

**ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAF TEORİSİNDE BAĞLANTILILIK KAVRAMI VE ÖNEMİ

İbrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÇANKIRI
2022**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

İbrahim Mohammed Abbas ALAMEEN tarafından hazırlanan “**Graf Teorisinde Bağlantılılık Kavramı ve Önemi**” adlı tez çalışması 26/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA

Jüri Üyeleri :

Başkan : Doç. Dr. İbrahim ÖZEN
Matematik Anabilim Dalı
Marmara Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Faruk KARAASLAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Graf Teorisinde Bağlantılılık Kavramı ve Önemi**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (26/08/2022).

Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAF TEORİSİNDE BAĞLANTILILIK KAVRAMI VE ÖNEMİ

Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA

Bu tezin hazırlanmasında kullanılan başlıca kaynak, Diestel (2017)'in “Graph Theory” kitabıdır. Esas itibariyle bizim yaptığımız, tezin başlığından da anlaşılacağı üzere, “graf teorisinde bağlantılılık” kavramını anlamak ve anlatmak için, söz konusu kitabın üçüncü bölümünü Türkçeye çevirmekten ibarettir. Fakat tabi ki motamot bir çeviri yapılmamış, bir yandan bazı çok zorlu veya teknik ispatlar atlanırken, diğer yandan kitabın okuyucuya bırakılan bazı kısımları şerh edilerek konu daha anlaşılır bir şekilde sunulmuştur. Ayrıca, bu bölümün anlaşılabilmesi için ön şart durumunda olan graf teorisinin temel tanım ve teoremleri, mevzubahis kitabın birinci bölümünün ihtiyaç olunan kadarı teze eklenerek verilmiştir. Bunlara ek olarak, kaynaklar kısmında listelenmiş olan makalelere de başvurulmuştur. Ana hatlarıyla özetlemek gerekirse: Birinci bölümde, temel tanımların ardından, yollar ve çevrimler, bağlantılılık, ağaçlar ve ormanlar ve iki parçalı graflarla ilgili gerekli tanım ve teoremler işlenmiştir. İkinci bölümün ilk iki alt bölümünde, sırasıyla 2–bağlantılı ve 3–bağlantılı grafların yapıları çalışılmış, ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü alt bölümünde, graf teorisinin en önemli teoremlerinden birisi olan Menger (1927) teoreminin üç farklı ispatı ve ayrıca teoremin genel hali ve ispatı sunulmuştur. Dördüncü alt bölümünde, bir grafın bir indüke alt grafını sadece uç noktalarında kesen bağımsız yolların sayısını veren, yine graf teorisinin en önemli ve derin teoremlerinden birisi olan Mader (1978) teoremi ifade edilmiş ve bir sonucu ispat edilmiştir. Beşinci ve son bölümünde ise, belirlenmiş iki köşeler kümesi arasındaki ayrık yolların varlığı problemine kısaca değinilmiştir. Tezin üçüncü, sonuç ve önerilerden önceki son bölümünde ise, mevzubahis kitabın üçüncü bölümünün notlar kısmı kullanılarak, tezin konusu ile ilgili kısa bir literatür taraması sunulmuştur.

2022, 54 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Bağlantılılık, Menger teoremi, Mader teoremi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

NOTION OF CONNECTIVITY AND ITS IMPORTANCE IN GRAPH THEORY

Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Celalettin KAYA

The main source used in the preparation of this thesis is Diestel's (2017) "Graph Theory" book. Essentially, what we do is to translate the third chapter of the mentioned book into Turkish to understand and explain the concept of "connectivity in graph theory", as can be understood from the title of the thesis. But of course, no literal translation was made, on the one hand, some very difficult or technical proofs were skipped, on the other hand, some parts of the book that were left to the reader were explained and the subject was presented more understandably. In addition, the basic definitions and theorems of graph theory, which are prerequisites for understanding this study, are given by adding the necessary part of the first chapter of the aforementioned book to the thesis. In addition to these, the articles listed in the references were also consulted. To summarize: In the first chapter, after the basic definitions, necessary definitions and theorems related to roads and loops, connectedness, trees and forests, and bipartite graphs are covered. In the first two sections of the second chapter, the structures of 2-connected and 3-connected graphs are studied, respectively, and related definitions and theorems are given. In the third section, three different proofs of Menger's (1927) theorem, which is one of the most important theorems of graph theory, as well as the general form and proof of the theorem, are presented. In the fourth section, Mader's (1978) theorem, which is one of the most important and deep theorems of graph theory, which gives the number of independent paths that intersect an induced subgraph of a graph only at its endpoints, was stated, and proved. In the fifth and last section, the problem of the existence of discrete paths between two specified sets of vertices is briefly mentioned. In the third chapter of the thesis, before the conclusions and recommendation chapter, a brief literature review on the subject of the thesis is presented by using the notes section of the third chapter of the mentioned book.

2022, 54 pages

Keywords: Connectivity, Menger's theorem, Mader's theorem

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışma derleme bir çalışmadır ve hazırlanmasında kullanılan başlıca kaynak Diestel (2017) dir: Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics, 173). Bu kitabın, tez için esas kaynak olarak alınabilmesi adına, danışman hocamız, Reinhard Diestel’le e-posta üzerinden iletişim kurmuş ve şu cevabı almıştır: “It’s completely ok to have MSc theses consist of re-writes, or summaries, of chapters of my book. As you say, you must state clearly that whatever material is used originates from the book, but then that’s fine. The theses should not include long passages verbatim; if they’re needed, they can refer to the book instead. But summaries in the candidates’ own words are completely ok if you state clearly what you’re summarising (namely, passages from the book).”

Yazarın bilgilendirilmesiyle birlikte alınan izin sonrasında, graf teoride lisansüstü seviyede hazırlanmış en mükemmel kanyaklardan birisi olan bu kitap, tezin esas kaynağı olarak benimsenmiştir. Dolayısıyla, tezde geçen hemen hemen tüm şekiller, tanım ve teoremler Diestel (2017) den alınmış ve her birisi için ayrı ayrı atıf vermek yerine, bu durumun burada belirtilmesi daha uygun bulunmuştur. Tezde ifade edilmiş ve fakat ispat edilmemiş teoremlerin hemen hemen tümünün ispatı, yine mevzubahis kitapta bulunabilir.

Ayrıca, graf teori ile ilgili herhangi bir konu çalışmak isteyen herkesin ihtiyaç duyduğu temel tanım ve teoremler, diğer bir ifadeyle gerekli ön bilgiler doğal olarak aynıdır. Bu sebeple, bu tezin “graf teoriye giriş” bölümü, danışman hocamızla birlikte yapılan çalışmalarla, Abdulqadir Ramzi Ahmed SELI, Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN ve Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH tarafından ortak olarak hazırlanmıştır ve dolayısıyla, adı geçen yüksek lisan öğrencilerinin her birinin tezlerinin bu ilk bölümleri aynıdır.

Yüce Allah’a hamd ettikten sonra çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında engin bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA’ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında bana destek ve yardımcı olan aileme ve arkadaşlarıma gönülden teşekkür ederim.

Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

Çankırı, Ağustos 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GRAF TEORİYE GİRİŞ	1
1.1 Temel Tanımlar	1
1.2 Yollar ve Çevrimler	8
1.3 Bağlantılılık	13
1.4 Ağaçlar ve Ormanlar	17
1.5 İki Parçalı Graflar	25
2. BAĞLANTILILIK	28
2.1 2–Bağlantılı Graflar ve Altgraflar.....	28
2.2 3–Bağlantılı Grafların Yapısı	31
2.3 Menger Teoremi	37
2.4 Mader Teoremi.....	44
2.5 Köşe Çiftlerinin Birbirine Bağlanması.....	47
3. LİTERATÜR TARAMASI	49
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

G	Graf
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\ G \ $	G grafının kenar sayısı
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$ G $	G grafının köşe sayısı
$\Delta(G)$	G grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafının minimum derecesi
$\overline{G}$	G grafının tümleyeni
$G = (V, E)$	Köşe kümesi V ve kenar kümesi E olan G grafi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	$G = (V, E)$ grafinin bir çizimi	1
Şekil 1.2	G, G_1, G_2, G_3 grafları	5
Şekil 1.3	G ve H grafları	5
Şekil 1.4	G ve H graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı	5
Şekil 1.5	Bir G grafi ve tümleyeni	6
Şekil 1.6	Bir G grafi ve $L(G)$ çizgi grafi	7
Şekil 1.7	Bir G grafi içindeki P^5 yolu	8
Şekil 1.8	P, Q ve $nPyQz$ yolları	9
Şekil 1.9	ny kırışına sahip bir C^6 çevrimi ve C^3 ve C^5 indüke çevrimleri	10
Şekil 1.10	Önerme 1.3 ün ispatında bahsedilen P yolu (Diestel 2017)	11
Şekil 1.11	Dört bileşenli bir G grafi	14
Şekil 1.12	G grafi, $e = ny$ köprüsü, v, n, y, z, w ayırıcı köşeleri	15
Şekil 1.13	$\kappa(G) = 1, \lambda(G) = 2, \delta(G) = 3$ şartlarını sağlayan bir G grafi	16
Şekil 1.14	K^4 ün iki kopyası ve bir e kenarından elde edilen bir G grafi	17
Şekil 1.15	Bir T ağacı	20
Şekil 1.16	$G = K^5$ tam grafi ve üç geren ağacı (Diestel 2017)	20
Şekil 1.17	Bir G grafi ve G nin kökü r olan bir T normal geren ağacı (Diestel 2017)	24
Şekil 1.18	3-parçalı iki graf örneği (Diestel 2017)	25
Şekil 1.19	$K_{3,3} = K_3^2$ iki parçalı tam grafinin üç farklı çizimi (Diestel 2017) . . .	26
Şekil 1.20	$T + e$ grafi ve içindeki C çevrimi (Diestel 2017)	27
Şekil 2.1	2-bağlantılı grafların inşası (Diestel 2017)	29
Şekil 2.2	Bir graf ve blok grafi (Diestel 2017)	32
Şekil 2.3	Köşelerin bastırılması örneği (Diestel 2017)	33
Şekil 2.4	X grafi, G grafinin bir alt-bölümlemesidir (Diestel 2017)	34
Şekil 2.5	$xy \in G_{i+1}$ kenarının konumu (Diestel 2017)	36
Şekil 2.6	$xy \in G_{i+1}$ kenarlarının konumu (Diestel 2017)	39
Şekil 2.7	A dan B ye bir alterne W yolu (Diestel 2017)	41
Şekil 2.8	$G - X$ de bir H -yolu. (Diestel 2017)	45

1. GRAF TEORİYE GİRİŞ

Bu bölümde, graf teori ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

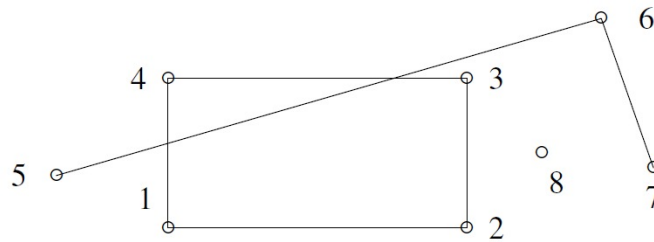
1.1 Temel Tanımlar

Tanım 1.1 Bir G grafi, $E \subseteq [V]^2$, yani E, V 'nin 2-elemanlı alt kümelerinin kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $G = (V, E)$ biçiminde bir küme çiftidir. V nin bir elemanı "köşe" (veya "nokta") ve E nin bir elemanı "kenar" olarak adlandırılır.

Şu andan itibaren, G her zaman bir grafi gösterecektir.

Bir grafi noktalar ve doğru (veya eğri) parçaları kullanarak resmedebiliriz şöyle ki eğer $\{u, v\} \in E$ ise, $u, v \in V$ köşelerine karşılık gelen noktalar bir doğru/eğri ile birleştirilir. Noktaların ve eğrilerin nasıl çizildiğinin herhangi bir önemi yoktur; önemli olan tek husus, köşeler arasındaki komşu olma ve olmama ilişkisinin korunmasıdır.

Örnek 1.1 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$ olsun. Bu durumda, $G = (V, E)$ grafini Şekil 1.1 deki gibi çizebiliriz.



Şekil 1.1 $G = (V, E)$ grafinin bir çizimi

Notasyon 1.1 Bir G grafinin köşe kümesi $V(G)$, kenar kümesi $E(G)$ ile gösterilir.

Not 1.1 $v \in V(G)$ veya $e \in E(G)$ yerine, sırayla $v \in G$ veya $e \in G$ yazabiliriz.

Tanım 1.2 Bir G grafinin köşelerinin (karşılık olarak, kenarlarının) kümesinin eleman sayısına, bu grafin "mertebesi" (karşılık olarak, "derecesi") denir ve $|G|$ (karşılık olarak, $\|G\|$) biçiminde gösterilir. Bir graf mertebesine göre, "sonlu graf", "sonsuz graf", "sayılabilir graf" vesaire biçiminde adlandırılır.

Tanım 1.3 $G = (\phi, \phi)$ grafına "boş graf" denir.

Tanım 1.4 Eğer bir G grafinin mertebesi 0 veya 1 ise, bu grafa "trivial graf" denir.

Tanım 1.5 $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V, e \in E$ olsun. Eğer $v \in e$ ise v köşesi e kenarına veya e kenarı v köşesine "bağlıdır" denir. Eğer $e = \{v, w\}$ ise, v ve w köşelerine e nin "uç köşeleri" veya "uçları" denir ve bu durumda, e kenarı, v ve w köşelerini "bağlar" veya "birleştirir" denir.

Notasyon 1.2 Bir $e = \{x, y\}$ kenarı, xy veya yx biçiminde yazılabilir.

Tanım 1.6 $G = (V, E), X, Y \subseteq V$ ve $x \in X, y \in Y$ olmak üzere, $e = xy \in E$ olsun. Bu durumda, $e = xy$ bir " $X - Y$ kenarı" olarak adlandırılır. Bir $F \subseteq E$ kümesindeki tüm $X - Y$ kenarlarının kümesi, $F(X, Y)$ biçiminde gösterilir.

