

GRACEFUL ÇİZGELER

ZELİHA BOZGAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uygulamalı Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mayıs 2022

ÖZET

GRACEFUL ÇİZGELER

Zeliha BOZGAÇ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mayıs 2022

Danışman : Prof. Dr. Emrah AKYAR

Bu tezde çizgelerin graceful etiketlemesi ele alınmış ve bu konuda elde edilen önemli sonuçlar çeşitli kaynaklardan derlenmiştir. 1960'ların ortalarında çalışılmaya başlanan çizge etiketleme, belli koşullar altında tamsayıların bir çizgenin köşe noktalarına, kenarlarına veya hem köşe noktalarına hem de kenarlarına atanması işlemidir. Graceful etiketlemenin dışında çok sayıda çizge etiketleme yöntemi de araştırmacılar tarafından halen yoğun olarak çalışılmaktadır. Kenar sayısı m olan bir çizgenin tüm köşe noktalarına 0 ile m arasında farklı tamsayılar atansın. Çizgenin kenarları da uç noktalara atanan tamsayıların farklarının mutlak değeri ile etiklensin. Eğer bir çizgenin tüm kenarları bu şekilde 1 ile m arasındaki farklı tamsayılarla etiklenebiliyorsa bu etiklemeye graceful etiketleme, çizgeye de graceful çizge denir.

Çalışmada çizgeler ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra ilk olarak graceful çizgelerin tanımı ve temel özellikleri sıralanarak graceful çizgeleri karakterize eden bazı önemli sonuçlar sunulmuştur. Daha sonra tam çizge, iki kümeli tam çizge, döngü çizge, Euler çizge gibi temel çizge ailelerinin graceful etiketlemesi ele alınmıştır. Ardından döngü benzeri çizgelerin graceful etiketlemeleriyle çizgelerin Kartezyen çarpımlarının graceful etiketlemeleri ele alınmıştır. Daha sonra Ringel-Kotzig sayısı ve çok sayıda özel ağaç ailesinin graceful etiketlemeleri sunulmuştur. Son olarak, çizgelerin birleşimlerinin graceful olup olmadığı incelenmiş ve graceful çizgelerin bir uygulaması verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Çizge, Graceful Çizge, Çizge Etiketleme

ABSTRACT

GRACEFUL GRAPHS

Zeliha BOZGAÇ

Mathematics Department

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, May 2022

Supervisor : Prof. Dr. Emrah AKYAR

In this thesis, graceful labeling of graphs is discussed and important results obtained on this subject have been compiled from various sources. Graph labeling, which began to be studied in the mid-1960s, is the process of assigning integers to vertices, edges, or both vertices and edges of a graph under certain conditions. Apart from graceful labeling, many graph labeling methods are still being studied intensively by researchers. Graceful labeling is a special graph labeling of a graph on m edges in which the nodes are labeled with a subset of distinct nonnegative integers from 0 to m and the graph edges are labeled with the absolute differences between node values. If the resulting graph edge numbers run from 1 to m inclusive, the labeling is called a graceful labeling and the graph is said to be a graceful graph.

In the study, after giving preliminary information about the graphs, firstly the definition and basic properties of graceful graphs are listed and some important results characterizing graceful graphs are presented. Afterward, graceful labeling of basic graph families such as complete graph, complete bipartite graph, cycle graph, Euler graph is discussed. Then, graceful labeling of cycle-related graphs and graceful labeling of Cartesian products of graphs are discussed. Next, the Ringel-Kotzig conjecture and graceful labeling of many special tree families are presented. Finally, it is examined whether the union of graphs is graceful and an application of graceful graphs is given.

Keywords: Graph, Graceful Graph, Graph Labeling

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve desteğini benden esirgemeyen, her adımda bana yol gösteren, çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Emrah AKYAR'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen, bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan aileme sevgilerimi, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha BOZGAÇ



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Zeliha BOZGAÇ

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	3
2.1 Temel Kavramlar	3
2.2 Bazı Özel Çizgeler	7
3 GRACEFUL ÇİZGELER	11
3.1 Graceful Çizge	11
3.2 Graceful Tam Çizgeler	14
3.3 Döngü Benzeri Graceful Çizgeler	20
3.4 Kartezyen Çarpım Graceful Çizgeler	27
4 AĞAÇLAR ve GRACEFUL ETİKETLEMELERİ	33
4.1 Ringel-Kotzig Samsı	33
4.2 Bazı Özel Ağaçların Graceful Etiketlemesi	34
5 DİĞER GRACEFUL ÇİZGELER VE BİR UYGULAMA	40
5.1 Bazı Özel Graceful Çizgeler	40
5.2 Çizgelerin Birleşimi	42
5.3 Graceful Çizgelerin bir Uygulaması	44
KAYNAKÇA	48
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	Bir çizge örneği	3
2.2	Bağlantılı ve bağlantılı olmayan çizge örnekleri	5
2.3	5 köşe noktalı, 7 kenarlı aynı çizgenin iki farklı çizimi	5
2.4	İzomorfik G_1 ve G_2 çizgeleri	6
2.5	G_1 Euler çizgesi ve Euler olmayan G_2 çizgesi	6
2.6	Düzlemsel bir çizge örneği	7
2.7	Düzlemsel olmayan bir çizge örneği	7
2.8	$n = 4, 5, 6$ için K_n tam çizgeler	8
2.9	$n = 4, 5, 6$ için C_n döngü çizgeler	8
2.10	$n = 4, 5, 6$ için P_n patika çizgeler	8
2.11	$n = 5, 6, 7$ için W_n tekerlek çizgeler	9
2.12	İki kümeli bir çizge örneği	9
2.13	$K_{3,4}$ ve $K_{5,2}$ iki kümeli tam çizgeler	9
2.14	Ağaç örnekleri	10
2.15	Çapı 4 ve yarıçapı 3 olan bir çizge	10
3.16	Graceful etiketlemeleri ile birlikte iki farklı graceful çizge örneği . . .	11
3.17	Graceful olmayan bağlantısız bir çizge örneği	12
3.18	Aynı graceful çizgenin iki farklı graceful etiketlemesi	12
3.19	4 köşe noktalı birbirine izomorfik olmayan bağlantılı graceful çizgeler	12
3.20	C_5 çizgesinin hiçbir graceful olmayan 24 farklı etiketlemesi	13
3.21	5 köşe noktalı, bağlantılı, graceful olmayan tüm çizgeler	13
3.22	$\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ çift sayı olmasına rağmen graceful olmayan bir Euler çizge örneği	16
3.23	$n = 2, 3, 4$ için K_n tam çizgeleri graceful çizge olur	16
3.24	$K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesinin bir graceful etiketlemesi	18
3.25	$K_{3,4}$ iki kümeli tam çizgesinin iki farklı şekilde graceful etiketlemesi .	19
3.26	$K_{4,4}$ iki kümeli tam çizgesinin bir graceful etiketlemesi	19
3.27	4-pervane çizge ve bir graceful etiketlemesi	20
3.28	Fransız 4-pervane çizgenin bir graceful etiketlemesi	20
3.29	C_3 ve C_4 döngü çizgeleri graceful çizgelerdir	21
3.30	Teorem 3.7 ile verilen yöntemle C_{11} ve C_{16} çizgelerinin bir graceful etiketlemesi	22
3.31	W_5 tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi	22
3.32	W_9 tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi	23
3.33	W_{11} tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi	23
3.34	W_{10} tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi	24

3.35	R_6 taç çizge ve bir graceful etiketlemesi	24
3.36	H_4 dümen çizge ve bir graceful etiketlemesi	25
3.37	Tek kirişli C_7 ve C_8 döngü çizgelerin graceful etiketlemeleri	25
3.38	P_3 kirişe sahip C_4 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi	26
3.39	İki tane bitişik kirişe sahip C_8 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi	26
3.40	$T_{5,3}$ tadpole çizge ve bir graceful etiketlemesi	26
3.41	G_4 , G_5 ve G_6 dişli çizgeleri	27
3.42	G_8 dişli çizgenin bir graceful etiketlemesi	27
3.43	P_4 ve P_3 patika çizgelerin Kartezyen çarpımıyla elde edilen $P_4 \square P_3$ çizgesi	28
3.44	$P_4 \square P_5$ grid çizgenin bir graceful etiketleme yöntemi	29
3.45	$n = 4, 5, 6$ için Y_n prizma çizgeler	30
3.46	$C_5 \square P_2$ prizma çizgenin bir graceful etiketlemesi	30
3.47	$C_4 \square C_6$ çizgesinin bir graceful etiketlemesi	31
3.48	$n = 1, 2, 3, 4$ için Q_n , n -küp çizgeler	31
3.49	Q_3 çizgesinin bir graceful etiketlemesi	32
4.50	P_2 , P_3 ve P_4 patika çizgelerin graceful etiketlemesi	33
4.51	Bir tırtıl çizgenin graceful etiketlenmesi	33
4.52	$n = 5, 6, 7$ için S_n yıldız çizgeler	34
4.53	S_9 yıldız çizgenin bir graceful etiketlemesi	34
4.54	Graceful etiketlemeye sahip bir ıstakoz çizge	35
4.55	4 yapraklı bir ağaç ve bu ağacın bir graceful etiketlemesi	35
4.56	Çapı 5 olan bir ağacın graceful etiketlemesi	36
4.57	Simetrik bir ağaç ve bu ağacın bir graceful etiketlemesi	36
4.58	B_0 , B_1 , B_2 ve B_3 binomial ağaçları	36
4.59	B_3 ve B_4 binomial ağaçlarının graceful etiketlemesi	37
4.60	Bir 2-yıldız çizge ve bir graceful etiketlemesi	37
4.61	4 kollu bir zeytin ağacı ve bir graceful etiketlemesi	38
4.62	$F_{3,4}$ ve $F_{3,5}$ havai fişek çizgeler	38
4.63	Bir havai fişek çizgenin graceful etiketlemesi	38
4.64	$B_{3,6}$ ve $B_{4,5}$ muz ağaçları	39
4.65	Bir muz ağacının graceful etiketlemesi	39
5.66	$P(5, 2)$, $P(6, 2)$ ve $P(7, 3)$ genelleştirilmiş Petersen çizgeler	40
5.67	Petersen çizgenin bir graceful etiketlemesi	41
5.68	Sırasıyla Δ_2 , Δ_3 ve Δ_4 -yılan çizgeler	41
5.69	Δ_5 yılan çizgenin bir graceful etiketlemesi	42

5.70	Graceful bir çizge ailesi	42
5.71	C_5 ve C_6 graceful değilken $G = C_5 \cup C_6$ graceful olur	43
5.72	C_4 ve P_9 graceful iken $C_4 \cup P_9$ çizgesi de graceful bir çizgedir	43
5.73	C_3 graceful, C_5 graceful olmayan çizge iken $C_3 \cup C_5$ graceful bir çizgedir	43
5.74	K_7 tam çizgesinin bir K_3 parçalanışı	44
5.75	K_5 tam çizgesinin C_5 , C_5 ve C_3 , C_3 , C_4 parçalanışları	45
5.76	K_7 tam çizgesinin döngüsel bir S_4 -parçalanışı	47



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$G = (V, E)$	: Köşe noktaları kümesi V ve kenarlar kümesi E olan bir G çizgesi
$\Delta(G)$	: G çizgesinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	: G çizgesinin minimum derecesi
K_n	: n köşe noktalı tam çizge
$K_{m,n}$	: İki kümeli tam çizge
P_n	: n köşe noktalı patika çizge
C_n	: n köşe noktalı döngü çizge
W_n	: n köşe noktalı tekerlek çizge
nK_4	: Fransız n -pervane çizge
F_n	: n -pervane çizge
nK_m	: n tane K_m tam çizgenin tek noktada birleştirilmesiyle elde edilen çizge
R_n	: $2n$ köşe noktalı taç çizge
H_n	: $2n$ köşe noktalı dümen çizge
$T_{m,n}$	: Tadpole çizge
G_n	: $2n - 1$ köşe noktalı dişli çizge
$\lfloor x \rfloor$	: x gerçel sayısından daha küçük veya eşit olan en büyük tam sayı
$G \square H$	: G ve H çizgelerinin Kartezyen çarpımı
Y_n	: $2n$ köşe noktalı prizma çizge
Q_n	: n -küp çizge
S_n	: n köşe noktalı yıldız çizge
B_n	: n köşe noktalı binomial çizge
$\varepsilon(v)$	: v köşe noktasının dışmerkezliği
$\text{rad}(G)$	: G çizgesinin yarıçapı
$\text{diam}(G)$	: G çizgesinin çapı
$F_{n,k}$	: (n, k) -havai fişek çizge
$B_{n,k}$	: (n, k) -muz ağacı
$P(n, k)$	: Genelleştirilmiş Petersen çizge
P	: Petersen çizge

1 GİRİŞ

Çizge etiketleme, belli koşullar altında tamsayıların çizgenin köşe noktalarına, kenarlarına veya hem köşe noktalarına hem de kenarlarına atama işlemidir. Çizge etiketleme ilk olarak 1960'ların ortalarında çalışılmaya başlanmış ve o zamandan günümüze kadar çok sayıda çizge etiketleme yöntemi elde edilmiştir. Çizge etiketleme, araştırmacıların halen üzerinde yoğun olarak çalıştığı bir konu olup bugüne kadar bu konuda 3000'den fazla yayın üretilmiştir.

Çoğu çizge etiketleme yöntemi Rosa tarafından 1967'de yapılan çalışmaya (bkz. [31]) veya 1980 yılında Graham ve Sloane'nin çalışmasına dayanır (bkz. [16]).

Bu çalışmada çizgelerin graceful etiketlemesi ele alınmış ve bu konuda elde edilen önemli sonuçlar çeşitli kaynaklardan derlenmiştir. Kenar sayısı m olan bir çizgenin graceful etiketlemesi, çizgenin köşe noktaları 0 ile m arasındaki tamsayılarla etiketlendiğinde, her bir kenarın da uç noktalarına atanan tamsayıların farklarının mutlak değeri ile etiketlendiği kabul edildiğinde tüm kenarların 1 ile m arasındaki farklı bir tamsayının atanmasıdır. Her ne kadar graceful etiketleme ilk olarak Rosa tarafından çalışılmış olsa da Rosa bu terminolojiyi kullanmamış, graceful etiketleme yerine β -değerleme (β -valuation) kavramını kullanmıştır. Graceful etiketleme kavramı Golomb tarafından literatüre kazandırılmıştır (bkz. [15]). Bir çizgenin graceful etiketlemesi varsa bu çizgeye graceful çizge adı verilir.

Graceful etiketleme konusu Ringel ve Rosa'nın tez danışmanı olan Kotzig'in ismi ile adlandırılan Ringel-Kotzig sanısı ile popülerite kazanmıştır. Ringel-Kotzig sanısı, tüm ağaçların graceful çizge olduğunu iddia etmektedir. Birçok matematikçi bu sanıyı kanıtlamak için yoğun çaba sarfetmiş ve en sonunda 8 Ocak 2020 yılında yaklaşık 60 yıllık olan bu sanı Richard Montgomery, Alexey Pokrovskiy ve Benny Sudakov tarafından kanıtlanmıştır (bkz. [25]). Bu kanıt verilinceye kadar sanının doğru olduğu bazı özel ağaçlar için gösterilmiştir. Ne yazık ki çizge etiketleme konusunda az sayıda genel sonuç mevcuttur. Aslında graceful etiketleme konusunda çoğu çizge ailesi için bile genel bir sonuç verilebilmesi mümkün değilken sadece bazı özel sonuçlar verilebilmektedir.

Üç bölümden oluşan bu çalışmada ilk olarak çizge kuramı ile ilgili temel konular ve bazı özel çizgeler verilmiştir. Bölüm 3.1 ile graceful etiketleme tanımlandıktan sonra graceful etiketlemenin temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca graceful çizgeleri karakterize eden bazı sonuçlara da yer verilmiştir. Aynı bölümde tam çizgeler, iki kümeli tam çizgeler, döngü çizgeler, Euler çizgeler gibi temel çizge ailelerinin graceful etiketlemesi de ele alınmıştır. Bunun yanı sıra tekerlek çizge, taç çizge, dümen çizge, tek kirişe sahip döngü çizge gibi döngü benzeri çizgelerin graceful etiketlemeleri

de incelenmiştir. Bölüm 3.1 içerisinde son olarak çizgelerin kartezyen çarpımlarının graceful etiketlemeleri ele alınmıştır.

Bölüm 4 ile Ringel-Kotzig sayısı verildikten sonra patika, tırtıl, istakoz, binomial, yıldız, muz ağacı, havai fişek gibi çok sayıda özel ağaç ailesinin graceful etiketlemeleri sunulmuştur.

Son olarak Bölüm 5 ile Petersen çizge, genelleştirilmiş Petersen çizge gibi bazı özel çizgelerin graceful etiketlemeleri ele alındıktan sonra çizgelerin birleşimlerinin graceful olup olmadığı incelenmiştir. Bölümün sonunda graceful çizgelerin bir uygulaması olarak H çizgesi m kenarlı graceful bir çizge olduğunda K_{2m+1} tam çizgesinin bir dögüsel H -parçalanışının olduğu kanıtlanmıştır.



2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilerleyen bölümler için gerekli olan temel tanım, teorem ve gösterimler verilecektir. Çizge kuramı ile ilgili daha detaylı bilgi edinmek için [3, 36] referanslarından yararlanılabilir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Bir G çizgesi, elemanları köşe noktası olarak adlandırılan, boş kümeden farklı, sonlu bir V kümesiyle, elemanları kenar olarak adlandırılan ve V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan E kümesi yardımıyla tanımlanır. Bu durumda G çizgesi $G = (V, E)$ şeklinde yazılır.

Eğer birden fazla sayıda çizge ele alınıyorsa karışıklık olmaması için hangi çizgenin köşe noktalar ya da kenarlar kümesinden bahsedildiğini belirtebilmek için V ve E yerine sırasıyla $V(G)$ ve $E(G)$ gösterimleri kullanılabilir.

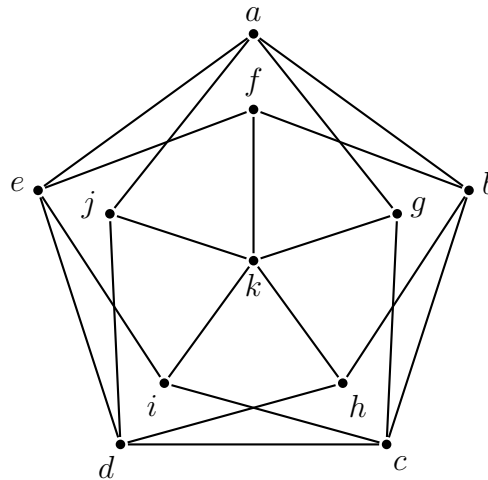
Örneğin, Şekil 2.1 ile köşe noktaları kümesi

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

ve kenarlar kümesi

$$E = \{\{i, c\}, \{i, e\}, \{i, k\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{a, g\}, \{a, j\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{b, h\}, \{c, d\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{d, h\}, \{d, j\}, \{e, f\}, \{f, k\}, \{g, k\}, \{h, k\}, \{j, k\}\}$$

olan bir çizge örneği verilmiştir.



Şekil 2.1: Bir çizge örneği

Şekil 2.1 ile verilen çizgedeki gibi iki köşe noktası arasında en fazla bir kenarın olduğu, kenarların yönlendirilmediği ve bir köşe noktasından kendisine çizilen kenarlara izin verilmeyen çizgelere basit çizge denir. Bu tezde sadece basit çizgeler ele alınmıştır.

