştir.

---

**Algoritma 4.5:** Renkli Görüntüler için İzotropik Beltrami Akışı

---

```

1 Renkli görüntüyü  $I(x^1, x^2)$ 'ye yükle
2 Görüntü veri tipini çift duyarlıklı tipe dönüştür
3 R, G, B görüntü kanallarını ata.
4  $\beta$  ölçek parametresini ve  $dt$  zaman artımını gir
5 for her bir adım do
6   Her bir kanalın birinci mertebeden geri farkını hesapla
7    $g_{\mu\nu}$  Riemann metrik tensörün bileşenlerini ve  $g$  determinantını hesapla
8   Her bir kanal için  $\Delta_g(I^k)$  Laplace-Beltrami operatörünü hesapla
9    $I^k \leftarrow I^k + dt \cdot \Delta_g(I^k)$ 
10 end

```

---

### Finsler Metrikli (Anizotropik) Beltrami Akışı

Polyakov eylemine Beltrami çerçevesinde anizotropik bir yapı vermek için, görüntü yüzeyinde tanımlanan Riemann metriği, bir Finsler uzantısı  $\varphi(x, v)$  tarafından aşağıdaki gibi deforme edilir. (Shen, 2013b).

$$\gamma_{\mu\nu}(x, v) = g_{\mu\nu}(x) + \varphi(x, v) \quad (4.47)$$

$x = (x^1, x^2) \in \Sigma$  burada görüntü yüzeyindeki bir noktadır,  $v = (v^1, v^2) \in T_x \Sigma$  o noktadaki teğet vektör uzayının bir vektörüdür ve  $\varphi(x, v)$  pozitif homojen bir tensördür. Görüntü yüzeyinde oluşturulan  $\gamma_{\mu\nu}$  anizotropik metrik, Randers tipli bir Finsler metriğidir. Bu Finsler metriğine göre, Polyakov eyleminin formu, yukarıdaki Riemann örneğine benzer şekilde aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$S[X^i, \gamma_{\mu\nu}, h_{ij}] = \int_{\Sigma} \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_{\mu} X^i \partial_{\nu} X^j h_{ij}(X) dx^1 dx^2 \quad (4.48)$$

burada  $\gamma$  Finsler metriğinin determinantıdır ve  $\gamma^{\mu\nu}$  onun ters metrik tensörüdür. Böylece, Poly-

kov eylemi, anizotropik  $\gamma_{\mu\nu}(x, v)$  metriği aracılığıyla anizotropik bir form almıştır. Anizotropik Polyakov eylemini minimize eden Beltrami akışı, Riemann duruma benzer şekilde Finsler metriği  $\gamma_{\mu\nu}$ 'e göre aşağıdaki gibidir (Shen, 2013b).

$$\frac{\partial I^k}{\partial t} = \Delta_\gamma(I^k) \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\mu (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu I^k) \quad (4.49)$$

Bu akış, Finsler metriğini kullanarak görüntünün  $I^k$  özellik değerlerinin varyasyonunu veren anizotropik Beltrami akışı olarak adlandırılır. (4.49) denkleminin sağ tarafı (4.46) denklemindeki gibi hesaplandığında, Laplace-Beltrami operatörünün Finsler uzaylarına genişletilmesi elde edilir ki, (4.49) denklemini aşağıdaki gibi olur.

$$\Delta_\gamma(I^k) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \partial_{x^1}^+ \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\gamma_{22} \partial_{x^1}^- I^k - \gamma_{12} \partial_{x^2}^- I^k) \right) + \partial_{x^2}^+ \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (-\gamma_{12} \partial_{x^1}^- I^k + \gamma_{11} \partial_{x^2}^- I^k) \right) \right] \quad (4.50)$$

Eğer  $\gamma, v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$  teğet vektörün kovaryant bileşeni,  $c = c(I, I_{x^\alpha})$  görüntü manifoldu üzerinde, görüntü özellikleri ve onun türevlerinden oluşan düzgün bir skalar alan olmak üzere, metrik aşağıdaki gibi seçilirse, bu tip metriklere Synge-Beil tipinde metrikler denilir (Balan ve Stojanov, 2013b: 493).

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + c \cdot v_\mu v_\nu \quad (4.51)$$

Bu çalışmada  $c = 1 - \frac{1}{g}$  şeklinde seçilmiştir,  $g$  bir kenar bulucudur ve homojen bölgelerde 1, homojen olmayan bölgelerde 0 veya 0'a çok yakındır.  $1 - \frac{1}{g}$  ifadesi, görüntü yüzeyinin homojen (izotropik) bölgelerinde  $c$ 'yi neredeyse sıfır yaparken homojen olmayan bölgelerde etkisinin artmasını sağlar. Bir başka ifadeyle,  $1 - \frac{1}{g}$  ifadesi homojen (izotropik) bir bölge detektörü olarak tanımlanabilen  $g$  nin tersi bir etkiye sahiptir. Böylece yeni tanımlanan anizotropik metriğin Beltrami akışı Algoritma 4.6'de verilmiştir.

#### 4.7.2 Deneysel Sonuçlar

Bu bölümde yeni metrikli Beltrami akışı ile elde edilen filtrenin performans ölçümleri yapılacaktır. Şekil 4.17 deki değişik renklereki görüntüler içinden (a) görüntüsü için yeni metriğin beta ve adım büyüklüğü parametreleri değiştirilerek elde edilen sonuçlar Tablo 4.8'de verilmiştir. Ayrıca diğer görüntüler için Tablo 4.8'deki denemeler yapılarak ölçek parametresi

---

**Algoritma 4.6:** Renkli Görüntüler için Anizotropik Beltrami Akışı

---

```
1 Renkli görüntüyü  $I(x^1, x^2)$ 'ye yükle
2 Görüntü veri tipini çift duyarlıklı tipe dönüştür
3 R, G, B görüntü kanallarını ata.
4  $\beta$  ölçek parametresini ve  $dt$  zaman artımını gir
5 for her bir adım do
6   Her bir kanalın birinci mertebeden geri farkını hesapla
7    $3 \times 3$  pencereleme kullanarak farkı maksimum yapan komşuluğu veren  $v^\mu$  teğet
     vektörü belirle.  $\operatorname{argmax}_{v \in T_x \Sigma} (|I^k(i, j) - I^k(i + v^1, j + v^2)|)$ 
8    $g_{\mu\nu}$  Rieman metrik tensörün bileşenlerini ve  $g$  determinantını hesapla
9   Görüntü üzerinde  $c = 1 - \frac{1}{g}$  skaler fonksiyonu hesapla
10  Teğet vektörün kovaryant bileşenlerini hesapla  $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$ 
11  Yeni anizotropik metriği hesapla  $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + c \cdot v_\mu v_\nu$ 
12  Laplace-Beltrami operatorünün anizotropik genişlemesini hesapla  $\Delta_\gamma(I^k)$ 
13   $I^k \leftarrow I^k + dt \cdot \Delta_\gamma(I^k)$ 
14 end
```

---

beta ve adım büyüklüğü  $dt$  için en iyi sonuçların yine Tablo 4.8'deki sonuçlar gibi çıktığı görülmüştür. Bu görüntüler için en iyi sonuçlar Tablo 4.9'de verilmektedir.