Notasyon 1.3 $F(\{x\}, Y)$ ve $F(X, \{y\})$, basit bir şekilde sırasıyla, $F(x, Y)$ ve $F(X, y)$ biçiminde gösterilir. $F(v), F \subseteq E$ kümesindeki $v \in V$ köşesine bağlı tüm kenarların kümesini gösterir.

Tanım 1.7 $x, y \in V(G)$ ve $e \neq f \in E(G)$ olsun. Eğer $xy \in E(G)$ ise, x ve y köşeleri "bağlıdır" veya "komşudur" denir. Eğer e ve f kenarlarının ortak bir ucu var ise, e ve f kenarları "bağlıdır" denir. Eğer G grafinin birbirinden farklı herhangi iki köşesi bağlı ise, G ye bir "tam graf" denir ve n köşeli bir tam graf K^n biçiminde gösterilir. Ayrıca K^3 , "üçgen" olarak adlandırılır.

Tanım 1.8 Köşelerin bir kümesindeki veya kenarların bir kümesindeki herhangi iki eleman bağlı değil ise, bu kümelerin her birine "bağımsız" küme denir.

Tanım 1.9 $G = (V, E), H = (W, F)$ iki graf ve $q : V \rightarrow W$ bir fonksiyon olsun. Eğer q fonksiyonu köşeler arasındaki komşuluk ilişkisini koruyor ise, yani $xy \in E$ iken $q(x)q(y) \in F$ ise; q fonksiyonuna, G grafından H grafına bir "homomorfizma" denir.

Not 1.2 Eğer $z \in q(V)$, yani z köşesi, q fonksiyonunun görüntü kümesinde ise, $q^{-1}(z) = \{x \in V : q(x) = z\} \subseteq V$ alt kümesi bağımsızdır: Diyelim ki $q^{-1}(z)$ bağımsız olmasın. Bu durumda, $q^{-1}(z)$ içinde komşu olan x ve y gibi iki köşe vardır. Şimdi, $q(x) = z = q(y)$ olduğundan, $\{q(x), q(y)\} = \{z\}$ elde ederiz. Fakat $\{z\}$, W nun 2-elemanlı bir alt kümesi değildir, yani $\{z\} \notin [W]^2$ dir.

Tanım 1.10 Bir önceki tanımda verilen q fonksiyonu bire-bir ve örten, q^{-1} fonksiyonu da bir homomorfizma ise, q fonksiyonuna bir "izomorfizma" denir. Bu durumda, G ve H grafları "izomorfiktir" denir ve $G \simeq H$ yazılır. Eğer q bir izomorfizma ve $H = G$ ise, q 'ya G nin bir "otomorfizması" denir.

Not 1.3 $q : V(G) \rightarrow V(H)$ bir izomorfizmadır ancak ve ancak q bire-bir ve örten bir fonksiyondur ve " $xy \in E(G) \Leftrightarrow q(x)q(y) \in E(H)$ " dir:

$(\Rightarrow)$ q fonksiyonu, izomorfizma tanımını gereği, bire-bir ve örtendir.

Ayrıca, $xy \in E(G) \Leftrightarrow q(x)q(y) \in E(H)$ dir:

$(\Rightarrow) xy \in E(G) \Rightarrow q(x)q(y) \in E(H)$ dir, çünkü q bir homomorfizmadır.

$(\Leftarrow) x'y' \in E(H) \Rightarrow q$ örten olduğundan, $q(x) = x'$ ve $q(y) = y'$ olacak şekilde $x, y \in V(G)$ vardır. $\Rightarrow q(x)q(y) \in E(H)$ dir.

$\Rightarrow q^{-1}(q(x))q^{-1}(q(y)) \in E(G)$ dir, çünkü q^{-1} bir homomorfizmadır. $\Rightarrow xy \in E(G)$ dir.

$(\Leftarrow)$ Bu izomorfizma tanımıdır. Yani: q bire-bir ve örten, q ve q^{-1} birer homomorfizma olduğundan, q bir izomorfizmadır.

Not 1.4 İzomorfik graflar esasında aynı graflardır. Bu sebeple, $G \simeq H$ yerine, $G = H$ yazabiliriz.

Tanım 1.11 Grafların izomorfizma altında korunan bir özelliğine, bir "graf özelliği" denir. Grafların kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon, eğer tüm izomorfik graflarda aynı değeri alıyor ise, bu fonksiyona bir "graf değişmezi" denir.

Örnek 1.2 K^4 tam grafini "içermek" bir graf özelliğidir: Eğer G herhangi ikisi birbirine komşu dört köşe içeriyor ve $H \simeq G$ ise, H de böylesi dört köşe içerir.

Ayrıca, köşe sayıları, kenar sayıları, derecesi aynı olan köşelerin sayıları vs. en temel graf değişmezleridir.

Tanım 1.12 $G = (V, E)$ ve $H = (W, F)$ iki graf olsun.

G ve H graflarının "birleşimi": $G \cup H := (V \cup W, E \cup F)$ grafıdır.

G ve H graflarının "kesişimi": $G \cap H := (V \cap W, E \cap F)$ grafıdır.

Eğer $G \cap H = \emptyset$ ise, G ve H grafları "ayrıktır" denir.

Tanım 1.13 Eğer $W \subseteq V$ ve $F \subseteq E$ ise, H grafına G grafının "altgrafı" dır denir ve $H \subseteq G$ biçiminde gösterilir.

Eğer $H \subseteq G$ ve $H \neq G$ ise, H ye G nin bir "özaltgrafı" denir.

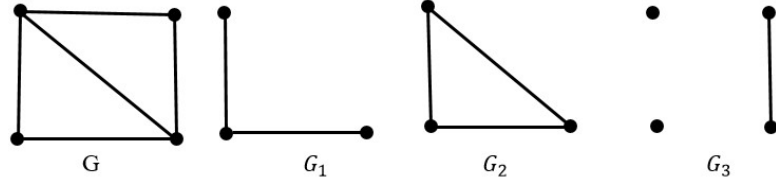
Eğer $H \subseteq G$ ve H, G nin her iki ucu da $V(H) = W$ da olan tüm kenarlarını içeriyor, yani $\{x, y\} \in E$ ve $x, y \in W$ iken, $\{x, y\} \in F$ oluyor ise, H ye G nin bir "indüke altgrafı" denir.

Eğer H, G nin bir indüke altgrafı ise, W, G grafi içinde H yi "gerer" denir ve $H = G[W]$ biçiminde gösterilir.

Eğer $H \subseteq G$ ve $W = V$ ise, H ye G nin bir "geren altgrafı" denir.

Notasyon 1.4 $H \subseteq G$, indüke veya değil, G nin bir altgrafı olsun. Bu durumda, $G[V(H)]$ yerine, $G[H]$ gösterimini kullanırız.

Örnek 1.3 Şekil 1.2 de verilen G_1, G_2, G_3 graflarını ele alalım. Bu durumda, G_1, G_2, G_3 , G nin altgraflarıdır. G_1 bir indüke altgraf değildir, fakat G_2 bir indüke altgraftır. G_2 bir geren altgraf değildir, fakat G_3 bir geren altgraftır.



Şekil 1.2 G, G_1, G_2, G_3 grafları

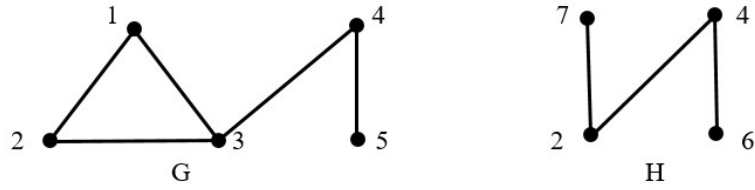
Tanım 1.14 $G = (V, E)$ bir graf, U bir köşeler kümesi ($U \subseteq V$ veya değil) ve $F \subseteq [V]^2$ olsun. Bu durumda, $G - U := G[V \setminus U]$, yani $G - U, G$ grafindan, $V \cap U$ kümesindeki köşelerinin ve bu köşelere bağlı tüm kenarların silinmesiyle elde edilen graftır. Ayrıca, $G - F$ ve $G + F$ grafları, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G - F := (V, E \setminus F) \quad \text{ve} \quad G + F := (V, E \cup F).$$

Notasyon 1.5 Eğer $U = \{v\}$ ise, $G - \{v\}$ yerine, $G - v$ yazılır. Ayrıca H herhangi bir altgraf olmak üzere, $G - V(H)$ yerine, $G - H$ yazılır.

Eğer $F = \{e\}$ ise, $G - \{e\}$ ve $G + \{e\}$ yerine sırasıyla, $G - e$ ve $G + e$ yazılır.

Örnek 1.4 G ve H , Şekil 1.3 de verilen graflar olsun. G ve H graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı Şekil 1.4 de verilmiştir.



Şekil 1.3 G ve H grafları



Şekil 1.4 G ve H graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı

Tanım 1.15 Eğer bir $G = (V, E)$ grafi bir graf özelliğini sağlıyor, fakat aynı özelliği sağlayan $E \subsetneq F$ olacak şekilde başka bir $H = (V, F)$ grafi yok ise; G grafi bu özelliğe göre "kenar-maksimal" dir denir. Genel olarak, eğer bir graf, (başka bir sıralama bağıntısı verilmemişse) altgraf bağıntısına göre, bir graf özelliğini sağlayan maksimal veya minimal graf ise, bu grafa bu özelliği göre "maksimal veya minimal" dir denir.

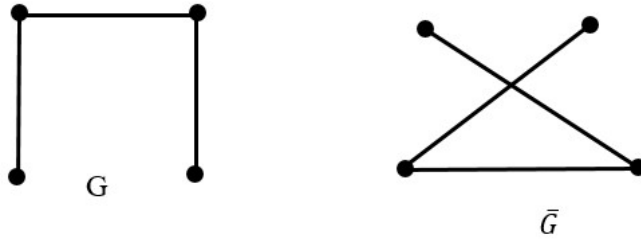
Tanım 1.16 G ve H ayrık iki graf olsun. Bu durumda, $G * H$ grafi:

$$G * H := (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{e = xy : x \in V(G), y \in V(H)\})$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.17 G grafinin "tümleyeni" $\bar{G} := (V(G), [V]^2 - E(G))$ biçiminde tanımlanır. G grafinin "çizgi grafi" $L(G)$, köşe kümesi $W = E$ ve kenar kümesi $F = \{xy : x, y \in W \text{ ve } xy \text{ kenarları } G \text{ grafi içinde komşudur}\}$. Yani, G nin çizgi grafi $L(G)$, G nin kenar kümesi E yi köşe kümesi olarak olan bir graftır öyle ki " $x, y \in E$ komşu iki köşedir $\Leftrightarrow x, y, G$ içinde bağlı / komşu iki kenardır".

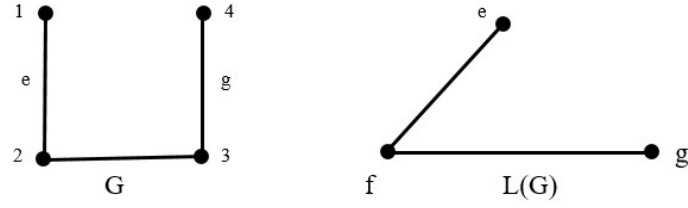
Örnek 1.5 Şekil 1. 5 de G ve $\bar{G}$ grafları verilmiştir. Dikkat edilirse, $G \simeq \bar{G}$ dir.



Şekil 1.5 Bir G grafi ve tümleyeni

Örnek 1.6 Şekil 1. 6 da G grafi ve G nin çizgi grafi $L(G)$ verilmiştir.

Tanım 1.18 $G = (V, E)$, boştan farklı bir graf ve $U \subseteq V$ olsun. Bir $v \in V(G)$ köşesine komşu tüm köşelerin kümesi, $N_G(v)$ veya daha basitçe $N(v)$ biçiminde gösterilir. Genel olarak, $V(U) = \{x \in V \setminus U : xy \in E \text{ olacak şekilde bir } y \in U \text{ vardır}\}$ kümesi, U nun "komşu" kümesi olarak adlandırılır.



Şekil 1.6 Bir G grafi ve $L(G)$ çizgi grafi

Tanım 1.19 Bir v köşesinin "derecesi" $d_G(v) = |E(v)|$, v köşesine bağlı kenar sayısıdır ve graflar için (multi graflar için değil) $d_G(v) = |N(v)|$ dir. ($d_G(v)$ yerine, $d(v)$ de yazılır.) Derecesi sıfır olan köşe, "izole" köşe olarak adlandırılır.

$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V\}$ sayısına, G grafinin "minimum derecesi" denir.

$\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V\}$ sayısına, G grafinin "maksimum derecesi" denir.

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her $v \in V$ için $d(v) = k$ ise, G ye bir " k -düzgün" graf denir. Özel olarak, 3-düğün grafa, "kübik" graf denir.

Tanım 1.20 G nin "ortalama derecesi" $d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ ve $\epsilon := \frac{|E|}{|V|}$ olarak tanımlanır.

Not 1.5 $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ dir:

Let $|V| = n$ olsun. Her $v \in V$ için, tanım gereği $\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$ dir.

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq \sum_{v \in V} \Delta(G). \Rightarrow n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq n\Delta(G).$$

$$\Rightarrow \delta(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) \leq \Delta(G) \Rightarrow \delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G) \text{ dir.}$$

Önerme 1.1 $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) |V|$ dir. Bu sebeple, $\epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$ dir.

İspat. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} |V| \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} |V| d(G).$

$$\therefore |E| = \frac{1}{2} d(G) |V|. \Rightarrow \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2} d(G) \Rightarrow \epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G). \blacksquare$$

Önerme 1.2 Bir gratta derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir.

İspat. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ bir çift sayıdır. $\therefore$ Derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir. $\blacksquare$

1.2 Yollar ve Çevrimler

Tanım 1.21 Köşe kumesi $V = \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$ ve kenar kümesi $E = \{n_0n_1, n_1n_2, \dots, n_{k-1}n_k\}$ olan, boştan farklı $P = (V, E)$ grafına, n_0 köşesinden n_k köşesine veya n_0 ile n_k arasında bir "yol / patika" denir.