Tanım 2.2. Bir G çizgesinin u ve v köşe noktaları arasında bir kenar varsa u ve v köşe noktalarına komşu köşe noktaları denir. Bir u köşe noktasıyla komşu olan tüm köşe noktalarına kısaca u 'nın komşuları denir. Benzer olarak eğer iki kenarın ortak bir köşe noktası varsa bu kenarlara da bitişik kenarlar denir.

Tanım 2.3. Bir G çizgesinde v köşe noktasının derecesi diye v köşe noktasından çıkan kenar sayısına denir ve v köşe noktasının derecesi $\deg(v)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ olmak üzere

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$$

şeklinde ardışık kenarlar bitişik ya da özdeş olacak biçimdeki kenarların sonlu dizisine G içinde v_0 ve v_k köşe noktalarını birleştiren bir yolculuk denir. v_0 ve v_k köşe noktalarını birleştiren yolculuk, $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ şeklinde de gösterilir. Bir yolculuktaki kenar sayısına ise o yolculuğun uzunluğu denir.

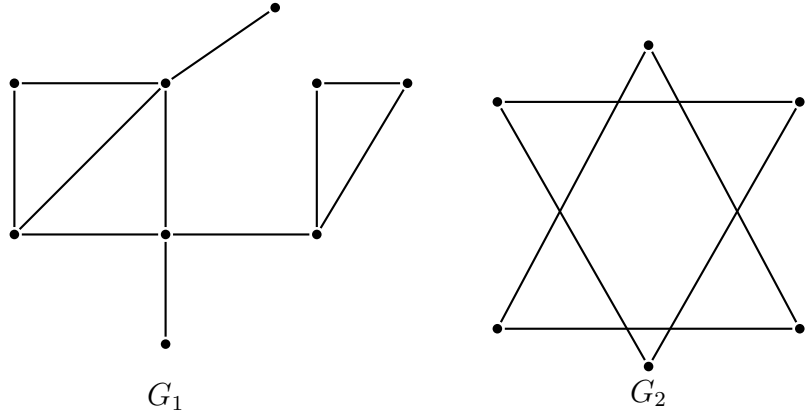
Tanım 2.5. G çizgesindeki bir yolculuğun tüm kenarları farklı ise bu yolculuğa bir tur denir. Eğer turun tüm köşe noktaları da farklıysa o zaman bu tura bir yol denir.

Yol tanımında tüm köşe noktalarının farklı olması istense de yolun başlangıç ve bitiş noktalarının aynı olmasına izin verilebilir. Bu şekilde olan, yani başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yola ise döngü denir. Eğer yolculuk ve turun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yolculuk ve tura sırasıyla kapalı yolculuk ve kapalı tur denir.

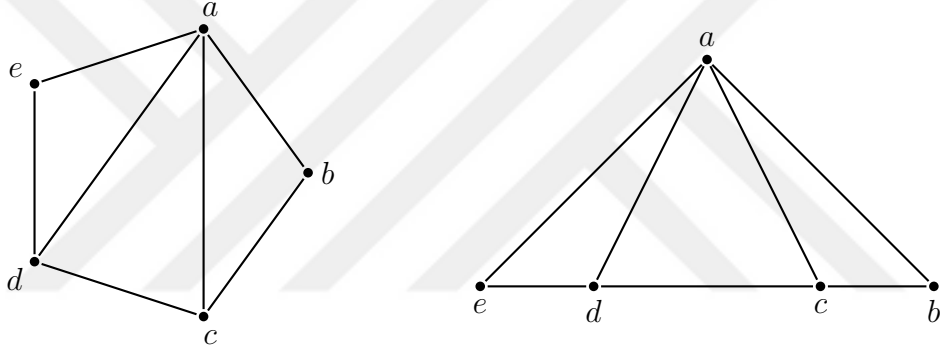
Tanım 2.6. Herhangi iki köşe noktası arasında bir yol bulunan çizgelere bağlantılı ya da tek parça çizge denir.

Şekil 2.2 ile bağlantılı G_1 çizgesi ve bağlantılı olmayan G_2 çizgesi verilmiştir.

Bir G çizgesi birden fazla şekilde çizilebilir. Çizge çizilirken köşe noktalarının düzlem üzerinde hangi koordinatlarda olacağı ya da kenarlarının düz çizgilerle mi yoksa eğrilerle mi çizileceği, hatta bu kenarların birbirleriyle kesişip kesişmeyeceği önemli değildir. Dolayısıyla "aynı" çizge farklı şekillerde çizilebilir. Örneğin, Şekil 2.3 ile verilen iki çizge birbirinden farklı gibi görünse de aslında ikisi de aynı çizgedir. Eğer $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri verildiğinde $V_1 = V_2$ ve $E_1 = E_2$



Şekil 2.2: Bağlantılı ve bağlantılı olmayan çizge örnekleri



Şekil 2.3: 5 köşe noktalı, 7 kenarlı aynı çizgenin iki farklı çizimi

oluyorsa G_1 ve G_2 çizgelerine aynı (eşit) çizgeler denir.

Buna göre Şekil 2.3 ile verilen $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri için

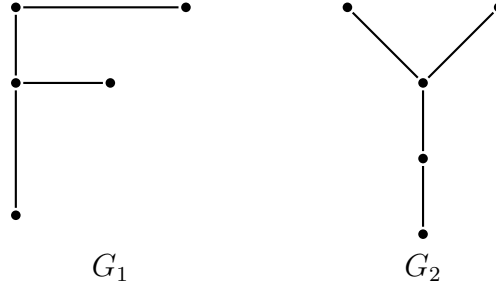
$$V_1 = V_2 = \{a, b, c, d, e\} \text{ ve } E_1 = E_2 = \{ab, ac, ad, ae, bc, cd, de\}$$

olduğundan iki çizge aynı çizge olur.

Bazen verilen iki çizge aynı olmasa da çizgelerden birinin köşe noktalarının adları silinip, köşe noktalar uygun şekilde yeniden adlandırılarak çizgeler aynı hale getirilebilir. Bu tür çizgelere ise izomorfik çizgeler denir.

Tanım 2.7. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri verilsin. Eğer $a, b \in V_1$ köşe noktaları, G_1 çizgesinde komşu köşe noktalar $\Leftrightarrow \phi(a), \phi(b) \in V_2$ köşe noktaları, G_2 çizgesinde komşu köşe noktalar olacak şekilde bir $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ birebir dönüşümü varsa, G_1 ve G_2 çizgelerine izomorfik çizgeler denir ve bu durum $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir. Bu şekilde ϕ dönüşümüne ise G_1 ile G_2 arasında bir izomorfizm dönüşümü denir.

Örneğin, Tanım 2.7 kullanılarak Şekil 2.7 ile verilen G_1 ve G_2 çizgelerinin izomorfik çizgeler olduğu kolayca doğrulanabilir.



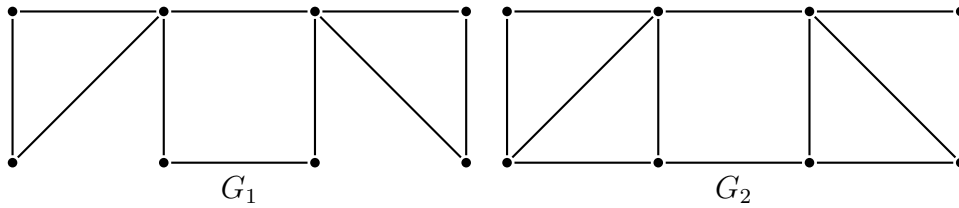
Şekil 2.4: İzomorfik G_1 ve G_2 çizgeleri

Bağlantılı bir G çizgesinde G 'nin her kenarını tam olarak bir kez bulunduran C kapalı turuna Euler turu denir. Euler turu bulunduran bağlantılı bir çizgeye ise Euler çizge adı verilir.

Bir çizgenin Euler çizge olup olmadığını aşağıdaki teorem yardımıyla hemen söylenebilir.

Teorem 2.1. *Bağlantılı bir G çizgesinin Euler çizge olması için gerek ve yeter koşul G çizgesinin her köşe noktasının derecesinin çift olmasıdır.*

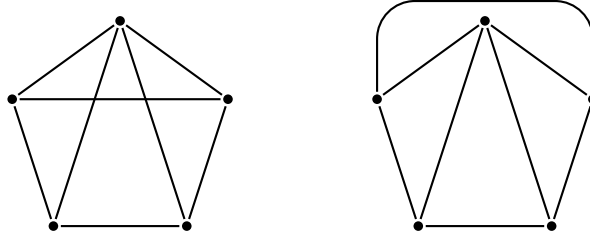
Örneğin, Şekil 2.5 ile verilen G_1 çizgesi bir Euler çizge iken G_2 çizgesi Euler çizge değildir.



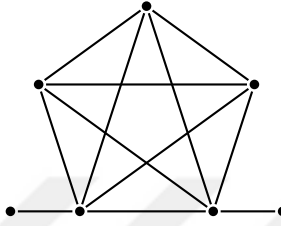
Şekil 2.5: G_1 Euler çizgesi ve Euler olmayan G_2 çizgesi

Tanım 2.8. *Bir çizgenin kenarları düzlemde birbiriyle kesişmeden çizilebiliyorsa bu çizgeye düzlemsel çizge adı verilir.*

Örneğin, Şekil 2.6 ile verilen çizge kenarları birbiriyle kesişmeden çizilebildiği için düzlemsel bir çizgedir. Ancak Şekil 2.7 ile verilen çizge kenarları kesiştirilmeden çizilemediğinden düzlemsel çizge değildir.



Şekil 2.6: Düzlemsel bir çizge örneği



Şekil 2.7: Düzlemsel olmayan bir çizge örneği

Tanım 2.9. *Bir çizgenin her köşe noktasından geçen döngüye Hamilton döngüsü denir. Bir Hamilton döngüsü bulunduran çizgeye Hamilton çizge denir. Çizgede her köşe noktasından geçen bir döngü yok ancak bir yol varsa bu çizgeye yarı Hamilton çizge denir.*

2.2 Bazı Özel Çizgeler

Burada, sonraki bölümlerde graceful olup olmadığı incelenecek olan bazı özel çizgeler tanımlanarak bu çizgelerin çeşitli özellikleri verilecektir.

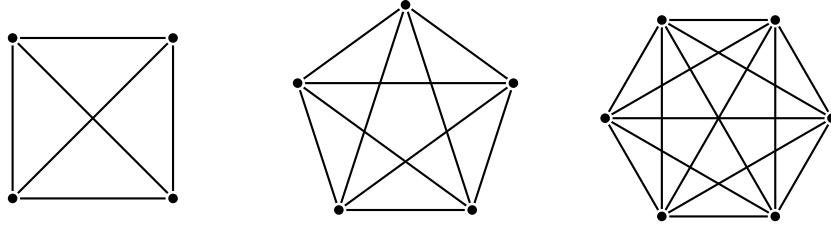
Tanım 2.10. *Herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar bulunduran çizgeye tam çizge denir. Köşe noktalarının sayısı n olan bir tam çizge K_n ile gösterilir.*

Tam çizgenin tanımı gereği K_n çizgesinin $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kenarı vardır. K_n çizgesinin tüm köşe noktalarının dereceleri $n - 1$ olur. Bu şekilde tüm köşe noktalarının dereceleri aynı olan çizgelere regüler çizge denir.

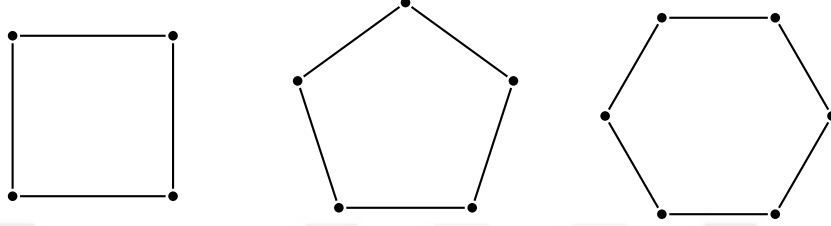
Şekil 2.8 ile bazı n değerleri için K_n tam çizgeleri verilmiştir.

Tanım 2.11. *Tüm köşe noktalarının derecesi 2 olan bağlantılı çizgeye döngü çizge denir ve $n \geq 3$ için n köşe noktası olan bir döngü çizge C_n ile gösterilir.*

C_n döngü çizgenin n tane kenarı vardır ve 2-regüler bir çizgedir. Şekil 2.9 ile bazı n değerleri için C_n tam çizgeleri verilmiştir.



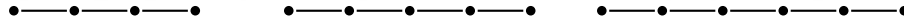
Şekil 2.8: $n = 4, 5, 6$ için K_n tam çizgeler



Şekil 2.9: $n = 4, 5, 6$ için C_n döngü çizgeler

Tanım 2.12. Sadece 2 köşe noktasının derecesi 1, (varsa) diğer köşe noktalarının derecesi ise 2 olan bağlantılı çizgeye patika çizge denir ve n köşe noktalı bir patika çizge P_n ile gösterilir.

Şekil 2.10 ile bazı n değerleri için P_n patika çizgeler verilmiştir.



Şekil 2.10: $n = 4, 5, 6$ için P_n patika çizgeler

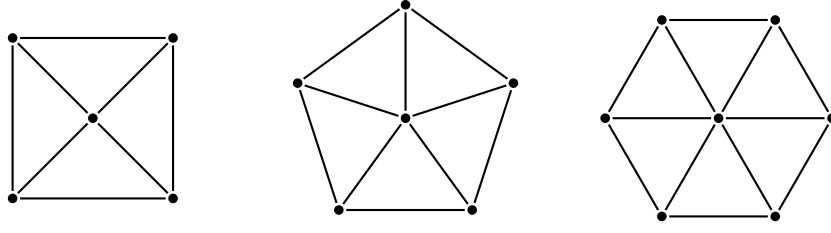
Tanım 2.13. C_{n-1} çizgesinin tüm köşe noktalarının yeni bir köşe noktası ile birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye tekerlek çizge denir. $n \geq 4$ olmak üzere, n köşe noktası olan bir tekerlek çizge W_n ile gösterilir.

n köşe noktalı W_n çizgesinin $2n - 2$ tane kenarı vardır. Şekil 2.11 ile bazı n değerleri için W_n tekerlek çizgeler verilmiştir.

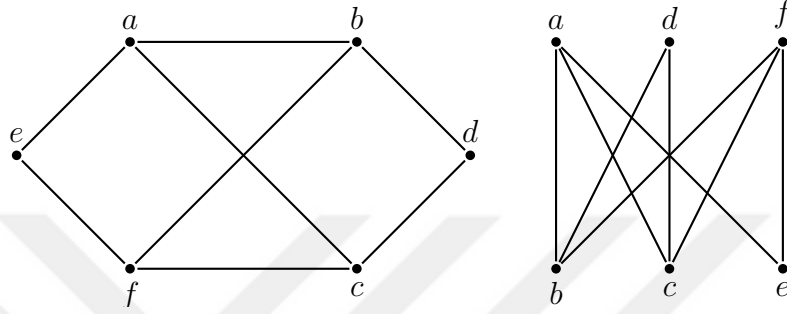
Tanım 2.14. Bir çizgenin tüm köşe noktaları, aynı kümenin herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar olmayacak şekilde A ve B gibi ayrık iki kümeye ayrılabilirse bu çizgeye iki kümeli çizge denir.

Şekil 2.12 ile iki kümeli bir çizge örneği verilmiştir.

Tanım 2.15. İki kümeli bir çizgede A kümesindeki keyfi bir köşe noktasının B kümesindeki tüm köşe noktalarıyla arasında bir kenar varsa bu iki kümeli çizgeye, iki kümeli tam çizge denir. Eğer $|A| = m$ ve $|B| = n$ ise bu iki kümeli tam çizge $K_{m,n}$ ile ifade edilir.



Şekil 2.11: $n = 5, 6, 7$ için W_n tekerlek çizgeler



Şekil 2.12: İki kümeli bir çizge örneği

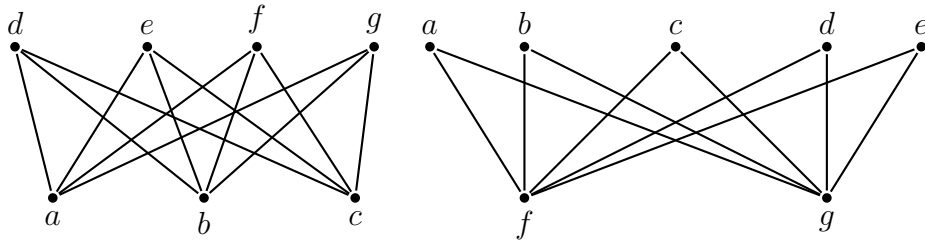
Şekil 2.13 ile $K_{3,4}$ ve $K_{5,2}$ iki kümeli tam çizge örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.16. *Döngü içermeyen, bağlantılı çizgelere ağaç denir.*

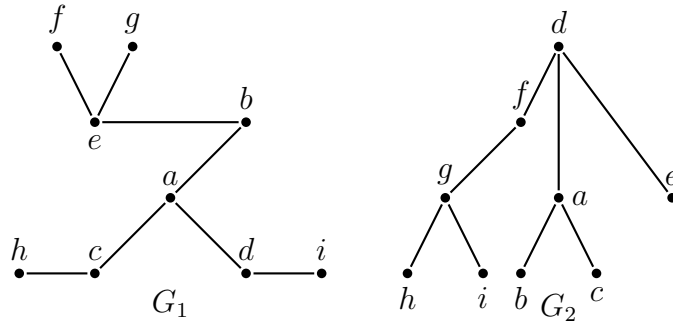
Ağaçlarda derecesi 1 olan köşe noktalarına ağacın yaprakları denir. Buna göre, Şekil 2.14 ile verilen G_1 ağacında $\{f, g, h, i\}$ köşe noktaları birer yapraktır. En az iki köşe noktası olan bir ağacın en az iki yaprağı vardır. Ayrıca, n köşe noktalı bir ağacın kenar sayısı $n - 1$ olur.

Şekil 2.14 ile iki farklı ağaç örneği verilmiştir.

Bağlantılı bir çizgede bir v köşe noktasına en uzakta olan köşe noktası ile v köşe noktası arasındaki uzaklık, v köşe noktasının dış merkezliği olarak adlandırılır ve $\varepsilon(v)$ ile gösterilir. Bağlantılı bir G çizgesinde tüm köşe noktaların dış merkezliklerinin en küçüğüne G çizgesinin yarıçapı denir ve $\text{rad}(G)$ ile gösterilir. Dış merkezliklerin en büyüğü ise çap olarak adlandırılır ve $\text{diam}(G)$ ile gösterilir.

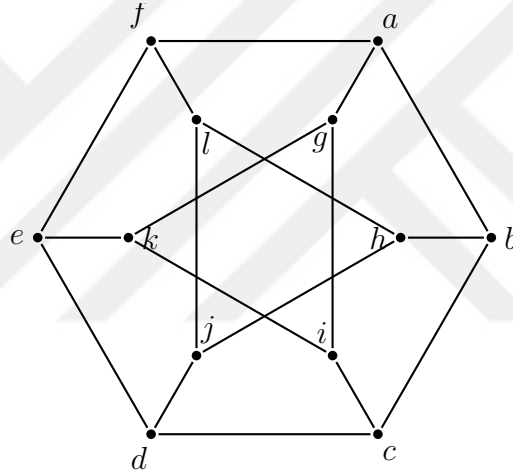


Şekil 2.13: $K_{3,4}$ ve $K_{5,2}$ iki kümeli tam çizgeler



Şekil 2.14: Ağaç örnekleri

Örneğin, Şekil 2.15 ile verilen çizgenin yarıçapı 3, çapı 4 ve bu çizgede a köşe noktasının dış merkezliği $\varepsilon(a) = 3$, i köşe noktasının dış merkezliği $\varepsilon(i) = 4$ olur.