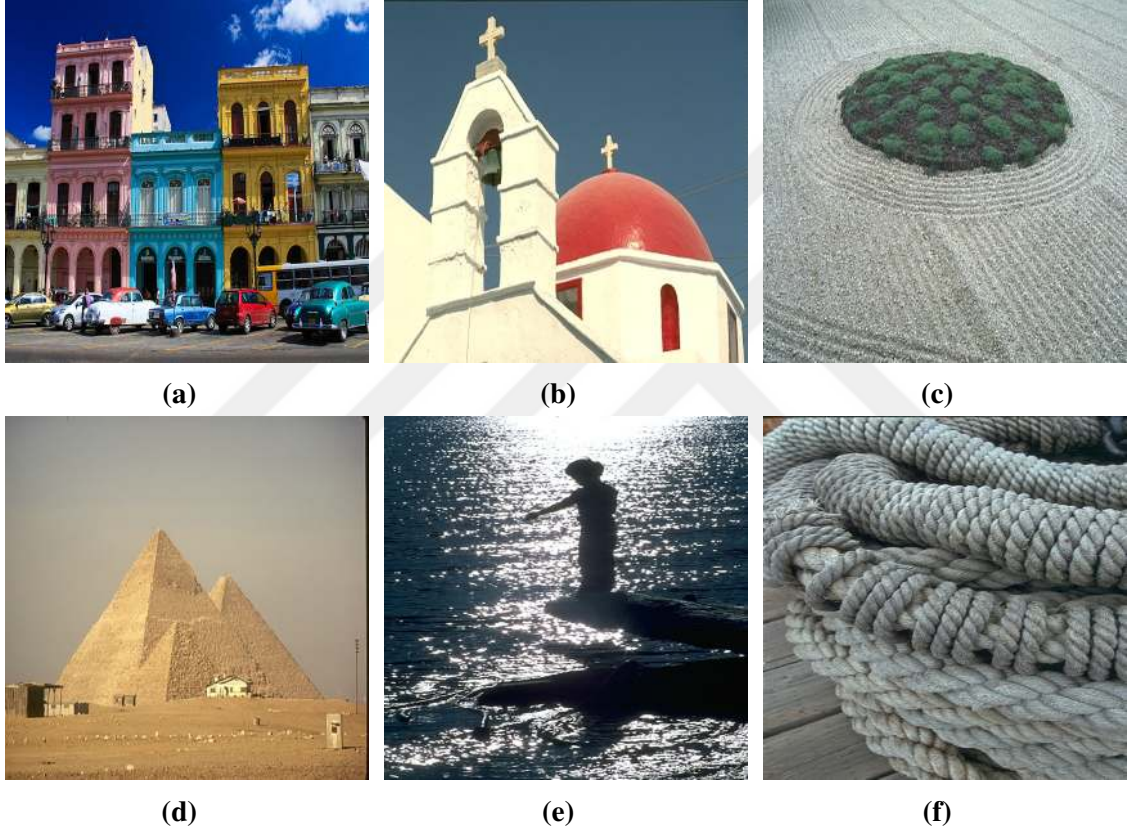
Tablo 4.8 incelenirse, ölçek parametresi 0.3 iken adım büyüklüğü 0.01'den 0.2'ye doğru, çok küçük bir değerden çok büyük bir değere doğru arttırılmıştır. Bu durumda, görüntünün PSNR ölçeği azalırken MSE ölçeği artmıştır. Bunun manası şudur, ölçek parametresi çok küçük iken adım büyüklüğü de ona göre çok küçük olursa iyi bir görüntü yapılandırma ve küçük hata ile karşılaşılır. Yine aynı tabloda, ölçek parametresi 15 iken adım büyüklüğü 0.01'den 0.2'ye doğru, çok küçük bir değerden çok büyük bir değere doğru arttırılmıştır. Bu durumda bir önceki durumun tam tersi söz konusudur. Yani, ölçek parametresi çok büyük iken adım büyüklüğü çok küçük olursa iyi bir görüntü yapılandırma elde edilemez, o nedenle bu skalada PSNR ve MSE değerleri dikkate alınır, az hata ve iyi bir görüntü yapılandırması için ölçek parametresi çok büyük iken adım sayısının da çok büyük olması gerekir. Aynı tabloda dikkati çeken bir başka şeyde şudur ki, ölçek parametresi ve adım büyüklüğünün tabloda verilen skala göre en iyi sonucu,  $\beta=3$  ve  $dt=0.05$  iken elde edilmiştir. O nedenle Şekil 4.17'deki, değişik görüntülerde de bu tablodaki veriler ile karşılaştırılmış ve aynı neticeler elde edilmiştir. Bu görüntülerdeki en iyi sonuçlar Tablo 4.9'de verilmiştir.

Tüm görüntülere öncelikle Gauss gürültüsü eklenmiş ve filtrelemeler yapılarak sonuçları bahsedilen tablolarda değerlendirilmiştir. Şekil 4.17 (a) görüntüsüne gürültü eklenerek filtrelenmiş çıktıları Şekil 4.18'de verilmektedir. Tablo 4.10'e dikkat edilirse en iyi sonucu yeni



tanımlanan metriğin verdiği görülmektedir. Bu tablodaki filtre performanslarını MSE ve PSNR değerlerine göre sıralayacak olursak, en iyi performanstan en kötü performansa doğru Yeni Metrik, Beltrami, Mean ve Gauss şeklinde bir sıralama yapabiliriz.

Sonuç olarak, bu çalışmada renkli görüntüler için yeni bir anizotropik filtre tanıtılmış, bu filtrenin performans değerlendirmeleri yapılmıştır. Gelecek çalışmalarda, yeni tanımlanan bir filtre ailesi için, performans ölçümleri ve parametre değerlendirmeleri yapılacaktır. Ayrıca anizotropik yapıda metrikler için kenar bulma ve koruma yöntemlerinin renkli görüntülerdeki cevabı incelenecektir.