Dikkat edilirse bir yol için tüm köşeler birbirinden farklıdır, yani herhangi bir köşe tekrar etmemektedir. P yolunun "uçları" olan n_0 ve n_k köşeleri, P yolu ile birbirine "bağlıdır" denir. $n_1, \dots, n_{k-1}$ köşelerine, P nin "iç köşeleri" denir. P yolundaki kenar sayısına, P yolunun "uzunluğu" denir. k uzunluğundaki yol P^k ile gösterilir. Dikkat edilirse, $k = 0$ olabilir ve $P^0 = K^1$ dir.

Notasyon 1.6 $P = (\{n_0, \dots, n_k\}, \{n_0n_1, \dots, n_{k-1}n_k\})$ bir yol olsun. Bu durumda, $0 \leq i \leq j \leq k$ olmak üzere, aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$P := n_0n_1 \dots n_k \quad \text{ve} \quad \overset{\circ}{P} := n_1 \dots n_{k-1};$$

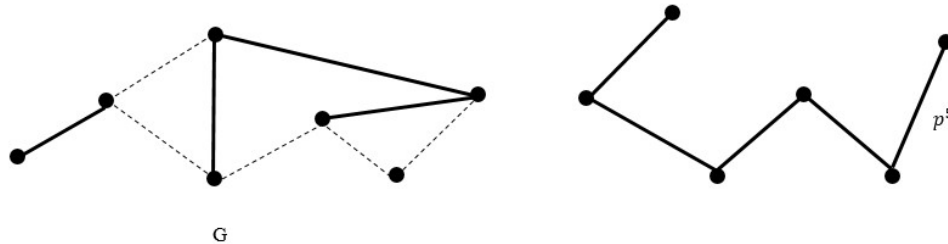
$$Pn_i := n_0 \dots n_i \quad \text{ve} \quad P\overset{\circ}{n}_i := n_0 \dots n_{i-1};$$

$$n_iP := n_i \dots n_k \quad \text{ve} \quad \overset{\circ}{n}_iP := n_{i+1} \dots n_k;$$

$$n_iPn_j := n_i \dots n_j \quad \text{ve} \quad \overset{\circ}{n}_iP\overset{\circ}{n}_j := n_{i+1} \dots n_{j-1}.$$

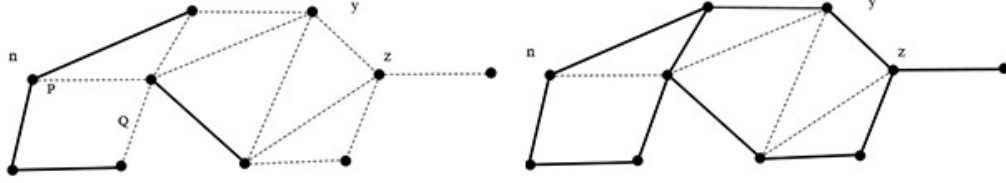
Yolların uç uca eklenmesi için de benzer gösterim kullanılır. Örneğin, eğer üç P, Q, R yolunun birleşimi $Px \cup xQy \cup yR$ bir yol ise, bu yol kısaca $PxQyR$ biçiminde gösterilir.

Örnek 1.7 Şekil 1.7 de bir G grafi ve içindeki bir P^5 yolu sağ tarafında verilmiştir.



Şekil 1.7 Bir G grafi içindeki P^5 yolu

Örnek 1.8 Şekil 1.8 de bir G grafi ve noktalı kenarlarla da içindeki P ve Q yolları gösterilmiştir. Ayrıca, $nPyQz$ yolu sağ tarafta yine noktalı kenarlarla gösterilmiştir.



Şekil 1.8 P , Q ve $nPyQz$ yolları

Tanım 1.22 $G = (V, E)$ ve H graflar, $A, B \subseteq V$ ve $P = n_0 \dots n_k$ olsun.

Eğer $V(P) \cap A = \{n_0\}$ ve $V(P) \cap B = \{n_k\}$ ise, P yolu bir " $A - B$ yolu" olarak adlandırılır. $\{a\} - B$ yolu, kısaca $a - B$ biçiminde gösterilir.

Eğer iki veya daha çok yolun iç köşelerinin kümeleri ikişer ikişer ayrık kümeler ise, bu yollar "bağımsız" yollar olarak adlandırılır.

Eğer P yolu H grafini sadece uç köşelerinde kesiyor ise, P yolu bir " H -yolu" olarak adlandırılır.

Not 1.6 Dikkat edilirse:

- 1) İki $a - b$ yolu P ve Q bağımsızdırlar $\Leftrightarrow V(P) \cap V(Q) = \{a, b\}$ dir.
- 2) Eğer P yolu uzunluğu 1 olan bir H -yolu ise, P nin kenarı, H grafına ait bir kenar değildir.

Tanım 1.23 $k \geq 3$ ve $P = n_0 \dots n_{k-1}$ uzunluğu $k - 1$ olan bir yol olsun. Bu durumda, $C := P + n_{k-1}n_0$ grafına bir "çevrim" veya "döngü" denir. Bir çevrim, köşelerinin listelenmesiyle gösterilebilir. Örneğin, $C = P + n_{k-1}n_0$ çevrimi, $C = n_0n_1 \dots n_{k-1}n_0$ biçimde gösterilir. Bir çevrimin kenar sayısına çevrimin "uzunluğu" denir. Uzunluğu k olan bir çevrim C^k biçiminde gösterilir ve " k -çevrim" olarak adlandırılır.

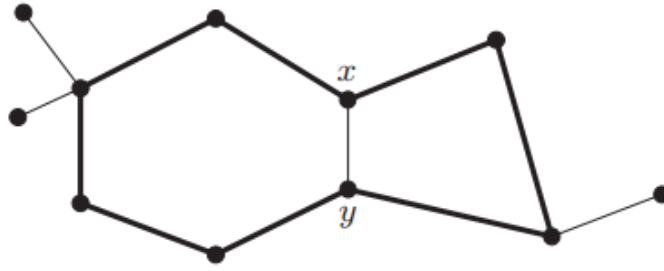
Tanım 1.24 Bir G grafında, en kısa çevrimin uzunluğuna G nin "etrafı (girth)"; en uzun çevrimin uzunluğuna G nin "çevresi (circumference)" denir ve sırasıyla, $g(G)$ ve $c(G)$ biçiminde gösterilir.

Not 1.7 Eğer G içinde hiçbir çevrim yoksa, etrafı ∞ ve çevresi 0 olarak tanımlanır.

Tanım 1.25 C , G içinde bir çevrim ve $xy \in E(G)$ olsun. Eğer $x, y \in V(C)$ ve $xy \notin E(C)$ ise, xy kenarına, C çevrimin bir "kirişi" denir.

Not 1.8 C , G grafinin bir indüke çevrimi olsun. Bu durumda, C bir indüke altgraf ve bir çevrim olduğundan, C nin herhangi bir kirişi yoktur.

Örnek 1.9 Şekil 1.9 de bir C^6 çevrimi ve C^3 ve C^5 indüke çevrimleri verilmiştir. Dikkat edilirse, ny kenarı C^6 nin bir kirişi olduğundan, C^6 , bir indüke çevrim değildir.

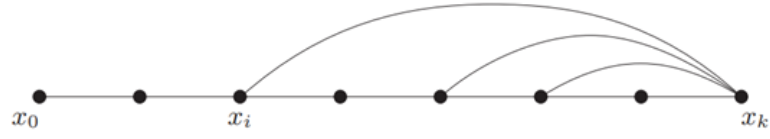


Şekil 1.9 ny kirişine sahip bir C^6 çevrimi ve C^3 ve C^5 indüke çevrimleri

Önerme 1.3 Eğer G minimum derecesi $\delta(G) \geq 2$ olan bir graf ise, G içinde uzunluğu $\delta(G)$ olan bir yol ve uzunluğu $\geq \delta(G) + 1$ olan bir çevrim vardır.

İspat. $P = n_0 \dots n_k$, G içinde uzunluğu maksimum olan bir yol olsun. Bu durumda, P nin maksimalliğinden, $N_G(n_k) \subseteq V(P)$ dir. Bu sebeple, P nin uzunluğu $= k \geq d_G(n_k) \geq \delta(G)$ dir. Şimdi $i < k$, $n_i n_k \in E(G)$ şartını sağlayan en küçük indis olsun. Bu durumda, $n_i n_{i+1} \dots n_k n_i$, uzunluğu $\geq d_G(n_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$ olan bir çevrimdir. (Şekil 1.10) ■

Tanım 1.26 x ve y , G grafinin iki köşesi olsun. x ve y köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğuna, x ve y köşeleri arasındaki "uzaklık" denir ve $d_G(x, y)$ veya daha kısa olarak $d(x, y)$ biçiminde gösterilir. Eğer x ve y köşeleri arasında herhangi bir yol yok ise, $d(x, y)$



Şekil 1.10 Önerme 1.3 ün ispatında bahsedilen P yolu (Diestel 2017)

uzaklığı ∞ olarak tanımlanır. G deki uzaklıkların maksimumuna, G nin "çapı" denir ve " $diam(G)$ " biçiminde gösterilir. Yani:

$$diam(G) := \max\{d(x, y) : x, y \in V(G) \text{ ve } x \neq y\} = \max_{x \in G} \max_{y \in G} d(x, y) \text{ dir.}$$

Etraf ve çap değerleri alakalıdır:

Önerme 1.4 G , çevrim içeren bir graf olsun. Bu durumda, $g(G) \leq 2diam(G) + 1$ dir.

İspat. Bir C çevriminin ve bir P yolunun uzunluklarını sırasıyla, $\ell(C)$ ve $\ell(P)$ biçiminde gösterelim. Hükümün değilinin doğru olduğunu, yani $g(G) > 2diam(G) + 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $g(G) \geq 2diam(G) + 2$ dir. Şimdi C, G içinde $\ell(C) = g(G)$ olan bir çevrim olsun. Bu durumda, C üzerinde, $d_C(u, v) \geq diam(G) + 1$ ($d_C(u, v)$, C çevrimi/altgrafı içindeki uzaklığı göstermektedir) olacak şekilde u ve v köşeleri vardır. Fakat G içinde, $d_G(u, v) \leq diam(G)$ dir. Bu sebeple, u ve v köşeleri arasında uzunluğu $d_G(u, v)$ olan herhangi bir P yolu, C çevriminin bir altgrafı olamaz. Bu yüzden, xPy biçiminde bir C -yolu vardır. Şimdi, C içinde iki tane $x - y$ yolu vardır. Q , bu $x - y$ yollarından kısa olanı gösterebilir. Bu durumda, $xPyQx$ çevriminin uzunluğu $< \ell(C)$ dir:

$$\begin{aligned} \ell(xPyQx) &= C \text{ üzerindeki iki } x - y \text{ yolundan kısa olanın uzunluğu} + \ell(xPy) \\ &\leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + \ell(P) \leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + diam(G) \\ &\leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + \frac{\ell(C)}{2} - 1 \quad [g(G) \geq 2diam(G) + 2 \Rightarrow diam(G) \leq \frac{g(G)}{2} - 1 \leq \frac{\ell(C)}{2} - 1.] \\ &\leq \frac{\ell(C)}{2} + \frac{\ell(C)}{2} - 1 = \ell(C) - 1. \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir ve bu çelişki bize $g(G) \leq 2diam(G) + 1$ olduğunu gösterir. ■

Tanım 1.27 Bir G grafının "yarıçapı", $rad(G)$ biçiminde gösterilir ve

$$rad(G) := \min_{x \in G} \max_{y \in G} d_G(x, y)$$

biçiminde tanımlanır. $rad(G) = \max_{y \in G} d_G(x, y)$ şartını sağlayan bir x köşesine bir "merkez köşe" denir. Yani x in diğer tüm köşelere uzaklıklarının maksimumu, diğer tüm köşeler için hesaplanan bu maksimumların minimumu ise, x bir merkez köşedir.

Önerme 1.5 Bir G grafi için, $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$.

İspat. $rad(G) \leq diam(G)$: Bu eşitsizlik, yarıçap ve çap tanımlarından doğrudur.

$diam(G) \leq 2rad(G)$: x ve y , $d(x, y) = diam(G)$ eşitliğini sağlayan iki köşe ve v , G nin merkez köşelerinden birisi olsun. Bu durumda, $rad(G) = \max_{w \in V} d(v, w)$ dir. Şimdi: $diam(G) = d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y)$ [Üçgen eşitsizliği] $\leq rad(G) + rad(G)$ [$rad(G) = \max_{z \in V} d(v, z)$ dir.] $\therefore diam(G) \leq 2rad(G)$ dir. ■

Tanım 1.28 Bir G grafi içindeki köşelerin ve kenarların, $e_i = \{n_i, n_{i+1}\}$ olmak üzere, $W := n_0 e_0 n_1 e_1 \dots e_{k-1} n_k$ biçimdeki bir alterne dizisine, G içinde bir "yürüyüş" denir ve içerdiği kenar sayısı, bu yürüyüşün "uzunluğu" olarak adlandırılır. Eğer $n_0 = n_k$ ise, W , bir "kapalı yürüyüş" olarak adlandırılır.

Not 1.9 Eğer bir W yürüyüşünde bütün köşeler farklı ise, W aynı zamanda bir yoldur.

Önerme 1.6 G bir graf, W, G içinde bir yürüyüş, x ve y , W yürüyüşüne ait iki köşe olsun. Bu durumda x ve y köşeleri arasında, $P \subseteq W$ olacak şekilde bir P yolu vardır.

İspat. G bir graf ve W, G içinde, x ve y köşeleri arasında bir yürüyüş olsun. Ayrıca, P, W yürüyüşü içinde uzunluğu minimum olan bir $x - y$ yürüyüşü olsun. Yani: $P \subseteq W$ ve P, x ve y köşeleri arasında bir yürüyüş öyle ki W içindeki $x - y$ yürüyüşleri arasında uzunluğu en küçük olanlardan birisidir.

