

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Görüntüsü Kısıtlanmış Dönüşüm Yarıgrupları

Halise Şeyma ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı

Eylül, 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
ŞEKİLLER DİZİNİ	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
2.1. Yarıgrup Kuramında Temel Tanım ve Teoremler.....	3
2.2. Yarıgrup Doğuray Kümeleri	7
2.3. Bağıntı ve Temel Özellikleri	8
2.4. $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ -Green Denklik Bağıntıları	12
2.5. Kısmi ve Tam Dönüşüm Yarıgrupları ve Bazı Alt Yarıgrupları	17
2.6. Bazı Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri ve Rankları.....	26
3. GÖRÜNTÜSÜ KISITLANMIŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI	31
3.1. $T(X, Y)$ Yarıgrubunun Regülerliği	31
3.2. $T(X, Y)$ Yarıgrubu Üzerinde Tanımlı Green Denklik Bağıntıları	34
4. $T_{(n,m)}$ ALT YARIGRUBU	41
4.1 $T_{(n,m)}$ in Doğuray Kümeleri	41
4.2. $T_{(n,m)}$ Yarıgrubunun Rankı	46
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	55

Görüntüsü Kısıtlanmış Dönüşüm Yarıgrupları

Halise Şeyma ŞAHİN

Danışman: Doç. Dr. Leyla BUGAY

Matematik Anabilim Dalı

ÖZ

$\emptyset \neq X$ herhangi bir küme olsun. Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$ şeklinde tanımlanan $T(X, Y)$ kümesi dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile X kümesi üzerindeki dönüşümler yarıgrubu T_X in bir alt yarı grubudur. Bu yarı grubun elemanlarına görüntüsü kısıtlanmış dönüşümler denir. Benzer şekilde, $T_{(X, Y)} = \{\alpha \in T_X : Y\alpha = Y\}$ kümesi de T_X yarı grubunun bir alt yarı grubudur. Özel olarak sonlu X kümelerini dolayısıyla da sonlu $\emptyset \neq Y \subseteq X$ kümelerini ele alırsak, genelliği bozmaksızın $|X| = n$, $|Y| = m$ ($n, m \in \mathbb{Z}^+$) iken $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ ve $Y = X_m = \{1, \dots, m\}$ alabiliriz. Bu durumda da $T_{(X, Y)}$ yerine $T_{(n, m)}$ yazacağız.

Bu tezde $T(X, Y)$ yarı grubunun bazı önemli cebirsel sonuçlarının elde edildiği bazı çalışmaları derleyeceğiz. Daha sonra da $T_{(n, m)}$ yarı grubunun doğuray kümeleri ve rankı ile ilgili elde edilen önemli sonuçları içeren bazı çalışmaları derleyerek araştırmacıların bilgisine sunacağız.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, Green-denklik bağıntıları, doğuray kümesi, rank.

CUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MSc THESIS

Transformation Semigroups With Restricted Range

Halise Seyma ŞAHİN

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Leyla BUGAY

Department of Mathematics

ABSTRACT

Let $\emptyset \neq X$ be any set. Then, the semigroup $T(X, Y)$ defined as $T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$, where Y is a nonempty subset of X , is a subsemigroup of T_X , the semigroup of transformations on set X with the composition of transformations. The elements of this semigroup are called transformations with restricted range. Similarly, the set $T_{(X, Y)} = \{\alpha \in T_X : Y_\alpha = Y\}$ is also a subsemigroup of T_X . If we specifically consider the finite sets of X , hence the finite sets $\emptyset \neq Y \subseteq X$, without loss of generality, when $|X| = n, |Y| = m$ ($n, m \in \mathbb{Z}^+$) we can take $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ and $Y = X_m = \{1, \dots, m\}$. In this case, we will write $T_{(n, m)}$ instead of $T_{(X, Y)}$.

In this thesis, we will compile some studies that have obtained some important algebraic results of $T(X, Y)$. Afterwards, we will compile some studies that contain important results related to the generating set and rank of $T_{(n, m)}$ and present them to the information of the researchers.

Key words: Transformation semigroups, Green's equivalences, generating set, rank.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince bilgi ve birikimleriyle çalışmamı yönlendiren ve her konuda kendimi geliştirmemde katkı sağlayan değerli danışman hocam Doç. Dr. Leyla Bugay’a, bana desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Ar. Gör. Ayşegül Dağdeviren’ e ve Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’ nün tüm değerli öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu yoğun süreçte bana destek olan sevgili eşim Murat Şahin’ e, kızım Erva ve oğlum Kıvanç’a; kardeşim Sude’ye; beni cesaretlendiren ve desteklerini esirgemeyen sevgili anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Green bağıntıları ve Hasse diyagramı ile temsili	14
Şekil 2.2. $a \in S$ elemanını içeren $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının temsili	15
Şekil 2.3. $1 \leq n \leq 5$ için 2. Tip Stirling sayıları	23
Şekil 2.4. T_3 üzerindeki Green denklik sınıflarının yapısı	25



1. GİRİŞ

Soyut cebir teorisinin temel matematiksel yapılarından biri olan “Yarıgrup” (yarı öbek) yapısı boş olmayan ve üzerinde tanımlı birleşme özelliğine sahip bir ikili işlemi olan bir kümedir. Soyut cebirin en temel alanları olan grup, halka, cisim ve modül gibi diğer cebirsel yapıların temelini oluşturmaktadır.

Yarıgrup kuramı, ilgili işlemin özelliklerine göre kümenin cebirsel yapısını, sayısal verilerini, grup ve halka yapıları başta olmak üzere soyut cebirin diğer temel alanları ile olan bağlantısını inceler. Ayrıca, araştırmacıların ilgisini çeken temel araştırma konularından bir başkasıda yarıgrupları sınıflandırarak onların cebirsel yapılarını tanımlayacak temel özelliklerle ifade edilmesini sağlayacak yöntemler bulmaktır. Bu amaçla doğuray (üreteç) kümesi bulma ve buradan yola çıkarak minimal doğuray (üreteç) kümesini belirleyerek rankını bulma problemi yarıgrup teorisinde önemli bir araştırma konusudur.

Boştan farklı bir X kümesi üzerinde tanımlı tüm kısmi dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrup, tüm (tam) dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrup ve tüm permütasyonların oluşturduğu yarıgrup sırasıyla P_X , T_X ve S_X ile gösterilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere eğer X kümesi n elemanlı sonlu bir küme ise izomorfizme göre $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde kabul edilebilir ve bu durumda P_X , T_X ve S_X yerine genel olarak P_n , T_n ve S_n gösterimi kullanılır.

Sonlu bir yarıgrupun sonlu bir doğuray kümesine sahip olduğu aşikardır. Ayrıca, grup teorisinde iyi bilinen Cayley teoremine benzer şekilde, sonlu bir yarıgrup boş olmayan sonlu bir küme üzerinde tanımlı dönüşümler yarıgrupunun uygun bir alt yarıgrupuna izomorftur. Dolayısıyla, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere T_n yarıgrupunun ve daha da özel olarak bazı önemli alt yarıgruplarının doğuray kümelerini bulmak önemli bir araştırma konusu olmuştur.

$\emptyset \neq X$ herhangi bir küme olsun. Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

$$T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$$

şeklinde tanımlanan $T(X, Y)$ kümesinin dönüşümlerin bileşke işlemi ile T_X yarıgrupunun bir alt yarı grubu olduğu açıktır. Gerçekten de $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $X\alpha \subseteq Y$ ve $X\beta \subseteq Y$ olup

$$X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta \subseteq Y\beta \subseteq Y$$

olduğundan $\alpha\beta \in T(X, Y)$ olduğu elde edilir. Bu yarıgrupun elemanlarına **görüntüsü kısıtlamış dönüşümler** denir. Özel olarak, eğer $|Y| = 1$ ise $T(X, Y)$ sadece tek elemanlı olup bu eleman görüntüsü Y olan sabit dönüşümdür; eğer $Y = X$ ise $T(X, Y) = T_X$ olur.

Symons (1975), $T(X, Y)$ yarıgrupunun tüm otomorfizmlerini tanımladı ve daha da özel olarak $|Y| = 2$ için $T(X, Y)$ yarıgrupunun tüm otomorfizmlerini belirledi. Ayrıca, $\emptyset \neq X_1$ ile $\emptyset \neq$

X_2 herhangi iki küme ve Y_1, X_1 kümesinin boş olmayan bir altkümesi; Y_2, X_2 kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $T(X_1, Y_1)$ ve $T(X_2, Y_2)$ alt yarıgruplarının ne zaman birbirine izomorf olduğunu inceledi. Bu izomorfizmin varlığının $X_1, X_2, X_1 \setminus Y_1$ ve $X_2 \setminus Y_2$ kümelerinin kardinalitelerine bağlı olduğunu buldu. Daha sonra da bu konuda araştırmalar hızla artarak bir çok çalışma yapıldı. Bunlardan biri de $T(X, Y)$ yarı grubunun bazı cebirsel özelliklerinin incelendiği Sanwong ve Sommanee (2008) çalışması idi.

$n \geq 2$ için T_n ve S_n sırasıyla $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarı grubu ve permütasyonlar grubu (n -inci simetrik grup) olsun. $n, m \in \mathbb{Z}^+, m \leq n - 1$ ve $\alpha|_{X_m}, \alpha \in T_n$ dönüşümünün X_m kümesi üzerine kısıtlanmış dönüşümünü temsil ediyor olmak üzere

$$T_{(n,m)} = \{\alpha \in T_n : X_m \alpha = X_m\} = \{\alpha \in T_n : \alpha|_{X_m} \in S_m\}$$

şeklinde tanımlansın. $T_{(n,m)}$ kümesinin dönüşümlerinin bileşkesi işlemiyle T_n yarı grubunun bir alt yarı grubu olduğu açıktır.

Bu tezin 3. bölümünde $T(X, Y)$ yarı grubunun bazı cebirsel özelliklerinin incelendiği Sanwong ve Sommanee (2008) çalışmasını inceleyerek elde edilen bazı önemli cebirsel sonuçları derleyeceğiz. 4. Bölümde de $T_{(n,m)}$ yarı grubunun doğuray kümeleri ve rankı ile ilgili önemli sonuçların elde edildiği Toker ve Ayık (2018) çalışması derlenerek araştırmacıların bilgisine sunulmuştur.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. Yarıgrup Kuramında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir S kümesi üzerinde tanımlı $*$: $S \times S \rightarrow S$ ikili işlemi ile $(S,*)$ sıralı ikilisine bir **grupoid** denir. Her $x, y \in S$ elemanlarına uygulanan bu ikili işlem $x * y$ ile gösterilir. Eğer $\forall x, y, z \in S$ için

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

oluyorsa S , üzerinde tanımlanan $*$ işlemi ile birleşme özelliğine sahiptir denir. Bu durumda $(S,*)$ grupoidine de bir **yarıgrup** denir. Eğer $(S,*)$ yarıgrubundaki ikili işlem iyi bilinen bir ikili işlem ise $(S,*)$ yerine kısaca S ve $x * y$ yerine de kısaca xy yazarız.

Tanım 2.1.2. S bir yarıgrup olsun. Eğer, $\forall x, y \in S$ için $xy = yx$ oluyorsa S yarıgrubu üzerinde tanımlı ikili işlem değişme özelliğine sahiptir denir ve bu durumda S yarıgrubuna da bir **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun. Eğer, $\forall x \in S$ için $ex = x$ koşulunu sağlayan bir $e \in S$ elemanı mevcut ise $e \in S$ elemanına S yarıgrubunun bir **sol birim elemanı** denir. Benzer şekilde, eğer $\forall x \in S$ için $xe = x$ koşulunu sağlayan bir $e \in S$ elemanı mevcut ise $e \in S$ elemanına S yarıgrubunun bir **sağ birim elemanı** denir. Bir S yarıgrubunun birden çok sağ birim (sol birim) elemanı mevcut olabilir.

Eğer bir $e \in S$ elemanı S yarıgrubunun hem sol hem de sağ birim elemanı ise $e \in S$ elemanına S yarıgrubunun bir **birim elemanı** denir.

Önerme 2.1.4. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun bir birim elemanı varsa tek bir tanedir.

İspat: S yarıgrubunun iki birim elemanı mevcut ve bu elemanlar $1, 1' \in S$ olsun. Bu durumda, sırasıyla $1'$ ve 1 elemanlarının birim eleman olduğu göz önüne alınarak $1 = 11' = 1'$ olduğu elde edilir. ■

S yarıgrubunun (varsa) bu tek birim elemanı " 1_S " (yarıgrubun ne olduğu içerikten belli ise kısaca " 1 ") ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. Eğer bir S yarıgrubunun birim elemanı mevcut ise S yarıgrubuna bir **monoid** denir. Ayrıca, S herhangi bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\} & S \text{ bir monoid de\u011fil ise} \end{cases}$$

k\u00fcmesi \u00fczerinde tanımlanan

$$\forall x, y \in S^1 \text{ i\u00e7in } xy = \begin{cases} xy & x \neq 1, y \neq 1 \text{ ise} \\ x & y = 1 \text{ ise} \\ y & x = 1 \text{ ise} \\ 1 & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

i\u015alem iyi tanımlı olup bir ikili i\u015lemdir. Bu ikili i\u015lem ile birlikte S^1 k\u00fcmesi bir monoid olur. Bu monoide S **yarıgrubuna gerekir ise birim eleman ekleyerek olu\u015turulan monoid** denir.

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup olsun. E\u011fer, $\forall x \in S$ i\u00e7in $ex = e$ ko\u015ulunu sa\u011flayan bir $e \in S$ mevcut ise bu $e \in S$ elemanına S yarıgrubunun bir **sol sıfır elemanı** denir. Benzer \u015ekilde, e\u011fer $\forall x \in S$ i\u00e7in $xe = e$ ko\u015ulunu sa\u011flayan bir $e \in S$ mevcut ise bu $e \in S$ elemanına S yarıgrubunun bir **sa\u011f sıfır elemanı** denir. Bir yarıgrupun birden \u00e7ok sa\u011f sıfır (sol sıfır) elemanı olabilir.

E\u011fer bir $e \in S$ elemanı S yarıgrubunun hem sol hem de sa\u011f sıfır elemanı ise e elemanına S yarıgrubunun bir **sıfır elemanı** denir.

\u00d6nerme 2.1.7. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun bir sıfır elemanı varsa tek bir tanedir.

\u0130spat: S yarıgrubunun iki birim elemanı mevcut ve bu elemanlar $0, 0' \in S$ olsun. Bu durumda, sırasıyla 0 ve $0'$ elemanlarının sıfır eleman oldu\u011fu g\u00f6z \u00f6n\u00fcne alınarak $0 = 00' = 0'$ oldu\u011fu elde edilir. ■

S yarıgrubunun (varsa) bu tek sıfır elemanı " 0_S " (yarıgrupun ne oldu\u011fu i\u00e7erikten belli ise kısaca " 0 ") ile g\u00f6sterilir.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun. E\u011fer bir $e \in S$ elemanı i\u00e7in $e^2 = ee = e$ oluyor ise e elemanına S yarıgrubunun bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrubunun bo\u015f olmayan herhangi bir T alt k\u00fcmesindeki idempotent elemanların k\u00fcmesi $E(T)$ ile g\u00f6sterilir.