Şekil 2.15: Çapı 4 ve yarıçapı 3 olan bir çizge

3 GRACEFUL ÇİZGELER

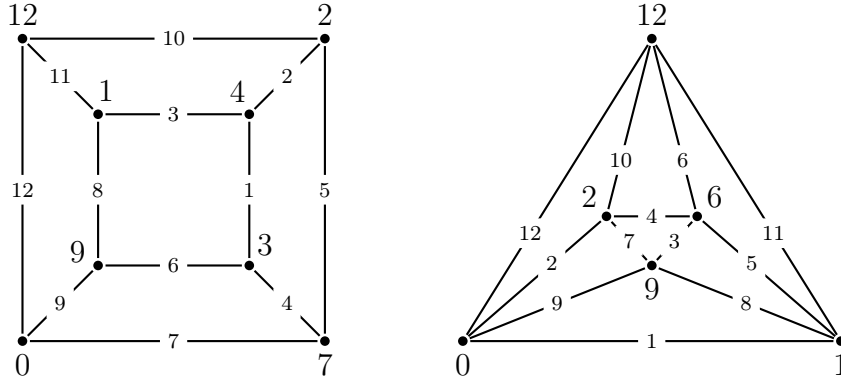
3.1 Graceful Çizge

Alexander Rosa, m kenarlı bir $G = (V, E)$ çizgesi için $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ şeklinde tanımlanan ve çizgenin xy kenarı $|f(x) - f(y)|$ şeklinde etiketlendiğinde tüm kenarlar $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesindeki farklı sayılarla etiketlenecek şekildeki birebir f fonksiyonunu G çizgesinin bir β -değerlemesi olarak adlandırmıştır (bkz. [31]). Günümüzde ise β -değerleme yerine Golomb'un, graceful etiketleme ifadesi daha yaygın olarak kullanılmaktadır (bkz. [15]).

Bu bölümde, hangi çizgelerin graceful etiketlemeye sahip olup hangi çizgelerin ise bu şekilde etiketlenemeyeceği incelenmiştir.

Tanım 3.1. G çizgesi $m \geq 1$ kenarlı basit bir çizge olsun. Eğer G 'nin köşe noktaları, tüm kenarların uçlarının farkının mutlak değeri 1 ile m arasındaki tüm değerleri bir kez alacak şekilde, 0 ile m arasındaki farklı tam sayılarla etiketlenebiliyorsa bu tür etiketlemeye graceful etiketleme denir. Bir çizgenin graceful etiketlemesi varsa bu çizgeye graceful çizge denir. Aksi halde G çizgesine graceful olmayan (ungraceful ya da disgraceful) çizge denir.

Şekil 3.16 ile graceful etiketlemeleriyle birlikte iki farklı graceful çizge örneği verilmektedir.



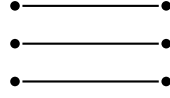
Şekil 3.16: Graceful etiketlemeleri ile birlikte iki farklı graceful çizge örneği

Tanım 3.1 gereği eğer bir G çizgesi graceful çizge ise çizgenin köşe noktalarının sayısı n ve kenarlarının sayısı m olmak üzere,

$$n \leq m + 1$$

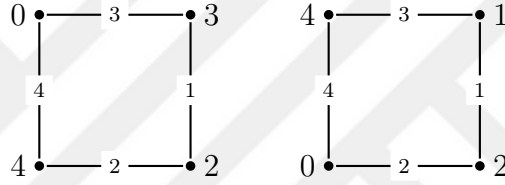
eşitsizliği geçerli olur. Bağlantılı çizgeler için bu eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Bu durumda bağlantılı olmayan çizgeler bu eşitsizliği sağlamadığında graceful olmadıkları

hemen söylenebilir. Örneğin, Şekil 3.17 ile verilen bağlantısız çizge hem Tanım 3.1 gereği hem de yukarıdaki eşitsizliği sağlamadığından graceful çizge değildir.



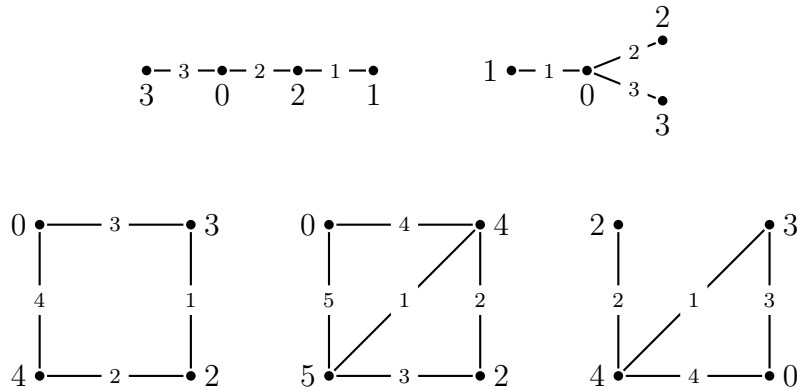
Şekil 3.17: Graceful olmayan bağlantısız bir çizge örneği

Bir çizgenin çok sayıda farklı graceful etiketlemesi var olabilir. G çizgesi n köşe noktalı, m kenarlı ve $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ şeklinde etiketlemeye sahip olan graceful bir çizge olsun. Bu durumda $\{m - l_1, m - l_2, \dots, m - l_n\}$ etiketlemesi de bir graceful etiketleme olur. Şekil 3.18 ile bu duruma bir örnek verilmektedir.



Şekil 3.18: Aynı graceful çizgenin iki farklı graceful etiketlemesi

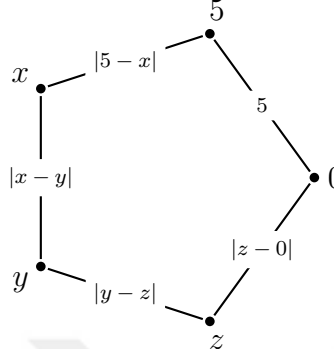
Köşe noktalarının sayısı 5'den az olan bağlantılı tüm çizgeler graceful çizgelerdir. 4 köşe noktalı birbirine izomorfik olmayan tüm bağlantılı graceful çizgeler Şekil 3.19 ile verilmiştir.



Şekil 3.19: 4 köşe noktalı birbirine izomorfik olmayan bağlantılı graceful çizgeler

Graceful olmayan çok sayıda çizge mevcuttur. Erdős, yayınlanmayan bir çalışmasında çoğu çizgenin graceful olmadığını ifade etmiştir (bkz. [16]). Örneğin, C_5 döngü çizge graceful olmayan bir çizgedir. Gerçekten de, C_5 çizgesinin köşe noktalarının

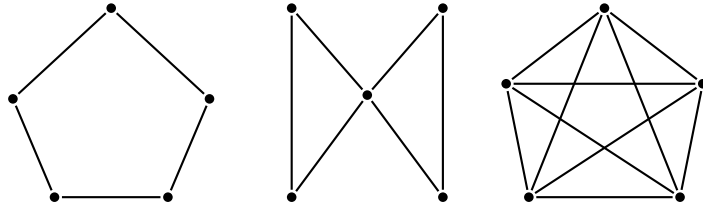
sayısı ile kenar sayısı eşit olduğundan her graceful etiketlemede 0 ve 5 ile etiketlenen köşe noktalar komşu olmak zorundadır. Buna göre C_5 in graceful etiketlemesi için Şekil 3.20 ile verildiği gibi 24 farklı seçenek söz konusudur. Bu seçeneklerin hiç birisi de graceful bir etiketleme değildir.



x	y	z	$ 5-x $	$ x-y $	$ y-z $	$ z-0 $
1	2	3	4	1	1	3
1	2	4	4	1	2	4
1	3	2	4	2	1	2
1	3	4	4	2	1	4
1	4	2	4	3	2	2
1	4	3	4	3	1	3
2	1	3	3	1	2	3
2	1	4	3	1	3	4
2	3	1	3	1	2	1
2	3	4	3	1	1	4
2	4	1	3	2	3	1
2	4	3	3	2	1	3
3	1	2	2	2	1	2
3	1	4	2	2	3	4
3	2	1	2	1	1	1
3	2	4	2	1	2	4
3	4	1	2	1	3	1
3	4	2	2	1	2	2
4	1	2	1	3	1	2
4	1	3	1	3	2	3
4	2	1	1	2	1	1
4	2	3	1	2	1	3
4	3	1	1	1	2	1
4	3	2	1	1	1	2

Şekil 3.20: C_5 çizgesinin hiçbir graceful olmayan 24 farklı etiketlemesi

Aslında 5 köşe noktalı, bağlantılı olan sadece 3 tane graceful olmayan çizge vardır. Bu çizgeler Şekil 3.21 ile verilen C_5 döngü çizge, papyon çizge ve K_5 tam çizgeleridir.



Şekil 3.21: 5 köşe noktalı, bağlantılı, graceful olmayan tüm çizgeler

Verilen keyfi bir çizgenin graceful olup olmadığının yukarıda C_5 çizgesinin graceful olmadığının gösterilmesi gibi tüm seçenekler tek tek incelenerek belirlenmesi mümkün değildir.

Aşağıda bir çizgenin graceful çizge olması için bir gerek koşul verilmiştir.

Teorem 3.1. G çizgesi n köşe noktalı, m kenarlı bir çizge olsun. G çizgesi graceful çizge ise G çizgesinin tek sayılarla etiketlenen köşe noktalarının kümesiyle, çift

sayılarla etiketlenen köşe noktalarının kümesi arasındaki kenar sayısı

$$\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$$

olur.

Kanıt. G çizgesi n köşe noktalı, m kenarlı graceful bir çizge olsun. Bu durumda G çizgesinin n tane köşe noktası tek sayılarla etiketlenenler ve çift sayılarla etiketlenenler şeklinde iki kümeye ayrılabilir. G çizgesinin m tane kenarı 1'den m 'ye kadar sayılarla etiketleneceğinden bu kenarların $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ tanesi tek sayı ile etiketlenir. Tek sayı ile etiketlenen bir kenarın uç noktalarından birisi tek, birisi de çift sayı olacağından tek sayılarla etiketlenen köşe noktalarının kümesiyle, çift sayı ile etiketlenen köşe noktalarının kümesi arasındaki kenar sayısı $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ elde edilir. $\square$

3.2 Graceful Tam Çizgeler

Teorem 3.1 yardımıyla bazı K_n tam çizgelerin graceful çizge olmadığı hemen söylenebilir. Gerçekten de, K_n tam çizgesinin $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane kenarı vardır. n tane köşe noktanın k tanesi çift sayılarla, $n - k$ tanesi de tek sayılarla etiketlensin. Bu durumda bu iki küme arasındaki kenar sayısı $k(n - k)$ olur. Diğer taraftan,

$$\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 - n + 2}{4} \right\rfloor$$

olduğundan k sayısı

$$\left\lfloor \frac{n^2 - n + 2}{4} \right\rfloor = k(n - k)$$

eşitliği sağlanacak şekilde seçilmelidir.

Böyle bir seçim ise

$$n = 2, 3, 4, 6, 9, 11, 16, \dots$$

için mümkün iken,

$$n = 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, \dots$$

için mümkün değildir.

Teorem 3.1 ile sadece gerek koşul verildiğinden

$$n = 2, 3, 4, 6, 9, 11, 16, \dots$$

için K_n çizgelerin graceful çizge olup olmadığı söylenemez. Ancak

$$n = 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, \dots$$

için K_n tam çizgenin graceful çizge olmadığı söylenebilir.

Tam çizgeler ile ilgili olarak Teorem 3.4 ile verilen sonuç daha kesin bir sonuçtur.

Teorem 3.2. *Bir G çizgesinin köşe noktaları (farklı olmak zorunda olmayan) tam-sayılarla etiketlensin. G çizgesinin kenarları da uç noktalarının farklarının mutlak değeri ile etiketlensin. Bu durumda G çizgesinin keyfi bir döngüsündeki kenarların etiketlerinin toplamı çift sayı olur.*

Kanıt. G çizgesinin keyfi bir döngüsündeki ardışık köşe noktalar $a_1, a_2, \dots, a_r$ şeklinde etiketlenmiş olsun. Bu durumda ardışık bitişik kenarların etiketlemesi

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{r-1} - a_r|, |a_r - a_1|$$

şeklinde olur. Kenarların bu etiketlemelerinin toplamı ise

$$\sum_{i=1}^r |a_i - a_{i+1}| \equiv \sum_{i=1}^r (a_i - a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{2}$$

olduğundan toplam çift sayı elde edilir. Burada $a_{r+1} = a_1$ şeklindedir. $\square$

Teorem 3.3. *G , kenarlarının sayısı m olan bir Euler çizge olsun. Eğer G çizgesi graceful çizge ise*

$$\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$$

sayısı çift sayıdır.

Kanıt. Euler çizge, her kenardan bir kez geçen bir kapalı tura sahip olan bir çizge olarak, ya da ortak kenarları olmayan kapalı turların birleşimi olarak düşünülebilir. Teorem 3.2 yardımıyla tüm bu döngülerdeki kenarların etiketlerinin toplamının, dolayısıyla da G çizgesinin tüm kenarlarının etiketlerinin toplamının çift sayı olduğu söylenebilir. Diğer taraftan, G çizgesi graceful çizge ise $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ tane kenar tek sayı ile etiketlenir. O halde tek sayı ile etiketlenenlerin sayısının çift olması gerektiğinden $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ sayısı çift olmak zorundadır. $\square$

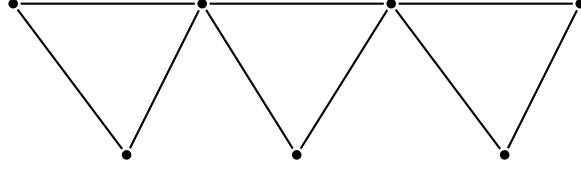
Sonuç 3.1. *n köşe noktalı bir Euler çizge graceful çizge ise $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ olur.*

Teorem 3.3 yardımıyla m kenarlı bir Euler çizge verildiğinde $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ sayısı tek ise çizgenin graceful çizge olmadığı söylenebilir. Buradan, eğer G Euler çizge ve $m \equiv 1 \pmod{4}$ veya $m \equiv 2 \pmod{4}$ ise G çizgesi graceful çizge değildir.

Bununla birlikte Teorem 3.3 ile verilen koşulun gerek koşul olduğuna, yeter koşul olmadığına da dikkat etmek gerekir. Yani, $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ çift sayı olmasına rağmen graceful olmayan çizgeler de vardır. Örneğin, K_{17} tam çizgesi bir Euler çizgedir ve kenar sayısı $m = \binom{17}{2} = 136$ olur. $\left\lfloor \frac{136+1}{2} \right\rfloor = 68$ olup çift sayıdır. Ancak K_{17} graceful bir

çizge değildir. Gerçekten de $k(17 - k) = 68$ olacak şekilde $0 \leq k \leq 17$ koşulunu sağlayan k sayısı bulunamadığından K_{17} graceful çizge olamaz.

Benzer olarak, Şekil 3.22 ile verilen çizge de, graceful olmayan tam çizgeden farklı Euler çizgeye bir örnektir (bkz. Teorem 5.1).



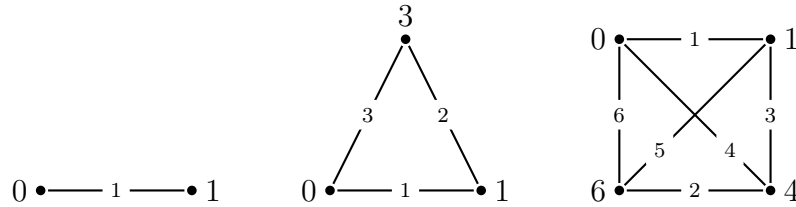
Şekil 3.22: $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ çift sayı olmasına rağmen graceful olmayan bir Euler çizge örneği

Hem Euler çizge hem de tam çizge olmayıp, graceful çizge olmayan bir çizgeye örnek olarak K_{10} tam çizgesinden 1 kenar atılarak elde edilen çizge verilebilir. Bu şekilde elde edilen çizgenin 8 köşe noktasının derecesi 9 olduğundan Euler çizge değildir. Kenar sayısı ise $m = \binom{10}{2} - 1 = 45 - 1 = 44$ olur ve $\lfloor \frac{44+1}{2} \rfloor = 22$ çift sayıdır. Ancak bu çizgenin k köşesi tek ve $10 - k$ köşesi de çift sayı ile etikenlenirse K_{10} çizgesinin hangi kenarının atıldığına bağlı olarak tek sayı ile etiketlenen kenar sayısı $k(10 - k)$ veya $k(10 - k) - 1$ olur. Ancak her iki durumda da

$$k(10 - k) = 22 \text{ ve } k(10 - k) = 23$$

eşitliklerini sağlayan $0 \leq k \leq 10$ olacak şekilde k tamsayısı bulunmadığından K_{10} tam çizgesinden 1 kenar atılarak elde edilen çizge graceful çizge değildir.

Bağlantılı ve 5 köşe noktalı sadece C_5 döngü çizge, papyon çizge ve K_5 tam çizgenin graceful çizge olmadığı yukarıda ifade edilmişti. Papyon çizgenin de graceful çizge olmadığı C_5 ve K_5 çizgelerine benzer olarak Teorem 3.3 yardımıyla gösterilebilir.



Şekil 3.23: $n = 2, 3, 4$ için K_n tam çizgeleri graceful çizge olur

Sonuç 3.1 ile verilen koşul C_n döngü çizgelerinin graceful çizge olması için aynı zamanda bir yeter koşuldur.

$n = 2, 3, 4$ için K_n tam çizgelerin graceful çizge olduğu kolaylıkla görülebilir (bkz. Şekil 3.23). Ancak aşağıdaki teorem $n > 4$ için bu durumun mümkün olmadığını ifade etmektedir (bkz. [15]).

Teorem 3.4. $n > 4$ için K_n tam çizgesi graceful çizge değildir.

Kanıt. Kabul edelim ki $n > 4$ için K_n çizgesi graceful çizge olsun. $n > 4$ için K_n çizgesinin $m = \binom{n}{2} \geq 10$ kenarı vardır. Çizge graceful çizge olarak kabul edildiğinden, çizgenin köşe noktaları $\{0, 1, \dots, m\}$ kümesindeki (bazı) noktalarla kenarlar $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesindeki tüm elemanlar elde edilebilecek şekilde etiketlenebilir.

K_n çizgesinde bir kenarın m ile etiketlenebilmesi için bu kenarın uç noktalarının 0 ve m ile etiketlenmesi gerekir.

Benzer olarak, bir kenarın $m - 1$ ile etiketlenebilmesi için bir köşe noktasının $m - 1$ ya da 1 ile etiketlenmesi gerekir. G çizgesi n köşe noktalı, m kenarlı ve $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ şeklinde etiketlemeye sahip olan graceful bir çizge olduğunda $\{m - l_1, m - l_2, \dots, m - l_n\}$ etiketlemesi de bir graceful etiketleme olacağından genelliği bozmaksızın köşe noktasının $m - 1$ yerine 1 ile etiketlendiğini varsayalım.