P yürüyüşü bir $x - y$ yoludur: $P = x = v_1 v_2 \dots v_n = y$ olsun. Aksini varsayarak, P nin bir yol olmadığını kabul edelim. Bu durumda, P içinde tekrar eden bir v_i ($1 \leq i \leq n$) köşesi vardır. Bu sebeple, $P = x = v_1 v_2 \dots v_i \dots v_j \dots v_n = y$ ve $v_i = v_j$ olacak şekilde bir $j > i$ vardır. Fakat $Q = x = v_1 v_2 \dots v_i v_{j+1} \dots v_n = y$ yürüyüşü de bir $x - y$ yürüyüşüdür ve Q nun uzunluğu, P nin uzunluğundan daha küçüktür.

$\therefore P$ içinde tekrar eden herhangi bir köşe yoktur. $\therefore P, W$ içinde bir $x - y$ yoludur. ■

1.3 Bağlantılılık

Tanım 1.29 G , boştan farklı bir graf olsun. Eğer G nin herhangi iki köşesi arasında bir yol var ise, G grafına "bağlantılı" dır denir.

$U \subseteq V(G)$ olsun. Eğer $G[U]$ bağlantılı ise, " U, G içinde bağlantılıdır" denir.

Eğer bir graf bağlantılı değil ise, "bağlantısız" olarak adlandırılır.

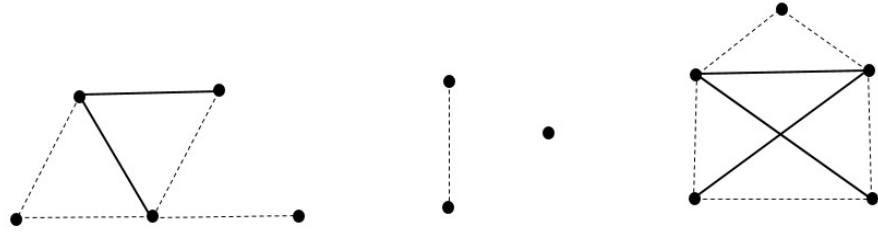
Önerme 1.7 G bağlantılı bir graf ve $|V(G)| = n$ olsun. Bu durumda, G nin köşeleri, $v_1, v_2, \dots, v_n$ olarak adlandırılabilir öyle ki her $i = 1, \dots, n$ için, $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ bağlantılıdır.

İspat. G nin herhangi bir köşesini alalım ve v_1 olarak adlandıralım. Bu durumda, $G_1 = G[v_1]$ in bağlantılı olduğu aşikardır. İddianın, $1 \leq i < |G|$ için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi, $i + 1$ için, $v \in G - G_i$ olacak şekilde bir v köşesi alalım. G bağlantılı olduğundan, G içinde, $P = v = n_1 \dots n_m = v_1$ biçiminde bir $v - v_1$ yolu vardır. $1 \leq j \leq m$ indisi, " $n_j \notin G_i$ ve fakat $n_{j+1} \in G_i$ " şartını sağlayan indis olsun. n_j köşesini v_{i+1} olarak adlandıralım, yani $v_{i+1} := n_j$ olsun. Bu durumda, v_{i+1} köşesinin G_i içinde bir komşusu (n_{j+1}) vardır. Bu yüzden, $G_{i+1} := G_i[v_{i+1}]$ bağlantılıdır. Bu sebeple, n üzerinden tümevarımla, her $i = 1, \dots, n$ için, G_i bağlantılıdır. ■

Tanım 1.30 H, G nin bir altgrafı olsun. H bağlantılı ve G nin H yi içeren ve H den farklı bağlantılı bir altgrafı yok ise, H ye G nin bir "bileşeni" denir.

Not 1.10 Bir grafın herhangi bir bileşeni, bir indüke altgraftır: Tanım gereği, bir G grafının bir bileşeni, bir maksimal bağlantılı altgraftır. Bu sebeple, eğer iki köşeyi, diyelim ki $x, y \in V(G)$, içeriyor ise ve eğer $xy \in E(G)$ ise, xy kenarını da içermek zorundadır.

Örnek 1.10 Şekil 1.11 de dört bileşenli bir G grafı verilmiştir. Her bir bileşenin bir minimal bağlantılı geren altgrafının kenarları kesikli olarak çizilmiştir. Ayrıca dikkat edilirse, bileşenlerin köşe kümeleri, $V(G)$ nin bir parçalanışını verir.



Şekil 1.11 Dört bileşenli bir G grafi

Tanım 1.31 $G = (V, E)$ bir graf, $a, b \in V$, $A, B \subseteq V$ ve $X \subseteq V \cup E$ olsun. Eğer G deki her $A - B$ yolu, X kümesinin bir elemanını (bir köşe veya bir kenar) içeriyor ise, X kümesi (G içinde), A ve B kümelerini "ayırır" denir. Eğer $a, b \notin X$ ve X , $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümelerini ayırıyor ise, X kümesi a ve b köşelerini "ayırır" denir. Eğer X , G nin iki köşesini ayırıyor ise, X kümesi G grafını "ayırır" denir. Eğer $X \subseteq V(G)$ ve X , G grafını ayırıyor ise, X kümesi bir "ayırıcı" olarak adlandırılır.

Not 1.11 Eğer X , A ve B kümelerini ayırıyor ise, $A \cap B \subseteq X$ dir:

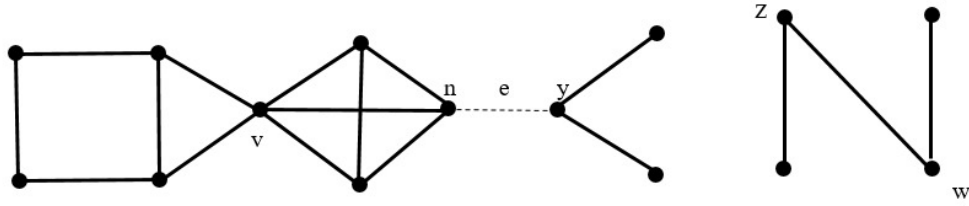
$v \in A \cap B$ olsun. Bu durumda, bir uç noktası v olan ve trivial olmayan bir $A - B$ yolu yoktur: Aksine, olduğunu kabul edelim. Yani bir uç noktası v olan bir $P = vn_1 \dots n_k$ (veya $P = n_1 \dots n_kv$) $A - B$ yolunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $V(P) \cap A = \{v\}$ ve $V(P) \cap B = \{v, n_k\}$ (veya $V(P) \cap A = \{n_1, v\}$ ve $V(P) \cap B = \{v\}$) dir ve bu bir çelişkidir. Çünkü $V(P) \cap B \neq \{n_k\}$ (veya $V(P) \cap A \neq \{n_1\}$) dir. Bu sebeple, bir uç noktası v olan tek bir $A - B$ yolu vardır, o da trivial $P = v$ yoludur. Bu sebeple, X , A ve B köşe kümelerini ayırdığından, $v \in X$ dir. Sonuç olarak, $A \cap B \subseteq X$ elde edilir.

Tanım 1.32 Eğer bir v küşesi, kendi bulunduğu bileşen içindeki iki köşeyi ayırıyor ise, v , bir "ayırıcı köşe" olarak adlandırılır. Eğer e kenarı, iki uç köşesini ayırıyor ise, e , bir "köprü" olarak adlandırılır.

Not 1.12 Bir e kenarı köprüdür $\Leftrightarrow e$ kenarını içeren bir C çevrimi yoktur. Denk olarak, bir e kenarı köprü değildir $\Leftrightarrow e$ kenarını içeren bir C çevrimi vardır:

$e = xy$ bir köprü değildir $\Leftrightarrow x$ ve y köşeleri arasında, e kenarını içermeyen bir P yolu vardır $\Leftrightarrow C = P + e$, e kenarını içeren bir çevrimdir.

Örnek 1.11 Şekil 1.12 verilen G grafında, v, n, y, z, w köşeleri birer ayırıcı köşe ve $e = ny$ kenarı bir köprüdür.



Şekil 1.12 G grafı, $e = ny$ köprüsü, v, n, y, z, w ayırıcı köşeleri

Tanım 1.33 $A, B \subseteq V$ olsun. Eğer $A \cup B = V$, ayrıca $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümeleri arasında bir kenar yok ise, bu durumda $\{A, B\}$ sırasız çiftine, G nin bir "ayrışması" denir. Eğer $A \setminus B \neq \emptyset$ ve $B \setminus A \neq \emptyset$ ise, $\{A, B\}$, bir "has ayrışma" olarak adlandırılır. $|A \cap B|$ sayısına, $\{A, B\}$ ayrışmasının "mertebesi"; A ve B kümelerine bu ayrışmanın " tarafları" denir.

Not 1.13 $A, B \subseteq V$ olsun. $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ köşe kümeleri arasında herhangi bir kenar yoktur $\Leftrightarrow A \cap B$, A ve B köşe kümelerini ayırır:

$A \setminus B$ ve $B \setminus A$ köşe kümeleri arasında herhangi bir kenar yoktur $\Leftrightarrow G$ içindeki her $A - B$ yolu, $A \cap B$ kümesinin bir köşesini içerir $\Leftrightarrow A \cap B$, A ve B köşe kümelerini ayırır.

Tanım 1.34 $|G| > k$ olmak üzere, mertebesi k den daha küçük olan her X köşe kümesi için $G - X$ bağlantılı ise, G grafı " k -bağlantılıdır" denir. G nin k -bağlantılı olduğu k sayılarının en büyüğüne, G nin "(köşe) bağlantılılığı" denir ve bu en büyük sayı $\kappa(G)$ ile gösterilir.

Not 1.14 G , boştan farklı bir graf olsun. Bu durumda, G , 0-bağlantılıdır, çünkü $|X| < 0$ olacak şekilde bir $X \subseteq V$ kümesi yoktur.

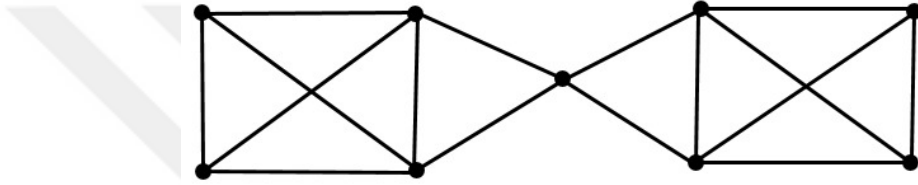
G , trivial olamayan bir graf olsun. Bu durumda, G , 1-bağlantılıdır $\Leftrightarrow G$ bağlantılıdır, çünkü $|X| < 1$ olması gerektiğinden $X = \emptyset$ dir.

Ayrıca, $\kappa(G) = 0 \Leftrightarrow G$ bağlantısızdır veya $G = K^1$ dir. Her $n \geq 1$ için, $\kappa(K^n) = n - 1$ dir. Aslında, her $n \geq 1$ için, $\kappa(G) = n - 1$ dir $\Leftrightarrow G = K^n$ dir.

Tanım 1.35 $|G| > 1$ olmak üzere, mertebesi ℓ den daha küçük olan her F kenar kümesi için $G - F$ bağlantılı ise, G grafi " ℓ -kenar-bağlantılıdır" denir. G nin ℓ -kenar-bağlantılı olduğu ℓ sayılarının en büyüğüne, G nin "kenar bağlantılılığı" denir ve bu en büyük sayı $\lambda(G)$ ile gösterilir.

Not 1.15 G trivial olmayan bir graf olsun. Bu durumda, $\lambda(G) = 0 \Leftrightarrow G$ bağlantısızdır. Ayrıca, $\lambda(G) \geq 1$ dir $\Leftrightarrow G$ bağlantılıdır.

Örnek 1.12 Şekil 1.13 de verilen G grafi için, $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 3$ tür.



Şekil 1.13 $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 3$ şartlarını sağlayan bir G grafi

Önerme 1.8 G trivial olmayan bir graf olsun. Bu durumda, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ dir.

İspat. $\lambda(G) \leq \delta(G)$: Her $v \in V$ için, $\lambda(G) \leq d_G(v)$ dir, çünkü bir v köşesine bağlı olan tüm kenarlar G yi ayırır. $\therefore \lambda(G) \leq \min\{d_G(v) : v \in V\} = \delta(G)$.

$\kappa(G) \leq \lambda(G)$: $F \subseteq E$ öyle ki $|F| = \lambda(G)$ ve $G - F$ bağlantısız olsun. Kenar-bağlantılılık tanımından, böylesi ayıran bir F kümesinin var olduğunu biliyoruz.

Şimdi $\kappa(G) \leq |F| (= \lambda(G))$ olduğunu göstereceğiz.

Durum 1. F deki herhangi bir kenarın ucu olmayan bir $v \in V(G)$ köşesinin var olduğunu kabul edelim. C , $G - F$ grafında v yi içeren bileşen olsun.

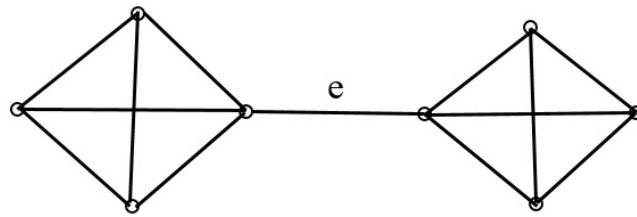
$W = \{w \in V(G) : v, F \text{ deki bir kenarın uç köşesidir}\}$ olarak tamamlayalım. Bu durumda, W köşe kümesi, v ve $G - C$ yi ayırır. Diğer yandan, F içindeki herhangi bir e kenarının, en fazla tek bir uç köşesi C içinde olabilir: Aksine, F kümesi içinde, her iki uç köşesi de $V(C)$ de olan bir $e = xy$ kenarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $F - e$, $\lambda(G) - 1$ tane kenar içeren bir kümedir öyle ki $G - (F - e)$ bağlantısızdır. Fakat bu F nin minimalliği ile çelişir. $\therefore |W| \leq |F|$. $\therefore \kappa(G) \leq |F|$.