E\u011fer S yarıgrubunun her elemanı bir idempotent eleman ise S yarıgrubuna bir **band** denir. E\u011fer S yarıgrubu de\u011fi\u015meli olan bir band ise S yarıgrubuna bir **yarılatis** denir.

\u00d6rnek 2.1.9. Tam sayılar k\u00fcmesi, rasyonel sayılar k\u00fcmesi, ger\u00e7el sayılar k\u00fcmesi ile kompleks sayılar k\u00fcmesi iyi bilinen toplama i\u015lemi (ve benzer \u015ekilde \u00e7arpma i\u015lemi) ile birim elemanı " 0 " olan birer monoid olur.

Benzer şekilde, bu kümeler iyi bilinen çarpma işlemi ile birim elemanı "1" olan birer monoid olur.

Tanım 2.1.10. S birim elemanı 1 olan bir monoid olsun. Eğer bir $s \in S$ için $as = 1$ olacak şekilde bir $a \in S$ mevcut ise bu $a \in S$ elemanına s elemanının bir **sol tersi** denir. Benzer şekilde, eğer bir $s \in S$ için $sa = 1$ olacak şekilde bir $a \in S$ mevcut ise bu $a \in S$ elemanına s elemanının bir **sağ tersi** denir. Eğer $a \in S$ elemanı s elemanının hem bir sol tersi hem de bir sağ tersi ise, yani $as = sa = 1$ ise bu $a \in S$ elemanına s elemanının bir **tersi** denir ve s^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.1.11. S birim elemanı 1 olan bir monoid olmak üzere $\forall s \in S$ için $s^{-1} \in S$ mevcut ise S ye bir **grup** denir.

Bu tanıma denk olan aşağıdaki tanımları verelim:

- i) S bir yarıgrup olmak üzere eğer $\forall x \in S$ için $Sx = S$ ve $xS = S$ oluyorsa S ye bir **grup** denir.
- ii) S bir yarıgrup olmak üzere eğer

$$\left. \begin{array}{l} (\exists e \in S), (\forall s \in S) \quad es = s \\ (\forall s \in S), (\exists s^{-1} \in S) \quad s^{-1}s = e \end{array} \right\}$$

oluyorsa S yarıgrubuna bir **grup** denir.

Tanım 2.1.12. S herhangi bir yarıgrup olmak üzere $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T , S üzerindeki ikili işlem ile kapalılık özelliğine sahip, yani $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$ ($T^2 \subseteq T$) koşulunu sağlıyor ise T ye S yarıgrubunun bir **alt yarıgrubu** denir. Bu durum $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

S bir yarıgrup olmak üzere $S \leq S$ ve S bir monoid olmak üzere $\{1\} \leq S$ olur. Bu alt yarıgruplara **aşikâr alt yarıgruplar** denir. Bu alt yarıgruplar dışında bir alt yarıgrup varsa bo alt yarıgruplara da **öz alt yarıgruplar** denir.

S yarıgrubunun bir sıfır elemanı "0" mevcut ise $\{0\} \leq S$ olur.

S bir monoid olsun. Eğer S nin herhangi bir alt yarıgrubu T , S yarıgrubundaki ikili işlem ile bir monoid oluyor ise T monoidine S monoidinin bir **alt monoidi** denir.

S bir grup olsun. Eğer S nin herhangi bir alt yarıgrubu T , S yarıgrubundaki ikili işlem ile bir grup oluyor ise T grubuna S grubunun bir **alt grubu** denir.

Tanım 2.1.13. S herhangi bir yarıgrup olmak üzere $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun.

- i) Eğer $\forall s \in S$ ile $\forall a \in I$ için $sa \in I$ (başka bir ifade ile $SI \subseteq I$) oluyorsa I kümesine S yarıgrubunun bir **sol ideali** denir.
- ii) Eğer $\forall s \in S$ ile $\forall a \in I$ için $as \in I$ (başka bir ifade ile $IS \subseteq I$) oluyorsa I kümesine S yarıgrubunun bir **sağ ideali** denir.
- iii) Eğer I kümesi S yarıgrubunun hem bir sol hem de bir sağ ideali ise I kümesine S yarıgrubunun bir **ideali** denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.

S yarıgrubunun her idealinin aynı zamanda bir alt yarıgrup olduğu tanımdan kolayca görülmektedir.

$SS = S^2 \subseteq S$ olduğundan $S \trianglelefteq S$ olduğu aşıkardır. S yarıgrubunda bir sıfır eleman "0" mevcut ise $\{0\}S = \{0\} \subseteq \{0\}$ ve $S\{0\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ olduğundan $\{0\} \trianglelefteq S$ olur. Bu ideallere S yarıgrubunun **aşıkâr idealleri** denir. S yarıgrubunun bu idealler dışında bir ideali varsa bu ideale de S yarıgrubunun bir **öz ideali** denir.

Tanım 2.1.14. S ile T herhangi iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için $(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$ koşulu sağlanıyor ise φ dönüşümüne bir **(yarıgrup) homomorfizm** denir.

Tanım 2.1.15. S ile T herhangi iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere

- i) eğer φ homomorfizmi bire-bir ise φ homomorfizmine bir **monomorfizm**;
- ii) eğer φ homomorfizmi örten ise φ homomorfizmine bir **epimorfizm** denir;
- iii) eğer φ homomorfizmi hem monomorfizm hem de epimorfizm ise φ homomorfizmine bir **izomorfizm** denir.

İzomorfizm tanımı başka bir ifade ile şöyle tanımlanmaktadır: $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm, $1_S: S \rightarrow S$ birim dönüşüm ve $1_T: T \rightarrow T$ birim dönüşüm olmak üzere eğer $\varphi\varphi^{-1} = 1_T$ ve $\varphi^{-1}\varphi = 1_S$ koşulunu sağlayan bir $\varphi^{-1}: T \rightarrow S$ ters homomorfizmi mevcut ise φ homomorfizmine bir **izomorfizm** denir.

Eğer herhangi bir $\varphi: S \rightarrow T$ izomorfizmi mevcut ise S ile T yarıgrupları **izomorfik yarıgruplardır** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak, $\varphi: S \rightarrow S$ homomorfizmine bir **endomorfizm** ve $\varphi: S \rightarrow S$ izomorfizmine bir **otomorfizm** denir.

2.2. Yarıgrup Doğuray Kümeleri

Tanım 2.2.1. S herhangi bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olmak üzere S yarıgrubunun X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur. Bu alt yarıgruba S yarıgrubunun X kümesi **tarafından doğurulan (üretilen) alt yarıgrubu** denir ve genel olarak ${}_S\langle X \rangle$ ve (yarıgrup doğuray kümesi olduğu belirli ise kısaca $\langle X \rangle$) ile gösterilir. Matematiksel olarak

$${}_S\langle X \rangle = \cap \{T : X \subseteq T, T \leq S\}$$

ile ifade edilir. X kümesi tarafından doğurulan (üretilen) ${}_S\langle X \rangle$ alt yarıgrubunun X kümesinin elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının oluşturduğu küme, yani

$${}_S\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq S$ iken $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olduğu da kolayca görülmektedir. Benzer şekilde X kümesi **tarafından doğurulan alt monoid**

$${}_M\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\} \cup \{1\}$$

ve X kümesi **tarafından doğurulan alt grup**

$${}_G\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{Z}^+; x_i \in X, \varepsilon_i \in \{-1, +1\} (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ olmak üzere

$${}_G\langle X \rangle = {}_S\langle X \cup X^{-1} \rangle$$

olduğu aşıkardır.

Tanım 2.2.2. S bir yarıgrup olsun. Eğer S yarıgrubunun $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir X alt kümesi mevcut ise bu X alt kümesine S yarıgrubunun bir **(yarıgrup) doğuray kümesi** (üreteç kümesi) denir. Bu durumda X kümesinin elemanlarına S yarıgrubunun **doğurayları (üreteçleri)** ve S yarıgrubuna da **X kümesi tarafından doğurulan (üretilen) yarıgrup** denir.

Eğer $X \subseteq S$ sonlu bir küme ise S yarıgrubu **sonlu doğuraylıdır** denir. Sonlu bir yarıgrubun kendisi bir sonlu doğuray kümesi olduğundan sonlu yarıgruplar sonlu doğuraylıdır.

Eğer S yarıgrubu bir tek $x \in S$ tarafından üretiliyorsa S ye **monojenik (tek doğuraylı)** **yarıgrup** denir ve $S = \langle x \rangle$ şeklinde gösterilir.

Eğer S yarıgrubu sadece idempotent elemanlardan oluşan bir X alt kümesi tarafından üretiliyor ise bu X kümesine S nin bir **idempotent doğuray kümesi** denir.

Tanım 2.2.3. S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olsun. Bu durumda

$$\min\{|X|: S = {}_S\langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısı mevcut olup bu sayıya S yarıgrubunun **(yarıgrup) rankı** denir ve **rank** ${}_S(S)$ ile ifade edilir. S yarıgrubunun rank ${}_S(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine **minimal doğuray kümesi** denir. Benzer şekilde, S bir sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup olsun. Bu durumda

$$\min\{|X|: S = {}_S\langle X \rangle, X \subseteq E(S) \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısı mevcut olup bu sayıya S yarıgrubunun **(yarıgrup) idempotent rankı** denir ve **idrank** ${}_S(S)$ ile ifade edilir.

2.3. Bağntı ve Temel Özellikleri

Tanım 2.3.1. X ile Y boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y kümelerinin **kartezyen çarpımı** denir.

Tanım 2.3.2. X ile Y boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı $X \times Y$ kümesinin her bir R alt kümesine **X kümesinden Y kümesine bir bağntı** denir. Özel olarak X kümesinin kendisi ile kartezyen çarpımı olan $X \times X$ in her bir R alt kümesine de kısaca **X üzerinde bir bağntı** denir ve X üzerindeki tüm bağntıların kümesi

$$B_X = \{R: R \subseteq X \times X\}$$

ile temsil edilir. $R \in B_X$ bağntısı ele alındığında $(a, b) \in R$ elemanı kısaca aRb şeklinde temsil edilebilir.

X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $\emptyset, \Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ kartezyen çarpımı da X kümesi üzerinde birer bağıntı olur. Bu $\emptyset$ bağıntısına **boş bağıntı**, Δ_X bağıntısına **birim bağıntı** ve $X \times X$ bağıntısına da **evrensel bağıntı** denir.

X boş olmayan herhangi bir küme ve $\rho \in B_X$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\}$$

kümesinin X kümesi üzerinde bir bağıntı olduğu açıktır. Bu bağıntıya ρ bağıntısının **ters bağıntısı (kısaca tersi)** denir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{dom}(\rho) &= \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}, \\ x\rho &= \{y \in X : (x, y) \in \rho\}, \\ \text{im}(\rho) = X\rho &= \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\} \text{ ve} \\ y\rho^{-1} &= \{x \in X : (x, y) \in \rho\} \end{aligned}$$

kümeleri sırasıyla ρ bağıntısının **tanım kümesi**, $x \in X$ elemanının **ρ bağıntısı altındaki görüntü kümesi**, ρ bağıntısının **görüntü kümesi** ve $y \in X$ elemanının **ρ bağıntısı altındaki ters-görüntü kümesi** denir.

Önerme 2.3.3. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\alpha, \beta \in B_X$ olmak üzere

- i) $\alpha \leq \beta$ iken $\text{dom}(\alpha) \leq \text{dom}(\beta)$,
- ii) $\text{im}(\alpha) \leq \text{im}(\beta)$,
- iii) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$,
- iv) $\alpha \leq \beta$ iken $\alpha^{-1} \leq \beta^{-1}$

ifadeleri sağlanır.

İspat: Tanımlarından kolayca görülmektedir. ■

Tanım 2.3.4. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere B_X kümesi, herhangi $\alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan **bileşke işlemi** ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba X kümesi üzerinde tanımlı **bağıntılar yarıgrubu** denir. Tanımlardan kolayca görülebileceği gibi, herhangi $\alpha, \beta, \delta \in B_X$ bağıntıları için

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \circ \delta \leq \beta \circ \delta \text{ ve } \delta \circ \alpha \leq \delta \circ \beta$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde herhangi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in B_X$ bağıntıları için

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \circ \dots \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

I bir indis kümesi ve $i \in I$ için ρ_i , X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\bigcap_{i \in I} \rho_i$

kümesinin de X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.3.5. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\rho \in B_X$ olmak üzere

- i) $1_X \leq \rho$ ise ρ bağıntısına **yansımali bağıntı**,
- ii) $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ bağıntısına **simetrik bağıntı**,
- iii) $\rho \circ \rho = \rho$ ise ρ bağıntısına **geçişmeli bağıntı**,
- iv) $\rho \cap \rho^{-1} \leq 1_X$ ise ρ bağıntısına **ters-simetrik bağıntı**

denir. Eğer $\rho \in B_X$ bağıntısı yansımali, simetrik ve aynı zamanda geçişmeli bir bağıntı ise ρ bağıntısına X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

Tanım 2.3.6. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\rho \in B_X$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi bir $x \in X$ elemanı için

$$x\rho = \{y \in X: (x, y) \in \rho\}$$

kümesine **x elemanının** $\rho \in B_X$ bağıntısına göre elde edilen **denklik sınıfı** denir. X kümesi üzerindeki tüm denklik sınıflarının ailesi X/ρ ile gösterilir ve $X/\rho = \{x\rho: x \in X\}$ ailesine X kümesinin ρ bağıntısına ile **bölüm kümesi** denir.

Önerme 2.3.7. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\rho \in B_X$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi $x, y \in X$ elemanları için ya " $x\rho \cap y\rho = \emptyset$ " ya da " $x\rho = y\rho$ " olur.

İspat: Karakaş (2008), Ders 1, Teorem 1. ■

Tanım 2.3.8. X boş olmayan herhangi bir küme ve $R \in B_X$, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Tanımı gereği, $X \times X$ evrensel bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve ayrıca R bağıntısını içerir. X kümesi üzerinde R bağıntısını içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. R yi içeren bu en küçük denklik bağıntısına R bağıntısı tarafından üretilen denklik bağıntısı denir ve

$$R^e = \cap \{\rho: R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

ile temsil edilir.

Önerme 2.3.9. X boş olmayan herhangi bir küme ve $R \in B_X$, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde

- i) $R = \emptyset$ iken $R^e = \Delta_X$,
- ii) R bir denklik bağıntısı iken $R^e = R$

olur. Ayrıca $R^e = (R^{-1})^e$ olur.

İspat: Tanımlardan kolayca görülmektedir. ■

Tanım 2.3.10. X boş olmayan herhangi bir küme ve $R \in B_X$, X kümesi üzerinde herhangi bir yansımali bağıntı olsun. Bu durumda $\Delta_X \subseteq R$ olup

$$R = \Delta_X \circ R \subseteq R \circ R = R^2$$

olduğu, buradan

$$R^2 = \Delta_X \circ R^2 \subseteq R \circ R^2 = R^3$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \dots \subseteq R^n \subseteq \dots$$

elde edilir. Bu notasyonlarla tanımlanan

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$$

kümesi de X üzerinde bir bağıntı olur.