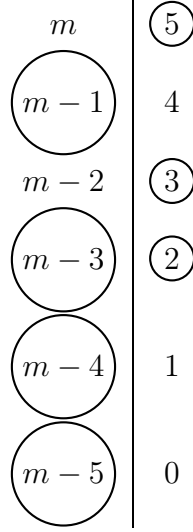
Bir kenarın $m - 2$ etiketlemesini elde edebilmek için bir köşe noktasının $m - 2$ ile etiketlenmesi gerekir. Bir kenarın $m - 2$ etiketlemesi, $m - 1$ ile 1'in farklı olarak da elde edilebileceğinden köşe noktalardan birisi $m - 1$ ile de etiketlenebilirdi ancak bu durumda etiketlemesi 1 olan iki kenar ortaya çıkar. Eğer $m - 2$ yi elde etmek için köşelerden birisi 2 ile etiketlenirse yine etiketlemesi 1 olan iki kenar elde edilir (0 ve 1 ile 1 ve 2 ile etiketlenen köşelerin uç noktası olduğu kenarlar).

Şimdiye kadar 0, 1, $m - 2$ ve m ile etiketlenen köşe noktaları yardımıyla 1, 2, $m - 3$, $m - 2$, $m - 1$ ve m kenar etiketlemeleri elde edilir.

Bir kenarın $m - 4$ etiketlemesini elde edebilmek için yukarıdakilere benzer olarak bir köşe noktasının 4 ile etiketlenmesi gerekir (diğer seçenekler yukarıdakine benzer olarak elimine edilebilir).

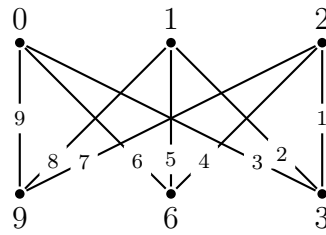
Böylece, 0, 1, 4, $m - 2$ ve m ile etiketlenen köşe noktaları yardımıyla 1, 2, 3, 4, $m - 6$, $m - 4$, $m - 3$, $m - 2$, $m - 1$ ve m kenar etiketlemeleri elde edilir.

Son olarak, bir kenarın $m - 5$ etiketlenmesi elde edilmeye çalışılacak olursa, köşe noktasının adlandırılması için aşağıda yuvarlak içerisindeki seçenekler söz konusudur.



Ancak işaretli köşe noktalarından hangisi bir köşe noktasının etiketlemesinde kullanılırsa kullanılsın, yukarıdakine benzer olarak aynı kenar etiketlemesinden 2 tane ortaya çıkacaktır. Yani, $n > 4$ için K_n çizgesinin bir kenarı $m - 5$ ile etiketlenemez. Bu ise $n > 4$ için K_n çizgesinin graceful çizge olmasıyla çelişir. O halde varsayım hatalıdır $n > 4$ için K_n çizgesi graceful çizge olamaz. $\square$

Çizgelerin düzlemselliği ile graceful olması arasında doğrudan bir bağlantı yoktur. Düzlemsel olmayan bir çizge graceful çizge olabileceği gibi, graceful çizge olmaya daabilir. Yukarıda düzlemsel olmayan K_5 tam çizgesinin graceful olmayan bir çizge olduğu ifade edilmişti. Diğer taraftan, $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizge düzlemsel bir çizge değildir, fakat graceful bir çizgedir. $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgenin bir graceful etiketlemesi Şekil 3.24 ile verilmiştir. Sadece $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizge değil, tüm iki



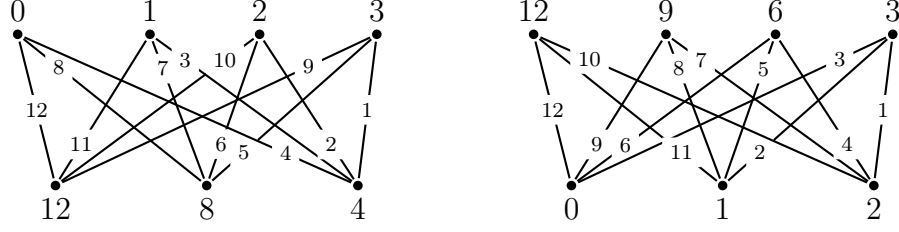
Şekil 3.24: $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesinin bir graceful etiketlemesi

kümeli tam çizgeler graceful çizge olur.

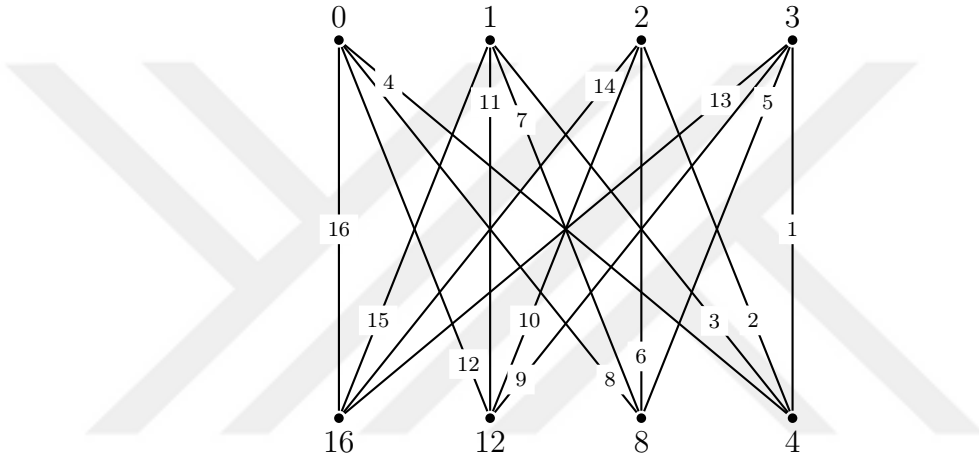
Teorem 3.5. *Tüm $i > 0$ ve $j > 0$ için $K_{i,j}$ iki kümeli tam çizgeler graceful çizgedir.*

Kanıt. $G = (A, B)$ iki kümeli çizgesi verilsin. $|A| = r$, $|B| = s$ olsun. A kümesindeki köşe noktalar $0, 1, 2, \dots, r-1$ şeklinde, B kümesindeki köşe noktalar da $r, r+1, r+2, \dots, r+(s-1)r$ şeklinde etiketlenecek olursa bir graceful etiketleme elde edilir. $\square$

Şekil 3.25 ile Teorem 3.5 ile verilen yöntem kullanılarak $K_{3,4}$ iki kümeli tam çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.



Şekil 3.25: $K_{3,4}$ iki kümeli tam çizgesinin iki farklı şekilde graceful etiketlemesi



Şekil 3.26: $K_{4,4}$ iki kümeli tam çizgesinin bir graceful etiketlemesi

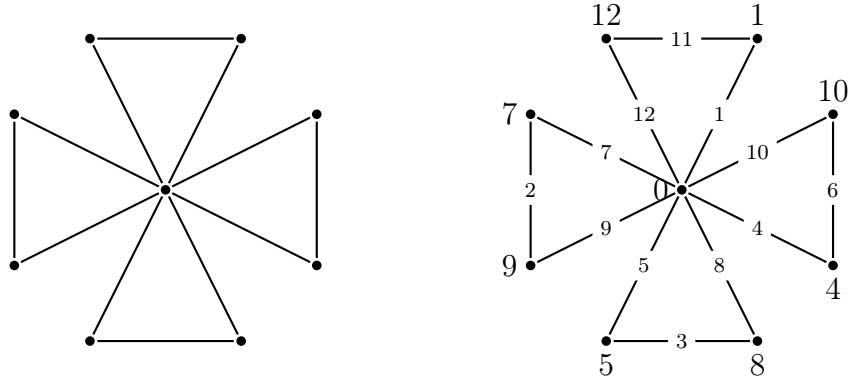
F_n ile gösterilen n -pervane çizge veya arkadaşlık çizgesi, n tane K_3 tam çizgenin (pervanenin kanatları) tek bir noktada birleştirilmesiyle elde edilen çizgedir (bkz. Şekil 3.27).

Bermond vd. n -pervane çizgenin graceful çizge olması için gerek ve yeter koşulu aşağıdaki gibi vermiştir (bkz. [6]).

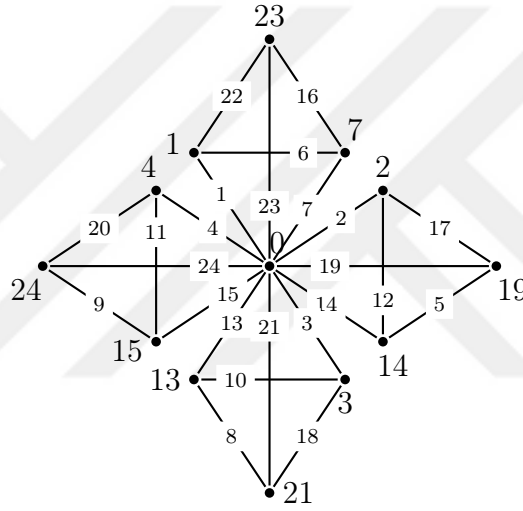
Teorem 3.6. n -pervane çizgenin graceful çizge olması için gerek ve yeter koşul $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 1 \pmod{4}$ olmasıdır.

n tane K_3 tam çizge yerine, n tane K_4 tam çizgenin tek bir noktada birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye Fransız n -pervane çizge (French n -windmill) denir ve nK_4 ile gösterilir. Bu çizgenin graceful çizge olduğu Bermond vd. tarafından iddia edilse de bu iddia henüz kanıtlanamamıştır.

Sanı 3.1. $n \geq 4$ için nK_4 Fransız n -pervane çizgesi graceful çizge olur.



Şekil 3.27: 4-pervane çizge ve bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.28: Fransız 4-pervane çizgenin bir graceful etiketlemesi

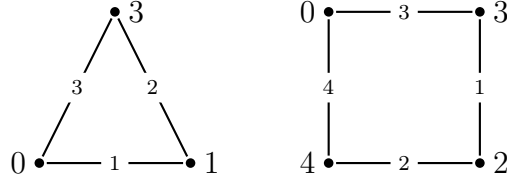
Şekil 3.28 ile Fransız 4-pervane çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.

Bermond vd. benzer olarak nK_5 çizgesi graceful çizge ise n tamsayısının çift sayı olduğunu kanıtlamıştır.

3.3 Döngü Benzeri Graceful Çizgeler

Bölüm 3.1 içerisinde C_5 döngü çizgenin graceful çizge olmadığı tüm mümkün etiketlemeler teker teker incelenerek verilmişti. Teorem 3.3 yardımıyla da C_5 döngü çizgenin graceful çizge olmadığı hemen söylenebilir. Gerçekten de, C_5 çizgesinin tüm köşe noktalarının derecesi 2 olduğundan bir Euler çizgedir ve 5 kenarı vardır. $5 \equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan C_5 graceful çizge olamaz.

Şekil 3.29 ile gösterildiği gibi C_3 ve C_4 döngü çizgeleri graceful çizgelerdir. Ancak



Şekil 3.29: C_3 ve C_4 döngü çizgeleri graceful çizgelerdir

her n sayısı için C_n döngü çizge graceful çizge değildir. Rosa, C_n döngü çizgenin graceful çizge olması için gerekli ve yeterli koşulları vermiştir (bkz. [31]).

Teorem 3.7. C_n döngü çizgenin graceful çizge olması için gerek ve yeter koşul $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ olmasıdır.

Kanıt. C_n çizgeleri Euler çizge olduğundan, Teorem 3.3 gereği C_n döngü çizgesi graceful çizge ise $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ olur.

Tersine, $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ olsun. C_n çizgesinin ardışık köşe noktaları $v_1, v_2, \dots, v_n$ şeklinde adlandırılın ve $n \equiv 3 \pmod{4}$ olsun. Bu durumda her v_i köşe noktası

$$l_i = \begin{cases} n+1-i/2 & , \ i \text{ çift ise} \\ (i-1)/2 & , \ i \text{ tek ve } i \leq (n-1)/2 \\ (i+1)/2 & , \ i \text{ tek ve } i > (n-1)/2 \end{cases}$$

şeklinde etiketlenecek olursa C_n çizgesinin bir graceful etiketlemesi elde edilmiş olur.

Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise

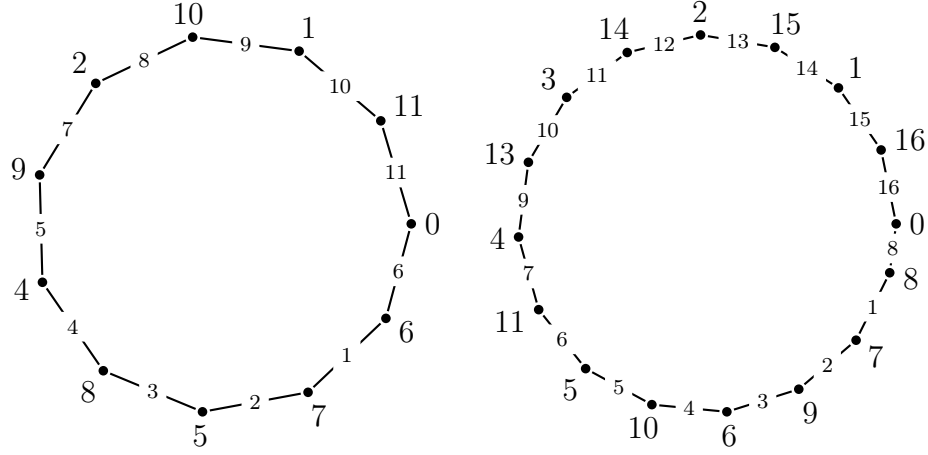
$$l_i = \begin{cases} (i-1)/2 & , \ i \text{ tek ise} \\ n+1-i/2 & , \ i \text{ çift ve } i \leq n/2 \\ n-i/2 & , \ i \text{ çift ve } i > n/2 \end{cases}$$

şeklinde verilen etiketleme C_n çizgesi için bir graceful etiketleme olur. $\square$

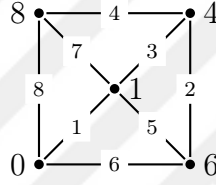
Teoremin kanıtında verilen yöntem ile C_{11} ve C_{16} çizgelerinin bir graceful etiketlemesi Şekil 3.30 ile verilmiştir.

Döngü çizge ailesine benzer olan bir başka graceful çizge ailesi de tekerlek çizgeler ailesidir. Tekerlek çizgelerin graceful çizge olduğu Frucht tarafından kanıtlamıştır (bkz. [11]).

Teorem 3.8. W_n tekerlek çizge graceful çizgedir.



Şekil 3.30: Teorem 3.7 ile verilen yöntemle C_{11} ve C_{16} çizgelerinin bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.31: W_5 tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi

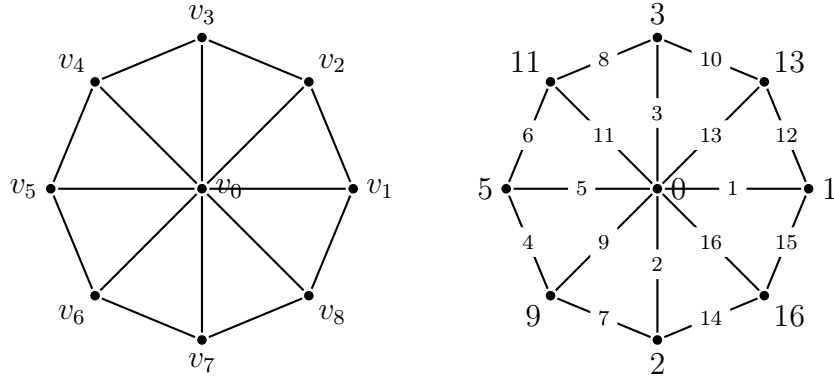
Kanıt. $n \equiv 1 \pmod{2}$ yani n tek olsun. Öncelikle $n = 5$ için W_5 çizgesi Şekil 3.31 ile verildiği gibi bir graceful etiketlemeye sahip olduğu için W_5 graceful olur.

Şimdi n tek ve $n \geq 7$ olsun. W_n çizgesinin merkezindeki köşe noktası v_0 ile, diğer ardışık köşe noktaları ise $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ şeklinde adlandırılınsın. Bu durumda her v_i köşe noktası

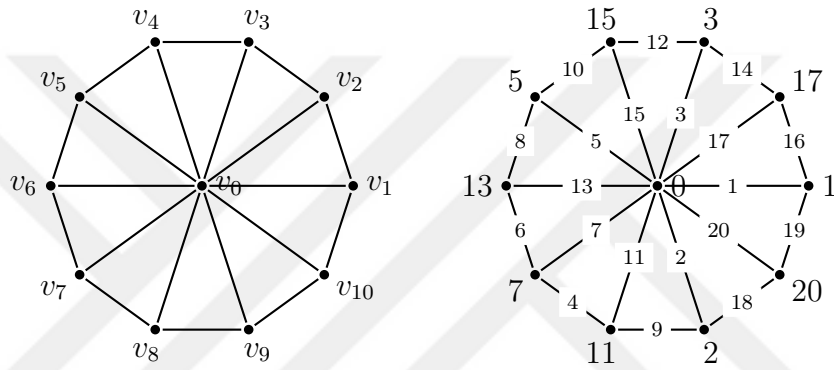
$$l_i = \begin{cases} 2n - i - 3 & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, n - 3 \text{ ise} \\ 2 & , \quad i = n - 2 \text{ ise} \\ i & , \quad i = 1, 3, 5, \dots, n - 4 \text{ veya } i = 0 \\ 2n - 2 & , \quad i = n - 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde etiketlenecek olursa W_n çizgesinin bir graceful etiketlemesi elde edilmiş olur. $n = 9$ ve $n = 11$ için bu yöntem ile elde edilen graceful etiketlemeler Şekil 3.32 ve Şekil 3.33 ile verilmiştir.

$n \equiv 0 \pmod{2}$ yani n çift olsun. W_n çizgesinin merkezindeki köşe noktası v_0 ile, diğer ardışık köşe noktaları ise $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ şeklinde adlandırılınsın. Bu durumda



Şekil 3.32: W_9 tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.33: W_{11} tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi

her v_i köşe noktası

$$l_i = \begin{cases} 2i & , \quad i = 0, 1, n-1 \text{ ise} \\ n+i-1 & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, n-2 \text{ ise} \\ n-i & , \quad i = 3, 5, 7, \dots, n-3 \text{ ise} \end{cases}$$

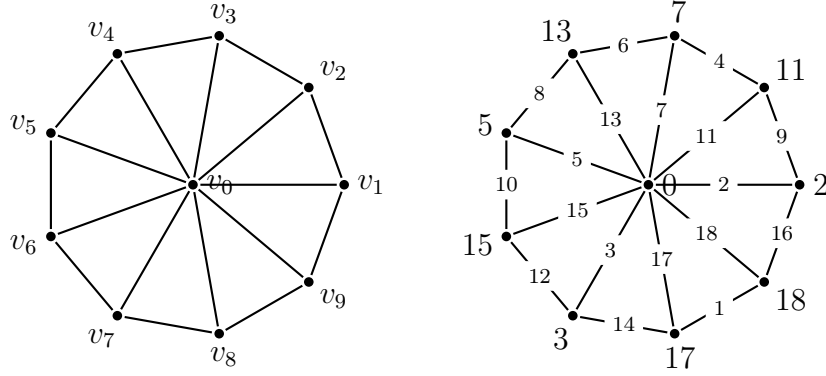
şeklinde etiketlenecek olursa W_n çizgesinin bir graceful etiketlemesi elde edilmiş olur. $n = 10$ için bu yöntem ile elde edilen graceful etiketlemeler Şekil 3.34 ile verilmiştir.