Durum 2. G deki her köşenin, F içindeki bir kenarın bir uç köşesi olduğunu kabul edelim. $v \in V(G)$ herhangi bir köşe olsun. C , $G - F$ grafindan v yi içeren bileşen olsun. $W = \{w \in N_G(v) : vw \notin F\}$ olarak tamamlayalım. Bu durumda, $W \subseteq V(C)$ dir, çünkü $v \in C$ dir ve C bir bileşendir. Durum 1’de ki gibi, F deki bir e kenarının en fazla bir uç köşesi C içinde olabildiğinden, W kümesindeki iki köşe, F içindeki bir kenarın uçları olamaz. $\therefore d_G(v) \leq |F|$.

$\therefore$ Eğer $G - N_G(v) \neq \{v\}$ ise, $N_G(v)$, v ve $G - N_G(v)$ yi ayırdığından, $\kappa(G) \leq |F|$ dir. Eğer $G - N_G(v) = \{v\}$, yani, $\{v\} \cup N_G(v) = V(G)$ ise; v , rastgele seçilmiş bir köşe olduğundan, $n = |G|$ olmak üzere, $G = K^n$ olduğunu kabul edebiliriz. Fakat bu durumda, $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = |G| - 1$ dir. Yani eşitsizlikler yine sağlanır. ■

Not 1.16 Önceki önermeden, yüksek bağlantılılık, yüksek minimum dereceye ihtiyaç duyar. Karşıt olarak, yüksek minimum derece, yüksek bağlantılılığı garanti etmez.

Örnek 1.13 Şekil 1.14 de, K^4 un iki kopyası, her bir ucu bir kopyada olan bir e kenarı ile bağlanmıştır. Dikkat edilirse, $\delta(G) = 3$ tür, fakat $\kappa(G) = \delta(G) = 1$ dir. Genel olarak, eğer K^n tam grafinin iki kopyasının iki köşesini bir e kenarı ile bağlarsak, bu durumda elde edilen G grafi için, $\delta(G) = n - 1$ dir, fakat $\kappa(G) = \delta(G) = 1$ dir.



Şekil 1.14 K^4 ün iki kopyası ve bir e kenarından elde edilen bir G grafi

1.4 Ağaçlar ve Ormanlar

Tanım 1.36 Hiçbir çevrim içermeyen bir grafa, "çevrimsiz graf" denir. Çevrimsiz bir graf "orman" olarak adlandırılır. Bağlantılı bir orman ise, "ağaç" olarak adlandırılır.

Bir ağacın, derecesi bir olan bir köşesine "yaprak" ve yaprak olmayan bir köşesine "iç köşe" denir.

Not 1.17 T , trivial olmayan bir ağaç olsun. T ağacında en az bir yaprak vardır:

P , T içindeki en uzun yollardan birisi olsun. Bu durumda, P nin her iki uç köşesinin derecesi de 1 olmak zorundadır. Aksi takdirde, P yi uzatabiliriz ve bu P nin en uzun yollardan birisi olmasıyla çelişir. $\therefore T$ ağacının en az iki yaprağı vardır.

Not 1.18 v , T ağacının bir yaprağı olsun. Bu durumda, $T' = T - v$ grafi da bir ağaçtır: Birincisi, T bir çevrim içermediğinden, $T' = T - v$ grafi da bir çevrim içermez. ikincisi, v , T nin bir yaprağı olduğundan, sadece tek bir komşusu vardır ve bu sebeple, $T' = T - v$ bağlantılıdır. $\therefore T'$ bir ağaçtır.

Teorem 1.1 T bir graf olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) T bir ağaçtır.
- (ii) T nin herhangi iki köşesi x ve y arasında, bir ve yalnız bir yol vardır.
- (iii) T minimal bağlantılıdır. Yani T bağlantılıdır ve fakat her $e \in E(T)$ kenarı için, $T - e$ bağlantısızdır.
- (iv) T maksimal çevrimsizdir. Yani T herhangi bir çevrim içermez ve fakat birbirine komşu olmayan herhangi iki x ve y köşesi için, $T + xy$ grafi bir çevrim içerir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): Öncelikle, T bağlantılıdır. $\therefore T$ nin herhangi iki x ve y köşesi arasında bir P yolu vardır. Böylesi bir P yolu tektir: Tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, x ve y gibi iki köşe vardır öyle ki bu iki köşe arasında $P = x = z_1 \dots z_n = y$ ve $Q = x = w_1 \dots w_m = y$ gibi iki farklı yol vardır. $A = V(P) \cap V(Q)$ olsun. Bu durumda, $x, y \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dır ve $P \neq Q$ olduğundan, $A \subsetneq V(P)$ veya $A \subsetneq V(Q)$ dır. Diyelim ki $A \subsetneq V(P)$ olsun. Şimdi z_{s+1} (indislerin sıralamasına göre) $V(P) - V(A)$ kümesindeki ilk köşe ve z_t , A kümesinde z_s den sonra gelen ilk köşe olsun. Bu durumda, $z_s, z_t \in A$ ve $C = z_s P z_t Q z_s$, T içinde bir çevrimdir. Fakat bu T nin hiçbir çevrim içermediği gerçeğiyle çelişir. $\therefore$ Böylesi bir yol tek olmalıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : T nin herhangi iki köşesi arasında bir yol olduğundan, T bağlantılıdır. $e = xy$, T içinde bir kenar olsun. Bu durumda $T' = T - e$ bağlantısızdır: Tersinin doğru

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, T' içinde, x ve y köşeleri arasında bir P yolu vardır. $T' \subseteq T$ olduğundan, $P \subseteq T$ dir. Diğer yandan, $Q = xy$, T içinde, x ve y köşeleri arasında bir başka yoldur. Fakat bu, böylesi bir yolun tek olduğuyla çelişir.

$\therefore T' = T - e$ bağlantısızdır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Öncelikle, tersinin doğru olduğunu, yani T nin içinde bir $C = z_1 \dots z_n z_1$ çevriminin var olduğunu kabul edelim. $e = z_1 z_2$ olsun. Bu durumda $T' = T - e$ bağlantılıdır: $x, y \in V(T')$ olsun. Bu durumda, T bağlantılı olduğundan, T içinde x ve y köşeleri arasında bir $P = x = w_1 \dots w_m = y$ yolu vardır. Eğer $e \notin E(P)$ ise, $P \subseteq T'$ dir. Eğer $e \in E(P)$ ise, bir $1 \leq i < m$ için, $e = w_i w_{i+1}$ dir. Bu durumda, $Q = P w_i = z_1 z_n z_{n-1} \dots z_2 = w_{i+1} P$, T' içinde, x ve y köşeleri arasında bir yürüyüştür. Her $x - y$ yürüyüşü, bir $x - y$ yolu içerdiğinden, T' içinde, x ve y köşeleri arasında bir yol vardır.

$\therefore T' = T - e$ bağlantılıdır. Fakat bu hipotezle çelişir. $\therefore T$ hiçbir çevrim içermez.

Şimdi, x ve y , T içinde komşu olmayan iki köşe olsun. Bu durumda, $T'' = T + xy$ bir çevrim içerir: P , T içinde, x ve y köşeleri arasında bir yol olsun. Bu durumda, $Q = P + xy$, T'' içinde bir çevrimdir.

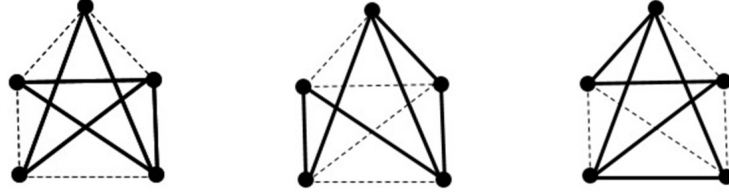
(iv) $\Rightarrow$ (i) Öncelikle, hipotezden, T hiçbir çevrim içermez. Bu sebeple, T nin bağlantılı olduğunu ispat etmemiz gerekmektedir: $x, y \in V(T)$ olsun. Eğer $e = xy \in E(T)$ ise, $P = xy$, T içinde, x ve y köşeleri arasında bir yoldur. Eğer $e = xy \notin E(T)$ ise, bu durumda hipotezden, $T + xy$ grafi, bir C cevrimi içerir. Fakat T hiçbir çevrim içermediğinden, $e = xy \in E(C)$ dir. Bu durumda $P = C - e$, T içinde, x ve y köşeleri arasında bir yoldur. $\therefore T$ bağlantılıdır. ■

Notasyon 1.7 T bir ağaç ve $x, y \in V(T)$ olsun. x ve y köşelerini birleştiren $P \subseteq T$ yolu, xTy biçiminde gösterilir.

Not 1.19 G , bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda, G bir geren ağaç içerir: T , G grafının minimal bağlantılı ve geren bir altgrafı olsun. Bu durumda, önceki teoremin (iii) şikkından, T bir ağaçtır. Veya: T , G grafının maksimal çevrimsiz bir altgrafı olsun. Bu durumda, önceki teoremin (iv) şikkından, T bir ağaçtır. Ayrıca, T bir geren altgraftır: Aksinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bir $v \in V(G) - V(T)$ vardır. Şimdi $T \subseteq G$ ve G

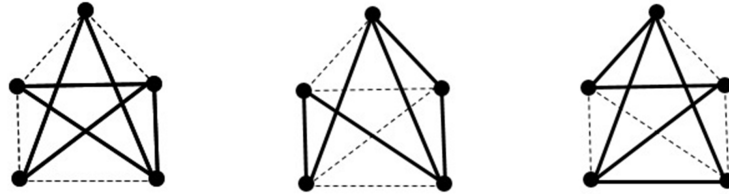
bağlantılı olduğundan, $vw \in E(G)$ olacak şekilde bir $w \in V(T)$ vardır. Bu durumda, $T + vw$ hala çevrimsizdir, çünkü T çevrimsizdir ve $v \notin V(T)$ dir. Fakat bu, $T \subsetneq T + vw$ olduğundan, T nin maksimalliğiyle çelişir.

Örnek 1.14 Şekil 1.15 de verilen graf bir ağaç örneğidir.



Şekil 1.15 Bir T ağacı

Örnek 1.15 Şekil 1.16 de, $G = K^5$ grafının üç geren ağacı koyu kenarlarla gösterilmiştir.



Şekil 1.16 $G = K^5$ tam grafı ve üç geren ağacı (Diestel 2017)

Tanım 1.37 G , bir graf ve T , G nin bir geren ağacı olsun. Bir $e \in E(G) \setminus E(T)$ kenarına, T ağacının, G grafı içindeki bir "kirişi" denir.

Sonuç 1.1 T , n köşeli bir ağaç olsun. Bu durumda, T ağacının köşeleri, $v_1, v_2, \dots, v_n$ biçiminde adlandırılabilir öyle ki her $i \geq 2$ için, v_i köşesinin $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ köşe kümesi içinde tek bir komşusu vardır.

İspat. Bir önceki alt bölümün ilk önermesinden, T ağacının köşelerinin her $i \geq 2$ için, $T_i := T[v_1, \dots, v_i]$ bağlantılı olacak şekilde, $v_1, v_2, \dots, v_n$ olarak adlandırılabilirliğini biliyoruz. Bu sebeple v_i köşesinin, $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ köşe kümesi içerisinde bir komşusu

vardır. Ayrıca, T_i bir ağaç olduğundan, bu komşu tek bir tanedir: Aksine v_i nin, $1 \leq k < l \leq i - 1$ olmak üzere, v_k ve v_l gibi iki tane komşusunun olduğunu kabul edelim. Şimdi, T_{i-1} bir ağaç olduğundan, bağlantılıdır ve bu sebeple, v_k ve v_l köşelerini birleştiren (tek) bir P yolu vardır. Fakat bu durumda, $v_i v_k + P + v_l v_i$, T_i ağacı içerisinde bir çevrimdir. Bu bir çelişkidir, çünkü T_i bir ağaç olduğundan, hiçbir çevrim içermez. ■

Sonuç 1.2 G , n köşeli ve bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda:

G ağaçtır $\Leftrightarrow |E(G)| = n - 1$ dir.

İspat.

($\Rightarrow$) İspat, G nin köşe sayısı olan n üzerinden tümevarımla yapılabilir.

$i = 1$: G bir graf olduğundan, G içinde, iki uç köşesi de aynı olan bir kenar yoktur. $\therefore |E(G)| = 0 = 1 - 1$ dir.

İddianın $i < n$ için doğru olduğunu kabul edelim.

Şimdi $j = i + 1$ için, bir önceki sonucu kullanabiliriz. Tümevarın hipotezinden, G_i ağacının $i - 1$ kenarı vardır. $\therefore v_{i+1}$ köşesinin, G_i ağacında tek bir komşu köşesi olduğundan, G_{i+1} ağacındaki kenar sayısı: $(i - 1) + 1 = i$ dir.

$\therefore$ Tümevarımdan, $G = G_n$ ağacının kenar sayısı $n - 1$ dir.

($\Leftarrow$) $|E(G)| = n - 1$ olsun. T , G grafının bir geren ağacı olsun. Bu durumda, birinci kısımdan, $|E(T)| = n - 1$ dir. $\therefore G = T$ dir, yani G bir ağaçtır ■

Sonuç 1.3 T bir ağaç, G bir graf öyle ki $\delta(G) \geq |T| - 1$ olsun. Bu durumda, $T \subseteq G$ dir, yani G nin öyle bir H altgrafı vardır öyle ki $H \simeq T$ dir.