**Şekil 4.17.** Testlerde kullanılan görüntüler

**Tablo 4.8.**  $\beta$  ve  $dt$  değişimlerine göre sonuçlar

| $\beta$  | $dt$        | MSE             | PSNR            |
|----------|-------------|-----------------|-----------------|
| 0.3      | 0.01        | 0.00321         | 24.93508        |
| 0.3      | 0.05        | 0.004668        | 23.30853        |
| 0.3      | 0.1         | 0.006891        | 21.61742        |
| 0.3      | 0.2         | 0.009564        | 20.19358        |
| 3        | 0.01        | 0.005258        | 22.79216        |
| <b>3</b> | <b>0.05</b> | <b>0.002464</b> | <b>26.08392</b> |
| 3        | 0.1         | 0.003817        | 24.18265        |
| 3        | 0.2         | 0.006689        | 21.74667        |
| 15       | 0.01        | 0.008238        | 20.84191        |
| 15       | 0.05        | 0.00706         | 21.51203        |
| 15       | 0.1         | 0.006378        | 21.95335        |
| 15       | 0.2         | 0.005821        | 22.34974        |

**Tablo 4.9.** Resimlere göre MSE ve PSNR sonuçları

| $\beta$ | $dt$ | MSE      | PSNR     | Görüntü |
|---------|------|----------|----------|---------|
| 3       | 0.05 | 0.002464 | 26.08392 | (a)     |
| 3       | 0.05 | 0.001466 | 28.33831 | (b)     |
| 3       | 0.05 | 0.004924 | 23.07668 | (c)     |
| 3       | 0.05 | 0.001379 | 28.60566 | (d)     |
| 3       | 0.05 | 0.004131 | 23.83978 | (e)     |
| 3       | 0.05 | 0.002788 | 25.54671 | (f)     |

**Tablo 4.10.** Filtreleme sonuçları( $\beta = 3, dt = 0.05$ )

| Filtre             | MSE                | PSNR               |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| <b>Beltrami</b>    | 0.00307491         | 25.12167525        |
| <b>Yeni Metrik</b> | <b>0.002463816</b> | <b>26.08391676</b> |
| <b>Gauss</b>       | 0.004067412        | 23.9068179         |
| <b>Mean</b>        | 0.003760406        | 24.2476521         |



**Şekil 4.18.** Filtreleme Sonuçları: (a) Orijinal Görüntü, (b) Gürültülü Görüntü, (c) Beltrami, (d) Gauss, (e) Mean, (f) Yeni Metrik

#### 4.8. Sonuç

Bu bölümde, yeni bir anizotropik filtre sınıfı için görüntü filtreleme sonuçları ve performans karşılaştırmaları sunulmaktadır. Yeni filtreler, Polyakov enerji integralini minimuma indirmek için anizotropik Laplace-Beltrami akışları üreten, kenar koruyucu anizotropik Finsler metriklerinin özel bir seçimiyle elde edilmiştir. Bu yeni anizotropik filtreler gürültülü görüntülere uygulanmış ve gürültü giderme özelliklerine göre karşılaştırılmıştır. Yeni anizotropik

filtrelerin, MSE, PSNR görüntü kalitesi ölçütlerine göre klasik izotropik filtrelere kıyasla üstün gürültü giderme performansları verdiği deneysel olarak gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, yeni anizotropik filtrelerin ve Beltrami akışının gerçek avantajı, daha ileri bir kenar algılama işlemi adımı uygulandığında daha da belirgin hale gelir.

Anizotropik filtrelerin, uzayda değişen yapıları sayesinde kenar bilgilerini mükemmel bir şekilde korurken düzgün bölgelerden gelen gürültüyü başarıyla ortadan kaldırdığını belirtmek önemli hale gelmektedir. Bu nedenle, hesaplama maliyetindeki hafif artışa rağmen, anizotropik filtrelerin bu güçlü özelliğinin, biyomedikal görüntü işleme ve uydu görüntüleme gibi doğru çözünürlük gerektiren görüntüleme sistemleri gibi uygulamalarda kritik öneme sahip olması beklenmektedir. Sonuç olarak, Finsler geometrisinden elde edilen yeni anizotropik filtrelerin görüntü işlemede geleneksel izotropik filtrelere makul bir alternatif sunabileceği sonucuna varılmıştır (Kilic, Ceyhan ve Gerek, 2022: 103623) (Kilic ve Ceyhan, 2022).

## 5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu doktora tezinin temel amacı, zorlu görüntüler denilen görüntülerde yeni bir görüntü işleme uygulaması geliştirmek idi. Geliştirilen yeni teknolojinin görüntü işleme operasyonlarından gürültü giderme, kenar algılama ve ilerisi olan segmentasyon işlemlerine etkin şekilde uygulanabilir olması temel motivasyon olmuştur. Bunun sebebi, görüntü işlemedeki bir çok uygulamanın başarısı temel olarak iyi bir ön işleme adımına bağlı olmasıdır. Bu ön işleme adımları için kısmi türevli yapılar ve yeni tip anizotropik metrikler ele alınmıştır.

Doktora teze, Finsler geometrisini anlamak amacıyla öncelikle Riemann yapılarının görüntü işlemedeki matematiksel anlamı üzerine durulmuştur. Dolayısıyla, kısmi diferensiyel temelli bir segmentasyon modeli olan aktif kontur modeli üzerine çalışılmıştır. Buradaki temel motivasyon, bir kısmi türevli matematik modele sahip eğri akışını izah eden eşitlikle görüntü içerisindeki nesnelerin sınırları belirlenebilir mi? sorusuna cevap aramaktır. Bu sorunun cevabını verecek olan matematiksel çözümlemeler tezin ikinci bölümünde ele alındı ve model içerisindeki her bir bileşenin nasıl çalıştığı izah edilmeye çalışıldı.

Riemann modelinin temel yapısı, bir enerji integraline dayanmaktadır. Dolayısıyla görüntünün yapısındaki ışık geçişleri veya enerji geçişleri büyük rol oynamaktadır. Bu enerji geçişlerinde eğrinin evrilmesini sağlayan kısmi türevli yapıda, üç ana değişen yada parametre söz konusudur, bunlar Gauss filtresindeki görüntünün düzgünleşmesini artıran ya da azaltan varyans, kenar bulucu fonksiyonun gücünü artıran yada azaltan kenar parametresi ve eğrinin evrilme hızını etkileyen evrilme parametresidir. Bu parametrelerin belirli bir aralıktaki değişiminin eğri evrimini nasıl etkileyeceği düşünülüp, öncelikle elle belirli değerler girilerek incelenmiş ve sonuçları tartışılmıştır. Bunun neticesinde bu parametrelerin aslında optimum değerleri ne olmalıdır? sorusundan hareketle, bu parametrelerin yapay zeka algoritmaları ile optimum değerleri incelenmiştir.