□

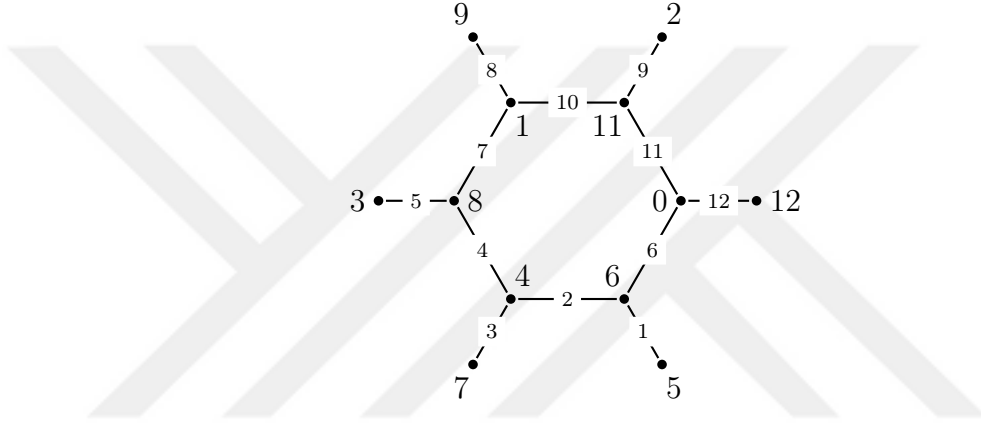
C_n döngü çizgenin her bir köşe noktası için çizgeye yeni bir köşe noktası eklenip, köşe noktasının eklenen bu köşe noktasıyla birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye taç (crown) çizge adı verilir ve $2n$ köşe noktalı taç çizge R_n ile gösterilir (bkz. Şekil 3.35). Frucht, $n \geq 3$ için R_n taç çizgenin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [11]).

Teorem 3.9. $n \geq 3$ için R_n taç çizge graceful çizgedir.

Örneğin R_6 taç çizgenin [11] ile verilen yönteme göre bir graceful etiketlemesi Şekil 3.35 ile verilmiştir.



Şekil 3.34: W_{10} tekerlek çizgenin bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.35: R_6 taç çizge ve bir graceful etiketlemesi

Taç çizgeye benzer olarak, bu sefer tekerlek çizgenin dışındaki döngünün üzerindeki her bir köşe noktası için çizgeye yeni bir köşe noktası eklenip, bu köşe noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye dümen (helm) çizge adı verilir ve $2n$ köşe noktalı dümen çizge H_n ile gösterilir (bkz. Şekil 3.36).

Ayel ve Favaron her $n \geq 3$ için H_n dümen çizgenin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [4]).

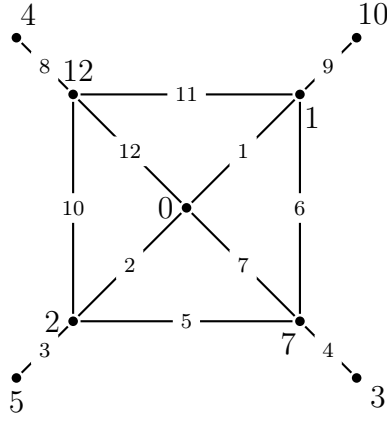
Teorem 3.10. *Her $n \geq 3$ için H_n graceful çizgedir.*

Örneğin, H_4 dümen çizgenin bir graceful etiketlemesi Şekil 3.36 ile verilmiştir.

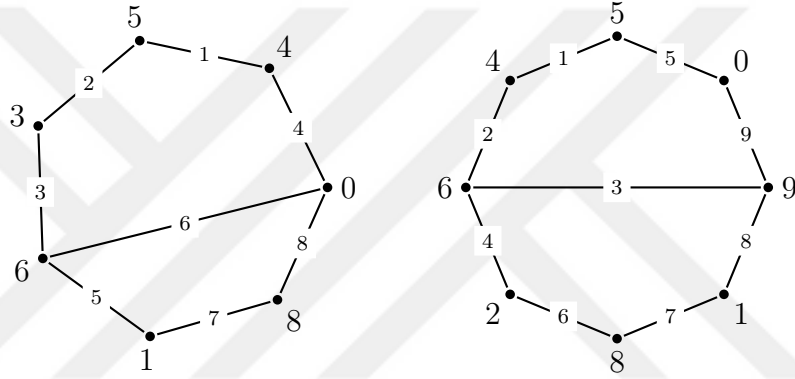
Bir döngünün komşu olmayan iki köşe noktasını birleştiren kenara bu döngünün bir kirişi adı verilir. Bondendiek, bir kirişi olan her döngü çizgenin graceful olduğunu iddia etmiş, Delorme vd. bu iddianın doğru olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [7, 9]).

Teorem 3.11. *Tek bir kirişe sahip döngü çizgeleri graceful çizgedir.*

Örneğin, [9] ile verilen yöntem kullanılarak tek bir kirişe sahip olan C_7 ve C_8 döngü çizgelerin graceful etiketlemeleri Şekil 3.37 ile verilmiştir.



Şekil 3.36: H_4 dümen çizge ve bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.37: Tek kirişli C_7 ve C_8 döngü çizgelerin graceful etiketlemeleri

Döngü çizgenin kirişi P_2 patika çizge gibi düşünülecek olursa, Punnim ve Pabhapatte $k \geq 2$ için P_k patika çizge kirişe sahip döngü çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [21, 28]). Bu tür çizgeler theta çizgelerin özel bir halidir.

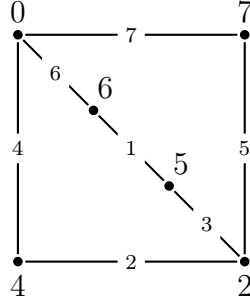
Teorem 3.12. *Her $k \geq 2$ için kirişi P_k patika çizge olan döngü çizgeler graceful çizge olur.*

Şekil 3.38 ile P_3 kirişe sahip C_4 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.

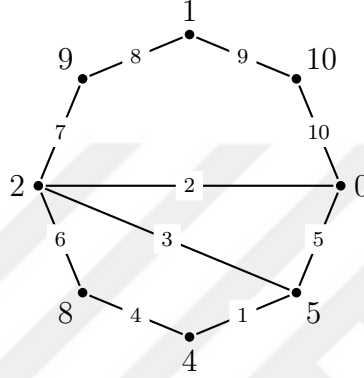
Buna ek olarak Koh vd. k tane bitişik kiriş bulunduran döngü çizgelerin de graceful çizgeler olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [19, 20, 21]). Şekil 3.39 ile iki tane bitişik kirişe sahip C_8 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.

Teorem 3.13. *Her $k = 2, 3, \dots, n-3$ için k tane bitişik kirişe sahip C_n döngü çizge graceful çizgedir.*

C_m döngü çizge ile P_n patika çizgenin bir uç noktasının yeni bir kenar ile birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye tadpole çizge denir ve bu çizge $T_{m,n}$ ile gösterilir



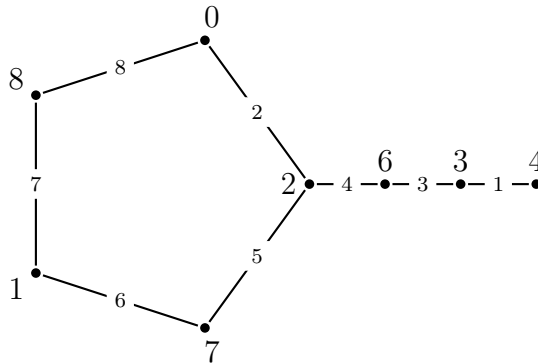
Şekil 3.38: P_3 kirişe sahip C_4 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi



Şekil 3.39: İki tane bitişik kirişe sahip C_8 döngü çizgenin bir graceful etiketlemesi (bkz. Şekil 3.40). Truszczynski, tadpole çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [35]).

Teorem 3.14. Her $m \geq 3$ ve $n \geq 1$ için $T_{m,n}$ tadpole çizge graceful çizgedir.

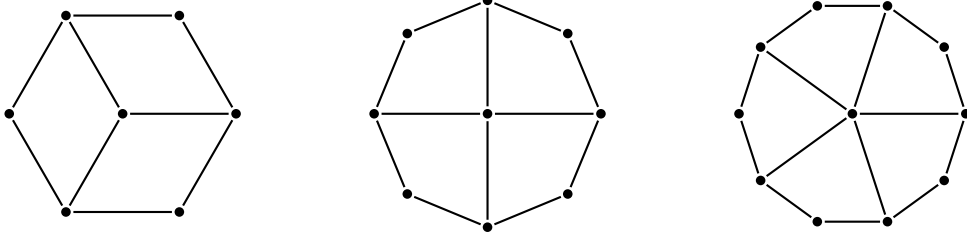
Örneğin, $T_{5,3}$ tadpole çizgenin [35] ile verilen yönteme göre bir graceful etiketlemesi Şekil 3.40 ile verilmiştir.



Şekil 3.40: $T_{5,3}$ tadpole çizge ve bir graceful etiketlemesi

W_n tekerlek çizgenin dışındaki döngü üzerinde yer alan her bir komşu köşe nokta çiftinin arasına eklenen yeni köşe noktaları yardımıyla elde edilen çizgeye dişli (gear)

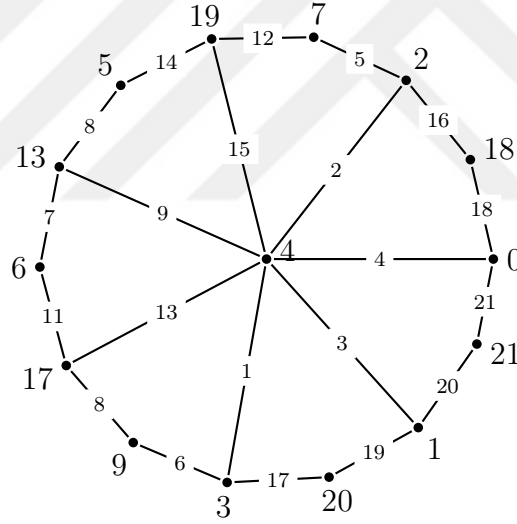
çizge denir ve G_n simgesiyle gösterilir. G_n çizgesinin $2n - 1$ köşe noktası ve $3n - 3$ kenarı vardır. Şekil 3.41 ile bazı n değerleri için G_n dişli çizgeleri verilmiştir.



Şekil 3.41: G_4 , G_5 ve G_6 dişli çizgeleri

Ma ve Feng tüm dişli çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [23]).

Teorem 3.15. G_n dişli çizge graceful çizgedir.

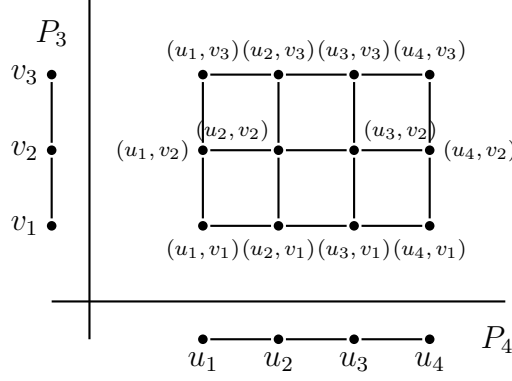


Şekil 3.42: G_8 dişli çizgenin bir graceful etiketlemesi

3.4 Kartezyen Çarpım Graceful Çizgeler

G ve H gibi iki çizgenin Kartezyen çarpımı $G \square H$ şeklinde gösterilir. $G \square H$ Kartezyen çarpım çizgenin köşe noktalarının kümesi

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$$



Şekil 3.43: P_4 ve P_3 patika çizgelerin Kartezyen çarpımıyla elde edilen $P_4 \square P_3$ çizgesi

şeklinde tanımlanan sıralı ikililerden oluşur. $G \square H$ Kartezyen çarpım çizgenin kenarlar kümesi ise

$$E(G \square H) = \{ \{ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \} \mid \{ u_1, u_2 \} \in E(G) \text{ ve } v_1 = v_2 \text{ veya } \{ v_1, v_2 \} \in E(H) \text{ ve } u_1 = u_2 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin, köşe noktalarının kümesi sırasıyla $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ olan P_4 ve P_3 çizgelerinin Kartezyen çarpımı olan $P_4 \square P_3$ çizgesi için

$$V(P_4 \square P_3) = \{ (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_3, v_1), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_1), (u_4, v_2), (u_4, v_3) \}$$

ve

$$\begin{aligned} E(P_4 \square P_3) = & \{ \{ (u_1, v_1), (u_1, v_2) \}, \{ (u_1, v_1), (u_2, v_1) \}, \{ (u_1, v_2), (u_1, v_3) \}, \\ & \{ (u_1, v_2), (u_2, v_2) \}, \{ (u_1, v_3), (u_2, v_3) \}, \{ (u_2, v_1), (u_2, v_2) \}, \\ & \{ (u_2, v_1), (u_3, v_1) \}, \{ (u_2, v_2), (u_2, v_3) \}, \{ (u_2, v_2), (u_3, v_2) \}, \\ & \{ (u_2, v_3), (u_3, v_3) \}, \{ (u_3, v_1), (u_3, v_2) \}, \{ (u_3, v_1), (u_4, v_1) \}, \\ & \{ (u_3, v_2), (u_3, v_3) \}, \{ (u_3, v_2), (u_4, v_2) \}, \{ (u_3, v_3), (u_4, v_3) \}, \\ & \{ (u_4, v_1), (u_4, v_2) \}, \{ (u_4, v_2), (u_4, v_3) \} \} \end{aligned}$$

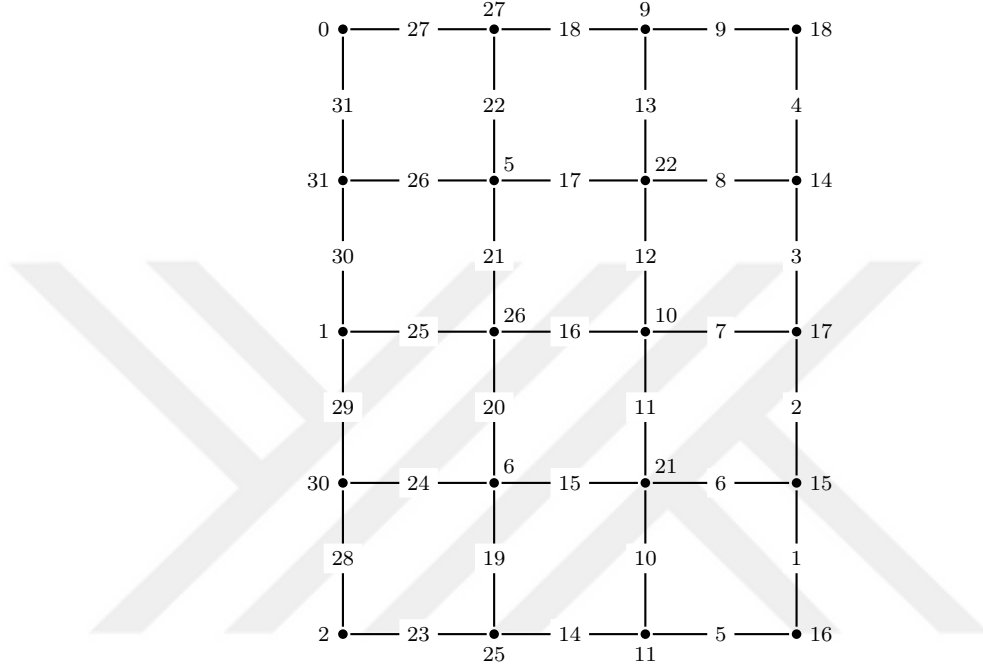
şeklinde olur. Bu Kartezyen çarpım çizge Şekil 3.43 ile verilmiştir.

P_m ve P_n patika çizgelerinin Kartezyen çarpımı ile elde edilen çizgelere tam grid çizge ya da kısaca grid çizge adı verilir.

Acharya ve Gill $P_m \square P_2$ grid çizgenin graceful olduğunu kanıtlamıştır. Ancak daha sonra Maheo tüm grid çizgelere uygulanabilir ve daha basit olan bir yöntemle grid çizgelerin graceful olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [2, 24]).

Teorem 3.16. $P_m \square P_n$ grid çizge graceful çizgedir.

Gerçekten de, $P_m \square P_n$ grid çizgenin $q = (m-1)n + m(n-1)$ tane kenarı vardır. Şekil 3.44 ile gösterildiği gibi grid çizgenin sol üst köşesindeki köşe noktası q ile etiketlendikten sonra diagonal üzerindeki köşe noktalar sırasıyla artan ve azalan sayılarla etiketlenecek olursa grid çizgenin bir graceful etiketlemesi elde edilmiş olur.

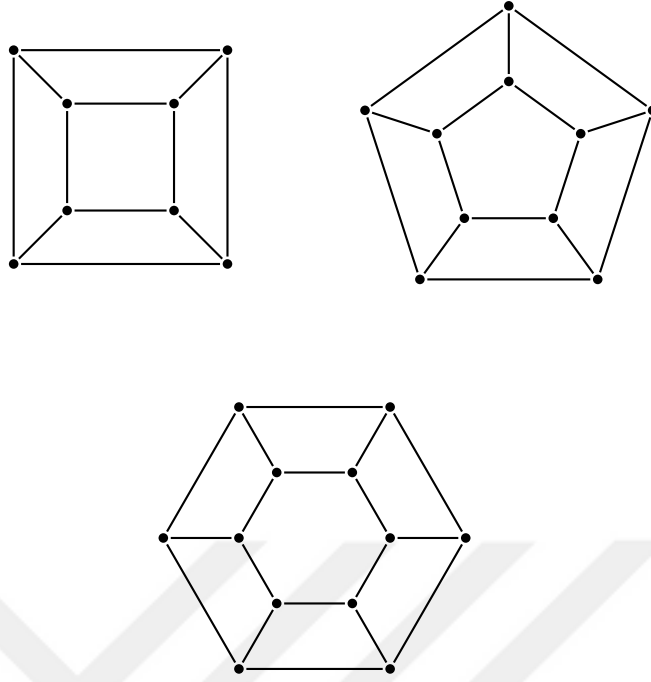


Şekil 3.44: $P_4 \square P_5$ grid çizgenin bir graceful etiketleme yöntemi

$C_n \square P_2$ Kartezyen çarpımı olarak tanımlanan prizma çizgelerin de graceful çizgeler olduğu kanıtlanmış hatta prizma çizgelerden bir köşe noktası ya da bir kenar silindiğinde elde edilen çizgenin de graceful çizge olduğu gösterilmiştir (bkz. [12, 13]). $C_n \square P_2$ prizma çizge Y_n simgesiyle gösterilir ve bu çizgenin $2n$ köşe noktası ve $3n$ kenarı vardır (bkz. Şekil 3.45).

Teorem 3.17.

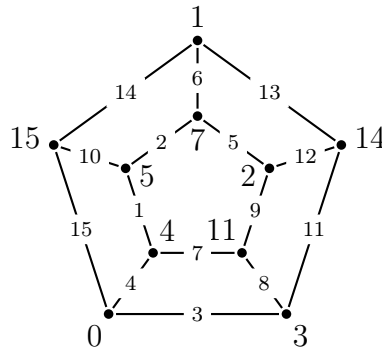
- i. Her $n \geq 1$ için $C_n \square P_2$ prizma çizgeler graceful çizge olur.
- ii. Her $n \geq 2$ için $C_n \square P_2$ çizgesinden bir u köşe noktasının silinmesiyle elde edilen $C_n \square P_2 - \{u\}$ çizgesi graceful çizge olur.
- iii. Her $n \geq 2$ için $C_n \square P_2$ çizgesinden bir e kenarının silinmesiyle elde edilen $C_n \square P_2 - \{e\}$ çizgesi graceful çizge olur.