İspat. T nin köşelerinin, iki önceki sonuçta verilen, $v_1, v_2, \dots, v_n$ biçimindeki etiketlemesini kullanarak, T nin köşe sayısı üzerinden tümevarımla, T nin G grafı içinde bir kopyasını bulabiliriz: Tümevarım hipotezinden, $1 \leq i < |T| = n$ olmak üzere, $v_1, \dots, v_i \in G$ köşeleri seçilmiş olsun. Şimdi, $v \in G - \{v_1, \dots, v_i\}$ köşesini v_{i+1} olarak seçelim öyle ki v_k , v nin T içinde tek olduğunu bildiğimiz komşusu olmak üzere, $v_k v \in E(G)$ olsun. Böylesi bir v köşesi vardır, çünkü $d(v_k) \geq \delta(G) \geq |T| - 1$ dir. $\therefore$ Tümevarımdan, G içinde T nin bir izomorf kopyasını buluruz. ■

Tanım 1.38 Eğer bir ağacın bir köşesini diğer köşelerinden farklı ve özel bir köşe olarak alırsak, bu köşeye bu ağacın bir "kökü" denir. Bir köşesi kök olarak seçilmiş bir ağaca, "köklü ağaç" denir.

Not 1.20 Bir köklü T ağacının köşeler kümesi üzerinde bir bağıntıyı şöyle tanımlıyalım: r, T nin kökü ve x, y, T nin iki köşesi olsun ve " $x \leq y \Leftrightarrow x \in rTy$ " olarak tanımlıyalım. Bu durumda, $\leq$ bağıntısına göre, $V(T)$ kümesi bir kısmi sıralı küme olur. Yani $\leq$ bağıntısı, $V(T)$ köşe kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır:

- (i) $\leq$ yansıyandır: $x \in V(T)$ olsun. Bu durumda, $x \in rTx$ olduğundan, $x \leq x$ dir.
- (ii) $\leq$ ters-simetriktir: $x, y \in V(T)$ olsun. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \in rTy$ ve $y \in rTx$ dir. Bu sebeple, $rTx \subseteq rTy$ ve $rTy \subseteq rTx$ dir. Çünkü bir ağacın herhangi iki köşesi arasında bir ve yalnız bir yol vardır. (Örneğin, eğer $rTx \not\subseteq rTy$ ise, bu durumda r ve x köşeleri arasında birbirinden farklı en az iki yol vardır: Birisi rTx , diğeri rTy yolunun r den x e kadar olan kısmıdır.)
 $\therefore rTx \subseteq rTy \subseteq rTx$ olduğundan, $rTx = rTy$ dir. $\therefore x = y$ dir.
- (iii) $\leq$ geçişkendir: $x, y, z \in V(T)$ olsun. $x \leq y$ ve $y \leq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \in rTy$ ve $y \in rTz$ olur. Bu durumda, $y \in rTz$ olduğundan, $rTy \subseteq rTz$ dir. Bu nedenle, $x \in rTy$ olduğundan, $x \in rTz$ dir. $\therefore x \leq z$ elde edilir.

Tanım 1.39 Bir önceki notta tanımlanan kısmi sıralama bağıntısına, T ve r ye göre bir "ağaç-sıralaması" denir. Eğer bu ağaç-sıralamasına göre $x < y$, yani $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise, x köşesi y köşesinin "aşağısındadır" denir. $z \in V(T)$ olmak üzere:

$$\lceil z \rceil := \{w \mid w \leq z\} \quad \text{ve} \quad \lfloor z \rfloor := \{w \mid w \geq z\}$$

kümelerine sırasıyla, z nin "alt-kapanışı" ve "üst-kapanışı" denir.

$Z \subseteq V(T)$ olsun. Z , üst-kapanışına (karşılık olarak, alt-kapanışına) eşit ise, yani $Z = \lfloor Z \rfloor := \bigcup_{z \in Z} \lfloor z \rfloor$ (karşılık olarak, $Z = \lceil Z \rceil := \bigcup_{z \in Z} \lceil z \rceil$) ise, Z kümesi T içinde "üst-kapalıdır" (karşılık olarak, "alt-kapalıdır") veya "yukarı-kümedir" (karşılık olarak, "aşağı-kümedir") denir.

Not 1.21 Ağaç sıralamasına göre, T nin kökü en küçük elemandır ve T nin yaprakları maksimal elemanlardır. Ayrıca, bir kenarın uç köşeleri karşılaştırılabilir.

Not 1.22 $v \in T$ olsun. Bu durumda, v nin alt-kapanışı bir zincirdir, yani bu kümedeki herhangi iki eleman karşılaştırılabilir:

$x, y \in [v]$ olsun. Bu durumda, $x \leq v$ ve $y \leq v$ dir. Bu nedenle, $x \in rTv$ ve $y \in rTv$ dir. Bu sebeple, T nin herhangi iki köşesi arasında tek bir yol olduğundan ve ayrıca $x, y \in rTv$ olduğundan, $x \in rTy$ veya $y \in rTx$ dir. $\therefore x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

Tanım 1.40 Bir x köşesinin "yüksekliği" rTx yolunun uzunluğudur. T ağacının " k . seviyesi", yüksekliği k olan tüm köşelerin kümesidir.

Tanım 1.41 G bir graf, $T \subseteq G$ bir köklü ağaç olsun. P , G içindeki herhangi bir T -yolu, ayrıca x ve y , bu yolun uç köşeleri olsun. Eğer (ağaç sıralamasına göre) $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise, T ağacına G içinde "normal"dir denir.

Not 1.23 T , G içinde geren bir ağaç olsun. Bu durumda, T ağacı G içinde normaldir $\Leftrightarrow$ "Eğer $xy \in E(G)$ ise, T içinde $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir":

Öncelikle, T nin normal bir ağaç olması için gerek ve yeter şart G içindeki herhangi bir T -yolunun uç köşelerinin, T içindeki ağaç sıralamasına göre karşılaştırılabilir olmasıdır.

İkincisi, T nin G grafını germesi için gerek ve yeter şart $V(T) = V(G)$ olmasıdır.

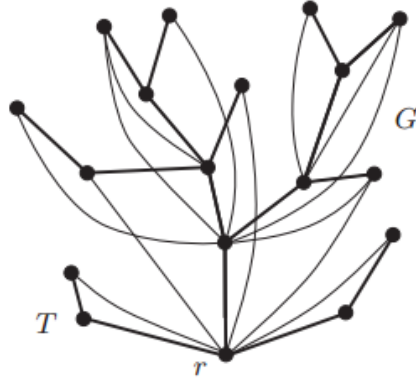
($\Rightarrow$) T nin G içinde normal olduğunu kabul edelim. $xy \in E(G)$ olsun.

Durum 1: Eğer $xy \in E(T)$ ise, $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

Durum 2: Eğer $xy \notin E(T)$ ise, xy kenarı G içinde bir T -yoludur. Bu nedenle, T ağacı G grafi içinde normal olduğundan, $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

($\Leftarrow$) Eğer $xy \in E(G)$ ise, T içinde $x \leq y$ veya $y \leq x$ olduğunu kabul edelim. T ağacı G grafını gerdiğinden, G içindeki herhangi bir T -yolu, bir $e \in E(G) - E(T)$ kenarıdır. Bu sebeple, T nin normal olduğunu göstermek için, herhangi bir $e = xy \in E(G) - E(T)$ kenarının uç noktalarının karşılaştırılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi, $e = xy \in E(G) - E(T)$ olsun. Bu durumda, $e = xy \in E(G)$ olduğundan, hipotezden, T içinde $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir. $\therefore T$, G içinde normaldir.

Örnek 1.16 Şekil 1.17 de, bir G grafi ve bu grafın kökü r olan bir T normal geren ağacı gösterilmiştir. (T ağacının kenarları koyu çizilmiştir.)



Şekil 1.17 Bir G grafi ve G nin kökü r olan bir T normal geren ağacı (Diestel 2017)

Bir G grafinin yapısını, içindeki bir T normal ağacını kullanarak anlayabiliriz, çünkü G grafi, T ağacının ayırma özelliklerini yansıtır:

Lemma 1.1 G bir graf, $T \subseteq G$ bir ağaç olsun. T nin G içinde normal olduğunu ve x, y nin T nin herhangi iki köşesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda:

- (i) $[x] \cap [y]$ kümesi, G içinde x ve y köşelerini ayırır.
- (ii) $S \subseteq V(T)$ olsun. Ayrıca, T nin bir geren ağaç olduğunu ve S nin alt-kapalı olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $U := \{z : z, T - S \text{ içinde bir minimal elemandır}\}$ olsun. Bu durumda, $z \in U$ olmak üzere, $[z]$ kümeleri, $G - S$ grafinin bileşenlerini gerer. ■

Bu alt bölümü, bir bağlantılı G grafında bir normal geren ağacın var olduğunu garanti eden bir önerme ile bitirelim:

Önerme 1.9 G bir bağlantılı graf ve r , G nin bir köşesi olsun. Bu durumda, G nin kökü r olan bir T normal geren ağacı vardır. ■

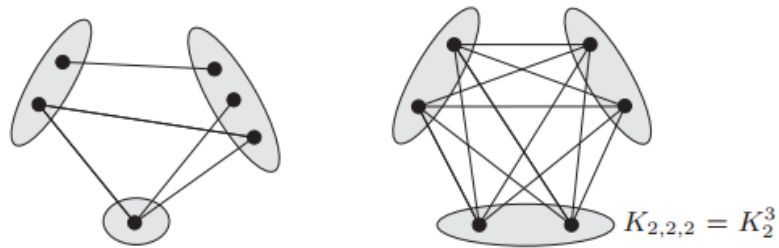
1.5 İki Parçalı Graflar

Tanım 1.42 $r \geq 2$ bir tamsayı ve $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer G nin köşe kümesi olan V nin r sınıf içeren bir ayrışımı varsa öyle ki aynı sınıftaki iki köşe arasında kenar yok ise, yani herhangi bir kenarın iki ucu farklı sınıflarda ise; bu durumda G , " r -parçalı graf" olarak adlandırılır. Böyle bir ayrışımındaki kümelerin / sınıfların her birine, bir "parça küme" denir. Bir 2-parçalı graf, "iki-parçalı" graf olarak adlandırılır.

Tanım 1.43 G bir r -parçalı graf olsun. Eğer farklı parçalardaki her iki köşe arasında bir kenar var ise, G ye bir " r -parçalı tam graf" denir. Eğer r yi zikretmezsek, G grafı bir "çoklu-parçalı tam graf" olarak adlandırılır.

Notasyon 1.8 $K_{n_1, \dots, n_r}$ r -parçalı tam graf olan $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$ grafını göstermektedir. Eğer $n_1 = \dots = n_r = s$ ise, bu durumda, $K_{n_1, \dots, n_r}$ grafı basitçe K_s^r biçiminde gösterilir. Dikkat edilirse, eğer bir K^r tam grafının her bir köşesi, s tane köşe içeren bağımsız bir küme, yani herhangi bir kenar içermeyen ve sadece s tane köşe içeren bir küme ile değiştirilirse, K_s^r grafı elde edilir.

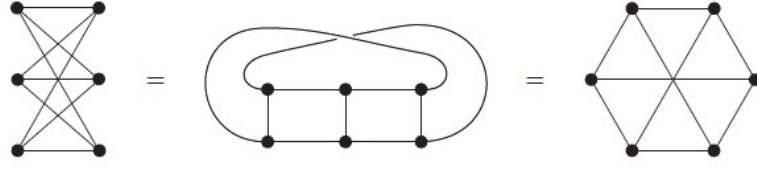
Örnek 1.17 Şekil 1.18 de iki tane 3-parçalı graf verilmiştir. Dikkat edilirse, sağdaki graf, düzgün sekizyüzlü K_2^3 nin bir çizimidir.



Şekil 1.18 3-parçalı iki graf örneği (Diestel 2017)

Örnek 1.18 Şekil 1.19 da, $K_{3,3} = K_3^2$ iki parçalı tam grafının üç farklı çizimi verilmiştir.

Tanım 1.44 Bir $K_{1,n}$ grafı "yıldız" olarak isimlendirilir. Tek köşe içeren parçalı küme-deki köşeye de yıldız grafın "merkezi" denir.



Şekil 1.19 $K_{3,3} = K_3^2$ iki parçalı tam grafının üç farklı çizimi (Diestel 2017)

Şimdi, bir iki parçalı grafi tam olarak karakterize eden bir önerme verelim:

Önerme 1.10 $G = (V, E)$, en az iki köşe içeren bir graf olsun. Bu durumda: " G iki parçalıdır $\Leftrightarrow G$, herhangi bir tek çevrim, yani uzunluğu tek olan bir çevrim içermez".

İspat.

($\Rightarrow$) G iki parçalı bir graf olsun. Bu durumda, G herhangi bir tek çevrim içermez, çünkü herhangi bir çevrimin komşu köşeleri farklı parça kümelerinde olmak zorundadır.

$\therefore$ Bir çevrimin uzunluğu çift olmalıdır.

($\Leftarrow$) G nin herhangi bir tek çevrim içermediğini kabul edelim. Öncelikle, genellemeyi bozmaksızın, G nin bağlantılı olduğunu kabul edebiliriz, çünkü G iki parçalıdır ancak ve ancak G nin bileşenlerinin her biri iki parçalıdır veya tek bir köşeden ibarettir.

T , G nin kökü r olan bir geren ağacı olsun. $\leq_T$, $V = V(G)$ üzerindeki karşılık gelen ağaç-sıralaması olsun. Şimdi, her bir $n \in V$ için, tek bir rTn yolu vardır ve bu yolun uzunluğu ya tektir ya da çifttir.

$A = \{n \in V : rTn \text{ yolunun uzunluğu tektir}\}$ ve

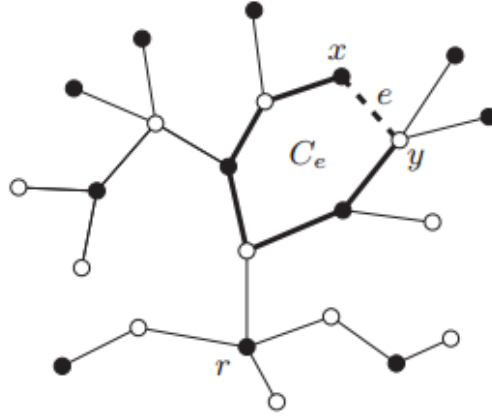
$B = \{n \in V : rTn \text{ yolunun uzunluğu çifttir}\}$ olsun.