Eğri evriliminin zor olduğu ışık geçişinin az olduğu yani gradyan akışın belirgin olmadığı görüntülere uygun bir model tezin üçüncü bölümünde verilmiştir. Burada görüntü üzerinde Finsler metrik yapısı kullanılarak eğri evrilimi incelendi. Finsler anlamında eğri evrilimi için maliyet fonksiyonu iki türlü belirlenmektedir. Birincisi başlangıç eğrisi üzerindeki herhangi bir noktayı içine alan ve görüntüdeki en büyük değişimi veren yönü maliyet fonksiyonu olarak seçmek. İkincisi ise seviye eğrileri ile mesafe ölçümü yapan bir maliyet fonksiyonu belirlemek söz konusu olacaktır. Burada Finsler metrikleri kullanılarak, özel olarak eğri evrimi yapan bir model maliyetli olacaktır.



Görüntülerdeki enerji minimizasyonlarına olanak sağlayan en gelişmiş model Polyakov eylemi yada Polyakov enerji integralidir. Polyakov bu integrali kuantum fiziğinde atom altı parçacıkların enerjilerini minimize etmek için modellemiştir. Fakat ilginç bir şekilde integralin matematiksel yapısı esnek bir metrik kullanımına izin verdiğinden görüntü işlemede de kullanıla gelmiştir. Polyakov eylemi görüntüye uygun bir şekilde modellendiğinde enerji minimizasyon problemi ortaya çıkmaktadır ve bu integrali minimize eden kısmi diferensiyel denklemin Beltrami akışı olduğu görülmektedir. Bunun için öncelikle görüntü, görüntünün uzamsal koordinatlarını ve özelliklerini(yoğunluk ve renkler) koordinatlar olarak kabul eden, görüntünün boyutundan daha yüksek boyutlu bir manifolda gömülür, bu işlemler sırasında tanımlanan dönüşüme Beltrami çerçevesi denilmektedir. Görüntü yüzeyi(gömülü bir manifold) ile Beltrami çerçevesindeki gömme uzayı arasındaki ölçüme izin veren Polyakov enerji integrali, görüntü işlemede bir çok yöntemi bir araya getirmektedir.

Beltrami çerçevesine göre Polyakov eyleminin minimizasyonu, görüntü manifoldunu bir zaman parametresine göre güncelleyen Beltrami akışını verir. Beltrami akışı, görüntü manifoldundaki metrik seçimine bağlı olarak izotropik(nokta tabanlı) veya anizotropik(nokta ve yön tabanlı) olabilir. İncelenen görüntü yüzeyleri düzensiz yapılar olduğundan, Öklidyen olmayan metrikler seçilerek yapılan ölçümler daha doğru sonuçlar verecektir. Öklidyen olmayan metrikler, Riemann ve Finsler metrikleri olarak iki sınıfta ele alınabilir. Görüntü yüzeyinde Riemann metriği kullanarak yapılan ölçümler sadece yüzey üzerindeki noktalar dikkate alınarak yapılabilirken, Finsler metriği ile nokta ve yön birlikte kullanılarak yapılabilir.

Tezin son bölümünde, yeni bir anizotropik filtre sınıfı için görüntü filtreleme sonuçları ve performans karşılaştırmaları sunulmaktadır. Yeni filtreler, Polyakov enerji integralini minimuma indirmek için anizotropik Laplace-Beltrami akışları üreten, kenar koruyucu anizotropik Finsler metriklerinin özel bir seçimiyle elde edilmiştir. Bu yeni anizotropik filtreler gürültülü görüntülere uygulanmış ve gürültü giderme özelliklerine göre karşılaştırılmıştır. Yeni anizotropik filtrelerin, MSE, PSNR, SSIM vb. gibi çeşitli görüntü kalitesi ölçütlerine göre klasik izotropik filtrelere kıyasla üstün gürültü giderme performansları verdiği deneysel olarak gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, yeni anizotropik filtrelerin ve Beltrami akışının gerçek avantajı, daha ileri bir kenar algılama işlemi adımı uygulandığında daha da belirgin hale gelir.

Anizotropik filtrelerin, uzayda değişen yapıları sayesinde kenar bilgilerini mükemmel bir şekilde korurken düzgün bölgelerden gelen gürültüyü başarıyla ortadan kaldırdığını belirtmek önemli hale gelmektedir. Öyle ki, anizotropik filtrelerin bu güçlü özelliğinin, biyomedikal

görüntü işleme ve uydu görüntüleme gibi doğru çözünürlük gerektiren uygulamalarda kritik öneme sahip olması beklenmektedir. Neticede, Finsler geometrisinden elde edilen yeni anizotropik filtrelerin görüntü işlemede geleneksel izotropik filtrelere makul bir alternatif sunabileceği sonucuna varılmıştır.

Özetle, bu doktora tezinde Finsler geometrisinin görüntü işleme uygulamalarına yaklaşımları araştırılmış ve matematik modelleri sunulmuştur. Bu modellere dayanarak, yeni metrikler önerilmiştir. Önerilen yeni metrikler ile klasik metrikler karşılaştırılarak nicel sonuçlar elde edilmiş ve önemli ölçüde daha iyi performans gösterdiği görülmüştür. Görüntü işlemedeki zorlu görüntüleri işlemeye yarayan bu modeller literatüre sunularak gelecekte yapılan çalışmalar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir.



## KAYNAKLAR

- Alirezaie, J., Jernigan, M. ve Nahmias, C.** (1997). “Neural network-based segmentation of magnetic resonance images of the brain”. *IEEE Transactions on Nuclear Science* 44 (2).
- Allen, D. M.** (1971). “Mean square error of prediction as a criterion for selecting variables”. *Technometrics* 13 (3).
- Al-Amri, S. S., Kalyankar, N. V. vd.** (2010). “Image segmentation by using threshold techniques”. *arXiv preprint arXiv:1005.4020*.
- Amza, C.** (2012). “A review on neural network-based image segmentation techniques”. *De Montfort University, Mechanical and Manufacturing Engg., The Gateway Leicester, LE1 9BH, United Kingdom*.
- Azmi, R. ve Norozi, N.** (2011). “A new markov random field segmentation method for breast lesion segmentation in MR images”. *Journal of medical signals and sensors* 1 (3).
- Balan, V. ve Stojanov, J.** (2013a). “Finslerian extensions of geodesic active fields for digital image registration”. *PAMM* 13 (1).
- Balan, V. ve Stojanov, J.** (2013b). “Finslerian extensions of geodesic active fields for digital image registration”. *PAMM* 13 (1).
- Barker, S. A. ve Rayner, P. J.** (2000). “Unsupervised image segmentation using Markov random field models”. *Pattern Recognition* 33 (4).
- Bebis, G. ve Georgiopoulos, M.** (1994). “Feed-forward neural networks”. *IEEE Potentials* 13 (4).
- Bharati, S., Khan, T. Z., Podder, P. ve Hung, N. Q.** (2021). “A Comparative Analysis of Image Denoising Problem: Noise Models, Denoising Filters and Applications”. Springer International Publishing.
- Bolsinov, A. V., Kozlov, V. V. ve Fomenko, A. T.** (1995). “The Maupertuis principle and geodesic flows on the sphere arising from integrable cases in the dynamics of a rigid body”. *Russian Mathematical Surveys* 50 (3).
- Bresson, X., Vandergheynst, P. ve Thiran, J.-P.** (2006). “Multiscale active contours”. *International Journal of Computer Vision* 70 (3).