Önerme 2.3.11. X boş olmayan herhangi bir küme ve $R \in B_X$, X kümesi üzerinde herhangi bir yansımali bağıntı olsun. Yukarıdaki gibi tanımlanan R^∞ bağıntısı, X kümesi üzerinde R bağıntısını içeren en küçük geçişmeli bağıntı olmaktadır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4. ■

Önerme 2.3.12. X boş olmayan herhangi bir küme ve $R \in B_X$, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Yukarıdaki notasyonlarla $R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$ olmaktadır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.9. ■

2.4. $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ -Green Denklik Bağıntıları

Tanım 2.4.1. S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrupunun $a \in S$ elemanını içeren en küçük sol ideali, sağ ideali ve iki taraflı ideali sırasıyla S^1a , aS^1 ve S^1aS^1 ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

olduğu kolayca elde edilir. Bu notasyonlarla

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(a, b) \in S \times S : S^1a = S^1b\}, \\ \mathcal{R} &= \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\} \text{ ve} \\ \mathcal{J} &= \{(a, b) \in S \times S : S^1aS^1 = S^1bS^1\} \end{aligned}$$

kümeleri S üzerinde birer denklik bağıntısı olur. $\mathcal{L}$ denklik bağıntısına **sol-Green denklik bağıntısı**, $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına **sağ-Green denklik bağıntısı** ve $\mathcal{J}$ denklik bağıntısına **Green denklik bağıntısı** denir.

Önerme 2.4.2. S herhangi bir yarıgrup olsun. Herhangi $a, b \in S$ elemanları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\text{i) } a \mathcal{L} b \Leftrightarrow a = xb \text{ ve } b = ya \text{ olacak şekilde } x, y \in S^1 \text{ vardır.}$$

- ii) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- iii) $a \not\mathcal{J} b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1. ■

Önerme 2.4.3. S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerindeki sol-Green denklik bağıntısı ve sağ-Green denklik bağıntıları bileşke işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. Başka bir ifade ile $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3. ■

Tanım 2.4.4. S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerindeki sol-Green denklik bağıntısı ve sağ-Green denklik bağıntısının kesişimi de S üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına **$\mathcal{H}$ -Green denklik bağıntısı** denir. Başka bir ifade ile $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olarak tanımlanır.

S yarıgrubu üzerinde sol-Green denklik bağıntısı ve sağ-Green denklik bağıntısını içeren en küçük denklik bağıntısına da **$\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısı** denir. Başka bir ifade ile $\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e$ olur.

Önerme 2.4.5. S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısı sol-Green denklik bağıntısı ve sağ-Green denklik bağıntısının bileşkesidir. Başka bir ifade ile $\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

İspat: S yarıgrubu üzerindeki sol-Green denklik bağıntısı ile sağ-Green denklik bağıntısı $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ simetrik ve yansılmalı iki bağıntıdır. Dolayısıyla $(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1}$ ve $\Delta_S \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ olup buradan

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup \Delta_S = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$$

olduğu elde edilir. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olduğu açık olup

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \\ &= \mathcal{L} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{R} \\ &= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

ve buradan da

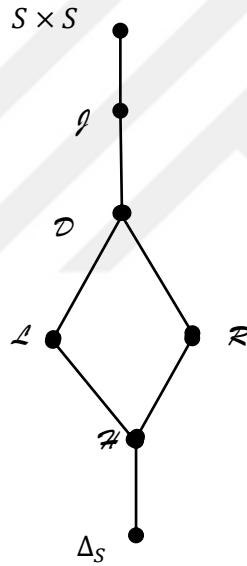
$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{L} \cup [\mathcal{R} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R})] = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

olduğu elde edilir. Böylece $\forall n \geq 2$ tamsayısı için $(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e \\
&= [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup 1_S]^\infty \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup 1_S]^n \\
&= \bigcup_{n=1}^\infty (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup \bigcup_{n=2}^\infty (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n \\
&= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\bigcup_{n=2}^\infty \mathcal{L} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup \mathcal{L} \circ \mathcal{R} \\
&= \mathcal{L} \circ \mathcal{R}
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. ■

S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntıları ele alındığında $\Delta_S \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$ ve $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{I} \subseteq S \times S$ olduğu kolayca görülür. Bu özellikler aşağıdaki şekildeki **Hasse diyagramı** ile ifade edilebilmektedir.



Şekil 2.1. Green bağıntıları ve Hasse diyagramı ile temsili

Tanım 2.4.6. S herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerinde tanımlanan $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik bağıntılarının denklik sınıfları $S/\mathcal{I}$, $S/\mathcal{D}$, $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{H}$ olsun. Ayrıca, herhangi bir $a \in S$ elemanını içeren $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfları J_a , D_a , L_a , R_a ve H_a olsun. Bu notasyonlarla

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a,$$

$$H_a \subseteq R_a \subseteq D_a$$

$$H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve ayrıca,

$$a\mathcal{D}b \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece, D bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı olmak üzere, D ayrık $\mathcal{L}$ -Green ve $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıflarının birleşimidir. Bu durum, her bir satır bir $\mathcal{R}$ -sınıfını, her bir sütun bir $\mathcal{L}$ -sınıfını ve her bir hücresi de bir $\mathcal{H}$ -sınıfını temsil edecek şekilde bir yumurta kutusu ile ifade edilebilmektedir.

D_a	L_a				
R_a		H_a			

Şekil 2.2. $a \in S$ elemanını içeren $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının temsili

Önerme 2.4.7. S bir periyodik yarıgrup iken $\mathcal{D} = \mathcal{I}$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.4. ■

Önerme 2.4.8. G herhangi bir grup olmak üzere G üzerinde $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{I} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = G \times G$ olur.

İspat: G herhangi bir grup olsun. $\mathcal{L} = G \times G$ olduğunu göstermek amacıyla $\forall a, b \in G$ için $a\mathcal{L}b$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de herhangi $a, b \in G$ elemanları için $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in G$ bulmalıyız. G grubunun birim elemanı e olmak üzere $e = a^{-1}a$ ve $e = b^{-1}b$ olduğu kullanılarak

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$

$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

elde edilir. Böylece, $x = ab^{-1}$ ve $y = ba^{-1}$ alınarak istenen sağlanmış olur.

Benzer şekilde $\mathcal{R} = G \times G$ olduğu gösterilebilir. Tanımları gereği $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{I} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = G \times G$ olduğu kolayca elde edilir. ■

Önerme 2.4.9. S herhangi bir yarıgrup olsun. Eğer S değişmeli ise $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{I} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$ olur.

İspat: S bir değişmeli yarıgrup olsun. $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ olduğunu gösterelim. $a\mathcal{L}b$ ise $a = xb$ ve $b = ya$ eşitliklerini sağlayan $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli yarıgrup olduğundan yararlanarak aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ay$ olduğu elde edilir. Böylece $a\mathcal{R}b$ olduğu ve buradan da $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ gösterilip $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ olduğu sonucuna varılır. Tanımları gereği $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{J} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$ olduğu kolayca elde edilir. ■

Şimdi de Green Teoremi olarak bilinen önemli bir teoremi verelim.

Teorem 2.4.10. S herhangi bir yarıgrup, olsun. R bir $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfı, L bir $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfı ve $a, b \in S$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

i) $(a, b) \in R$ için $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır ve

$$\rho_s: L_a \rightarrow L_b, \quad x \rightarrow xs \quad \text{ve} \quad \rho_t: L_b \rightarrow L_a, \quad y \rightarrow yt$$

şeklinde tanımlanmış olan bire-bir ve örten dönüşümler ρ_s ve ρ_t , birbirinin tersidir. Ayrıca, ρ_s dönüşümü L_a sınıfındaki bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfını L_b sınıfında bu $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfının bulunduğu $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfındaki $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfına eşler.

Benzer şekilde, ρ_t dönüşümü de L_b sınıfındaki bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfını L_a sınıfında bu $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfının bulunduğu $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfındaki $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfına eşler.

ii) $(a, b) \in L$ için $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır ve

$$\lambda_s: R_a \rightarrow R_b, \quad x \rightarrow sx \quad \text{ve} \quad \lambda_t: R_b \rightarrow R_a, \quad y \rightarrow ty$$

şeklinde tanımlanmış olan bire-bir ve örten dönüşümler λ_s ve λ_t , birbirinin tersidir. Ayrıca, λ_s dönüşümü R_a sınıfındaki bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfını R_b sınıfında bu $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfının bulunduğu $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfındaki $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfına eşler.

Benzer şekilde, λ_t dönüşümü de R_b sınıfındaki bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfını R_a sınıfında bu $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfının bulunduğu $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfındaki $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2. ■

Sonuç 2.4.11. S bir yarıgrup olsun. H_a ve H_b , S yarıgrubu üzerinde aynı $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfında herhangi iki $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

Sonuç 2.4.12. S bir yarıgrup olsun. H , S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı ise

$$H^2 \cap H = \emptyset \text{ veya } H^2 = H$$

olur. Üstelik $H^2 = H$ olduğunda H , S yarıgrubunun bir alt grubu olur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.2.5. ■

Sonuç 2.4.13. S bir yarıgrup olsun. H , S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı ve H sınıfında bir idempotent eleman varsa H , S nin bir alt grubudur.

İspat: H , S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı ve H sınıfında bir idempotent eleman varsa $H^2 \cap H \neq \emptyset$ olup $H^2 = H$ olduğundan Sonuç 2.4.12 nin açık bir sonucudur. ■

Sonuç 2.4.14. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerebilir.

İspat: H , S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı ve H sınıfında bir idempotent eleman varsa Sonuç 2.4.13 ten H , S nin bir alt grubudur. Gruplarda tek idempotent eleman birim eleman olup tek bir tanedir. Dolayısıyla S yarıgrubu üzerinde bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerebilir. ■

2.5. Kısmi ve Tam Dönüşüm Yarıgrupları ve Bazı Alt Yarıgrupları

Tanım 2.5.1. X boş olmayan herhangi bir küme, B_X ise X kümesi üzerindeki bağıntılar yarıgrubu olmak üzere $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

oluyorsa α ya X kümesi üzerinde tanımlı bir **kısmi dönüşüm** denir. B_X yarıgrubundaki kısmi dönüşümlerin oluşturduğu küme P_X ile gösterilir. P_X , bağıntıların bileşkesi işlemi ile bir yarıgrup

olup bu yarıgruba X kümesi üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir. Ayrıca, $\alpha \in P_X$ iken $\emptyset \subseteq \text{dom}(\alpha) \subseteq X$ olur.

$\alpha \in P_X$ ve $\text{dom}(\alpha) = \emptyset$ ise α kısmi dönüşümüne **boş dönüşüm** diyeceğiz ve $\emptyset$ ile göstereceğiz. Eğer $\alpha \in P_X$, $x \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = \{y\}$ şeklinde tek elemanlı ise genel olarak $x\alpha = y$ şeklinde göstereceğiz. Bu notasyonlarla

$$\begin{aligned}\text{dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) = X\alpha &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\}\end{aligned}$$

ile ifade edilebilir.

Tanım 2.5.2. X boş olmayan herhangi bir küme, B_X ise X kümesi üzerindeki bağıntılar yarıgrubu olmak üzere $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1$$

oluyorsa α ya X kümesi üzerinde tanımlı bir **(tam) dönüşüm** denir. B_X yarıgrubundaki (tam) dönüşümlerin oluşturduğu küme T_X ile gösterilir. T_X , bağıntıların bileşkesi işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba da X kümesi üzerindeki **(tam) dönüşümler yarıgrubu** denir. Ayrıca, $\alpha \in T_X$ iken $\text{dom}(\alpha) = X$ olur.

Tanım 2.5.3. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere X üzerindeki tüm bire-bir örten dönüşümlerin (diğer bir ifade ile tüm permütasyonların) kümesini S_X ile gösterelim. S_X , bağıntıların bileşkesi işlemi ile bir grup olur. Bu gruba X kümesi üzerinde tanımlı **simetrik dönüşümler grubu (permütasyonlar grubu)** denir.

Tanımlarından kolayca görüleceği üzere $S_X \leq T_X \leq P_X \leq B_X$ olur.

Tanım 2.5.4. X boş olmayan herhangi bir sonlu küme iken genelliği bozmaksızın $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ alınır ve B_X, P_X, T_X ve S_X yarıgrupları B_n, P_n, T_n ve S_n olarak ifade edilir.

Tanım 2.5.5. Herhangi bir $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

formunda ifade edilir. Eğer $\alpha \in T_n$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

formunda ifade edilir. Bu ifade şeklinde düşünülürken

$$|P_n| = (n + 1)^n,$$

$$|T_n| = n^n,$$

$$|S_n| = n!$$

olduğu kolayca elde edilir.

Önerme 2.5.6. $\alpha, \beta \in P_n$ kısmi dönüşümü için $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ ve $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ dir.

İspat: $\alpha, \beta \in P_n$ ve $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ ise $x(\alpha\beta) = y$ olacak şekilde $y \in X_n$ var olup

$$x(\alpha\beta) = y = (x\alpha)\beta$$

olduğundan $x\alpha \in \text{dom}(\beta)$ olduğu ve buradan da $x \in \text{dom}(\alpha)$ olduğu elde edilir. Şimdi de

$\alpha, \beta \in P_n$ ve $x \in \text{im}(\alpha\beta)$ olduğu durumu düşünelim. Bu durumda $y(\alpha\beta) = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ var olup

$$y(\alpha\beta) = x = (y\alpha)\beta$$

olduğundan $x \in \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.7. $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümü için tanımlanan

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : (x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \text{ veya } (x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha))\}$$

kümesine **α kısmi dönüşümünün çekirdek kümesi** denir. $\ker(\alpha)$ çekirdek kümesinin X_n kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $\ker(\alpha)$ denklik bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarının α kısmi dönüşümünün görüntü kümesi olan $\text{im}(\alpha)$ kümesindeki elemanların ters-görüntü kümeleri ve $X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ olduğu açıktır. Buradan

$$\text{kp}(\alpha) = \{y\alpha^{-1} : y \in \text{im}(\alpha)\}$$

olarak tanımlanan $\text{kp}(\alpha)$ kümesinin $\text{dom}(\alpha)$ kümesinin bir parçalanışı olduğu açıktır. Burada $\text{kp}(\alpha)$ kümesine α kısmi dönüşümünün **çekirdek parçalanışı** diyeceğiz.

Eğer $\alpha \in T_n$ ise

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

olur ve $\ker(\alpha)$ kümesinin X_n kümesinin bir parçalanışı olduğu açıktır.

Önerme 2.5.8. $\alpha, \beta \in P_n$ kısmi dönüşümü için $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olur.

İspat: Öncelikle $(x, y) \in \ker(\alpha)$ alalım. Bu durumda " $x, y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha$ " veya " $x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ " olur.