Bu durumda, A ve B kümeleri boştan farklıdır: Eğer n , r kökünün bir komşusu ise, $n \in A$ dir; $r \in B$ dir. Ayrıca, $A \cap B = \emptyset$ olduğu aşikardır. G nin, parça kümeleri A ve B olan bir iki-parçalı küme olduğunu ispat edeceğiz. $e = ny \in E(G)$ olsun.

Durum 1. $e \in T$ olduğunu kabul edelim ve diyelim ki $n <_T y$ olsun. Bu durumda, $rTy = rTny$ dir.

$\therefore$ n ve y köşeleri farklı parça kümelerindedir, çünkü rTn yolunun uzunluğu tektir (karşılık olarak, çifttir) $\Leftrightarrow rTny = rTy$ yolunun uzunluğu çifttir (karşılık olarak, tektir).

Durum 2. $e \notin T$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $C_e := nTy + e$ bir çevrimdir (ve hipotezden uzunluğu çifttir) (Şekil 1.20 yi inceleyiniz).



Şekil 1.20 $T + e$ grafi ve içindeki C çevrimi (Diestel 2017)

Şimdi, Durum 1'den, nTy yolu üzerindeki köşeler sıra ile değişmeli olarak A ve B parça kümelerine attilirler.

$\therefore C_e$ nin uzunluğu hipotez gereği çift olduğundan, $nTy = C_e - e$ yolunun uzunluğu tektir, yani nTy yolunun çift sayıda köşesi vardır.

$\therefore n$ ve y köşeleri farklı parça kümelerine attilirler. ■

2. BAĞLANTILILIK

Birinci bölümde verilen k –bağlantılılık tanımı çok fazla sezgisel değildir. Şöyle ki: Bu tanım bize, bir k –bağlantılı graftaki bağlantılar hakkında çok fazla bilgi vermemekte ve yalnızca böylesi bir grafi bağlantısız hale getirmek için en az k tane köşeye ihtiyacımız olduğunu söylemektedir. Şimdi vereceğimiz tanım ise, k –bağlantılılığı daha iyi betimlemektedir.

Tanım 2.1 Eğer bir grafin herhangi iki köşesi k –tane bağımsız yol ile bağlanabiliyor ise, bu grafa " k –bağlantılıdır" denir.

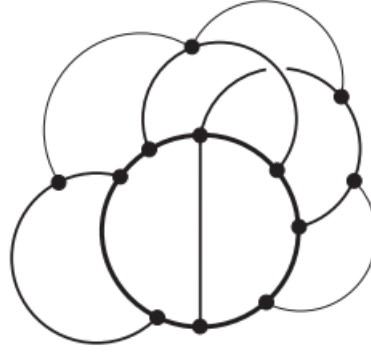
Graf teorisinin klasik sonuçlarından birisi, bu iki k –bağlantılılık tanımının aslında denk olduklarını, aynı özelliğin dual halleri olduklarını ortaya koymaktadır. Menger'in bu teoremini, Alt Bölüm 2.3 de çalışacağız. Alt Bölüm 2.1 ve 2.2 de, sırasıyla 2–bağlantılı ve 3–bağlantılı grafları inceleyeceğiz. Bu küçük k değerleri için, böylesi grafları nasıl inşa edebileceğimizin, basit genel bir tarifinin verilmesinin mümkün olduğunu göreceğiz.

Alt Bölüm 3.4 ve 3.5 de, bağlantılılığın diğer yönlerine bakacağız. Bu yönler ve bunlarla ilgili çalışmalar standart olana göre daha yakın tarihlidir ve fakat daha az önemli değildir: G nin bir H indüke altgrafı için, G içindeki H –yollarının sayısı problemi ve belirlenmiş köşe çiftlerini birleştiren, G içindeki ayrık yolların varlığı problemi.

2.1 2–Bağlantılı Graflar ve Altgraflar

En basit 2–bağlantılı graflar çevrimlerdir. Diğer tüm 2–bağlantılı graflar, bir çevrime yollar eklenerek, tümevarımla elde edilebilir:

Teorem 2.1 *Bir graf 2–bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Bu graf, bir çevrimden halihazırda inşa edilmiş H graflarına, H yollar eklenerek inşa edilmiştir (Şekil 2.1).*



Şekil 2.1 2–bağlantılı grafların inşası (Diestel 2017)

İspat.

($\Leftarrow$) Böylesi inşa edilen her grafin 2–bağlantılı olduğu aşıkardır. Çünkü her C çevrimi 2 bağlantılıdır ve bir C çevrimine bir C –yolu eklersek elde edilecek H_1 grafi yine 2–bağlantılı olacaktır. Ardından elde edilen H_1 grafına bir H_1 –yolu eklersek, elde edilecek H_2 grafi yine 2–bağlantılı olacaktır. Tümevarımdan, bu şekilde elde edilecek tüm H grafları iki bağlantılı olacaktır.

($\Rightarrow$) Karşıt olarak, 2–bağlantılı bir G grafi verilsin. Bu durumda, G bir çevrim içerdiğinden, yukarıda belirtildiği gibi inşa edilmiş olan bir maksimal H altgrafi içerir.

Şimdi, $x, y \in V(H)$ olmak üzere, herhangi bir $xy \in E(G) \setminus E(H)$ kenarı bir H –yolu vereceğinden, ve H maksimal olduğundan, böylesi bir xy kenarı yoktur, yani H bir indüke altgraftır. Bu sebeple, eğer $H \neq G$ ise, G bağlantılı olduğundan, $v \in G - H$ ve $w \in H$ olmak üzere, bir $vw \in E(G)$ kenarı vardır.

G , 2–bağlantılı olduğundan, $G - w$ grafi bir $P, v - H$ yolu içerir. Bu durumda, wvP, G içinde bir H –yolu verir ve $H \cup wvP, G$ grafinin H den daha büyük olan inşa edilebilir bir altgrafi olur. Bu durum, H nin maksimalliği ile çelişir. Bu sebeple $H = G$ dir. ■

Herhangi bir grafin, maksimal bağlantılı altgraflarına, yani bileşenlerine ayrıştırılması gibi, bir bağlantılı G grafini maksimal 2–bağlantılı altgraflarına ayrıştırmayı deneyebiliriz. Bu durumda elde edilebilecek altgraflar, tamamıyla ayrık olmayabilir ve G grafinin tümünü örtmeyebilir. Bununla birlikte, "maksimal 2–bağlantılı altgraf" şartını biraz zayıflatmak kolaydır ve böylece, zayıflatılmış şartı sağlayan graflar, G yi örter ve hemen hemen ayrık olurlar.

Tanım 2.2 Bir grafın kesim köşesi içermeyen bir maksimum bağlantılı altgraflarına bir "blok" denir. (Bir blok, G nin kesim köşelerini içerebilir ve fakat kendisinin hiçbir kesim köşesi yoktur.)

Not 2.1 Bir blok, ya bir maksimal 2—bağlantılı altgraftır, ya (uç noktalarıyla) bir köprüdür, ya da bir izole köşedir. Karşıt olarak, böylesi her altgraf bir bloktur. Tanımlarındaki maksimallikten ötürü, G nin farklı blokları, yalnızca tek bir köşede örtüşebilirler, ki bu durumda bu köşe G nin bir kesim köşesidir. Bu sebeple, G nin her bir kenarı tek bir blok içerisinde bulunur ve G , bloklarının birleşimidir.

Tanım 2.3 $\emptyset \neq F \subseteq E(G)$ bir kenarlar kümesi olsun. Eğer $V(G)$ nin, $F = E(V_1, V_2)$ olacak şekilde bir ayrışımı var ise, F kümesine, G içinde bir "kesim" denir. Ayrıca, F kümesindeki kenarlar bu ayrışımı "çaprazlıyor" denir. V_1 ve V_2 köşe kümeleri, bu kesimin " taraflarıdır". Eğer $V_1 = \{v\}$ ise, bu kesim $E(v)$ biçiminde gösterilir. G içinde bir minimal boştan farklı kesim, bir "bağ" ("bond") olarak adlandırılır. (Bir F bağının minimal olması şu anlama gelmektedir: $F' \subsetneq F$ ise, F' bir kesim değildir.)

Çevrimler ve bağlar, bir tek bloğa sınırlandırılmışlardır:

Lemma 2.1 G , herhangi bir graf olsun. Bu durumda:

- (i) G nin çevrimleri, bloklarının çevrimlerinden ibarettir.
- (ii) G nin bağları, bloklarının minimal kesimlerinden ibarettir.

İspat.

(i) G içinde bir çevrim, herhangi bir kesim köşesi içermeyen bir bağlantılı altgraftır. Bu sebeple, hiçbir kesim köşesi içermeyen maksimal bağlantılı bir altgraf tarafından içerilir. Tanım gereği, bu G nin bir bloğudur.

(ii) İspat, şu gözlemin birbiri ardına uygulanmasıyla kolaylıkla elde edilir: G grafının herhangi bir kesimini ele alalım. xy , bu kesimin kenarlarından birisi ve B , bu kenarı içeren blok olsun. Blok tanımı gereği B nin maksimalliğinden, G herhangi bir B —yolu içermez. Bu sebeple, G grafındaki her $x - y$ yolu, B içinde kalır. (Çünkü böylesi bir yolun herhangi bir parçası B ye ait olmasaydı, dışarıdaki bu parçanın, ilk B den ayrıldığı kenarının B ye

ait olan köşesi ile ardından ilk B ye temas ettiği köşesi arasında kalan kısmı bir B-yolu verirdi.) Bu nedenle, ele aldığımız kesimin B bloğu içindeki kenarları, x ve y köşelerini, G grafi içinde dahi ayırır. Bu sebeple, bu kesimin B bloğu içindeki kenarları, bir kesim oluşturur. (Bu kenarları attığınızda, x ve y arasındaki bağlantı kopmaktadır. Bu kenarlar halihazırda zaten bir kesimin içinde yer aldıklarından, bu kenarların kümesi bu kesimin bir alt kesimini verecektir; yani G nin, başlangıçta ele aldığımız kesimden daha büyük olmayan bir kesimi oluşturacaktır.) Bu sebeple, G nin minimal kesimleri, yani bağları, bloklarının minimal kesimleridir. ■

Her bir kenar tek bir bloğa ait olduğundan; aynı blok içinde olmak, bir grafin kenarlar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik, başka iki farklı yolla da ifade edilebilir:

Lemma 2.2 e, f, G grafinin farklı iki kenarı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) e ve f kenarları, G nin ortak bir bloğuna aittirler.
- (ii) e ve f kenarları, G nin ortak bir çevrimine aittirler.
- (iii) e ve f kenarları, G nin ortak bir bağına aittirler. ■

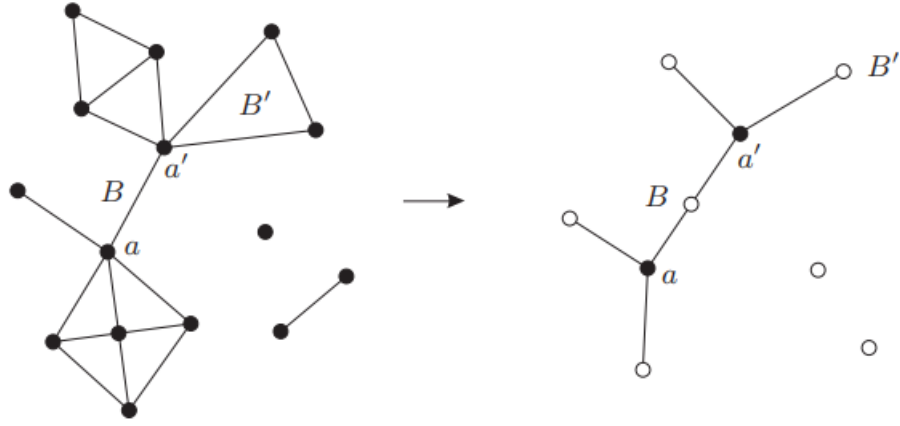
Tanım 2.4 A, G grafinin kesim köşelerinin kümesi ve $\mathcal{B}$ bloklarının kümesi olsun. Bu durumda, $A \cup \mathcal{B}$ kümesi üzerinde, $a \in B \in \mathcal{B}$ olmak üzere, kenarları aB olan tabii bir iki parçalı graf vardır. (Bu grafin parça kümelerinin A ve $\mathcal{B}$ kümeleri olduğu aşikardır.) Bu grafa, G nin "blok grafi" denir.

Örnek 2.1 Şekil 2.2 de bir G grafi ve G nin blok grafi verilmiştir.

Lemma 2.3 Bir bağlantılı grafin blok grafi bir ağaçtır. ■

2.2 3—Bağlantılı Grafların Yapısı

Bu alt bölümde, her 3—bağlantılı grafin, bir K^4 tam grafindan 3—bağlantılılığı koruyan elementer işlemlerin bir dizisiyle nasıl elde edilebileceğini tarif edeceğiz. Ardından,

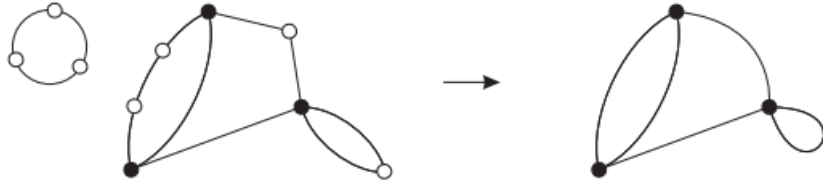


Şekil 2.2 Bir graf ve blok grafi (Diestel 2017)

3-bağlantılı grafların çevrim uzaylarının cebirsel yapısı ile ilgili Tutte'nin bir teoremini ifade edeceğiz. Önceki alt bölümün ilk teoremi, bir çevrimden başlayarak, 2-bağlantılı bir grafın tümevarımla nasıl inşa edileceğini tarif etmektedir. Bu süreç sırasında inşa edilen bütün graflar 2-bağlantılı olduklarından, bu yolla inşa edilebilen graflar tam olarak 2-bağlantılı graflardır. Şimdi, 3-bağlantılı graflar için benzer işlemler yapacağız. 3-bağlantılı her $G \neq K^4$ grafının, daha küçük bir 3-bağlantılı grafa iki yolla dönüştürülebileceğini göstereceğiz: Bir kenarın silinmesiyle (eğer bu durumda derecesi 2 olan köşeler ortaya çıkar ise, bu köşeler bastırılır) ve bir kenarın büzülmesiyle. Bu işlemlerin tersine uygulanması, bir K^4 tam grafindan başlayarak tüm 3-bağlantılı grafları iki bağımsız yolla inşa etme imkanı verecektir.