- Caselles, V., Catté, F., Coll, T. ve Dibos, F.** (1993). "A geometric model for active contours in image processing". *Numerische mathematik* 66 (1).
- Caselles, V., Kimmel, R. ve Sapiro, G.** (1997). "Geodesic active contours". *International journal of computer vision* 22 (1).
- Chebbout, S. ve Merouani, H. F.** (2012). "Comparative study of clustering based colour image segmentation techniques". *2012 Eighth International Conference on Signal Image Technology and Internet Based Systems*. IEEE.
- Chen, Y. G., Giga, Y., Goto, S. vd.** (1991). "Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations". *Journal of differential geometry* 33 (3).
- Dekker, A. H.** (1994). "Kohonen neural networks for optimal colour quantization". *Network: Computation in Neural Systems* 5 (3).
- Dominique, Z.** (2011). "Geodesic Active Fields: A Geometric Framework for Image Registration". Doktora tezi, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
- Dorigo, M., Birattari, M. ve Stutzle, T.** (2006). "Ant colony optimization". *IEEE computational intelligence magazine* 1 (4).
- Erb, R. J.** (1993). "Introduction to backpropagation neural network computation". *Pharmaceutical research* 10 (2).
- Estellers, V., Zosso, D., Bresson, X. ve Thiran, J.-P.** (2013). "Harmonic active contours". *IEEE Transactions on Image Processing* 23 (1).
- Fahlman, C. L.** (1990). "The cascade-correlation learning architecture". *Advances in Neural Information Processing Systems* 2.
- Gallego Torromé, R., Piccione, P. ve Vitória, H.** (2012). "On Fermat's principle for causal curves in time oriented Finsler spacetimes". *Journal of mathematical physics* 53 (12).
- Geem, Z. W., Kim, J. H. ve Loganathan, G. V.** (2001). "A new heuristic optimization algorithm: harmony search". *simulation* 76 (2).
- Gierlichs, B., Batina, L., Tuyls, P. ve Preneel, B.** (2008). "Mutual information analysis". *International Workshop on Cryptographic Hardware and Embedded Systems*. Springer.
- Griva, I., Nash, S. G. ve Sofer, A.** (2009). *Linear and nonlinear optimization*. Cilt 108. Siam.

- Holland, J. H.** (1992). “Genetic algorithms”. *Scientific american* 267 (1).
- Hussain, K., Salleh, M. N. M., Cheng, S. ve Shi, Y.** (2019). “Metaheuristic research: a comprehensive survey”. *Artificial Intelligence Review* 52 (4).
- Jaglan, P., Dass, R. ve Duhan, M.** (2019). “A comparative analysis of various image segmentation techniques”. *Proceedings of 2nd International Conference on Communication, Computing and Networking*. Springer.
- Javadpour, A. ve Mohammadi, A.** (2016). “Improving brain magnetic resonance image (MRI) segmentation via a novel algorithm based on genetic and regional growth”. *Journal of biomedical physics & engineering* 6 (2).
- Javaloyes, M. A.** (2012). “Conformally standard stationary spacetimes and Fermat metrics”. *Recent Trends in Lorentzian Geometry*. Springer.
- Jelena, S.** (2015). “Anisotropic frameworks for dynamical systems and image processing”. Doktora tezi, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu.
- Jiang, X., Zhang, R. ve Nie, S.** (2009). “Image segmentation based on PDEs model: A survey”. *2009 3rd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*. IEEE.
- Karaboga, D.** (2005). *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*. Teknik rapor. Technical report-tr06, Erciyes university, engineering faculty, computer ...
- Kass, M., Witkin, A. ve Terzopoulos, D.** (1988). “Snakes: Active contour models”. *International Journal of Computer Vision* 1 (4).
- Kennedy, J. ve Eberhart, R.** (1995). “Particle swarm optimization”. *Proceedings of ICNN’95-International Conference on Neural Networks*, cilt 4. IEEE.
- Khosravy, M., Patel, N., Gupta, N. ve Sethi, I. K.** (2019). “Image quality assessment: A review to full reference indexes”. *Recent Trends in Communication, Computing, and Electronics*.
- Kilic, H. ve Ceyhan, S.** (2021). “Riemann Anlamında Eğri Evrim Modeli İncelemesi: Görüntü Segmentasyonu Uygulaması”. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 8 (2).

- Kilic, H. ve Ceyhan, S.** (2022). “Color Image Enhancement Using A New Anisotropic Metric”. *The 30th IEEE Conference on Signal Processing and Communications Applications*. IEEE.
- Kilic, H. ve Ceyhan, S.** (2022+). “Görüntü İşleme Uygulamaları İçin Finsler Eğri Evrim Modeli İncelemesi”. Under Review.
- Kilic, H., Ceyhan, S. ve Gerek, O. N.** (2022). “A novel family of edge preserving anisotropic filters”. *Digital Signal Processing* 128.
- Kimmel, R., Sochen, N. ve Malladi, R.** (1997a). “From high energy physics to low level vision”. *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*. Springer.
- Kimmel, R., Sochen, N. ve Malladi, R.** (1997b). “From high energy physics to low level vision”. *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*. Springer.
- Kolmogorov, V. ve Boykov, Y.** (2005). “What metrics can be approximated by geo-cuts, or global optimization of length/area and flux”. *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1*, cilt 1. IEEE.
- Kreyzig, E.** (1991). *Differential Geometry*. Dover Publications.
- Kühnel, W.** (2015). *Differential geometry*. Cilt 77. American Mathematical Soc.
- Lee, J. M.** (2006). *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Cilt 176. Springer Science & Business Media.
- Li, C., Huang, R., Ding, Z., Gatenby, J. C., Metaxas, D. N. ve Gore, J. C.** (2011). “A level set method for image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities with application to MRI”. *IEEE transactions on image processing* 20 (7).
- Lin, W.-C., Tsao, E. C.-K. ve Chen, C.-T.** (1992). “Constraint satisfaction neural networks for image segmentation”. *Pattern Recognition* 25 (7).
- Malladi, R., Sethian, J. A. ve Vemuri, B. C.** (1995). “Shape modeling with front propagation: A level set approach”. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 17 (2).
- Malladi, R. ve Sethian, J. A.** (1996). “Image processing: Flows under min/max curvature and mean curvature”. *Graphical models and image processing* 58 (2).