Şekil 3.45: $n = 4, 5, 6$ için Y_n prizma çizgeleri

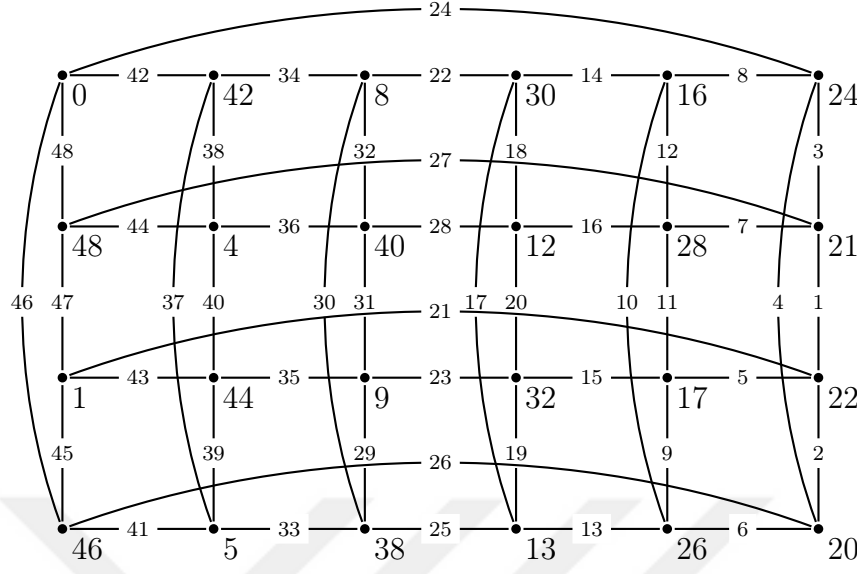
Şekil 3.46 ile $C_5 \square P_2$ prizma çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.

Sadece $C_n \square P_2$ çarpımı için değil, bu türden birçok Kartezyen çarpım çizgenin de graceful çizge olduğu kanıtlanmıştır. 1992 yılında Jungreis ve Reid, m ve n çift olduğunda veya $m \equiv 0 \pmod{4}$ olduğunda $C_m \square P_n$ çizgesinin graceful olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [18]). Yang ve Wang $C_{4n+2} \square P_{4m+3}$, $C_n \square P_2$ ve $m \geq 2$ için $C_6 \square P_m$ çizgelerinin graceful çizge olduğunu kanıtlamışlardır (bkz. [40, 41]). Jungreis ve Reid ayrıca n çift ve $m \equiv 0 \pmod{4}$ olduğunda $C_m \square C_n$ çizgesinin graceful çizge olduğunu göstermiştir (bkz. [18]). Şekil 3.47 ile $C_4 \square C_6$ çizgesinin bir graceful etiketlemesi



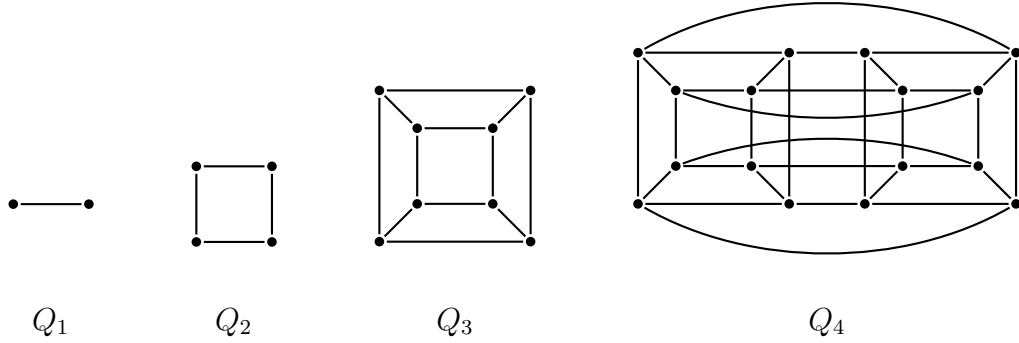
Şekil 3.46: $C_5 \square P_2$ prizma çizgenin bir graceful etiketlemesi

verilmiştir.

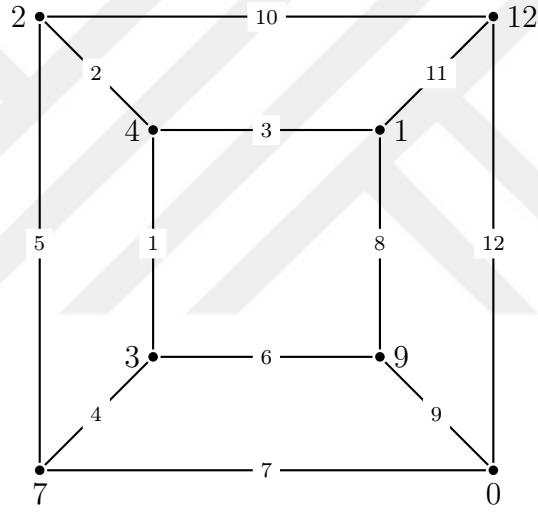


Şekil 3.47: $C_4 \square C_6$ çizgesinin bir graceful etiketlemesi

K_2 tam çizgenin $K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$ şeklinde n kez kendisiyle Kartezyen çarpımı olarak tanımlanan Q_n , n -küp çizgenin graceful çizge olduğu Kotzig tarafından kanıtlanmıştır (bkz. [22, 24]). Şekil 3.48 ile bazı n değerlerine karşılık gelen n -küp çizgeler verilmiştir. Şekil 3.49 ile Q_3 çizgesinin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.



Şekil 3.48: $n = 1, 2, 3, 4$ için Q_n , n -küp çizgeler



Şekil 3.49: Q_3 çizgesinin bir graceful etiketlemesi

4 AĞAÇLAR ve GRACEFUL ETİKETLEMELERİ

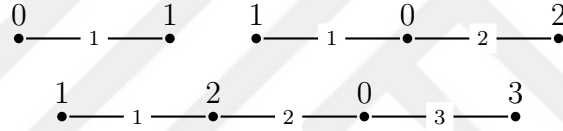
4.1 Ringel-Kotzig Sanısı

Tüm ağaçların graceful çizgeleri olduğunu iddia eden Ringel-Kotzig sanısı, çizge etiketleme konusunun en meşhur problemlerinden biridir.

Sanı 4.1 (Ringel-Kotzig Sanısı). *Tüm ağaçlar graceful çizgelerdir.*

Birçok matematikçi bu sanıyı kanıtlamak için yoğun çaba sarfetmiş en sonunda 8 Ocak 2020 yılında yaklaşık 60 yıllık olan bu sanı Richard Montgomery, Alexey Pokrovskiy ve Benny Sudakov tarafından kanıtlanmıştır (bkz. [25]). Bu kanıt verilinceye kadar sanının doğru olduğu bazı özel ağaçlar için gösterilmiştir.

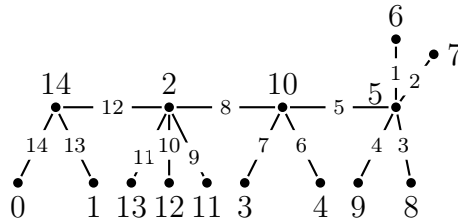
n köşe noktalı P_n patika çizgeleri, en basit ağaç türüdür. Tüm patika çizgeleri graceful çizgedir. Gerçekten de Şekil 4.50 ile verilen yöntem kullanılarak tüm patika çizgelerin bir graceful etiketlemesi elde edilebilir.



Şekil 4.50: P_2 , P_3 ve P_4 patika çizgelerin graceful etiketlemesi

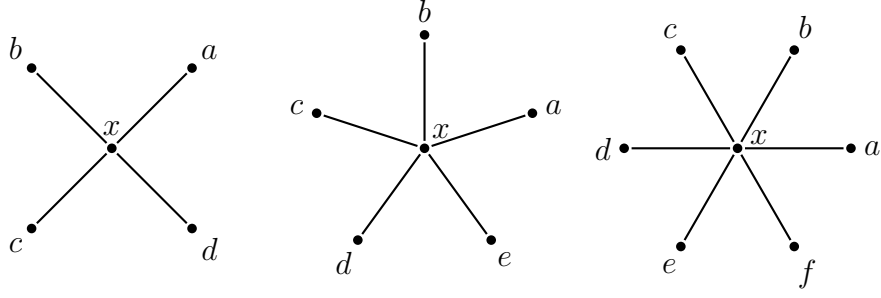
Bir çizgeden derecesi 1 olan köşe noktalar bağlı oldukları kenarlar ile birlikte silindiğinde kalan çizge bir patika çizgeyse bu çizgeye tırtıl çizge denir. Bu durumda patika çizgeleri özel tipte tırtıl çizge olur.

Tüm tırtıl çizgeleri graceful çizgedir (bkz. [31]). Yine patika çizgeye benzer olarak, tırtıl çizgeleri Şekil 4.51 ile verilen yöntem kullanılarak etiketlenecek olursa bir graceful etiketleme elde edilir.



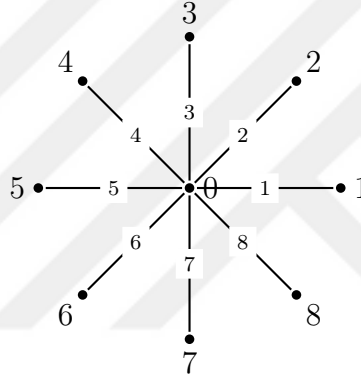
Şekil 4.51: Bir tırtıl çizgenin graceful etiketlenmesi

Bir başka basit ağaç türü yıldız çizgelerdir. n köşe noktalı bağlantılı bir çizgenin sadece 1 köşe noktasının derecesi $n - 1$ diğer köşe noktalarının derecesi 1 ise bu çizgeye yıldız çizge denir ve S_n ile gösterilir (bkz. Şekil 4.52).



Şekil 4.52: $n = 5, 6, 7$ için S_n yıldız çizgeler

S_n yıldız çizge $K_{1,n-1}$ iki kümeli tam çizge şeklinde düşünülecek olursa, iki kümeli tam çizgeler graceful çizge olduğundan, S_n yıldız çizge de graceful çizge olur. Şekil 4.53 ile S_9 yıldız çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmiştir.



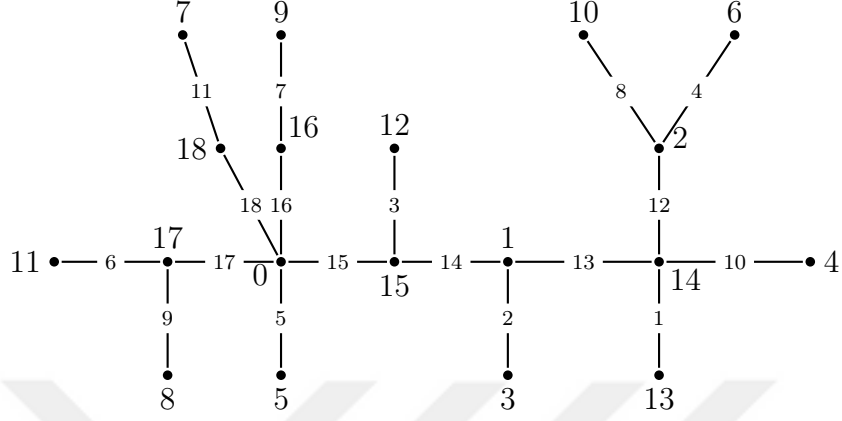
Şekil 4.53: S_9 yıldız çizgenin bir graceful etiketlemesi

4.2 Bazı Özel Ağaçların Graceful Etiketlemesi

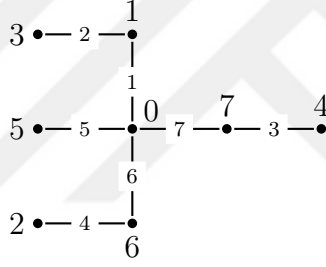
Bir çizgeden derecesi 1 olan köşe noktalar bağlı oldukları kenar ile birlikte silindiğinde elde edilen çizge bir tırtıl çizge ise bu çizgeye ıstakoz çizge adı verilir. 1979 yılında Bermond tüm ıstakoz çizgelerin graceful çizge olduğu sanısını ortaya atmış olsa da bu sanı kanıtlanamamıştır (bkz. [7]). Şekil 4.54 ile graceful etiketlemeye sahip bir ıstakoz çizge verilmiştir.

Huang vd. en fazla 4 yaprağı olan ağaçların graceful olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [17]). Şekil 4.55 ile bu türden, 4 yapraklı bir ağacın graceful etiketlemesi örnek olarak verilmiştir.

Zhao, çapı en fazla 5 olan tüm ağaçların graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [42]). Şekil 4.56 ile patika, tırtıl, ıstakoz gibi özel ağaçlardan farklı ve çapı 5 olan bir ağacın graceful etiketlemesi örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4.54: Graceful etiketlemeye sahip bir istakoz çizge

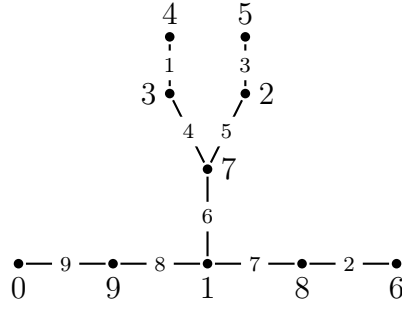


Şekil 4.55: 4 yapraklı bir ağaç ve bu ağacın bir graceful etiketlemesi

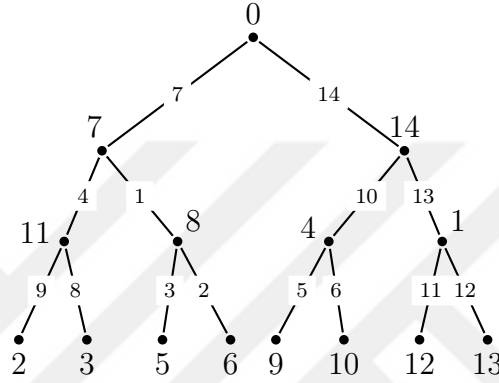
Her bir seviyedeki köşe noktaların dereceleri aynı olan köklü ağaca simetrik ağaç adı verilir. Tüm simetrik ağaçların da graceful çizge olduğu kanıtlanmıştır (bkz. [27, 32]). Şekil 4.57 ile örnek olarak simetrik bir ağacın graceful etiketlemesi verilmiştir.

B_0 tek nokta ve B_k iki tane B_{k-1} ağacının Şekil 4.58 ile verildiği gibi birleştirilmesiyle tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan B_k ağaçlarına binomial ağaç adı verilir. Ragukumara ve Sethuraman'ın binomial ağaçların graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [29]). Şekil 4.59 ile B_3 ve B_4 binomial ağaçların graceful etiketlemeleri verilmiştir.

En fazla 1 köşe noktanın derecesinin 2'den büyük olduğu ağaçlara örümcek (spider) çizge adı verilir. Buna göre yukarıda sözü edilen patika çizge ve yıldız çizge birer örümcek çizge olur. Bunların dışında zeytin ağacı, muz ağacı gibi özel tipte örümcek çizgeleri de tanımlıdır. Eğer örümcek çizgede derecesi 2'den büyük olan bir nokta varsa bu noktaya merkez nokta denir. Merkez nokta ile yaprakları birleştiren yollara ise örümceğin kolları denir.



Şekil 4.56: Çapı 5 olan bir ağacın graceful etiketlemesi



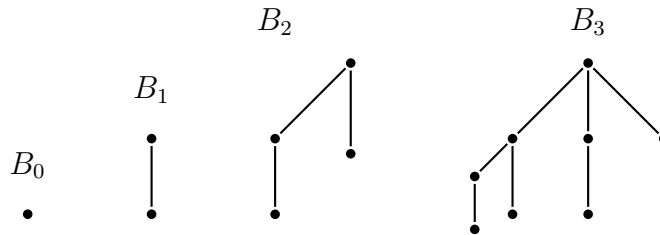
Şekil 4.57: Simetrik bir ağaç ve bu ağacın bir graceful etiketlemesi

Bahls vd. kollarının uzunlukları birbirinden en fazla 1 birim farklı olan tüm örümcek çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [5]).

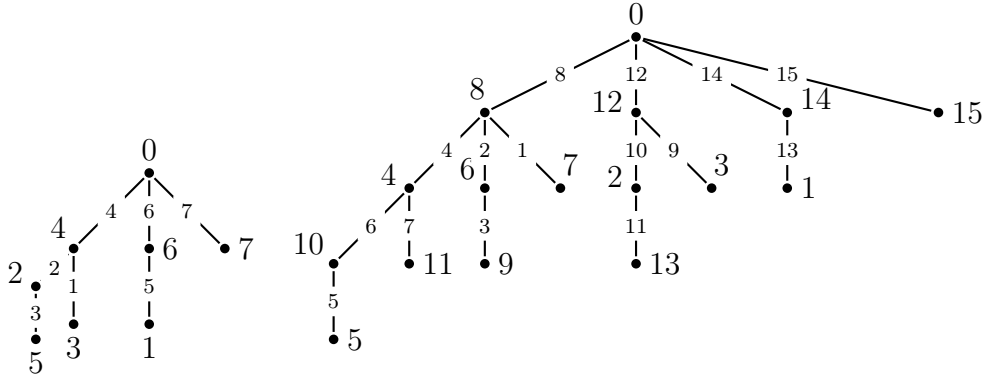
Teorem 4.1. *T ağacı, l kolu olan ve kollarının uzunlukları $m > 1$ için $\{m, m + 1\}$ kümesinden olacak şekilde bir örümcek ise T graceful çizgedir.*

Özel olarak, örümcek çizgenin tüm kollarının uzunluğu aynı ve m ise bu çizgeye m -yıldız çizge denir. Şekil 4.60 ile 2-yıldız bir çizgenin graceful etiketlemesi verilmiştir.

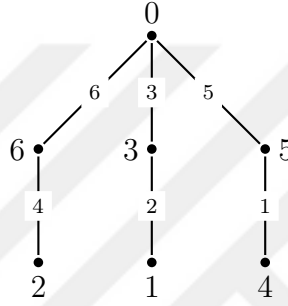
Bir diğer özel örümcek çizge ise zeytin ağacıdır. Zeytin ağacı, k tane kolu olan ve kollarının uzunlukları sırasıyla $1, 2, \dots, k$ olan örümcek çizge olarak tanımlanır.



Şekil 4.58: B_0 , B_1 , B_2 ve B_3 binomial ağaçları



Şekil 4.59: B_3 ve B_4 binomial ağaçlarının graceful etiketlemesi



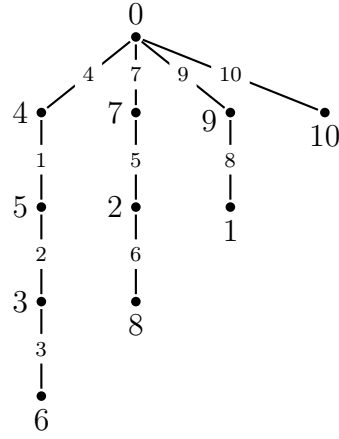
Şekil 4.60: Bir 2-yıldız çizge ve bir graceful etiketlemesi

Pastel ve Raynoud, tüm zeytin ağaçlarının graceful olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [26]). Şekil 4.61 ile 4 kolu olan bir zeytin ağacının graceful etiketlemesi verilmiştir.