- " $x, y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha$ " ise $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ ve buradan $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olur. Eğer $x\alpha, y\alpha \in \text{dom}(\beta)$ ise $x, y \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olacağından $(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. Eğer $x\alpha, y\alpha \notin \text{dom}(\beta)$ ise $x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha\beta)$ olacağından $(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir.
- " $x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ " ise $x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha\beta)$ olacağından $(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir.

Her iki durumdan $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 2.5.9. $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümü için $|\text{im}(\alpha)| \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ sayısına α kısmi dönüşümünün yüksekliği denir ve $h(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.10. $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümü için tanımlanan

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\alpha) &= \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha = x\} \\ \text{Shift}(\alpha) &= \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha \neq x\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla α kısmi dönüşümünün **sabit noktalarının kümesi** ve **sabit olmayan noktalarının kümesi** denir.

Önerme 2.5.11. $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünün bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul her $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünün bir idempotent eleman olduğunu ve bir $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y\alpha = x$ olacak şekilde $x \neq y \in X_n$ var olup

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha \neq x = y\alpha$$

olur ve bu α kısmi dönüşümünün bir idempotent eleman olması ile çelişir. Buradan her bir $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmak zorunda olduğu elde edilir.

Şimdi de $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünde her $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olduğunu düşünelim. Bu durumda her bir $x \in \text{im}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ için

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

olur. Ayrıca her bir $y \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{im}(\alpha)$ için $y\alpha = x$ olacak şekilde bir $x \in \text{im}(\alpha)$ var ve buradan

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha = x = y\alpha$$

olduğu elde edilerek α nın bir idempotent eleman olduğu görülür. ■

Tanım 2.5.12. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere yüksekliği k olan $\alpha \in T_n$ dönüşümü için $\text{kp}(\alpha) = \{y\alpha^{-1} : y \in \text{im}(\alpha)\}$ tanımı gereği k tane çekirdek sınıfı vardır. Genelliği bozmaksızın $\text{kp}(\alpha) = \{A_1, \dots, A_k\}$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ A_1\alpha & A_2\alpha & \dots & A_k\alpha \end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir. Yukarıda verilen önermeden dolayı α dönüşümünün bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşulun $\forall 1 \leq k \leq n$ için $A_i\alpha \in A_i$ olması olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $1 \leq k \leq n$ olmak üzere yüksekliği k olan $\alpha \in P_n \setminus T_n$ kısmi dönüşümü için tanımı gereği $k + 1$ tane çekirdek sınıfı vardır. Genelliği bozmaksızın $\text{kp}(\alpha) = \{A_1, \dots, A_k\}$ ve $A_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k & A_{k+1} \\ A_1\alpha & A_2\alpha & \dots & A_k\alpha & - \end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir. Burada da yukarıda verilen önermeden dolayı α dönüşümünün bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşulun $\forall 1 \leq k \leq n$ için $A_i\alpha \in A_i$ olması olduğu elde edilir.

Örnek 2.5.13. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & - & 4 & 2 & 4 & - & 6 \end{pmatrix} \in P_8$ kısmi dönüşümünü ele alalım. Burada $2\alpha^{-1} = \{1, 2, 5\}$, $4\alpha^{-1} = \{4, 6\}$, $6\alpha^{-1} = \{8\}$ olduğundan

$$\text{kp}(\alpha) = \{\{1,2,5\}, \{4,6\}, \{8\}\}$$

şeklindedir ve

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2,5\} & \{4,6\} & \{8\} & \{3,7\} \\ 2 & 4 & 6 & - \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2,5\} & \{4,6\} & \{8\} \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in P_8$$

formunda ifade edilir.

Teorem 2.5.14. Cayley Teoremi: Her sonlu yarıgrup bir sonlu dönüşüm yarı grubuna izomorftur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.4.3. ■

Teorem 2.5.15. $\alpha, \beta \in P_n$ elemanları için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{kp}(\alpha) = \text{kp}(\beta),$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta),$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ ve } \text{kp}(\alpha) = \text{kp}(\beta).$

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1. ■

Teorem 2.5.16. $\alpha, \beta \in T_n$ elemanları için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{ker}(\alpha) = \text{ker}(\beta),$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta),$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ ve } \text{ker}(\alpha) = \text{ker}(\beta).$

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1. ■

Teorem 2.5.15' in açık bir sonucu olarak, P_n kısmi dönüşümler yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfları $0 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \{\alpha \in P_n : h(\alpha) = k\}$$

olur. Kolayca görüldüğü gibi P_n kısmi dönüşümler yarıgrubu üzerinde $n + 1$ tane $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı mevcuttur. Benzer şekilde, Teorem 2.5.16' nın açık bir sonucu olarak, T_n dönüşümler yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfları $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \{\alpha \in P_n : h(\alpha) = k\}$$

olur. Kolayca görüldüğü gibi T_n dönüşümler yarıgrubu üzerinde n tane $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı mevcuttur.

Tanım 2.5.17. “ $1 \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere n tane kişiyi her bir grupta en az bir tane kişi olacak şekilde k tane gruba kaç farklı şekilde ayırabiliriz? ” sorusunu ele alalım. Bu sorunun cevabı olabilen tüm sayılara **2. Tip Stirling sayıları** denir ve $S(n, k)$ ile gösterilir. Aslında her grup birer alt küme olup bu problemi “ n elemanlı kümenin k ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısını bulma ” problemi olarak da düşünebiliriz.

$S(n, 1) = S(n, n) = 1$ olduğu açıktır. $1 \leq k \leq n$ için $S(n, k)$, $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanış sayısına eşit olur. $\{n\}$ bir alt küme olacak şekildeki tüm parçalanışların sayısı $S(n - 1, k - 1)$ olduğu açıktır. Ayrıca, sadece “ n ” nin bir alt küme olmadığı parçalanışların sayısı $kS(n - 1, k)$ olup $S(n, k)$ sayısını

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

indirgeme bağıntısı ile elde edebiliriz.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$S(1, k)$	1				
$S(2, k)$	1	1			
$S(3, k)$	1	3	1		
$S(4, k)$	1	7	6	1	
$S(5, k)$	1	15	25	10	1

Şekil 2.3. $1 \leq n \leq 5$ için 2. Tip Stirling sayıları

Önerme 2.5.18. $1 \leq n$ ve $0 \leq k \leq n$ için P_n kısmi dönüşümler yarıgrubunda bir D_k $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfında tam $\binom{n}{k}$ tane $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfı vardır; $S(n+1, k+1)$ tane $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfı vardır; $\binom{n}{k}S(n+1, k+1)$ tane $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı vardır.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4. ■

Önerme 2.5.19. $1 \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ için T_n dönüşümler yarıgrubunda bir D_k $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfında tam $\binom{n}{k}$ tane $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfı vardır; $S(n, k)$ tane $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfı vardır; $\binom{n}{k}S(n, k)$ tane $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı vardır.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4. ■

Önerme 2.5.20. $1 \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ için P_n kısmi dönüşümler yarıgrubunda bir D_k $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfında bulunan her $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfında tam $k!$ tane eleman vardır.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.6.6'ya bakınız. ■

Önerme 2.5.21. $1 \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ için T_n dönüşümler yarıgrubunda bir D_k $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfında bulunan her $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfında tam $k!$ tane eleman vardır.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.6.6. ■

Bu bilgilerle, T_3 dönüşümler yarıgrubu üzerindeki Green denklik sınıflarının yapısı yumurta kutusu formunda aşağıdaki gibi verilebilir.

D_3	$L_{1,2,3}$											
$R_{1,2,3}$	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr></table>			$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$												
D_2	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$									
	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$</td></tr><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$												
D_1	L_1	L_2	L_3									
R_{123}	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	<table><tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$</td></tr></table>	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$												
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$												

Şekil 2.4. T_3 üzerindeki Green denklik sınıflarının yapısı

Tanım 2.5.22. $\alpha \in S_n$ permütasyonunu ele alalım. $a_1, a_2, \dots, a_k$ elemanları X_n kümesinde birbirinden farklı olan elemanlar olmak üzere eğer

$$i = 1, 2, \dots, k-1 \text{ için } a_i \alpha = a_{i+1},$$

$$a_k \alpha = a_1 \text{ ve}$$

$$x \in X_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ için } x\alpha = x$$

oluyorsa ise α permütasyonuna bir **r-devir** denir ve $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_k)$ ile gösterilir. Bir 2-devire **transpozisyon** denir. Bir tek 1-devir vardır o da birim permütasyondur ve $1 \leq i \leq n$ için $\varepsilon = (i)$ olarak alınır.

k ve t iki pozitif tamsayı ve $(a_1 a_2 \dots a_k)$ ve $(b_1 b_2 \dots b_t)$ iki devir olsun. Eğer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ kümeleri ayrık ise bu devirlerine **ayrık devirler** denir.

S_n permütasyonlar grubunun her elemanı ayrık devirlerin bir çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $k \geq 3$ için

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \dots (a_1 a_k)$$

olduğu açıktır. Buradan her bir devirin, transpozisyonların bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğu görülür. Buradan da her bir permütasyonun bazı transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir olduğu sonucu elde edilir.

Bir permütasyonun bazı transpozisyonların çarpımı şeklinde olası tek türlü belirli değildir, ancak sayısı sabittir. Eğer bir permütasyonu tek sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazabiliyorsak bu permütasyona **tek permütasyon**, çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazabiliyorsak bu permütasyona ise **çift permütasyon** denir.

S_n permütasyonlar grubundaki çift permütasyonların oluşturduğu kümeyi A_n ve tek permütasyonların oluşturduğu kümeyi B_n ile gösterelim. $2 \leq n \leq 4$ tamsayısı için A_n kümesinin elemanları aşağıdaki gibidir.

$$A_2 = \{\varepsilon\},$$

$$A_3 = \{\varepsilon, (123), (132)\},$$

$$A_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243)\}.$$

Önerme 2.5.23. $n \geq 2$ tamsayısı için A_n , dönüşümlerin bileşkesi işlemiyle S_n permütasyon grubunun bir alt grubudur ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ şeklindedir. Bu gruba **n –inci alterne grup** denir.

İspat. Asar, Arıkan, Arıkan (2009), Teorem 1.3.15. ■

Önerme 2.5.24. T_n ve P_n yarıgrupları regüler yarıgrupturlar.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.6.3. ■

2.6. Bazı Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri ve Rankları

$n \geq 3$ için S_n permütasyon grubunun elemanları ayrık devirlerin bir çarpımı olarak yazılabilir. Her devir de transpozisyonların bir çarpımı şeklinde olduğu için S_n permütasyonlar grubu aslında transpozisyonlarının oluşturduğu küme tarafından doğrulur. Ayrıca,

$$(a_1 a_2) = (a_2 a_1)$$

eşitliğinden kolayca görüleceği gibi S_n grubunda tam olarak $\frac{n(n-1)}{2}$ tane farklı transpozisyon vardır. Özel olarak $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım.

Bu gösterimlere ek olarak ileride kullanacağımız bazı özel dönüşümleri verelim. $\forall i \neq j \in X_n$ için $i\delta_{i,j} = j$ ve $\forall i \neq x \in X_n$ için $x\delta_{i,j} = x$ olan $\delta_{i,j} \in T_n$ dönüşümünü özel olarak $\|ij\|$ ile de ifade edebiliriz.

Ayrıca, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin her bir öz alt kümesi Y için $X_n \setminus Y$ kümesi üzerinde tanımlı birim dönüşümü $1_{X_n \setminus Y}$ yerine ξ_Y ile temsil edelim. Özel olarak $\xi = \xi_{\{1\}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in P_n$ dönüşümünü ele alacağız.

Teorem 2.6.1. $S_2 = \langle (12) \rangle$, ve $n \geq 3$ için $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ dir. Ayrıca, $\text{rank}(S_2) = 1$ ve $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 2$ dir. Özel olarak, $S_3 = \langle (13), (23) \rangle$ eşitliği de geçerlidir.

İspat: Yukarıda tanımlanan gösterimlerle

$$\begin{aligned}\beta^{-1} &= \beta^{n-1}, \\ \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta &= (23)\end{aligned}$$

ve $\forall 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\beta^{-i+1} \circ \alpha \circ \beta^{i-1} = (i \ i+1)$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $\forall j = 2, 3, \dots, n-1$ için

$$(j \ j+1) \circ (j-1 \ j) \circ \dots \circ (23) \circ (12) \circ (23) \circ \dots \circ (j \ j+1) = (1 \ j+1)$$

olduğu da kolayca görülebilir. Yani $\forall 1, 2, \dots, n-1$ için $(i \ i+1)$ transpozisyonları ve $\forall j = 2, 3, \dots, n-1$ için $(1 \ j+1)$ transpozisyonları α ile β permütasyonlarının bir çarpımı olarak yazılabiliyor. Benzer şekilde $\forall 1, 2, \dots, n-1$ ve $\forall j = 1, 2, \dots, n-i$ için

$$\beta^{-i+1} \circ (1 \ j+1) \circ \beta^{i-1} = (i \ i+j)$$

olduğu da kolayca görülebilir. Bu eşitlikler sayesinde her transpozisyonun α ile β permütasyonlarının bir çarpımı şekline yazılabilir olduğu sonucuna ve buradan da $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğu sonucuna varılır.

$n \geq 3$ için S_n değişmeli grup değildir. Dolayısıyla devirli olamaz. Buradan da $\text{rank}(S_n) = 2$ olduğu sonucuna varılır. ■

Teorem 2.6.2. $T_2 = \langle (12), \|(12)\| \rangle$ ve $n \geq 3$ için $T_n = \langle (12), (12 \dots n), \|(12)\| \rangle$ dir. Ayrıca $\text{rank}(T_2) = 2$ ve $n \geq 3$ için $\text{rank}(T_n) = 3$ tür.

İspat: Bir önceki teoremden olduğu gibi $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olsun. Ayrıca $\|12\|$ yukarıdaki gibi tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} (1\ i) \circ \|12\| \circ (1\ i) &= \|i2\| & (i \geq 3) \\ (2\ j) \circ \|12\| \circ (2\ j) &= \|1j\| & (j \geq 3) \\ (1\ i) \circ (2\ j) \circ \|12\| \circ (2\ j) \circ (1\ i) &= \|ij\| & (i, j \geq 3, i \neq j) \\ (i\ j) \circ \|ij\| \circ (i\ j) &= \|ji\| & (i, j \geq 1, i \neq j) \end{aligned}$$

olur. $\phi \in T_n$ ve $h(\phi) = r \leq n - 1$ olsun. Bu durumda $i\phi = j\phi$ olacak şekilde $i \neq j \in X_n$ ve en az bir $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \text{im}(\phi)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} i\hat{\phi} &= k \\ l \neq i \text{ için } l\hat{\phi} &= l\phi \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\hat{\phi}$ dönüşümünü ele alalım. Dikkat edilirse

$$|\text{im}(\hat{\phi})| = r + 1 \text{ ve } \|ij\|\hat{\phi} = \phi$$

olur. Eğer $r = n - 1$ ise $\hat{\phi} \in S_n$ olur ve buradan $\hat{\phi} \in \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğu açıktır. Eğer $r < n - 1$ ise benzer şekilde devam edilerek $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğu sonucuna varılabilir.