- Melonakos, J., Pichon, E., Angenent, S. ve Tannenbaum, A.** (2008). “Finsler Active Contours”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 30 (3).
- Montana, D. J. ve Davis, L.** (1989). “Training feedforward neural networks using genetic algorithms.” *IJCAI*, cilt 89.
- Nguyen-Schäfer, H. ve Schmidt, J.-P.** (2014). *Tensor analysis and elementary differential geometry for physicists and engineers*. Springer.
- Norouzi, A., Rahim, M. S. M., Altameem, A., Saba, T., Rad, A. E., Rehman, A. ve Uddin, M.** (2014). “Medical image segmentation methods, algorithms, and applications”. *IETE Technical Review* 31 (3).
- Pal, N. R. ve Pal, S. K.** (1993). “A review on image segmentation techniques”. *Pattern recognition* 26 (9).
- Perlick, V.** (1990). “On Fermat’s principle in general relativity. I. The general case”. *Classical and Quantum Gravity* 7 (8).
- Perona, P. ve Malik, J.** (1990). “Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion”. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* 12 (7).
- Petrova, S. S. ve Solov’ev, A. D.** (1997). “The origin of the method of steepest descent”. *Historia Mathematica* 24 (4).
- Pichon, E.** (2005). “Novel methods for multidimensional image segmentation”. Doktora tezi, Georgia Institute of Technology.
- Polyakov, A. M.** (1981a). “Quantum geometry of bosonic strings”. *Physics Letters B* 103 (3).
- Polyakov, A. M.** (1981b). “Quantum geometry of bosonic strings”. *Physics Letters B* 103 (3).
- Poobathy, D. ve Chezian, R. M.** (2014). “Edge detection operators: Peak signal to noise ratio based comparison”. *IJ Image, Graphics and Signal Processing* 10.
- Potter, K., Hagen, H., Kerren, A. ve Dannenmann, P.** (2006). “Methods for presenting statistical information: The box plot”. *Visualization of large and unstructured data sets* 4.
- Ranganath, H., Kuntimad, G. ve Johnson, J.** (1995). “Pulse coupled neural networks for image processing”. *Proceedings IEEE Southeastcon’95. Visualize the Future*. IEEE.

- Rao, R. V., Savsani, V. J. ve Vakharia, D.** (2011). "Teaching–learning-based optimization: a novel method for constrained mechanical design optimization problems". *Computer-Aided Design* 43 (3).
- Rund, H.** (2012). *The differential geometry of Finsler spaces*. Cilt 101. Springer Science & Business Media.
- Silverston, A. I. ve Moulins, M.** (1985). "Oscillatory neural networks". *Annual review of physiology* 47 (1).
- Senthilkumaran, N. ve Rajesh, R.** (2008). "Edge detection techniques for image segmentation-a survey". *Proceedings of the International Conference on Managing Next Generation Software Applications (MNGSA-08)*.
- Shen, Y.-B. ve Shen, Z.** (2016). *Introduction to modern Finsler geometry*. World Scientific Publishing Company.
- Shen, Z.** (2013a). *Differential geometry of spray and Finsler spaces*. Springer Science & Business Media.
- Shen, Z.** (2013b). *Differential geometry of spray and Finsler spaces*. Springer Science & Business Media.
- Silverstein, D. A. ve Farrell, J. E.** (1996). "The relationship between image fidelity and image quality". *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*, cilt 1. IEEE.
- Simon, D.** (2008). "Biogeography-based optimization". *IEEE transactions on evolutionary computation* 12 (6).
- Sochen, N., Kimmel, R. ve Malladi, R.** (1998a). "A general framework for low level vision". *IEEE transactions on image processing* 7 (3).
- Sochen, N., Kimmel, R. ve Malladi, R.** (1998b). "A general framework for low level vision". *IEEE transactions on image processing* 7 (3).
- Sochen, N. ve Zeevi, Y. Y.** (1999). "The Beltrami geometrical framework of color image processing". *1999 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings. ICASSP99 (Cat. No. 99CH36258)*, cilt 6. IEEE.

- Sochen, N. A., Gilboa, G. ve Zeevi, Y. Y.** (2000). “Color image enhancement by a forward-and-backward adaptive Beltrami flow”. *International Workshop on Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle*. Springer.
- Stojanov, J.** (2015). “Anisotropic Frameworks for Dynamical Systems and Image Processing”. Doktora tezi, University of Novi Sad (Serbia).
- Sulehria, H. K. ve Zhang, Y.** (2007). “Hopfield neural networks: a survey”. *Proceedings of the 6th Conference on 6th WSEAS Int. Conf. on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases*, cilt 6. Citeseer.
- Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R. ve Simoncelli, E. P.** (2004). “Image quality assessment: from error visibility to structural similarity”. *IEEE transactions on image processing* 13 (4).
- Xu, C., Yezzi, A. ve Prince, J. L.** (2000). “On the relationship between parametric and geometric active contours”. *Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No. 00CH37154)*, cilt 1. IEEE.
- Yang, F. ve Jiang, T.** (2003). “Pixon-based image segmentation with Markov random fields”. *IEEE Transactions on Image Processing* 12 (12).
- Young, J. W.** (1930). *Projective geometry*. Cilt 4. American Mathematical Soc.
- Zhao, D. ve Luo, M.** (2017). “General conformable fractional derivative and its physical interpretation”. *Calcolo* 54 (3).
- Ziou, D., Tabbone, S. vd.** (1998). “Edge detection techniques-an overview”. *Pattern Recognition and Image Analysis C/C of Raspoznavaniye Obrazov I Analiz Izobrazhenii* 8.
- Zosso, D., Bresson, X. ve Thiran, J.-P.** (2010). “Geodesic active fields—a geometric framework for image registration”. *IEEE Transactions on Image Processing* 20 (5).
- Zucchini, R.** (1991). “A Polyakov action on Riemann surfaces”. *Physics Letters B* 260 (3-4).
- Zucchini, R.** (1993). “A Polyakov action on Riemann surfaces (II)”. *Communications in mathematical physics* 152 (2).