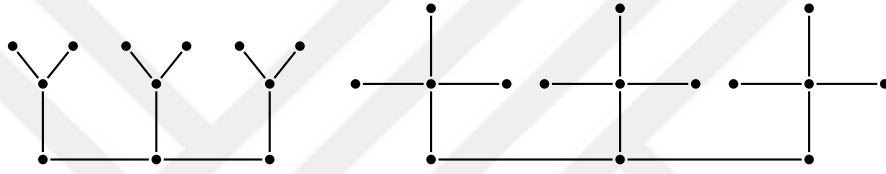
Chen, Lü, ve Yeh, yıldız çizgelerin birer yapraklarını birbirleri ile birleştirerek elde edilen çizgeyi havai fişek çizge olarak adlandırmış ve bu çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [8]). Özel olarak, birleştirilen yıldız çizgelerin köşe noktalarının sayıları aynı ise (n, k) -havai fişek çizge elde edilir. Yani, (n, k) -havai fişek çizge n tane S_k yıldız çizgenin birleştirilmesiyle elde edilir ve genelde $F_{n,k}$ ile gösterilir. Örneğin, $F_{3,4}$ ve $F_{3,5}$ havai fişek çizgeler Şekil 4.62 ile verilmiştir.

Şekil 4.63 ile bir havai fişek çizgenin graceful etiketlemesi verilmiştir.

Chen, Lü, ve Yeh, aynı çalışmada yıldız çizgelerin birer yapraklarının yeni bir v köşe noktası ile birleştirilmesiyle elde edilen çizgeyi muz ağacı olarak tanımlamış (bkz. Şekil 4.64) ve muz ağaçlarının graceful çizge olduğunu iddia etmişlerdir. Daha sonra, Sethuraman ve Jesintha tüm muz ağaçlarının graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [33]). Eğer birleştirilen yıldız çizgelerin köşe noktalarının sayıları aynı ise (n, k) -muz ağacı elde edilir. Yani, (n, k) -muz ağacı n tane S_k yıldız çizgenin yapraklarının yeni bir köşe noktasıyla birleştirilmesiyle elde edilir ve genelde $B_{n,k}$ ile



Şekil 4.61: 4 kollu bir zeytin ağacı ve bir graceful etiketlemesi

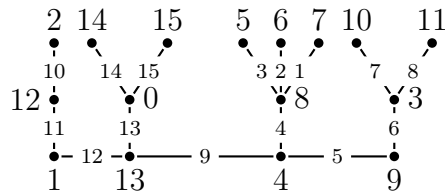


Şekil 4.62: $F_{3,4}$ ve $F_{3,5}$ havai fişek çizgeleri

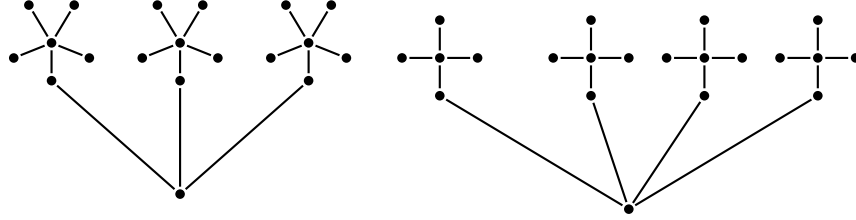
gösterilir. Örneğin, $B_{3,6}$ ve $B_{4,5}$ muz ağaçları Şekil 4.64 ile verilmiştir.

Şekil 4.65 ile bir muz ağacının graceful etiketlemesi verilmiştir.

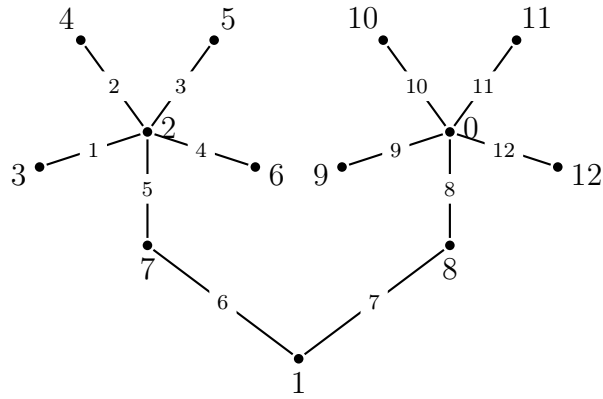
Fang, 2010 yılında deterministik geri izleme (backtracking) algoritması ile 35 köşe noktaya kadar olan tüm ağaçların graceful çizge olduğunu göstermiştir (bkz. [10]).



Şekil 4.63: Bir havai fişek çizgenin graceful etiketlemesi



Şekil 4.64: $B_{3,6}$ ve $B_{4,5}$ muz ağaçları



Şekil 4.65: Bir muz ağacının graceful etiketlemesi

5 DİĞER GRACEFUL ÇİZGELER VE BİR UYGULAMA

5.1 Bazı Özel Graceful Çizgeler

Bu bölümde önceki bölümlerde verilmeyen ancak iyi bilinen Petersen, genelleştirilmiş Petersen, üçgensel yılan gibi graceful çizgeler ele alınmıştır. Ayrıca çizgelerin birleşimlerinin graceful olup olmadığı da incelenmiştir.

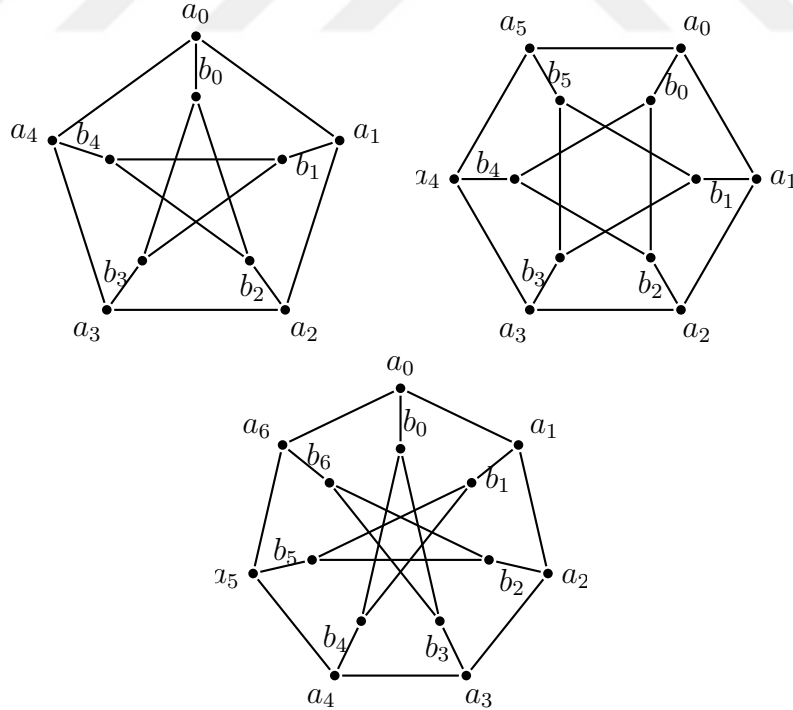
$n \geq 3$ ve $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ olmak üzere $P(n, k)$ genelleştirilmiş Petersen çizge, köşe noktaları kümesi

$$V = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$$

ve kenarlar kümesi

$$E = \{a_i a_{i+1} : i = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{a_i b_i : i = 0, 1, \dots, n-1\} \\ \cup \{b_i b_{i+k} : i = 0, 1, \dots, n-1\}$$

şeklinde tanımlanan bir çizgedir. Burada, alt indisler mod n 'e göre hesaplanmaktadır. Özel olarak, $n = 5$ ve $k = 2$ ise $P(n, k)$ çizgesine Petersen çizge adı verilir ve kısaca P ile gösterilir (bkz. Şekil 5.66).

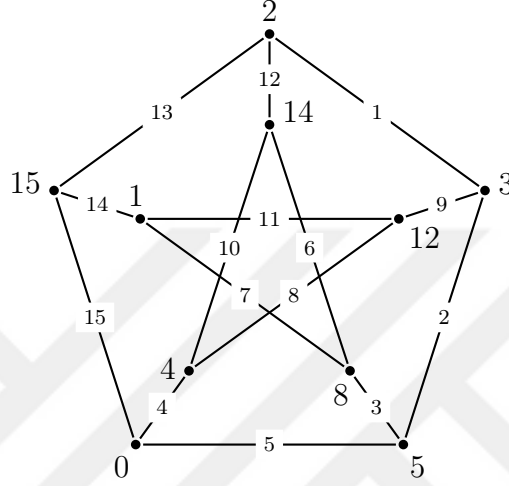


Şekil 5.66: $P(5, 2)$, $P(6, 2)$ ve $P(7, 3)$ genelleştirilmiş Petersen çizgeleri

Redl, $n = 5, 6, 7, 8, 9$ için Genelleştirilmiş Petersen çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [30]). Vietri, her t için $P(8t; 3)$ ve $P(8t + 4; 3)$ formundaki

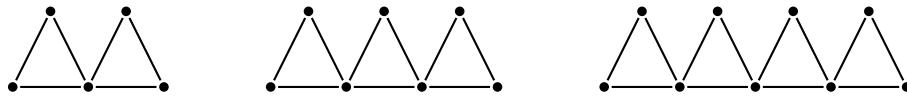
genelleştirilmiş Petersen çizgelerin graceful olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [37, 38]). Genelleştirilmiş Petersen çizgelerin graceful olup olmadığı sorusu halen bir açık sorudur. Shao, Deng, Li ve Vese geliştirdikleri bir algoritma yardımıyla $n \leq 75$ için $P(n, k)$ genelleştirilmiş Petersen çizgelerin graceful çizge olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [34]).

Petersen çizgenin bir graceful etiketlemesi Şekil 5.67 ile verilmiştir.



Şekil 5.67: Petersen çizgenin bir graceful etiketlemesi

Üçgensel yılan (ya da Δ -yılan) çizge, köşe noktaları sırasıyla $v_1, v_2, \dots, v_n$ şeklinde adlandırılan P_{n+1} patika çizgeye yeni $w_1, w_2, \dots, w_n$ köşe noktalarının eklenip $i = 1, 2, \dots, n$ için eklenen w_i noktalarının Patika çizgenin v_i ve v_{i+1} köşe noktalarıyla birleştirilmesiyle elde edilir ve Δ_n simgesiyle gösterilir (bkz. Şekil 5.68).

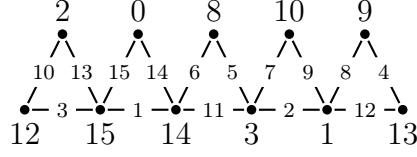


Şekil 5.68: Sırasıyla Δ_2 , Δ_3 ve Δ_4 -yılan çizgeler

Δ_n çizgede tüm köşe noktaların dereceleri çift olduğu için Δ_n bir Euler çizgedir. Buradan Teorem 3.3 yardımıyla $3n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $3n \equiv 2 \pmod{4}$ ise Δ_n çizgesi graceful değildir. Yani, Δ_n çizgesi $3n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $3n \equiv 3 \pmod{4}$ ise ya da $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise graceful çizge olabilir. Moulton bu koşulun aynı zamanda yeter koşul olduğunu da göstermiştir (bkz. [14]).

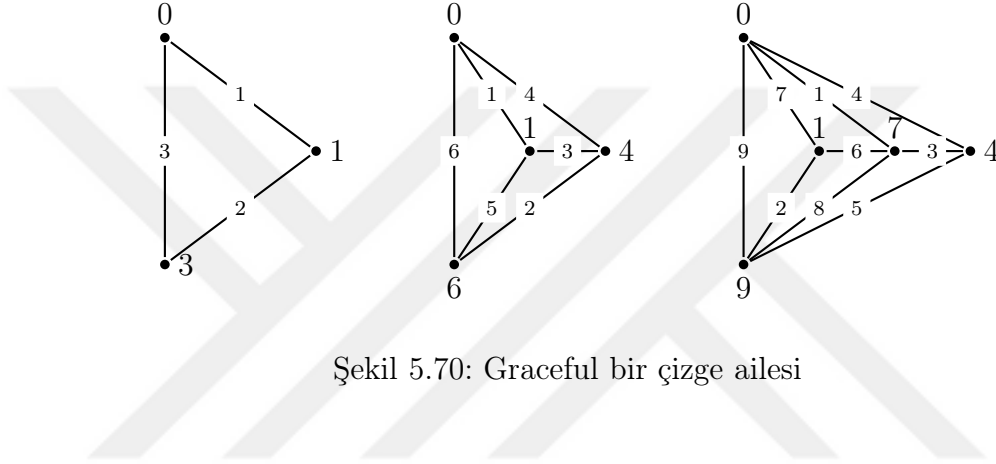
Teorem 5.1. Δ_n yılan çizgenin graceful çizge olması için gerek ve yeter koşul $n \equiv 0 \pmod{4}$ veya $n \equiv 1 \pmod{4}$ olmasıdır.

Şekil 5.69 ile Δ_5 yılan çizgenin bir graceful etiketlemesi verilmektedir.



Şekil 5.69: Δ_5 yılan çizgenin bir graceful etiketlemesi

Şekil 5.70 ile Golomb tarafından verilen bir başka graceful çizge ailesi verilmektedir (bkz. [15]).



Şekil 5.70: Graceful bir çizge ailesi

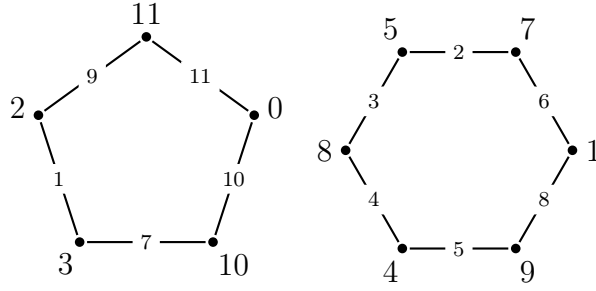
5.2 Çizgelerin Birleşimi

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgelerinde verildiğinde V_1 ve V_2 ayrık kümeler ise bu iki çizge yardımıyla $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ çizgesi tanımlanabilir. Bu durumda G_1 ve G_2 çizgelerinin graceful çizge olup olmamasının G çizgesinin graceful olmasına etkisi merak edilebilir.

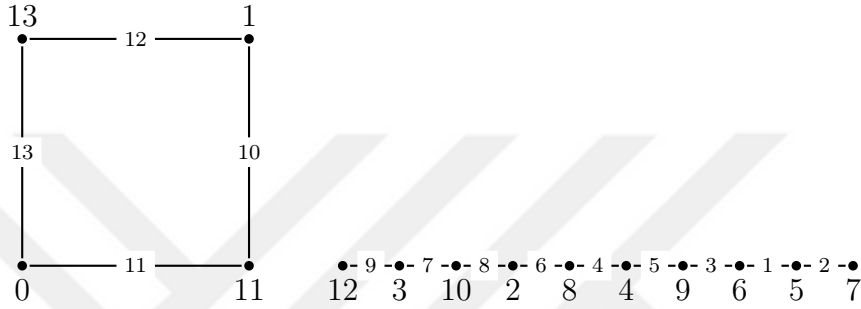
G_1 ve G_2 çizgelerinin her ikisi de graceful çizge değilken, G çizgesinin graceful olup olmadığı konusunda bir şey söylenemez. Örneğin, Teorem 3.7 gereği C_5 çizgesi graceful bir çizge değilken $C_5 \cup C_5$ çizgesi de Teorem 5.2 gereği graceful çizge değildir. Ancak Teorem 3.7 gereği C_5 ve C_6 döngü çizgeleri graceful olmadığı halde $G = C_5 \cup C_6$ çizgesi Şekil 5.71 ile gösterildiği gibi graceful çizge olur.

Benzer olarak, iki graceful çizgenin birleşiminin graceful olması hakkında da bir şey söylemek mümkün değildir. Gerçekten de, Şekil 5.72 ile verilen çizgeler graceful çizge iken birleşimleri de graceful bir çizgedir. Ancak C_3 ve C_7 graceful çizgeler olmasına karşın birleşimleri graceful çizge değildir.

Çizgelerden biri graceful diğeri graceful değilken de birleşim çizge için yine bir şey söylemek mümkün değildir.



Şekil 5.71: C_5 ve C_6 çizgesi graceful olmadığı halde $G = C_5 \cup C_6$ çizgesi graceful olur

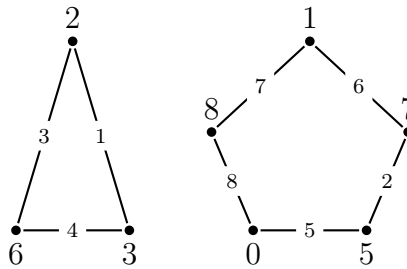


Şekil 5.72: C_4 ve P_9 çizgeleri graceful çizgeler iken $C_4 \cup P_9$ çizgesi de graceful bir çizgedir

İki döngü çizgenin birleşiminin graceful olup olmadığı aşağıdaki sonuç yardımıyla kontrol edilebilir (bkz. [1]).

Teorem 5.2. $p, q \geq 3$ olsun. $C_p \cup C_q$ çizgesinin graceful çizge olması için gerek ve yeter koşul $p + q \equiv 0 \pmod{4}$ veya $p + q \equiv 3 \pmod{4}$ olmasıdır.

Böylece C_3 graceful ve C_5 graceful olmayan bir çizge iken $C_3 \cup C_5$ çizgesi Teorem 5.2 gereği graceful olur (bkz. Şekil 5.73). Diğer taraftan yine Teorem 5.2 gereği C_4 graceful çizge C_5 ise graceful olmayan çizge iken $C_4 \cup C_5$ çizgesi graceful çizge değildir.

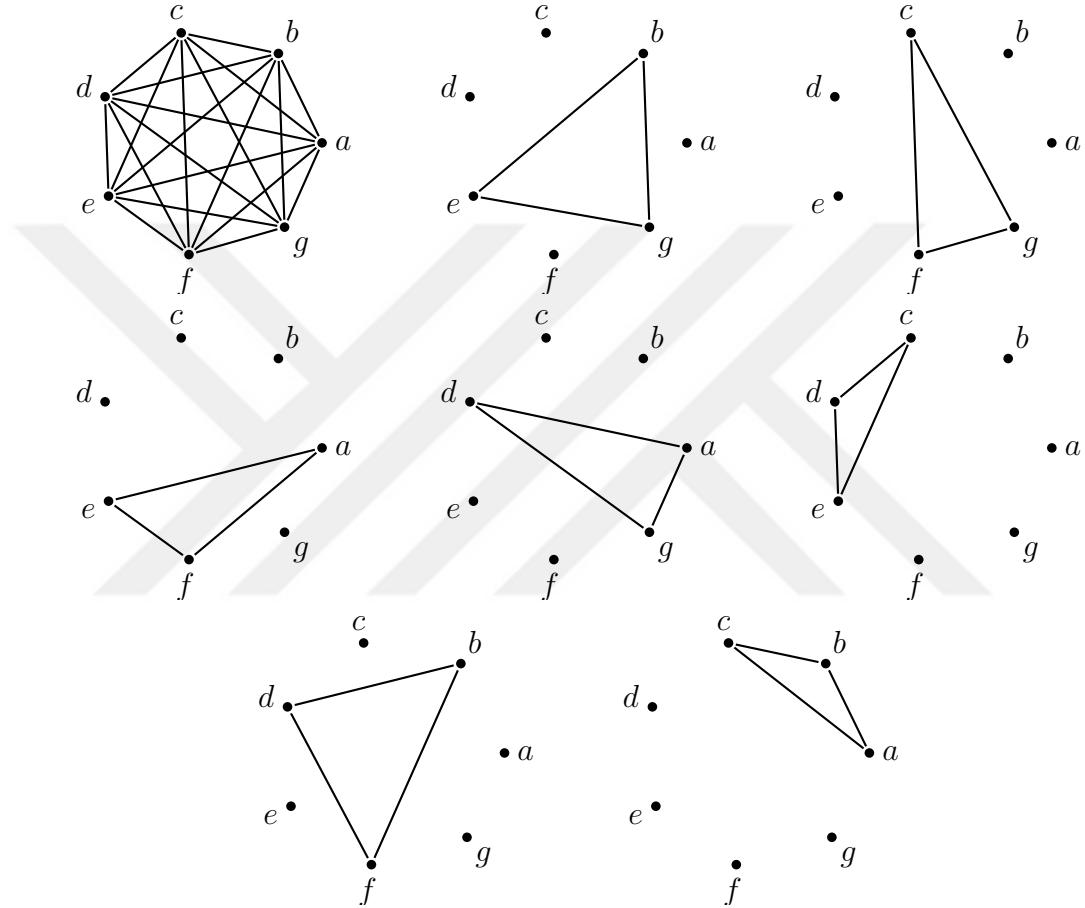


Şekil 5.73: C_3 graceful, C_5 graceful olmayan çizge iken $C_3 \cup C_5$ graceful bir çizgedir

5.3 Graceful Çizgelerin bir Uygulaması

Eğer bir G çizgesinin her kenarı, herhangi ikisinin ortak bir kenarının olmadığı $T_1, T_2, \dots, T_k$ üçgenlerinden tam olarak birisine ait ise G çizgesine K_3 -parçalanabilir (K_3 -decomposable) çizge denir.