$T_n \setminus S_n$ singüler dönüşümler yarıgrubu T_n yarıgrubunun bir ideali olduğundan T_n in her doğuray kümesi S_n in bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Bununla birlikte S_n in herhangi bir doğuray kümesi singüler dönüşümleri doğuramayacağından T_n yarıgrubunun doğuray kümesinde en az bir singüler dönüşüm olmalıdır. Bilindiği gibi $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 2$ olduğundan $\text{rank}(T_n) \geq 3$ olur ve $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.6.3. $P_2 = \langle (12), \|12\|, \xi \rangle$ ve $n \geq 3$ için $P_n = \langle (12), (12 \dots n), \|12\|, \xi \rangle$ dir. Ayrıca $\text{rank}(P_2) = 3$ ve $n \geq 3$ için $\text{rank}(P_n) = 4$ tür.

İspat: $\alpha = (1\ 2), \beta = (1\ 2 \dots n), \|12\|$ ve ξ daha önce tanımlandığı gibi olsun. Bu gösterimlerle $i = 2, 3, \dots, n$ için

$$(1i)\xi(1i) = \xi_{\{i\}}$$

olur. Ayrıca, boş olmayan her bir öz alt küme Y için

$$\xi_Y = \prod_{i \in Y} \xi_{\{i\}}$$

olduğu kolayca görülebilir. Her bir $\rho \in P_n$ için $\hat{\rho} \in X_n$ dönüşümü

$$x\hat{\rho} = \begin{cases} x\rho, & \text{eğer } x \in \text{dom}(\rho) \\ x, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Eğer $X_n \setminus \text{dom}(\alpha) = Y$ olarak alınırsa $\rho = \xi_Y \hat{\rho}$ olduğu kolayca görülür.

Ayrıca $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğu biliniyor olup $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olduğu sonucuna varılır.

Benzer şekilde $\text{rank}(P_2) = 3$ ve $n \geq 3$ için $\text{rank}(P_n) = 4$ olduğu gösterilebilir. ■

Yarıgrup teorisi hakkında daha fazla bilgi için Howie (1995) ve Ganyushkin Mazorchuk (2009); grup teorisi hakkında daha fazla bilgi için Asar, Arıkan, Arıkan (2009) ve Isaacs (2008) kaynaklarına bakmanız önerilir.



3. GÖRÜNTÜSÜ KISITLANMIŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

$\emptyset \neq X$ herhangi bir küme olsun. Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

$$T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$$

şeklinde tanımlanan $T(X, Y)$ kümesinin dönüşümlerin bileşke işlemi ile T_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Gerçekten de $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $X\alpha \subseteq Y$ ve $X\beta \subseteq Y$ olup

$$X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta \subseteq Y\beta \subseteq Y$$

olduğundan $\alpha\beta \in T(X, Y)$ olduğu elde edilir. Bu yarıgrubun elemanlarına **görüntüsü kısıtlanmış dönüşümler** denir. Özel olarak, eğer $|Y| = 1$ ise $T(X, Y)$ sadece tek elemanlı olup bu eleman görüntüsü Y olan sabit dönüşümdür; eğer $Y = X$ ise $T(X, Y) = T_X$ olur.

Symons (1975), $T(X, Y)$ yarıgrubunun tüm otomorfizmlerini tanımladı ve daha da özel olarak $|Y| = 2$ için $T(X, Y)$ yarıgrubunun tüm otomorfizmlerini belirledi. Ayrıca, $\emptyset \neq X_1$ ile $\emptyset \neq X_2$ herhangi iki küme ve Y_1 , X_1 kümesinin boş olmayan bir altkümesi; Y_2 , X_2 kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $T(X_1, Y_1)$ ve $T(X_2, Y_2)$ alt yarıgruplarının ne zaman birbirine izomorf olduğunu inceledi. Bu izomorfizmin varlığının X_1 , X_2 , $X_1 \setminus Y_1$ ve $X_2 \setminus Y_2$ kümelerinin kardinalitelerine bağlı olduğunu buldu. Daha sonra da bu konuda araştırmalar hızla artarak bir çalışma yapıldı.

Biz bu bölümde $T(X, Y)$ yarıgrubunun bazı cebirsel özelliklerinin incelendiği Sanwong ve Sommanee (2008) çalışmasını inceleyerek elde edilen bazı önemli cebirsel sonuçları derleyeceğiz.

3.1. $T(X, Y)$ Yarıgrubunun Regülerliği

$\emptyset \neq X$ herhangi bir küme ve Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. T_X yarıgrubunun regüler olduğu bilinmektedir. Ancak $T(X, Y)$ genel olarak regüler değildir. Bu bölümde $T(X, Y)$ yarıgrubunun regülerliği ile ilgili elde edilen önemli sonuçları vereceğiz. Öncelikle

- i) $|Y| = 1$ iken $T(X, Y)$ tek bir elemanlı olduğundan açıkça regüler yarıgruptur,
- ii) $Y = X$ iken $T(X, Y) = T_X$ ve T_X regüler yarıgrup olduğundan $T(X, Y)$ yarıgrubu da regüler yarıgruptur,
- iii) $|X| \leq 2$ iken $|Y| = 1$ veya $Y = X$ olur. i) ve ii) den dolayı da açıkça $T(X, Y)$ regüler yarıgruptur

olduğuna dikkat edelim.

Şimdi de tezin ileri kısmında kullanacağımız bazı önemli gösterimleri tanımlayalım. $\emptyset \neq X$ herhangi bir küme ve Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Herhangi bir $\alpha \in T(X, Y)$ elemanı için $X\alpha = \{x_i : i \in I\}$ ve $x_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) olsun. Bu durumda daha önce de tanımladığımız matris formu daha da kısa olarak

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. (Bu gösterim için ayrıca Clifford ve Preston (1967), sayfa 241'e bakabilirsiniz.).

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\emptyset \neq X$ herhangi bir küme ve Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olarak kabul edilecektir.

Teorem 3.1.1. $T(X, Y)$ yarıgrubunun regüler yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $|Y| = 1$ veya $Y = X$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $|Y| \neq 1$ ve $Y \neq X$ olsun. Bu durumda $a \neq b$ olacak şekilde $a, b \in Y$ ve ayrıca $c \in X \setminus Y$ vardır. Şimdi bir $\alpha \in T(X, Y)$ dönüşümünü düşünelim. $X\alpha = \{y_i : i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ olacak şekilde I indis kümesinin var olduğunu ve $\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabildiğini daha önceden biliyoruz. Buradan

$$\beta = \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix} \in T(X, Y)$$

dönüşümünü düşünelim. Burada $c \notin Y$ olduğundan her $i \in I$ için $y_i \neq c$ olur ve

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix} \neq \beta$$

olduğu elde edilir. Bu durumda her $\alpha \in T(X, Y)$ için $\alpha\beta \neq \beta$ olur ve buradan da $\beta \in T(X, Y)$ elemanının regüler olmadığı elde edilir. Dolayısıyla $|Y| \neq 1$ ve $Y \neq X$ ise $T(X, Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup olamaz.

$(\Leftarrow)$ $|Y| = 1$ veya $Y = X$ ise yukarıda verilen ön bilgiden sonuç açıktır. ■

Tanım 3.1.2. $\emptyset \neq X$ herhangi bir küme ve Y , X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

$$F(X, Y) = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca, $Y \subseteq X$ olup $Y\alpha \subseteq X\alpha$ olduğundan

$$F(X, Y) = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha = Y\alpha\}$$

olarak da ifade edilebilir. Y, X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olduğundan $a \in Y$ vardır. γ_a , görüntü kümesi $\{a\}$ olan sabit dönüşüm, yani $\gamma_a = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}$ olmak üzere $\gamma_a \in F(X, Y)$ olup $F(X, Y) \neq \emptyset$ dir. Üstelik, $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ için $X\alpha = Y\alpha$ ve $X\beta = Y\beta$ olup $X\alpha\beta = Y\alpha\beta$ olduğu elde edilir. Buradan $\alpha\beta \in F(X, Y)$ ve benzer şekilde $\beta\alpha \in F(X, Y)$ olduğu elde edilerek $F(X, Y) \leq T(X, Y)$ olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3.1.3. X , doğal sayılar kümesi ve Y pozitif çift tamsayılar kümesi olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix} \in T(X, Y) \setminus F(X, Y), \beta = \begin{pmatrix} 2n & X \setminus Y \\ 2n & 2 \end{pmatrix} \in F(X, Y)$$

elemanlarını ele alalım. $\alpha\beta = \alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ olup $F(X, Y), T(X, Y)$ nin sol ideali değildir.

Önerme 3.1.4. $F(X, Y), T(X, Y)$ nin bir sağ idealidir.

İspat: $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\theta \in T(X, Y)$ elemanları için $X\alpha = Y\alpha$ olup $X\alpha\theta = Y\alpha\theta$ olduğundan $\alpha\theta \in F(X, Y)$ olur. Dolayısıyla $F(X, Y), T(X, Y)$ yarıgrubunun bir sağ ideali olur. ■

Eğer $|Y| = 1$ ise $Y = \{a\}$ olacak şekilde $a \in Y$ var olup $\forall \alpha \in T(X, Y)$ için $X\alpha = \{a\} = Y\alpha$ olur. Bu durum γ_a , görüntü kümesi $\{a\}$ olan sabit dönüşüm, yani $\gamma_a = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}$ olmak üzere $F(X, Y) = T(X, Y) = \{\gamma_a\}$ olmasını yani $F(X, Y) = T(X, Y)$ yarıgrubunun tek elemanlı olmasını gerektirecektir. Dolayısıyla $F(X, Y)$ regüler yarıgruptur. Eğer $Y = X$ ise $F(X, Y) = T(X, Y) = T_X$ ve T_X regüler yarıgrup olduğundan $F(X, Y)$ yarıgrubu da regüler yarıgruptur. Şimdi genel olarak düşünerek aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.5. $F(X, Y), T(X, Y)$ alt yarıgrubunun en geniş regüler alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha \in F(X, Y)$ elemanını ele alalım. $X\alpha = \{x_i : i \in I\} = Y\alpha, \bigcup_{i \in I} x_i \alpha^{-1} = X$ ve ayrıca $\forall i \in I$ için $x_i \alpha^{-1} \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_i \alpha^{-1} \\ x_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir olduğu kolayca görülür. $x \in Y\alpha$ için bir $d_x \in x\alpha^{-1} \cap Y$ seçilirse $d_x\alpha = x$ ve $\forall y \neq z \in Y\alpha$ için $d_y \neq d_z$ olur. Bir $k \in I$ için $J = I \setminus \{k\}$ şekline alalım. $\{x_j : j \in J\} = Y\alpha \setminus \{x_k\}$ olup

$$\beta = \begin{pmatrix} x_j & X \setminus \{x_j\} \\ d_{x_j} & d_{x_k} \end{pmatrix} \in T(X, Y)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olduğu elde edilir. Üstelik, $X\beta = \{d_{x_i} : i \in I\} \subseteq (Y\alpha)\beta \subseteq Y\beta$ olduğundan $\beta \in F(X, Y)$ olur. Buradan $F(X, Y)$ altyarıgrubunun $T(X, Y)$ yarıgrubunun bir regüler alt yarıgrubu olduğu elde edilir.

$\alpha \in T(X, Y)$ bir regüler eleman olsun. Bu durumda $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olacak şekilde $\beta \in T(X, Y)$ var olup $X\alpha = X\alpha\beta\alpha = (X\alpha\beta)\alpha \subseteq Y\alpha$ olduğundan $\alpha \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Buradan da $F(X, Y)$ altyarıgrubunun $T(X, Y)$ yarıgrubunun en geniş regüler alt yarıgrubu olduğu elde edilir.

■

3.2. $T(X, Y)$ Yarıgrubu Üzerinde Tanımlı Green Denklik Bağlılıkları

Bu bölümde, Tanım 2.4.1 ve 2.4.4' de tanımları verilen $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ -Green denklik bağınıtlarını ele alarak $T(X, Y)$ yarıgrubu üzerinde elde edilen bazı sonuçları derleyeceğiz.

Önerme 3.2.1. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. Eğer $\beta \in F(X, Y)$ ise $X\alpha \subseteq X\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \gamma\beta$ olacak şekilde $\exists \gamma \in T(X, Y)$ elemanının var olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in T(X, Y)$, $\beta \in F(X, Y)$ ve ayrıca $X\alpha = \{a_i : i \in I\} \subseteq \{b_j : j \in J\} = X\beta$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_i\alpha^{-1} \\ a_i \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} b_j\beta^{-1} \\ b_j \end{pmatrix}$$

matris formunda yazılabilir olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\beta \in F(X, Y)$ olduğundan her $a \in X\alpha \subseteq X\beta \subseteq Y\beta$ için $a = y\beta$ olacak şekilde $\exists y \in Y$ var olup $y \in a\beta^{-1}$ olur. Yani $Y \cap a\beta^{-1} \neq \emptyset$ olur. Böylece $\forall i \in I$ için bir $d_{a_i} \in Y \cap a_i\beta^{-1}$ seçebiliriz. $d_{a_i} \in Y$ ve böylece $d_{a_i}\beta = a_i$ olduğundan

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_i\alpha^{-1} \\ d_{a_i} \end{pmatrix}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. Buradan $\gamma \in T(X, Y)$ ve $\alpha = \gamma\beta$ olduğu kolayca görülür.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \in T(X, Y)$, $\beta \in F(X, Y)$ ve ayrıca $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha = \gamma\beta$ olsun. Bu durumda

$$X\alpha = (X\gamma)\beta \subseteq X\beta$$

olduğu kolayca elde edilir. ■

Teorem 3.2.2. $\alpha \in T(X, Y)$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i) $\alpha \in F(X, Y)$ ise $L_\alpha = \{\beta \in F(X, Y) : X\alpha = X\beta\}$.
- ii) $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ise $L_\alpha = \{\alpha\}$.

İspat: i) $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\beta \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \mu\alpha$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in T(X, Y)^1$ vardır. Eğer $\beta = \alpha$ ise $\beta \in F(X, Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ olur. Eğer $\beta \neq \alpha$ ise $\lambda, \mu \in T(X, Y)$ olup $X\beta = X\mu\alpha = (X\mu\lambda)\beta \subseteq Y\beta$ olduğundan $\beta \in F(X, Y)$ olur. Ayrıca, $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\beta = \mu\alpha$ olup Önerme 3.2.1'den dolayı $X\beta \subseteq X\alpha$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\beta \in F(X, Y)$ ve $\alpha = \lambda\beta$ olduğundan $X\alpha \subseteq X\beta$ olup $X\alpha = X\beta$ sonucuna varılır.