## EKLER

### A. Anizotropik Filtre: Python Kodu

```
1 # How to Implement NewMetric by Python
2 # Haydar KILIC, 2022
3 import os
4 import cv2
5 import numpy as np
6 os.system('cls||clear')
7 v1=np.array([[ -1.],[ -1.]])
8 v2=np.array([[ -1],[ 0.]])
9 v3=np.array([[ -1],[ 1.]])
10 v4=np.array([[ 0],[ -1.]])
11 v5=np.array([[ 0],[ 0.]])
12 v6=np.array([[ 0],[ 1.]])
13 v7=np.array([[ 1],[ -1.]])
14 v8=np.array([[ 1],[ 0.]])
15 v9=np.array([[ 1],[ 1.]])
16 vstruct=([v1,v4,v7],[v2, v5, v8], [v3, v6, v9])
17 img=cv2.imread('Image/Lena.jpg',cv2.IMREAD_GRAYSCALE)
18 assert not isinstance(img,type(None)), 'image not found'
19 I=cv2.normalize(src=img, dst=None, alpha=0.0, beta=1.0, norm_type=cv2.
    NORM_MINMAX, dtype=cv2.CV_64F)
20 mean=0
21 sigma=0.1
22 gaussian = np.random.normal(mean, sigma, (I.shape[0],I.shape[1]))
23 I_Noisy=I+gaussian
24 # FILTER COMPUTING STARTING HERE
25 beta=1
26 dt=0.05
27 iterno=3
28 # NewMetric Function Definiton
29 def NewMetric(I=None,beta=None,dt=None,iterno=None):
30     b2 = beta**2
31     m = I.shape[0]
32     n = I.shape[1]
33     Ipad = np.pad(I, (1,1), 'minimum')
34     Deltag = np.zeros((m,n))
```

```

35     # Differential
36     for k in range(0,iterno+1):
37         # Central Derivation
38         Ix = (np.insert(I,-1,I[:, -1],1)[:,1:] - np.insert(I,0,I[:,0],1)
39         [:-1,:]) / 2
40         Iy = (np.insert(I,-1,[I[-1,:]],0)[1,:,-1] - np.insert(I,0,[I[0,:]],0)
41         [:-1,:])/2 # y central difference
42         Ixx = np.insert(I,-1,I[:, -1],1)[:,1:] - 2*I + np.insert(I,0,I
43         [:-1,:]) # xx central difference
44         Iyy = np.insert(I,-1,[I[-1,:]],0)[1,:,-1] - 2*I + np.insert(I,0,[I
45         [0,:]],0)[:-1,:] # yy central difference
46         aa = np.insert(I[1:,1:],-1,[I[1:,1:][-1,:]],0)
47         bb = np.insert(I[:,-1],0,[I[:,-1][0,:]],0)
48         cc = np.insert(I[:,-1,1:],0,[I[:,-1,1:][0,:]],0)
49         dd = np.insert(I[1:,-1],-1,[I[1:,-1][-1,:]],0)
50         Ixy = ( np.insert(aa,-1,aa[:, -1],1) - np.insert(bb,0,bb[:,0],1) -
51         np.insert(cc,-1,cc[:, -1],1) + np.insert(dd,0,dd[:,0],1) )
52         /4 # xy central difference
53         # Other Derivatives
54         g11 = 1 + b2 * Ix ** 2
55         g12 = b2 * Ix * Iy
56         g22 = 1 + b2 * Iy ** 2
57         g11k1 = 2 * b2 * Ixx * Ix
58         g12k1 = b2 * (Ixx * Iy + Ixy * Ix)
59         g22k1 = 2 * b2 * Ixy * Iy
60         g11k2 = 2 * b2 * Ixy * Ix
61         g12k2 = b2 * (Ixy * Iy + Iyy * Ix)
62         g22k2 = 2 * b2 * Iyy * Iy
63         Z = Ix ** 2 + Iy ** 2 # Square of Euclidean Norm
64         Zk1 = 2 * (Ix * Ixx + Iy * Ixy)
65         Zk2 = 2 * (Ix * Ixy + Iy * Iyy)
66         detg = 1 + b2 * Z
67         c = b2 * Z / detg
68         ck1 = (b2 / detg ** 2) * Zk1
69         ck2 = (b2 / detg ** 2) * Zk2
70         for i in range(0,m):
71             for j in range(0,n):
72                 # Calculation of direction vector
73                 window = Ipad[i:i+3,j:j+3]

```



```

69         # Find the maximum value in the selected window
70         arg_max=abs(window-window[1,1])
71         [row,col] = np.unravel_index(arg_max.argmax(), arg_max.
shape)
72         v=vstruct[row][col] # Best selection of direction vector
73         #
-----
74         g = np.array([[g11[i,j],g12[i,j]],[g12[i,j],g22[i,j]]])
75         gk1 = np.array([[g11k1[i,j],g12k1[i,j]],[g12k1[i,j],g22k1[i
,j]]])
76         gk2 = np.array([[g11k2[i,j],g12k2[i,j]],[g12k2[i,j],g22k2[i
,j]]])
77         vK = g * v # Covariant components of vector
78         ginv =1/detg[i,j]*np.array([[g22[i,j],-g12[i,j]],[-g12[i,j]
],g11[i,j]]])
79         V=v.T*g*v
80         K = 1 + c[i,j] * V
81         S=-c[i,j]/K
82         gammainv=ginv+S*v.T*v
83         #
-----
84         # Gamma Derivation:
85         gammak1=gk1+ck1[i,j]*vK.T*vK
86         gammak2=gk2+ck2[i,j]*vK.T*vK
87         # Connection Coefficients
88         Kon111=1/2*gammainv[0,0]*gammak1[0,0]+1/2*gammainv[0,1]*(2*
gammak1[0,1]-gammak2[0,0])
89         Kon112=1/2*gammainv[0,0]*gammak2[0,0]+1/2*gammainv[0,1]*
gammak1[1,1]
90         Kon122=1/2*gammainv[0,0]*(2*gammak2[0,1]-gammak1[1,1])+1/2*
gammainv[0,1]*gammak2[1,1]
91         Kon1=[Kon111,Kon112,Kon112,Kon122]
92         Kon211=1/2*gammainv[1,0]*gammak1[0,0]+1/2*gammainv[1,1]*(2*
gammak1[0,1]-gammak2[0,0])
93         Kon212=1/2*gammainv[1,0]*gammak2[0,0]+1/2*gammainv[1,1]*
gammak1[1,1]
94         Kon222=1/2*gammainv[1,0]*(2*gammak2[0,1]-gammak1[1,1])+1/2*
gammainv[1,1]*gammak2[1,1]
95         Kon2=[Kon211,Kon212,Kon212,Kon222]

```

```

96         # Laplace-Beltrami Operator
97         Deltag[i,j]=gammainv[0,0]*(Ixx[i,j]-Kon111*Ix[i,j]-Kon211*
Iy[i,j])+\\
98                 2*gammainv[0,1]*(Ixy[i,j]-Kon112*Ix[i,j]-Kon212
*Iy[i,j])+\\
99                 gammainv[1,1]*(Iyy[i,j]-Kon122*Ix[i,j]-Kon222*
Iy[i,j])
100         I=I+dt*Deltag
101         return I
102 # End of New Metric Function Definition
103 # END OF THE FILTER COMPUTING
104 I_Result=NewMetric(I_Noisy,beta,dt,iterno)
105 cv2.imshow('Filtered Image',I_Result)
106 cv2.waitKey(0)