Açıktır ki, G çizgesi m kenarlı ve K_3 parçalanabilir ise m , 3'ün bir katı olmalıdır. Örneğin, K_7 tam çizgesi Şekil 5.74 ile verildiği gibi K_3 -parçalanabilir bir çizgedir.



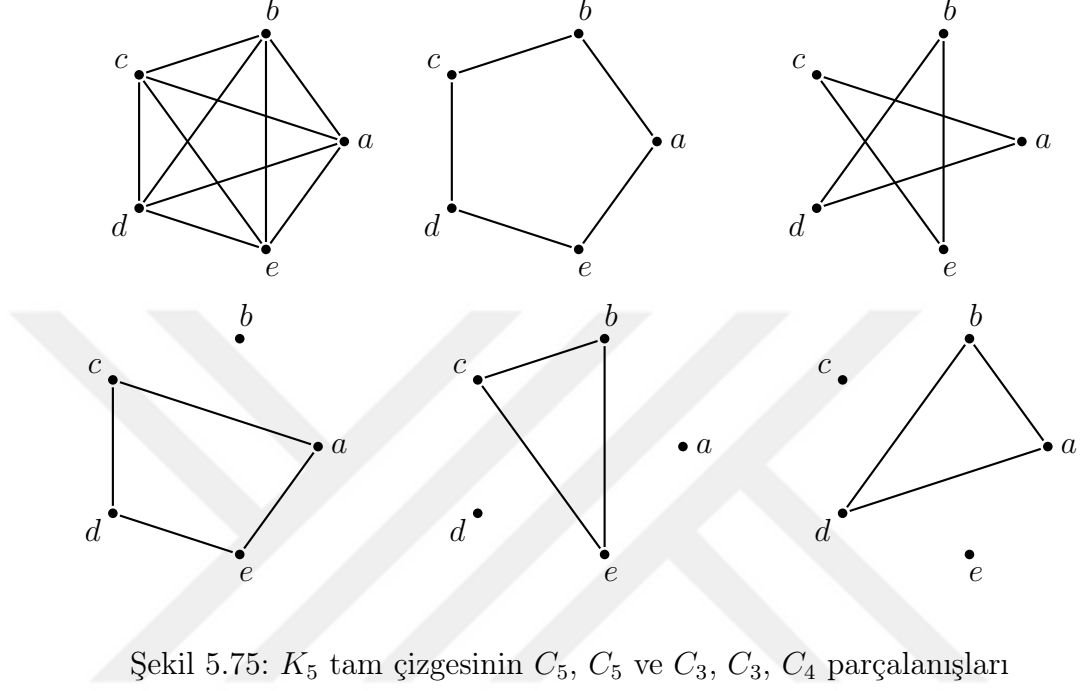
Şekil 5.74: K_7 tam çizgesinin bir K_3 parçalanışı

Benzer olarak, G çizgesinin $H_1, H_2, \dots, H_k$ alt çizgelerinin herhangi ikisinin ortak bir kenarı olmasın. Eğer G çizgesinin her kenarı bu alt çizgelerin tam olarak birine ait ise G çizgesine $H_1, H_2, \dots, H_k$ alt çizgelerine parçalanabilir denir. Özel olarak, tüm $H_1, H_2, \dots, H_k$ alt çizgeleri aynı H çizgesine izomorfik ise G çizgesine H -parçalanabilir denir. Bu parçalanışa da G çizgesinin H -parçalanışı adı verilir. Açıktır ki, eğer m kenarlı bir G çizgesi H -parçalanabilir ve H çizgesinin kenar sayısı m' ise $m'|m$ olur. Eğer parçalanış, H çizgesinin çeşitli döndürülmeleriyle elde ediliyorsa bu parçalanışa döngüsel (cyclic) H -parçalanış adı verilir.

Teorem 5.3. n bir tek sayı ve $n \geq 3$ olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, t$ için $3 \leq m_i \leq n$ ve

$m_1 + m_2 + \dots + m_t = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ olmak üzere, K_n tam çizgesi $C_{m_1}, C_{m_2}, \dots, C_{m_t}$ alt çizgelerine parçalanabilir.

O halde K_5 tam çizgesi iki tane C_5 çizgesine ve C_3, C_3, C_4 çizgelerine parçalanabilir. K_5 çizgesinin bu parçalanışları Şekil 5.75 ile gösterilmiştir.



Şekil 5.75: K_5 tam çizgesinin C_5, C_5 ve C_3, C_3, C_4 parçalanışları

Eğer bağlantılı bir G çizgesi $C_1, C_2, \dots, C_t$ çizgelerine parçalanabilir ise G çizgesinin keyfi bir v köşe noktasının bu parçalanıştaki derecesi ya 0 ya da 2 olacaktır. Bu durumda v köşe noktasının derecesi çift olmak zorundadır. v , G çizgesinin keyfi bir köşe noktası olduğundan G çizgesi bir Euler çizge olur. Oswald Veblen bunun tersinin de doğru olduğunu kanıtlamıştır (bkz. [39]).

Teorem 5.4. *Her Euler çizge döngülere parçalanabilir.*

Kanıt. G , Euler çizge olduğundan izole köşe noktası yoktur ve tüm köşe noktalarının derecesi çift olur. O zaman her köşe noktasının derecesi en az 2 olmalıdır. Bu durumda G çizgesi en az bir tane C döngüsü bulundurur. C döngüsünün kenarları G çizgesinden silinerek elde edilen çizge H ile gösterilsin. Bu durumda H çizgesinin tüm köşe noktalarının dereceleri yine çift olur. Yani H çizgesinin tüm bileşenleri ayrı ayrı Euler çizge olur. O zaman bu işleme her bir bileşen için tek bir döngü kalıncaya kadar devam edilecek olursa G çizgesinin döngülere parçalanışı elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 5.5. *H çizgesi m kenarlı graceful bir çizge olsun. Bu durumda K_{2m+1} çizgesinin bir döngüsel (cyclic) H -parçalanışı (H -decomposition) vardır.*

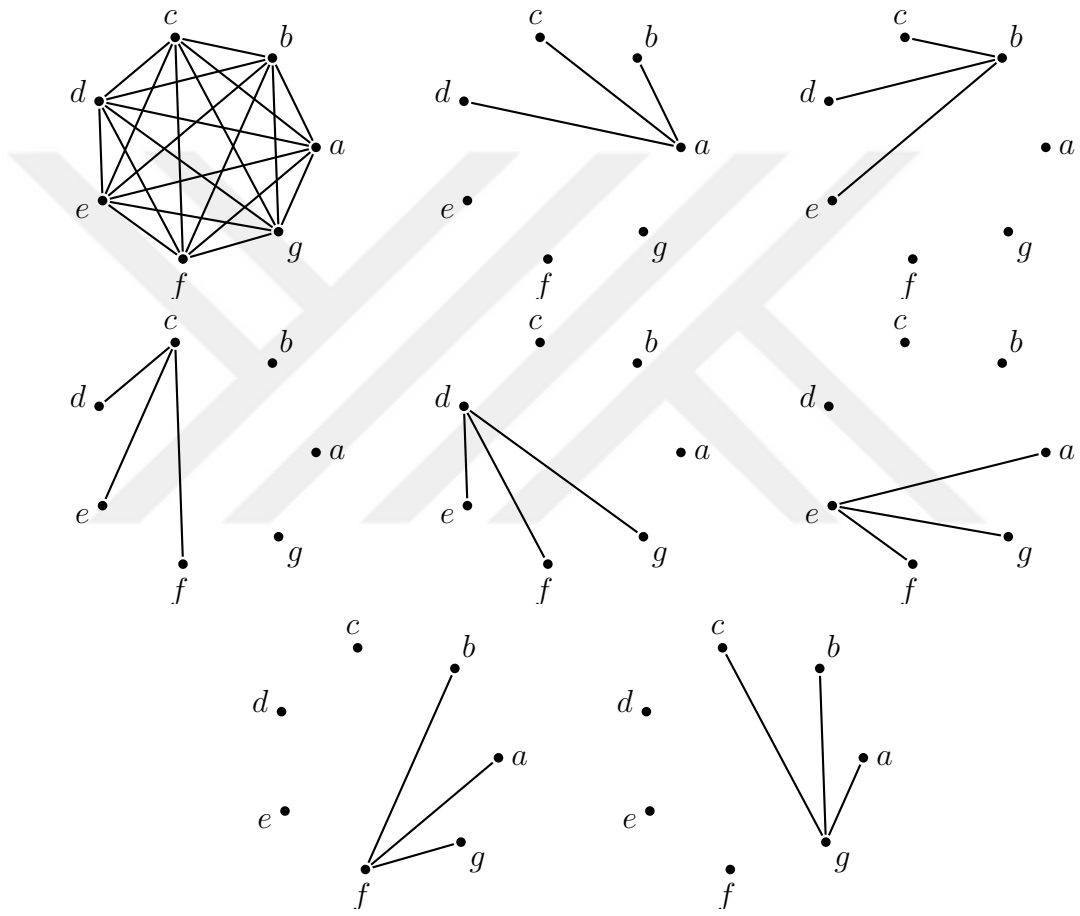
Kanıt. H , çizgesi m kenarlı bir graceful çizge olduğundan H çizgesinin köşe noktaları $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ kümesinin farklı elemanlarıyla etiketlenebilir öyle ki, H çizgesinin kenarları $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinin farklı elemanlarıyla etiketlenmiş olur. K_{2m+1} tam çizgesinin köşe noktalarını $\{v_0, v_1, \dots, v_{2m}\}$ ile gösterelim ve bir çemberin üzerine eşit aralıklarla yerleştirelim. K_{2m+1} tam çizgesini elde etmek için de herhangi iki köşe noktasını düz bir çizgi ile birleştirelim. Bu durumda $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{2m} \rightarrow v_0$ döngüsü H çizgesinde bir Hamilton döngüsü olur.

Şimdi H çizgesinin K_{2m+1} içerisindeki özel bir kopyasını inşa edelim. H çizgesinin graceful etiketlemesinde bir köşe noktası $0 \leq i \leq m$ olmak üzere i ile etiketlenmiş olsun. Bu köşe noktasını K_{2m+1} çizgesinde v_i köşe noktasına yerleştirelim. H çizgesinin tüm köşe noktaları için bu işlem tekrarlınsın. K_{2m+1} içinde H çizgesinin bu şekilde elde edilen kopyasını H_1 ile gösterelim.

K_{2m+1} tam çizgesinin her $v_s v_t$ kenarı ($0 \leq s, t \leq 2m, s \neq t$) C döngüsündeki bu iki köşe noktasını birleştiren kenar olarak düşünülebilir. $v_s v_t$ kenarı C döngüsünde bu iki nokta arasındaki $d_C(v_s, v_t)$ uzaklığı ile etiketlensin. $1 \leq d_C(v_s, v_t) \leq m$ olduğundan K_{2m+1} tam çizgesinin her kenarı $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinden bir eleman ile etiketlenmiş olur. Bu durumda K_{2m+1} çizgesinin her bir kenarı $2m + 1$ kere $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinin farklı elemanları ile etiketlenmiş olur. H_1 çizgesinin sadece birer kenarı bu etiketlemelerde yer alır.

Şimdi H_1 çizgesini saat yönünde $\frac{360^\circ}{2m+1}$ açıyla döndürürsek H çizgesinin H_1 çizgesiyle ortak kenarı olmayan bir başka H_2 gibi kopyasını elde ederiz. Bu döndürme işlemini $2m$ kere tekrarlayacak olursak, K_{2m+1} tam çizgesinin döngüsel H -parçalanışı elde edilmiş olur. $\square$

Örneğin, 4 köşe noktalı 3 kenarlı S_4 yıldız çizgesi graceful bir çizgedir. Teorem 5.5 gereği K_7 tam çizgesinin döngüsel bir S_4 -parçalanışı mevcuttur. Bu parçalanış Şekil 5.76 ile verilmiştir.



Şekil 5.76: K_7 tam çizgesinin döngüsel bir S_4 -parçalanışı

KAYNAKÇA

- [1] Abraham J. and Kotzig A. (1996), Graceful valuations of 2-regular graphs with two components, *Discrete Math.*, 150, 3-15.
- [2] Acharya B. D. and Gill M. K. (1981), On the index of gracefulness of a graph and the gracefulness of two-dimensional square lattice graphs, *Indian J. Math.*, 23, 81-94.
- [3] Akyar E. (2021), Çizge Kuramına (Graf Teorisine) Giriş, Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- [4] J. Ayel ve O. Favaron (1984), Helms are graceful, *Progress in Graph Theory*, Toronto, Ontario: Academic Press, 89-92.
- [5] Bahl P., Lake S. and Wertheim A. (2010), Gracefulness of families of spiders, *Involve*, 3, 241-247.
- [6] Bermond J. C., Kotzig A. and Turgeon J. (1978), On a combinatorial problem of antennas in radioastronomy, *Combinatorics*, North- Holland, Amsterdam, 135-149.
- [7] Bermond J.C. (1979), Graceful graphs, Radio antennae, and French windmills, *Graph Theory and Combinatorics*, Pitman, London, 18-37.
- [8] Chen W. C., Lü H. I. and Yeh Y. N. (1997), Operations of interlaced trees and graceful trees, *Southeast Asian Bull. Math.*, 21, 337-348.
- [9] Delorme C., Maheo M., Thuillier H., Koh K.M. and Teo H.K. (1980), Cycles with a chord are graceful, *J. Graph Theory*, 4, 409-415.
- [10] Fang W. (2010), A computational approach to the graceful tree conjecture, *arXiv:1003.3045v2 [cs.DM]*, 1-7.
- [11] Frucht R. (1979), Graceful numbering of wheels and related graphs, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 319, 219-229.
- [12] Frucht R. and Gallian J. A. (1988), Labelling Prisms, *Ars Combinatoria* 26, 69-82.
- [13] Gallian J. A., Prout J. and Winters S. (1992), Graceful & Harmonious Labelings of Prisms and Related Graphs, *Ars Combinatoria* 34, 213-222.

- [14] Moulton D. (1989), Graceful labeling of triangular snakes, *Ars Combinat.* 28, 3-13.
- [15] Golomb S. W. (1972), *How to Number a Graph*, Editor(s): Ronald C. Read, *Graph Theory and Computing*, Academic Press, pp. 23-37.
- [16] Graham R. L. and Sloane N. J. A. (1980), On additive bases and harmonious graphs, *SIAM J. Alg. Discrete Methods*, 1, 382-404.
- [17] Huang C., Kotzig A. and Rosa A. (1982), Further results on tree labellings, *Util. Math.*, 21c, 31-48.
- [18] Jungreis D. and Reid M. (1992), Labeling grids, *Ars Combin.*, 34, 167-182.
- [19] Koh K.M., Rogers D.G., Teo H.K. and Yap K.Y. (1980), Graceful graphs: Some further results and problems, *Cong. Numer.*, 29, 559-571.
- [20] Koh K.M. and Punnim N. (1982), On graceful graphs: Cycles with 3-consecutive chords, *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 5, 49-63.
- [21] Koh K.M. and Yap K.Y. (1985), Graceful numberings of cycles with a P_3 -chords, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 12, 41-48.
- [22] Kotzig A. (1981), Decomposition of complete graphs into isomorphic cubes, *J. Combin. Theory, Series B*, 31, 292-296.
- [23] Ma K. J. and Feng C. J. (1984), On the gracefulness of gear graphs, *Math. Practice Theory*, 72-73.
- [24] Maheo M. (1980), Strongly graceful graphs, *Discrete Math.*, 29, 39-46.
- [25] Montgomery R., Pokrovskiy A. and Sudakov B. (2020), A proof of Ringel's Conjecture, [arXiv:2001.02665](https://arxiv.org/abs/2001.02665).
- [26] Pastel A. M. and Raynaud H. (1978), Numerotation gracieuse des oliviers, in *Colloq. Grenoble, Publications Universite de Grenoble*, 218-223.
- [27] Poljak S. and Sura M. (1982), An algorithm for graceful labeling of a class of symmetrical trees, *Ars Combin.*, 14, 57-66.
- [28] Punnim N. and Pabhapote N. (1987), On graceful graphs: Cycles with a P_k -chord, $k \geq 4$, *Ars Combinat.*, 23a, 225-228.

- [29] Ragukumar P., Sethuraman G. (2018), Binomial trees are graceful, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics.
- [30] Redl T. A. (2003), Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results, *Congressus Numer.*, 164, 17-32.
- [31] Rosa A. (July 1966), On Certain Valuations of the Vertices of a Graph, In *Theory of Graphs, International Symposium, Rome*. New York: Gordon and Breach, pp. 349-355, 1967.
- [32] Sandy I. P., Rizal A., Manurung E. N. and Sugeng K. A. (2018), Alternative construction of graceful symmetric trees, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1008, 012031.
- [33] Sethuraman G. and Jesintha J. (2009), All banana trees are graceful, *Advances Appl. Disc. Math.*, 4, 53-64.
- [34] Shao Z., Deng F., Li Z. and Vese A. (2017), Graceful labelings of the generalized Petersen graphs, *Commun. Combin. Opt.*, 2(2), 149-159.
- [35] Truszczyński M. (1984), Graceful unicyclic graphs, *Demonstratio Mathematica* 17.
- [36] West D. B. (2000), *Introduction to Graph Theory*, Pearson. 377-387.
- [37] Vietri A. (2006), Graceful labellings for an infinite class of generalised Petersen graphs, *Ars. Combin.*, 81, 247-255. See also A. Vietri, Erratum: *Ars Combin.*, 83, (2007), 381.
- [38] Vietri A. (2008), A new infinite family of graceful generalised Petersen graphs, via graceful collages again, *Austral. J. Comb.*, 41, 273-282.
- [39] Veblen O. (1912), An application of modular equations in analysis situs, *Ann. of Math.*, 14, 86-94.
- [40] Yang Y. C. and Wang X. G. (1992), On the gracefulness of the product $C_n \square P_2$, *J. Math. Research and Exposition*, 1, 143-148.
- [41] Yang Y. C. and Wang X. G. (1994), On the gracefulness of product graph $C_{4n+2} \square P_{4m+3}$, *Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications* (Beijing, 1993), 425-431, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.

- [42] Zhao S. L. (1989), All trees of diameter four are graceful, Graph Theory and its Applications: East and West (Jinan, 1986), 700-706, Ann. New York Acad. Sci., 576, New York Acad. Sci., New York.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Zeliha Bozgaç

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2013–2019, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.