Tersine $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ olsun. Bu durumda Önerme 3.2.1'den $\alpha \mathcal{L} \beta$ olduğu kolayca görülebilir.

ii) $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ve $\beta \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \mu\alpha$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in T(X, Y)^1$ vardır. Eğer $\lambda, \mu \in T(X, Y)$ ise $X\alpha = X(\lambda\beta) = X(\lambda(\mu\alpha)) = (X\lambda\mu)\alpha \subseteq Y\alpha$ olur. Bu durum $\alpha \notin F(X, Y)$ olması ile çelişir. Bu durumda $\lambda = 1$ veya $\mu = 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\alpha = \beta$ olup $L_\alpha = \{\alpha\}$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.2.3. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun.

- i) $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde $\gamma \in T(X, Y)$ vardır.
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

İspat: i) $(\Rightarrow)$ $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$ olsun. Eğer $x \in X\beta$ ise $x = z\beta$ olacak şekilde $\exists z \in X$ var olup $\gamma : X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\gamma = \begin{cases} z\alpha, & x \in X\beta \text{ ise} \\ x\beta, & x \notin X\beta \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Dikkat edilirse $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$ olduğundan γ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu ve ayrıca $\gamma \in T(X, Y)$ olduğu açıktır. $\forall x \in X$ için $y = x\beta \in X\beta$ olsun. $\gamma \in T(X, Y)$ dönüşümünün tanımından

$$x\beta\gamma = (x\beta)\gamma = y\gamma = x\alpha$$

olduğu ve buradan da $\alpha = \beta\gamma$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde $\gamma \in T(X, Y)$ var ise $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$ olduğu açıktır.

ii) i) nin açık bir sonucudur. ■

Önerme 3.2.4. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. Eğer $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ise ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ya da $\alpha, \beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ olur.

İspat: $\alpha, \beta \in T(X, Y)$, $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve α ile β dan biri $T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ de olsun. Genelliği bozmaksızın $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(X \setminus Y)\alpha \not\subseteq Y\alpha$ olup her $y \in Y$ için $x_0\alpha \neq y\alpha$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X \setminus Y$ vardır. Bu durumda da $\forall y \in Y$ için $(x_0, y) \notin \ker(\alpha)$ olduğu elde edilir. Eğer $\beta \in F(X, Y)$ ise $X\beta = Y\beta$ olacağından $\exists y \in Y$ için $(x_0, y) \in \ker(\beta)$ olur. Bu durum $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olması ile çelişeceğinden $\beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ olmak zorundadır. ■

Teorem 3.2.3 ve Önerme 3.2.4' ün direk sonucu olarak aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.2.5. $\alpha \in T(X, Y)$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i) $\alpha \in F(X, Y)$ ise $R_\alpha = \{\beta \in F(X, Y): \ker(\alpha) = \ker(\beta)\}$.
- ii) $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ise $R_\alpha = \{\beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y): \ker(\alpha) = \ker(\beta)\}$. ■

Teorem 3.2.2 ve 3.2.3'ün direk sonucu olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.6. $\alpha \in T(X, Y)$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i) $\alpha \in F(X, Y)$ ise $H_\alpha = \{\beta \in F(X, Y): X\alpha = X\beta \text{ ve } \ker(\alpha) = \ker(\beta)\}$.
- ii) $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ise $H_\alpha = \{\alpha\}$. ■

Teorem 3.2.7. $\alpha \in T(X, Y)$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i) $\alpha \in F(X, Y)$ ise $D_\alpha = \{\beta \in F(X, Y): |X\alpha| = |X\beta|\}$.
- ii) $\alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ise $D_\alpha = \{\beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y): \ker(\alpha) = \ker(\beta)\}$. ■

İspat: i) $(\Rightarrow) \alpha \in F(X, Y), \beta \in T(X, Y)$ ve $\alpha \mathcal{D} \beta$ olsun. Bu durumda $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olur. $\alpha \mathcal{L} \gamma$ olduğundan $\gamma \in F(X, Y)$ olduğu ve buradan da $X\gamma = Y\gamma$ olduğu elde edilir. $\gamma \mathcal{R} \beta$ olduğundan $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ elde edilir ve $\exists \lambda \in T(X, Y)^1$ elemanı için $\beta = \gamma\lambda$ olur. $F(X, Y)$ altyarıgrubu $T(X, Y)$ yarığırubunun sağ ideali olduğundan $\beta \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Bu durumda $|X\alpha| = |X\gamma| = |X/\ker(\gamma)| = |X/\ker(\beta)| = |X\beta|$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ olsun. Bu durumda bir $\theta: X\beta \rightarrow X\alpha$ bire-bir ve örten dönüşümü vardır. $\mu = \beta\theta$ olarak alınırsa $\mu \in T(X, Y)$ ve ayrıca $X\mu = X\beta\theta = (X\beta)\theta = X\alpha$ olur. $\beta \in F(X, Y)$ olup $X\beta \subseteq Y\beta$ olur. Buradan $X\mu = X\beta\theta \subseteq Y\beta\theta = Y\mu$ ve böylece $\mu \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Dikkat edilirse $\alpha, \mu \in F(X, Y)$ ve $X\mu = X\alpha$ olup Teorem 3.2.2.'den dolayı $\alpha \mathcal{L} \mu$ olur. Ayrıca, μ ve θ dönüşümleri bire-bir olduğundan $\ker(\mu) = \ker(\beta)$ olur. Böylece $\mu \mathcal{R} \beta$ olup $\alpha \mathcal{D} \beta$ olduğu sonucu elde edilir.

ii) $(\Rightarrow) \alpha \in T(X, Y) \setminus F(X, Y), \beta \in T(X, Y)$ ve $\alpha \mathcal{D} \beta$ olsun. Bu durumda $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olur. $\alpha \mathcal{L} \gamma$ olduğundan $\alpha = \gamma$ olup $\alpha \mathcal{R} \beta$ olduğu elde edilir. Ayrıca, $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olup Önerme 3.2.4'ten $\beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. Sonuç 3.2.5'ten dolayı $\alpha \mathcal{R} \beta$ olduğu elde edilir. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan $\alpha \mathcal{D} \beta$ olduğu sonucu elde edilir. ■

J-Green denklik bağıntısına karakterize edebilmek için aşağıdaki önermeye bakalım.

Önerme 3.2.8. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. Eğer $\alpha = \lambda\beta\mu$ olacak şekilde $\exists \lambda \in T(X, Y)$ ve $\exists \mu \in T(X, Y)^1$ varsa $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ olur.

İspat: $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ ve $\alpha = \lambda\beta\mu$ olacak şekilde $\exists \lambda \in T(X, Y)$ ve $\exists \mu \in T(X, Y)^1$ var olsun. Bu durumda $X\lambda \subseteq Y$ olup $X\lambda\beta \subseteq Y\beta$ ve böylece $|X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$ olduğu elde edilir. $\mu = 1$ ise $\alpha = \lambda\beta$ olup $|X\alpha| = |X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$ olduğu kolayca görülür. $\mu \in T(X, Y)$ ise

$$|X\alpha| = |X(\lambda\beta\mu)| = |(X\lambda\beta)\mu| \leq |X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$$

olup $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ olur. ■

Teorem 3.2.9. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için

$$\alpha \mathcal{J} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta) \text{ veya } |X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta| .$$

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ ve $\alpha J \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \gamma \beta \lambda$ ve $\beta = \gamma' \alpha \lambda'$ olacak şekilde $\exists \gamma, \lambda, \gamma', \lambda' \in T(X, Y)^1$ vardır.

Eğer $\gamma = 1 = \gamma'$ ise $\alpha = \beta \lambda$ ve $\beta = \alpha \lambda'$ olup $\alpha \mathcal{R} \beta$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olacaktır.

Eğer $\gamma \in T(X, Y)$ veya $\gamma' \in T(X, Y)$ ise $\exists \sigma, \sigma' \in T(X, Y)$ ve $\exists \delta, \delta' \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \sigma \beta \delta$ ve $\beta = \sigma' \alpha \delta'$ olduğu sonucu elde edilir. Örneğin; $\gamma = 1$ ve $\gamma' \in T(X, Y)$ olduğunda $\alpha = \beta \lambda$ ve $\beta = \gamma' \alpha \lambda'$ olur ve buradan

$$\alpha = \beta \lambda = (\gamma' \alpha \lambda') \lambda = \gamma' \alpha (\lambda' \lambda) = \gamma' (\beta \lambda) \lambda' \lambda = \gamma' \beta (\lambda \lambda' \lambda)$$

olur. Önerme 3.2.8' den

$$|Y\beta| \geq |X\alpha| \geq |Y\alpha| \geq |X\beta| \geq |Y\beta|$$

olup $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ veya $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olsun. Eğer $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ise $\alpha \mathcal{R} \beta$ olup $\mathcal{R} \subseteq J$ olduğundan $\alpha J \beta$ olduğu elde edilir. Eğer $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ ise Clifford ve Preston (1961), Lemma 2.7'yi (Önerme 3.2.10. de ifade edildi) $|X/\ker(\alpha)| = |X\alpha| = |Y\beta|$ ve $|X/\ker(\beta)| = |X\beta| = |Y\alpha|$ ya uyarlırsak

$$\ker(\gamma) = \ker(\alpha), X\gamma = Y\beta, \ker(\lambda) = \ker(\beta) \text{ ve } X\lambda = Y\alpha$$

olacak şekilde $\gamma, \lambda \in T(X, Y)$ dönüşümlerinin var olduğunu elde ederiz. Bu durumda $\gamma \mathcal{R} \alpha$ ve $\lambda \mathcal{R} \beta$ olup $\alpha = \gamma \gamma'$ ve $\beta = \lambda \lambda'$ olacak şekilde $\exists \gamma', \lambda' \in T(X, Y)^1$ vardır. $X\gamma = Y\beta$ olup $Y\beta = \{y_i : i \in I\}$ olarak alırsak

$$\gamma = \begin{pmatrix} y_i \gamma^{-1} \\ y_i \end{pmatrix}$$

olacaktır. $\forall i \in I$ için $a_i \in y_i \beta^{-1} \cap Y$ seçerek $\beta' : X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\beta' = \begin{pmatrix} y_i \gamma^{-1} \\ a_i \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $\beta' \in T(X, Y)$ ve $\gamma = \beta' \beta$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $X\lambda = Y\alpha$ olduğunu kullanarak $\lambda = \alpha' \alpha$ olacak şekilde $\alpha' \in T(X, Y)$ dönüşümünün var olduğunu gösterebiliriz. Böylece, $\alpha = \gamma \gamma' = \beta' \beta \gamma'$ ve $\beta = \lambda \lambda' = \alpha' \alpha \lambda'$ ve buradan da $\alpha J \beta$ olduğu elde edilir. ■

Şimdi yukarıda kullandığımız “Clifford ve Preston (1961), Lemma 2.7” önermesini verelim.

Önerme 3.2.10. $\emptyset \neq Y \subseteq X$; π , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $|X/\pi| = |Y|$ ise $\ker(\alpha) = \pi$ ve $X\alpha = Y$ olacak şekilde $\alpha \in T(X, Y)$ dönüşümü vardır. ■

Bir yarıgrup üzerinde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ olduğunu ve T_X üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğunu biliyoruz. Ancak, $T(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olmayabilir. Bu durum için bir örnek verelim.

Örnek 3.2.11. $X = \mathbb{N}$ ve $Y = 2\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 2n & X \setminus Y \\ 4n & 2 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. $\alpha, \beta \in T(X, Y) \setminus F(X, Y)$ ve $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olup $\alpha\mathcal{J}\beta$ olur. Ancak, $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ olup $\alpha\mathcal{D}\beta$ olamaz.

Sonuç 3.2.12. $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ için $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha\mathcal{J}\beta \Leftrightarrow \alpha\mathcal{D}\beta$.

İspat: $(\Rightarrow)$ Genel olarak $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha\mathcal{J}\beta$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ veya $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olur. Ayrıca, $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ iken de $|X\alpha| = |X/\ker(\alpha)| = |X/\ker(\beta)| = |X\beta|$ olacağından iki durumda da $|X\alpha| = |X\beta|$ olduğu ve Teorem 3.2.7’yi kullanarak $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Teorem 3.2.7 ve 3.2.9’un açık bir sonucu olarak $F(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.13. Y , X kümesinin bir sonlu alt kümesi ise $T(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: Y , X kümesinin bir sonlu alt kümesi ve $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\alpha\mathcal{J}\beta$ olsun. Bu durumda $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ veya $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olur. Dikkat edilirse, $\alpha \notin F(X, Y)$ ise $|X\alpha| > |Y\alpha|$ olacaktır. Eğer $|X\alpha| = |Y\alpha|$ ise Y kümesi sonlu olduğundan $X\alpha$ da sonlu ve dolayısıyla $X\alpha = Y\alpha$ olacaktır. Böylece $\alpha \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Eğer $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\beta \notin F(X, Y)$ ise $|X\alpha| = |Y\alpha|$, ancak $|X\beta| > |Y\beta|$ olacağından $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olacaktır. Bu durum Önerme 3.2.4 ile çelişiyor olup ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ olmak zorundadır.

Eğer $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ise Sonuç 3.2.12'den $\alpha \mathcal{D} \beta$ olduğu elde edilir. Eğer $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ise $|X\alpha| > |Y\alpha|$ olur ve bu durumda $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur. Teorem 3.2.7'den $\alpha \mathcal{D} \beta$ olduğu ve $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan da $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. ■



4. $T_{(n,m)}$ ALT YARIGRUBU

Bir önceki bölümde $\emptyset \neq X$ herhangi bir küme ve Y, X kümesinin boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$ alt yarıgrubunun bazı cebirsel özellikleri incelenmişti. Bu bölümde ise $T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$ alt yarıgrubuna benzer şekilde tanımlanan $T_{(X,Y)} = \{\alpha \in T_X : Y_\alpha = Y\}$ alt yarıgrubunun özel bir durumu olan $T_{(n,m)}$ alt yarıgrubunu ele alacağız.

X boş olmayan bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olmak üzere $T_{(X,Y)} = \{\alpha \in T_X : Y_\alpha = Y\}$ kümesi tanımlansın. $\forall \alpha, \beta \in T_{(X,Y)}$ için

$$Y(\alpha\beta) = (Y_\alpha)\beta = Y\beta = Y$$

olup $T_{(X,Y)}, T_X$ in bir alt yarıgrubudur. Özel olarak sonlu X kümelerini dolayısıyla da sonlu $\emptyset \neq Y \subseteq X$ kümelerini ele alırsak, genelliği bozmaksızın $|X| = n, |Y| = m$ ($n, m \in \mathbb{Z}^+$) iken $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ ve $Y = X_m = \{1, \dots, m\}$ alabiliriz. Bu durumda da $T_{(X,Y)}$ yerine $T_{(n,m)}$ yazacağız.