```

## B. Anizotropik Filtre: MATLAB Kodu

```

1 %How to Implement New Metric by MATLAB
2 %Haydar KILIC, 2022
3 % Run for example: [I,It] = NewMetricFlow(11,0.2,0.2,5);
4 function [I,Deltag] = NewMetric(imgname,beta,dt,iterno)
5 b2 = beta^2; % Scale paramater
6 I = imgname; [m,n] = size(I);
7 %PREALLOCATION
8 g = cell(m,n); gk1 = cell(m,n); gk2 = cell(m,n);
9 ginv = cell(m,n); gammainv = cell(m,n);
10 gammak1 = cell(m,n); gammak2 = cell(m,n);
11 Kon1 = cell(m,n); Kon2 = cell(m,n);
12 v = cell(m,n); vK = cell(m,n);
13 Deltag = zeros(m,n);
14 %Max direction information at each point
15 vstruct = { [-1; -1], [-1; 0], [-1; 1], [0; -1], ...
16             [0; 0], [0; 1], [1; -1], [1; 0], [1; 1] };
17 vstructR = reshape(vstruct,3,3);
18 % window size
19 x = (1:3)'; y = (1:3)';
20 Ipad = padarray(I,[1 1],0);
21 for i = 1:m
22     for j = 1:n

```

```

23     window = Ipad(i+x-1, j+y-1);
24     % FIND THE MAXIMUM VALUE IN THE SELECTED WINDOW
25     argmax = abs(window - window(2,2));
26     [~,idx] = max(argmax(:));
27     v(i,j) = vstructR(idx);
28 end
29 end
30
31 for k = 1:iterno
32
33     Ix = (I(:, [2:n n]) - I(:, [1 1:n-1]))/2; %1.Central difference
34     Iy = (I([2:m m], :) - I([1 1:m-1], :))/2;
35     Ixx = I(:, [2:n,n]) - 2*I + I(:, [1,1:n-1]); %2.Central difference
36     Iyy = I([2:m,m], :) - 2*I + I([1,1:m-1], :);
37     Ixy = ( I([2:m,m], [2:n,n]) + I([1,1:m-1], [1,1:n-1]) - ...
38             I([1,1:m-1], [2:n,n]) - I([2:m,m], [1,1:n-1]) ) / 4;
39
40     g11 = 1 + b2 * Ix.^2;
41     g12 = b2 * Ix.* Iy;
42     g22 = 1 + b2 * Iy.^2;
43
44     g11k1 = 2*b2*Ixx.*Ix;
45     g12k1 = b2*(Ixx.*Iy + Ixy.*Ix);
46     g22k1 = 2*b2*Ixy.*Iy;
47
48     g11k2 = 2*b2*Ixy.*Ix;
49     g12k2 = b2*(Ixy.*Iy + Iyy.*Ix);
50     g22k2 = 2*b2*Iyy.*Iy;
51
52     Z = Ix.^2 + Iy.^2; % square of eucliden norm
53     Zk1 = 2*( Ix.*Ixx + Iy.*Ixy );
54     Zk2 = 2*( Ix.*Ixy + Iy.*Iyy );
55
56     detg = 1 + b2*Z;
57
58     c = b2 * Z ./ detg;
59     ck1 = (b2./detg.^2).*Zk1;
60     ck2 = (b2./detg.^2).*Zk2;
61 %FINSLER METRIC CALCULATION

```

```

62 for i=1:m
63     for j=1:n
64
65         g{i,j} = [ g11(i,j) g12(i,j); g12(i,j) g22(i,j) ];
66         gk1{i,j} = [ g11k1(i,j) g12k1(i,j); g12k1(i,j) g22k1(i,j) ]; %
67         gk2{i,j} = [ g11k2(i,j) g12k2(i,j); g12k2(i,j) g22k2(i,j) ]; %
68         vK{i,j} = g{i,j} * v{i,j}; % covariant components of tangent
69         ginv{i,j} = 1/detg(i,j)*[ g22(i,j) -g12(i,j); -g12(i,j) g11(i,j) ];
70
71         V = v{i,j}'*g{i,j}*v{i,j};
72
73         K = 1 + c(i,j) * V;
74         S = - c(i,j) / K;
75         gammainv{i,j} = ginv{i,j} + S*v{i,j}'*v{i,j};
76 % DERIVATIVES
77 %Gamma
78         gammak1{i,j} = gk1{i,j} + ck1(i,j)*vK{i,j}'*vK{i,j};
79         gammak2{i,j} = gk2{i,j} + ck2(i,j)*vK{i,j}'*vK{i,j};
80 %Connection Coefficients
81         Kon111 = 1/2*gammainv{i,j}(1,1)*gammak1{i,j}(1,1) + ...
82             1/2*gammainv{i,j}(1,2)*( 2*gammak1{i,j}(1,2) -...
83             gammak2{i,j}(1,1) );
84         Kon112 = 1/2*gammainv{i,j}(1,1)*gammak2{i,j}(1,1) + ...
85             1/2*gammainv{i,j}(1,2)*gammak1{i,j}(2,2);
86         Kon122 = 1/2*gammainv{i,j}(1,1)*( 2*gammak2{i,j}(1,2) -...
87             gammak1{i,j}(2,2) ) + 1/2*gammainv{i,j}(1,2)*...
88             gammak2{i,j}(2,2);
89
90         Kon1{i,j} = [Kon111 Kon112; Kon112 Kon122];
91
92         Kon211 = 1/2*gammainv{i,j}(2,1)*gammak1{i,j}(1,1) + ...
93             1/2*gammainv{i,j}(2,2)*( 2*gammak1{i,j}(1,2) -...
94             gammak2{i,j}(1,1) );
95         Kon212 = 1/2*gammainv{i,j}(2,1)*gammak2{i,j}(1,1) + ...
96             1/2*gammainv{i,j}(2,2)*gammak1{i,j}(2,2);
97         Kon222 = 1/2*gammainv{i,j}(2,1)*( 2*gammak2{i,j}(1,2) -...
98             gammak1{i,j}(2,2) ) + 1/2*gammainv{i,j}(2,2)*...
99             gammak2{i,j}(2,2);
100

```

```

101     Kon2{i,j} = [Kon211 Kon212; Kon212 Kon222];
102 %Laplace Beltrami Operator
103     Deltag(i,j) = gammainv{i,j}(1,1)*( Ixx(i,j) - Kon111*Ix(i,j) -...
104         Kon211*Iy(i,j) ) + 2*gammainv{i,j}(1,2)*...
105         ( Ixy(i,j) - Kon112*Ix(i,j) - Kon212*Iy(i,j) ) + ...
106         gammainv{i,j}(2,2)*( Iyy(i,j) - Kon122*Ix(i,j) -...
107         Kon222*Iy(i,j) );
108         end
109 end
110 %PDE Flow
111 I = I + dt*Deltag;
112
113 end
114 end
115 %END CODE

```