$T_{(n,m)}$ alt yarıgrubunun tanımını daha açık olarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

$n \geq 2$ için T_n ve S_n sırasıyla $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu ve permütasyonlar grubu (n -inci simetrik grup) olsun. $n, m \in \mathbb{Z}^+, m \leq n - 1$ ve $\alpha|_{X_m}, \alpha \in T_n$ dönüşümünün X_m kümesi üzerine kısıtlanmış dönüşümünü temsil ediyor olmak üzere

$$T_{(n,m)} = \{\alpha \in T_n : X_m\alpha = X_m\} = \{\alpha \in T_n : \alpha|_{X_m} \in S_m\}$$

şeklinde tanımlansın. $T_{(n,m)}$ kümesinin dönüşümlerinin bileşkesi işlemiyle T_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Gerçekten de, $\forall \alpha, \beta \in T_{(n,m)}$ için

$$X_m(\alpha\beta) = (X_m\alpha)\beta = X_m\beta = X_m$$

olup $\alpha\beta \in T_{(n,m)}$ olur.

Bu bölümde $T_{(n,m)}$ yarıgrubunun doğuray kümeleri ve rankı ile ilgili önemli sonuçların elde edildiği Tokar ve Ayık (2018) çalışmasını derleyerek elde edilen bazı önemli sonuçları vereceğiz.

4.1. $T_{(n,m)}$ in Doğuray Kümeleri

Tanım 4.1.1. $\alpha \in T_{(n,m)}$ dönüşümü için $\beta_\alpha, \gamma_\alpha$ ve λ_α dönüşümleri

$$\begin{aligned}
i\beta_\alpha &= \begin{cases} i\alpha & i \leq m \text{ ise} \\ i & i > m \text{ ise} \end{cases} \\
i\gamma_\alpha &= \begin{cases} i\alpha & i > m \text{ ve } i\alpha \in X_m \text{ ise} \\ i & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
i\lambda_\alpha &= \begin{cases} i\alpha & i\alpha > m \text{ ise} \\ i & i\alpha \leq m \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Dikkat edilirse

$$X_m\beta_\alpha = X_m, \quad X_m\gamma_\alpha = X_m, \quad X_m\lambda_\alpha = X_m$$

olup $\beta_\alpha, \gamma_\alpha, \lambda_\alpha \in T_{(n,m)}$ dir.

$1 \leq i \leq m$ için $i\beta_\alpha = i\alpha \in X_m$ olup $(i\beta_\alpha)\gamma_\alpha = i\beta_\alpha = i\alpha \in X_m$ ve buradan $i(\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha) = (i\beta_\alpha)\lambda_\alpha = (i\alpha)\lambda_\alpha = i\alpha$ olur. Şimdi de $m+1 \leq i \leq n$ için inceleyelim. $m+1 \leq i \leq n$ için $i\beta_\alpha = i$ olup iki durum söz konusudur. Eğer $i\alpha \in X_m$ yani $1 \leq i\alpha \leq m$ ise $i\gamma_\alpha = i\alpha$ ve $(i\alpha)\lambda_\alpha = i\alpha$ olduğu göz önüne alınarak $i(\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha) = (i\gamma_\alpha)\lambda_\alpha = (i\alpha)\lambda_\alpha = i\alpha$ olduğu elde edilir. Eğer $i\alpha \notin X_m$, yani $m+1 \leq i\alpha \leq n$ ise $i\gamma_\alpha = i$ ve $i\lambda_\alpha = i$ olduğu göz önüne alınarak $i(\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha) = i\gamma_\alpha\lambda_\alpha = i\lambda_\alpha = i\alpha$ olduğu elde edilir. Böylece, $\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha = \alpha$ olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.2. $n = 8, m = 4$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in T_{(8,4)}$ dönüşümü ele alındığında

$$\begin{aligned}
\beta_\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
\gamma_\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
\lambda_\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\alpha = \beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha$ olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 4.1.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq m \leq n-1$ için

$$\begin{aligned}
U_{(n,m)} &= \{\beta_\alpha : \alpha \in T_{(n,m)}\} \\
V_{(n,m)} &= \{\gamma_\alpha : \alpha \in T_{(n,m)}\} \\
W_{(n,m)} &= \{\lambda_\alpha : \alpha \in T_{(n,m)}\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\beta_{\alpha_1}, \beta_{\alpha_2} \in \mathcal{U}_{(n,m)}$ için

$$i\beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2} = i\beta_{\alpha_1\alpha_2} \begin{cases} i\alpha_1\alpha_2 & 1 \leq m \leq n \text{ ise} \\ i & m+1 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olup $\beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2} = \beta_{\alpha_1\alpha_2} \in U_{(n,m)}$ olduğu ve buradan da $U_{(n,m)}$ kümesinin $T_{(n,m)}$ nin bir alt yarıgrubu olduğu elde edilir. Benzer şekilde $V_{(n,m)}$ ve $W_{(n,m)}$ kümelerinin de $T_{(n,m)}$ yarıgrubunun birer alt yarıgrubu olduğu gösterilebilir.

Önerme 4.1.4. $n \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq m \leq n - 1$ için aşağıdakiler geçerlidir.

- i) $U_{(n,m)} \cong S_m$.
- ii) $W_{(n,m)} \cong T_{n-m}$.

İspat: i) $\varphi : U_{(n,m)} \rightarrow S_m$ dönüşümü $\beta_\alpha \mapsto \beta_\alpha|_{x_m}$ olarak tanımlansın. $\beta_{\alpha_1}, \beta_{\alpha_2} \in U_{(n,m)}$ için

$$\beta_{\alpha_1} = \beta_{\alpha_2} \Leftrightarrow \beta_{\alpha_1}|_{x_m} = \beta_{\alpha_2}|_{x_m}$$

olup φ iyi tanımlı ve bire-birdir. Ayrıca,

$$(\beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2})\varphi = \beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2}|_{x_m} = \beta_{\alpha_1}|_{x_m} \beta_{\alpha_2}|_{x_m} = (\beta_{\alpha_1})\varphi (\beta_{\alpha_2})\varphi$$

olup φ bir homomorfizmdir. Şimdi de φ homomorfizminin örten olduğunu gösterelim. $\forall \rho \in S_m$ için $\rho^* \in T_{(n,m)}$ dönüşümünü

$$i\rho^* = \begin{cases} i\rho & 1 \leq i \leq m \\ i & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\beta\rho^* = \rho^*$ olduğu kolayca görülmektedir. Buradan

$$\beta\rho^*\varphi = \rho^*\varphi = \rho^*|_{x_m} = \rho$$

olup φ örtendir.

2) $\varphi: W_{(n,m)} \rightarrow T_{X_n-X_m}$ dönüşümünü $\lambda_\alpha \mapsto \lambda_\alpha|_{X_n \setminus X_m}$ şeklinde tanımlayalım. $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2} \in W_{(n,m)}$ için

$$\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} \Leftrightarrow \lambda_{\alpha_1}|_{X_n \setminus X_m} = \lambda_{\alpha_2}|_{X_n \setminus X_m}$$

olup φ iyi tanımlı ve bire-birdir. Ayrıca,

$$(\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2})\varphi = \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2}|_{X_n \setminus X_m} = \lambda_{\alpha_1}|_{X_n \setminus X_m} \lambda_{\alpha_2}|_{X_n \setminus X_m} = (\lambda_{\alpha_1})\varphi(\lambda_{\alpha_2})\varphi$$

olup φ bir homomorfizmdir. Şimdi de φ homomorfizminin örten olduğunu gösterelim. $\forall \rho \in T_{X_n \setminus X_m}$ için $\rho^* \in T_{(n,m)}$ dönüşümünü

$$i\rho^* = \begin{cases} i\rho & 1 \leq i \leq m \\ i & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\lambda\rho^* = \rho^*$ olduğu kolayca görülmektedir. Buradan $\lambda\rho^*\varphi = \rho^*\varphi = \rho^*|_{X_n \setminus X_m} = \rho$ olup φ örtendir. ■

NOT 4.1.5. $V_{(n,m)} = \{\gamma_\alpha : \alpha \in T_{(n,m)}\}$ ve $\gamma_\alpha \in V_{(n,m)}$ olsun. $i \in X_n$ için

$$i\gamma_\alpha^2 = (i\gamma_\alpha)\gamma_\alpha = \begin{cases} (i\alpha)\gamma_\alpha & i > m \text{ ve } i\alpha \in X_m \\ i\gamma_\alpha & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $i\gamma_\alpha^2 = i\gamma_\alpha$, yani $\gamma_\alpha^2 = \gamma_\alpha$ olduğundan γ_α bir idempotenttir. Yani $V_{(n,m)} \subseteq E(T_{(n,m)})$ olur.

NOT 4.1.6. $m = 1$ iken $T_{(n,m)} = T_{(n,1)} \cong P_{n-1}$ ve $n = m$ iken $T_{(n,m)} = T_{(n,n)} = S_n$ olduğundan bundan sonra $2 \leq m \leq n-1$ olması durumunu inceleyeceğiz.

Önerme 4.1.7. $2 \leq m \leq n-2$ için

$$A_m = \left\{ (12), (12 \dots m), (m+1 \ m+2), (m+1 \ m+2 \dots n), \right. \\ \left. \|m+1 \ m+2\|, \|m+1 \ 1\| \right\}$$

olarak tanımlansın. O halde her $1 \leq i \leq m$ ve $m+1 \leq k \leq n$ için

$$\binom{k}{i} = \|ki\| \in \langle A_m \rangle$$

olur.

İspat: $2 \leq m \leq n-2$ olsun. $2 \leq i \leq m$ için

$$(1, i) \in \langle (12), (12 \dots m) \rangle \cong S_m$$

ve $m+2 \leq k \leq n$ için

$$(m+1\ k) \in \langle (m+1\ m+2), (m+1\ m+2 \dots n) \rangle \cong S_{n-m}$$

olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca, her bir $m+2 \leq k \leq n$ için

$$\|k\ 1\| = (m+1\ k) \|m+1\ 1\| (m+1\ k) \in \langle A_m \rangle$$

olur. Buradan, her bir $2 \leq i \leq m$ ve $m+1 \leq k \leq n$ için

$$\|k\ i\| = (1\ i) \|k\ 1\| (1\ i) \in \langle A_m \rangle$$

olduğu elde edilir. ■

Önerme 4.1.8. $A_{n-1} = \{(12), (12 \dots n-1), \|n\ 1\|\}$ alınırsa $T_{(n,n-1)} = \langle A_{n-1} \rangle$ ve her bir $2 \leq m \leq n-2$ için $T_{(n,m)} = \langle A_m \rangle$ olur.

İspat: $2 \leq m \leq n-2$ ve $\alpha \in T_{(n,m)}$ olsun. Yukarıda tanımlanan gösterimlerle $\alpha = \beta_\alpha \gamma_\alpha \lambda_\alpha$ olduğunu hatırlayalım. Ayrıca,

$$\beta_\alpha \in \langle (12), (12 \dots m) \rangle \cong S_m$$

$$\lambda_\alpha \in \langle (m+1\ m+2), (m+1\ m+2 \dots n) \|m+1\ m+2\| \rangle \cong T_{n-m}$$

olduğu kolayca görülmektedir. $\alpha = \beta_\alpha \gamma_\alpha \lambda_\alpha$ olduğundan $\gamma_\alpha \in \langle A_m \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\text{Shift}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha \neq x\} = X_n \setminus \text{Fix}(\alpha)$ olduğunu hatırlayalım.

Eğer $\text{Shift}(\gamma_\alpha) = \emptyset$ ise $\gamma_\alpha = 1_n \in S_n$ olup $\alpha = \beta_\alpha \lambda_\alpha$ olacağından ispat biter.

Şimdi $\text{Shift}(\gamma_\alpha) \neq \emptyset$ ve $1 \leq r \leq n$ için $\text{Shift}(\gamma_\alpha) = \{x_1, \dots, x_r\}$ olduğunu kabul edelim. $\text{Shift}(\gamma_\alpha) \subseteq X_n \setminus X_m$ ve $(\text{Shift}(\gamma_\alpha)) \gamma_\alpha \subseteq X_m$ olduğundan her bir $1 \leq i \leq r$ için $X_i \gamma_\alpha = y_i$ olacak şekilde $y_i \in X_m$ vardır. Buradan

$$\gamma_\alpha = \|x_1\ y_1\| \|x_2\ y_2\| \dots \|x_r\ y_r\|$$

olduğu kolayca görülür. Önerme 4.1.7' den $\gamma_\alpha \in \langle A_m \rangle$ olduğu ve buradan da $T_{(n,m)} = \langle A_m \rangle$ olduğu elde edilir.

Şimdi de $m = n-1$ olması durumunu inceleyelim. $\alpha \in T_{(n,n-1)}$ olsun. Bu durumda $\lambda_\alpha = 1_n \in S_n$ olur. Ayrıca ya $\gamma_\alpha = 1_n$ ya da $1 \leq i \leq n-1$ için $\gamma_\alpha = \binom{n}{i} = \|ni\|$ şeklindedir. Diğer bir ifade ile ya $\alpha = \beta_\alpha$ ya da $\alpha = \beta_\alpha \|n\ i\|$ şeklindedir. $\beta_\alpha \in \langle (1\ 2), (1\ 2 \dots n-1) \rangle \cong S_m$

olduğu açıktır. Ayrıca $2 \leq i \leq n-1$ için $\|n\ i\| = \binom{n}{i} = (1\ i)\|n\ 1\|(1\ i) \in \langle A_{n-1} \rangle$ olduğuna dikkat edilirse $T_{(n,n-1)} = \langle A_{n-1} \rangle$ olduğu elde edilir. ■

4.2. $T_{(n,m)}$ Yarıgrubunun Rankı

Tanım 4.2.1. $2 \leq m \leq n-1$ için

$$G(n, m) = \{\alpha \in T_{(n,m)} : (X_n \setminus X_m)\alpha = X_n \setminus X_m\} = T_{(n,m)} \cap S_n$$

$$H(n, m) = \{\alpha \in T_{(n,m)} : (X_n \setminus X_m)\alpha \subseteq X_n \setminus X_m\}$$

olarak tanımlansın. $\alpha, \beta \in G(n, m)$ için

$$(X_m)\alpha\beta = X_m\beta = X_m$$

$$(X_n \setminus X_m)\alpha\beta = (X_n \setminus X_m)\beta = X_n \setminus X_m$$

olup $\alpha\beta \in G(n, m)$ olduğundan $G(n, m)$, $T_{(n,m)}$ nin bir alt yarıgrubudur. Benzer şekilde $H(n, m)$ nin de $T_{(n,m)}$ nin bir alt yarıgrubu olduğu gösterilebilir. Ayrıca $G(n, m) \leq H(n, m)$ olduğu da açıktır.

$\varphi: G(n, m) \rightarrow S_m \times S_{X_n \setminus X_m}; \quad \alpha \in G(n, m) \quad \text{için} \quad \alpha\varphi = (\alpha|_{X_m}, \alpha|_{X_n \setminus X_m})$ şeklinde tanımlanan izomorfizm ile

$$G(n, m) \cong S_m \times S_{X_n \setminus X_m} = S_m \times S_{n-m}$$

olduğu kolayca görülmektedir. Özel olarak $m = n-1$ için

$$G(n, n-1) = H(n, n-1) \cong S_{n-1}$$

olduğu da açıktır. Buradan $2 \leq m \leq n-2$ için

$$G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m+1\ m+2), (m+1 \dots n) \rangle$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, $3 \leq m \leq n-1$ için $(23 \dots m)(12) = (12 \dots m)$ olduğundan

$$S_m = \langle (12), (23 \dots m) \rangle$$

olduğu da bilinmektedir. Buradan

$$\begin{aligned}
G(n, m) &= \langle (12), (23 \dots m)(m+1 \ m+2), (m+1 \dots n) \rangle \\
&= \langle (12), (12 \dots m)(m+1 \ m+2), (m+2 \dots n) \rangle \\
&= \langle (12), (23 \dots m)(m+1 \ m+2), (m+2 \dots n) \rangle
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Önerme 4.2.2. $1 \leq m \leq n-1$ için

$$\text{rank}(G(n, m)) = \begin{cases} 1 & (n, m) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\} \\ 2 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

İspat: $G(n, n-1) \cong G(n, 1) \cong S_{n-1}$ olduğu kolayca görülmektedir. Buradan

$$\text{rank}(S_n) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ 2 & n \geq 3 \end{cases}$$

olduğu kullanılarak $n = 2$ ve $n = 3$ için

$$\text{rank}(G(2,1)) = \text{rank}(G(3,1)) = \text{rank}(G(3,2)) = 1$$

olduğu ve $n \geq 4$ için

$$G(n, 1) = G(n, n-1) = 2$$

olduğu elde edilir. Şimdi $n \geq 4$ ve $2 \leq m \leq n-2$ olması durumunu inceleyelim. Eğer $(n, m) \notin \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$ ise $G(n, m)$ nin devirli olmadığı açıktır. Dolayısıyla $\text{rank}(G(n, m)) \geq 2$ dir.

Üstelik $m = 2$ ve $n = 4$ ise $G(4,2) \cong S_2 \times S_2$ (Klein-4 grubu) ve $G(4,2) = \langle (1,2), (3,4) \rangle$ olup $\text{rank}(G(4,2)) = 2$ olduğu elde edilir. Şimdi S_n grubundaki

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (12) & \alpha_2 &= (m+1 \ m+2) \\
\beta_1 &= (12 \dots m) & \beta_2 &= (m+1 \ m+2 \dots n) \\
\varphi_1 &= (23 \dots m) & \varphi_2 &= (m+2 \ m+3 \dots n)
\end{aligned}$$

devirlerini ve

$$\delta = \alpha_1 \beta_2$$

$$\eta = \alpha_1 \varphi_2$$

$$\varepsilon = \alpha_2 \beta_1$$

$$\zeta = \alpha_2 \varphi_1$$

permütasyonlarını ele alalım. Birkaç farklı durum vardır.

1. durum: $m = 2$ ve $n \geq 5$ olsun. Eğer $n - 2$ tek tamsayı ise

$$\delta^{n-2} = \alpha_1 \text{ ve } \delta^{n-1} = \beta_2$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m + 1 \ m + 2), (m + 1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, 2) = \langle \delta, \alpha_2 \rangle$ olduğu elde edilir.

2. durum: $m = 2$ ve $n \geq 5$ olsun. Eğer $n - 2$ çift tamsayı ise

$$\eta^{n-3} = \alpha_1 \text{ ve } \eta^{n-2} = \gamma_2$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m + 1 \ m + 2), (m + 1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, 2) = \langle \alpha_2, \eta \rangle$ olduğu elde edilir.

3. durum: $n - m = 2$ ve $m \geq 3$ olsun. Eğer m tek tamsayı ise

$$\varepsilon^m = \alpha_2 \text{ ve } \varepsilon^{m+1} = \beta_1$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m + 1 \ m + 2), (m + 1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, m) = \langle \alpha_1, \varepsilon \rangle$ olduğu elde edilir.

4. durum: $n - m = 2$ ve $m \geq 3$ olsun. Eğer m çift tamsayı ise

$$\zeta^{m-1} = \alpha_2 \text{ ve } \gamma^m = \delta_1$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (23 \dots m), (m + 1 \ m + 2), (m + 1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, m) = \langle \alpha, \zeta \rangle$ olduğu elde edilir.

5. durum: $m \geq 3$ ve $n - m \geq 3$ olsun. Eğer m ve $n - m$ tek tamsayı ise

$$\delta^{n-m} = \alpha_1, \delta^{n-m+1} = \beta_2, \varepsilon^m = \alpha_2, \varepsilon^{m+1} = \beta_1$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m + 1 \ m + 2), (m + 1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, m) = \langle \delta, \varepsilon \rangle$ olduğu elde edilir.

6. durum: $m \geq 3$ ve $n - m \geq 3$ olsun. Eğer m çift, $n - m$ tek tamsayı ise

$$\delta^{n-m} = \alpha_1, \delta^{n-m+1} = \beta_2, \zeta^{m-1} = \alpha_2, \zeta^m = \delta_1$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (12 \dots m), (m+1 \ m+2), (m+1 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, m) = \langle \delta, \zeta \rangle$ olduğu elde edilir.

7. durum: $m \geq 3$ ve $n - m \geq 3$ olsun. Eğer m tek ve $n - m$ çift tamsayı ise

$$\eta^{n-m-1} = \alpha_1, \quad \eta^{n-m} = \delta_2 \zeta^{m-1} = \alpha_2, \quad \zeta^m = \delta_1$$

olup $G(n, m) = \langle (12), (23 \dots m), (m+1 \ m+2), (m+2 \dots n) \rangle$ doğuray kümesi kullanılarak $G(n, m) = \langle \eta, \zeta \rangle$ olduğu elde edilir.

Bütün bu durumlar göz önüne alınarak, $1 \leq m \leq n - 1$ için

$$\text{rank}(G(n, m)) = \begin{cases} 1 & (n, m) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\} \\ 2 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğu ispatlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.3. $1 \leq m \leq n - 1$ için

$$\text{rank}(S_n \times S_m) = \begin{cases} 1 & (n, m) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\} \\ 2 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

İspat: $G(n, m) \cong S_n \times S_m$ olup sonuç açıktır. ■

Önerme 4.2.4. Yukarıdaki gösterimlerle

- i) $1 \leq m \leq n - 1$ için $T_{(n,m)} \setminus G(n, m)$, $T_{(n,m)}$ yarıgrubunun bir idealidir.
- ii) $1 \leq m \leq n - 2$ için $H(n, m) \setminus G(n, m)$, $H(n, m)$ yarıgrubunun bir idealidir.
- iii) $1 \leq m \leq n - 1$ için $T_{(n,m)} \setminus H(n, m)$, $T_{(n,m)}$ yarıgrubunun bir idealidir.

İspat: i) $\alpha \in T_{(n,m)}$, $\beta \in T_{(n,m)} \setminus G(n, m)$ olsun. $|\text{im}(\beta)| \leq n - 1$ ve $G(n, m)$ nin her elemanının bir permütasyon olduğuna dikkat ederek $|\text{im}(\alpha\beta)| \leq |\text{im}(\beta)|$ özelliği ile $|\text{im}(\alpha\beta)| \leq |\text{im}(\beta)| \leq n - 1$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\ker(\beta\alpha) \geq \ker(\beta)$ olup $|\text{im}(\beta\alpha)| \leq |\text{im}(\beta)| \leq n - 1$ olur. Böylece $\alpha\beta, \beta\alpha \in T_{(n,m)} \setminus G(n, m)$ olduğu elde edilir.

ii) Yukarıdaki i) durumuna benzer şekilde ispatlanır.

iii) $\alpha, \beta \in T_{(n,m)} \setminus H(n, m)$ olsun. Bu durumda $m + 1 \leq i \leq n$ ve $i\alpha \in x_m$ olacak şekilde en az bir i vardır. Buradan

$$i(\alpha\beta) = (i\alpha)\beta \in x_m$$

olup $\alpha\beta \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 4.2.5. $\alpha \in G(n,m)$ ve $\beta \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ için $\alpha\beta, \beta\alpha \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ olur.

İspat: $\alpha \in G(n,m)$ ve $\beta \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ olsun. Bu durumda $m+1 \leq i \leq n$ ve $i\alpha \in X_m$ olacak şekilde en az bir i var olup $i(\beta\alpha) = (i\beta)\alpha \in X_m$ olduğu elde edilir. Böylece $(\beta\alpha) \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca $j\alpha = i$ olacak şekilde bir tek $m+1 \leq j \leq n$ var olup $j(\alpha\beta) = (j\alpha)\beta = i\beta \in X_m$ olduğu elde edilir. Böylece $\alpha\beta \in T_{(n,m)} \setminus H(n,m)$ olduğu gösterilmiş olur. ■

$\emptyset \neq A \subseteq T_{(n,m)}$ ve $T_{(n,m)} = \langle A \rangle$ olsun. Önerme 4.2.4 i)'den dolayı $1 \leq m \leq n-1$ için $G(n,m) = \langle A \cap G(n,m) \rangle$ olur. Dolayısıyla $(n,m) \in \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$ iken $|A \cap G(n,m)| \geq 1$ olmalıdır. Benzer şekilde, $H(n,m) = \langle B \rangle$ ise Önerme 4.2.4 ii)'den $1 \leq m \leq n-2$ için $H(n,m) = \langle B \cap H(n,m) \rangle$ olur.

Teorem 4.2.6. $1 \leq m \leq n-1$ için

$$\text{rank}(T_{(n,m)}) = \begin{cases} 2 & (n,m) \in \{(2,1), (3,2)\} \text{ ise} \\ 3 & (n,m) = 3 \text{ veya } 4 \leq n \text{ ve } m = n-1 \text{ ise} \\ 4 & 4 \leq n \text{ ve } 1 \leq m \leq n-2 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: $(n,m) = (2,1)$ ise $T(2,1) \cong P_1$ ve $\text{rank}(P_1) = 2$ olduğundan $\text{rank}(T(2,1)) = 2$ olduğu elde edilebilir.

$(n,m) = (3,2)$ ise $\text{rank}(G(3,2)) = 1$ olduğundan Önerme 4.2.4 i) nin bir sonucu olarak $\text{rank}(T_{(3,2)}) \geq 2$ dir. Ayrıca $T_{(3,2)} = \langle (12), \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğu kolayca görülmektedir. Böylece $\text{rank}(T_{(3,2)}) = 2$ olduğu elde edilir.

$(n,m) = (3,1)$ ise $T_{(3,1)} \cong P_2$ ve $\text{rank}(P_2) = 3$ olduğundan $\text{rank}(T_{(3,1)}) = 3$ olduğu elde edilir.

$4 \leq n$ ve $m = n-1$ olsun. Önerme 4.2.2' den $T_{(n,n-1)} < (12), (12 \dots n-1), \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğu elde edilir. Ayrıca Önerme 4.2.3 ve Önerme 4.2.4 i)' den dolayı $T_{(n,n-1)} \geq 3$ olup $\text{rank}(T_{(n,n-1)}) = 3$ olduğu elde edilir.

$4 \leq n$ ve $1 \leq m \leq n-2$ ve $A, T_{(n,m)}$ yarıgrubunun herhangi bir doğuray kümesi olsun. Önerme 4.2.3. ve Önerme 4.2.4 i)' den dolayı $|A \cap G(n,m)| \geq 2$ olduğu elde edilir. Ayrıca, $G(n,m) \neq T_{(n,m)}$ olup $\text{rank}(T_{(n,m)}) \geq 3$ olduğu da açıktır. Kabul edelim ki $\text{rank}(T_{(n,m)}) = 3$ olsun. Önerme 4.2.4 i)' den dolayı $|A \setminus G(n,m)| = 1$ olup notasyonda kolaylık olması açısından

$B = A \setminus G(n, m)$ alırsak $B = \{\alpha\}$ olarak alabiliriz. Eğer $\alpha \in H(n, m)$ ise Önerme 4.2.4 ii)' den $\langle A \rangle \leq H(n, m)$ olur ve bu durum $H(n, m) \neq T_{(n, m)}$ olması ile çelişir. Eğer $\alpha \in T_{(n, m)} \setminus H(n, m)$ ise Önerme 4.2.5' ten $\langle A \rangle = \left(G(n, m) \cup \left(T_{(n, m)} \setminus H(n, m) \right) \right)$ olur ve benzer şekilde bu durumda $G(n, m) \cup \left(T_{(n, m)} \setminus H(n, m) \right) \neq T_{(n, m)}$ olması ile çelişir. Böylece $\text{rank}(T_{(n, m)}) \geq 4$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Önerme 4.2.1, Önerme 4.2.2 ve Önerme 4.2.4 i)' nin sonucu olarak da $\text{rank}(T_{(n, m)}) = 4$ olduğu elde edilir. ■

$4 \leq n$ ve $1 \leq m \leq n - 2$ için $\{\alpha, \beta\}$, $G_{(n, m)}$ nin herhangi bir doğuray kümesi olarak kabul edilsin. Buradan

$$\{\alpha, \beta, \|m + 1 \ m + 2\|, \|m + 1 \ 1\|\}$$

kümesinin $T_{(n, m)}$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu sonucuna ulaşırız. Ayrıca, $\|m + 1 \ m + 2\| \in T_{(n, m)} \setminus H_{(n, m)}$ olduğuna dikkat edilerek $\gamma \in H(n, m) \setminus G(n, m)$ ve $\delta \in T_{(n, m)} \setminus H(n, m)$ görüntüsünde $n - 1$ tane eleman olan iki idempotent olmak üzere $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ kümesinin $T_{(n, m)}$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu da kolayca gösterilebilir.



KAYNAKLAR

- Akkaş, S., Hacisalihoğlu, H.H, Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1998. Soyut Matematik. Gazi Üniversitesi Yayın No:43, Ankara, 549s.
- Asar, A.O., Arıkan, A., Arıkan A., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, Ankara 373s.
- Clifford, A.H., Preston, G.B., 1961. The Algebraic Theory of Semigroups, vol. 1. Mathematical Surveys, vol. 7. American Mathematical Society, Providence.
- Clifford, A.H., Preston, G.B., 1967. The Algebraic Theory of Semigroups, vol. 2. Mathematical Surveys, vol. 7. American Mathematical Society, Providence.
- Dey, I.M.S., Wiegold J., 1971. Generators for Alternating and Symmetric Groups. J. Australian Math. Soc., 12:63–68.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.
- Howie, J. M., 1976. Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London.
- Howie, J.M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 s.
- Isaacs, I.M., 2008. Finite Group Theory. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, New York, 92s.
- Karakaş, H.İ., 2008. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402s.
- Rotman, J.J., 1995. An Introduction to the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York, 513 s.
- Sanwong, J., Sommanee, W., 2008. Regularity and Green's Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range. Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 11p.
- Toker, K., Ayık, H., 2018. On the rank of transformation semigroup $T(n, m)$. Turk. J. Math. 42: 1970-1977.



ÖZGEÇMİŞ

Halise Şeyma ŞAHİN, İlköğretim, orta ve lise öğrenimini Gaziantep’ de tamamladı. Lisans öğrenimine 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nde başladı ve 2012 yılında mezun oldu. 2018 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.