Tanım 2.5 v , bir G multi-grafının derecesi 2 olan bir köşesi olsun. v köşesinin silinip, komşu iki köşesinin arasına bir kenar eklenmesi işlemine, v nin "bastırılması" denir. Eğer v ye bağlı olan kenarlar aynı ise, yani v de bir ilmek var ise, herhangi bir kenar eklemeyiz ve $G - v$ grafını elde ederiz. Eğer v ye bağlı kenarların diğer uç köşeleri aynı $w \neq v$ köşesi ise, eklenen kenar w köşesinde bir ilmek olur.

Örnek 2.2 Şekil 2.3 de, soldaki graftaki beyaz köşeler bastırılırsa, sağdaki graf elde edilir.



Şekil 2.3 Köşelerin bastırılması örneği (Diestel 2017)

Notasyon 2.1 Bir G grafında bir e kenarı verilsin. $G - e$ grafında, eğer e nin uç köşelerinden herhangi birisinin (veya her ikisinin birden) derecesi 2 olur ise, bu köşe (veya köşelerin) bastırılması ile elde edilen multi-graf $G \dot{-} e$ biçiminde gösterilir.

Lemma 2.4 e , bir G grafinin bir kenarı olsun. Eğer $G \dot{-} e$ grafi 3-bağlantılı ise, G grafi da 3 bağlantılıdır.

3-bağlantılı multi-grafların paralel kenarlar içermediği bilinmektedir. Diğer yandan, bir köşe bastırıldığı zaman ortaya çıkabilecek paralel kenarlar silinmediğinden; bir önceki lemmada verilen, $G \dot{-} e$ grafinin 3-bağlantılı olduğu hipotezi, bu grafin G den elde edilmesi sırasında herhangi bir paralel kenarın ortaya çıkmadığı sonucunu gerektirir. Bu sebeple, aslında $G \dot{-} e$ de bir graftır.

Lemma 2.5 Her 3-bağlantılı $G \neq K^4$ grafında öyle bir e kenarı vardır ki $G \dot{-} e$ grafi da 3-bağlantılıdır.

Teorem 2.2 (Tutte 1966)

Bir G grafi 3-bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Bir $G_0, \dots, G_n$ graflar dizisi vardır öyle ki:

(i) $G_0 = K^4$ ve $G_n = G$ dir;

(ii) Her $i < n$ için, $G_i = G_{i+1} \dot{-} e$ olacak şekilde bir $e \in G_{i+1}$ kenarı vardır.

Ayrıca, böylesi her dizideki bütün graflar 3-bağlantılıdır.

İspat.

($\Rightarrow$) G bir 3-bağlantılı graf olsun. Bu durumda, bir önceki lemmayı kullanarak, $G_n, \dots, G_n$ grafları sırasıyla elde edilir.

$(\Leftarrow) G_n, \dots, G_n, (i)$ ve (ii) şartlarını sağlayan, grafların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda, iki önceki lemmadan, bütün bu graflar ve özel olarak, $G = G_n$ 3-bağlantılıdır.

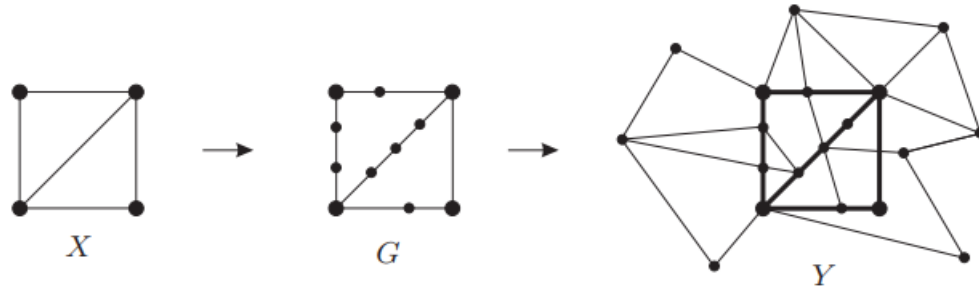
■

Tanım 2.6 X herhangi bir graf olsun. X in bazı veya tüm kenarlarına bazı yeni köşeler eklenmesiyle ve dolayısıyla bu kenarların alt bölümlenmesiyle elde edilen herhangi bir grafa, X in bir "alt-bölümlenmesi" denir.

Diğer bir ifadeyle, X grafının bazı kenarlarını, uç noktaları bu kenarların uç noktaları olan ve X in veya yeni eklenen bir diğer yolun herhangi bir köşesini iç köşesi olarak içermeyen yollarla değiştirirsek, elde edilen grafa X in bir "alt-bölümlenmesi" denir.

Eğer G, X in bir alt-bölümlenmesi ise, X in orijinal köşelerine, G nin "bölüm köşeleri"; X e yeni eklenen köşelere "alt-bölüm köşeleri" denir. Dikkat edilirse, alt-bölüm köşelerinin derecesi 2 dir, diğer yandan bölüm köşelerinin dereceleri, bu köşelerin X içindeki dereceleri ile aynıdır.

Örnek 2.3 Şekil 2.4 de bir G grafı ve onun bir alt-bölümlenmesi olan bir X grafı verilmiştir.



Şekil 2.4 X grafı, G grafının bir alt-bölümlenmesidir (Diestel 2017)

Bir önceki teorem bize, tüm 3-bağlantılı grafları yinelemeli olarak inşa etme imkanı vermektedir. K^4 tam grafindan başlayarak, halihazırda inşa edilmiş her grafa, (ii) ile uyumlu bir şekilde mümkün olan her yolla yeni bir kenar ekleriz: Mevcut olan iki köşenin arasına, (aynı kenar üzerinde olmayan) grafa yeni eklenmiş alt-bölüm köşeleri arasına veya eskiden var olan bir köşe ile yeni eklenmiş bir alt-bölüm köşesi arasına, (ii) şartını sağlayacak bir şekilde kenar ekleyebiliriz.

Şimdi 3—bağlantılı grafları, K^4 tam grafına indirgemek için kullanılan ve kenarların bölünmesi yoluyla elde edilen ikinci metodu verelim. Bu yaklaşımda, multi-grafları değil, yalnızca grafları ele alacağız.

Lemma 2.6 *Her 3—bağlantılı $G \neq K^4$ grafi içinde öyle bir e kenarı vardır ki G/e yine bir 3—bağlantılı graftır.*

Teorem 2.3 (Tutte 1961)

Bir G grafi 3—bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Bir $G_0, \dots, G_n$ graflar dizisi vardır öyle ki:

- (i) $G_0 = K^4$ ve $G_n = G$ dir;
- (ii) Her $i < n$ için, G_{i+1} grafi içinde bir xy kenarı vardır öyle ki $d(x), d(y) \geq 3$ ve $G_i = G_{i+1}/xy$ dir.

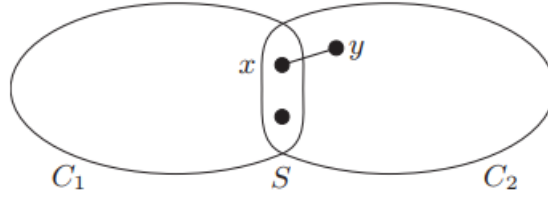
Ayrıca, böylesi bir dizideki tüm graflar 3—bağlantılıdır.

İspat.

($\Rightarrow$) Eğer G 3—bağlantılı ise, önceki lemmadan, (i) ve (ii) şartlarını sağlayan, bir 3—bağlantılı graflar dizisi $G_n, \dots, G_0$ vardır.

($\Leftarrow$) Tabi ki sadece teoremin son cümlesini ispat etmemiz gerekmektedir. $G_0, \dots, G_n$, (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir graflar dizisi olsun. Her $i < n$ için eğer G_i grafi 3—bağlantılı ise, G_{i+1} grafının da 3—bağlantılı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Diyelim ki bu iddia yanlış olsun. Bu durumda, G_{i+1} grafi en fazla 2—bağlantılı olduğundan, G_{i+1} in en fazla 2 köşesini içeren bir ayırıcı S kümesi vardır. C_1 ve C_2 , $G_{i+1} - S$ grafının iki bileşeni olsun. x ve y köşeleri komşu olduklarından, $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz. $(x, y \in S$ ise, $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$ dir. $x \in S, y \notin S$ ise, $y \in C_2$ kabul edebiliriz ve kesişim yine boş küme olur. $x, y \notin S$ ise, x ve y komşu ve C_1, C_2 farklı bileşenler olduklarından, her ikisi de aynı bileşende olmalıdırlar, $x, y \in C_2$ kabul edebiliriz ve yine kesişim boş küme olur. Aslında bu son durumun olası olmadığı bir sonraki paragrafta izah edilmiştir.) (Şekil 2.5 de verilen durumu inceleyiniz.)

Bu durumda, C_2 bileşeni ne x ve y köşelerinin her ikisini birden içerebilir, ne de bir $v \notin \{x, y\}$ köşesi içerebilir. Aksi takdirde, C_1 ve C_2 farklı bileşenler olduklarından, v_{xy}



Şekil 2.5 $xy \in G_{i+1}$ kenarının konumu (Diestel 2017)

köşesi (yeni xy kenarının büzülmesiyle x ve y köşelerinden elde edilen köşe) veya v köşesi, G_i grafi içinde, C_1 altgraflarından en fazla iki köşe ile ayrılabilirlerdi. (Çünkü $|S| \leq 2$ dir ve v_{xy} veya v nin tüm komşuları $V(C_2) \cup S$ kümesi içindedir.) Fakat bu durum, G_i nin 3-bağlantılı olmasıyla çelişirdi. Bu sebeple, C_2 tek bir köşe içermelidir: Ya x ya da y köşesini içerir. Fakat bu durum da, $d(x) \geq 3$ ve $d(y) \geq 3$ hipotezi ile çelişir. $x \in C_2$ (karşılık olarak, $y \in C_2$) $\Rightarrow C_2$ tek köşe içerdiğinden, x in (y nin) tüm komşuları S kümesi içinde kalır. Fakat $|S| \leq 2$ dir. Bu sebeple $d(x) \leq 2$ (veya $d(y) \leq 2$) olur ki bu $d(x) \geq 3$ (karşılık olarak, $d(y) \geq 3$) hipoteziyle çelişir. ■

Tutte'nin diğer teoremi gibi önceki teoremi de bize, tüm 3-bağlantılı grafları, K^4 tam grafindan başlayarak, basit lokal değişikliklerle ve 3-bağlantılı graflar ailesinden hiç ayrılmadan, tümevarım yöntemiyle inşa etme imkanı vermektedir. Halihazırda inşa edilmiş bir 3-bağlantılı graf verilsin. Bu grafin herhangi bir V köşesi seçilir ve bu köşe birbirine komşu iki v', v'' köşelerine ayrılır, yani v köşesi yerine, birbirine komşu v', v'' köşeleri konulur; ardından, bu iki köşenin her birisi v nin önceki komşularının en az ikisi ile birleştirilir. Bu yaklaşım, Tutte'nin "çark teoremi" olarak bilinen sonucunun esasını oluşturmaktadır. ($C^n * K^1$ formundaki grafların her birisine "çark grafi" denir. Bu sebeple, en küçük çark grafi K^4 tam grafidir.)

3 ten büyük k tam sayıları için, herhangi bir k -bağlantılı grafin, bir diğer k -bağlantılı graf elde etmek amacıyla, bir kenarını büzebiliriz iddiası doğru değildir. Bununla birlikte, her $k > 3$ tamsayısı için bir n_k sabiti vardır öyle ki her k -bağlantılı grafa, bir kenarı sildiğimizde veya büzdüğümüzde, elde edilen grafin, her iki tarafta da en az n_k tane köşe kalması şartıyla, k köşeden daha az köşe içeren bir ayırma kümesi yoktur.

Teorem 2.4 (Tutte 1963)

3-bağlantılı bir grafin çevrim uzayı, bu grafin ayırma kümesi olmayan indüke çevrimleri tarafından üretilir.

Not 2.2 $G = (V, E)$, (köşeler kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve) kenarlar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olan bir graf olsun. Bu grafin "kenar uzayı" $\mathcal{E}(G), \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 2-elemanlı cisim olmak üzere, tüm $E \rightarrow \mathbb{F}_2$ fonksiyonların vektör uzayıdır. $\mathcal{E}(G)$ uzayının elemanları ile E nin alt kümeleri arasında bire-bir bir eşleme vardır: Her fonksiyon, kendisinin 1 e taşıdığı elemanların oluşturduğu kümeye karşılık gelir. Bu sebeple, $\mathcal{E}(G)$ uzayında, vektör toplamı simetrik fark işlemine, $\emptyset \subseteq E$ sıfır elemanına karşılık gelir ve her $F \subseteq E$ için, $F = -F$ dir. $e_1, \dots, e_m, \mathcal{E}(G)$ uzayının standart tabanıdır ve bu sebeple, $\dim \mathcal{E}(G) = m$ dir. G grafinin "çevrim uzayı" $C = C(G), \mathcal{E}(G)$ uzayının, G nin bütün çevrimlerinin gerdiği alt uzayıdır. Daha açık bir ifadeyle, bu çevrimlerin kenar kümelerinin gerdiği alt uzayıdır.

2.3 Menger Teoremi

Menger Teoremi, graf teoreminin köşe taşlarından birisidir:

Teorem 2.5 (Menger 1927) $G = (V, E)$ bir graf ve $A, B \subseteq V$ olsun. Bu durumda, G grafi içinde A kümesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısı, G grafi içindeki ayrık $A - B$ yollarının maksimum sayısına eşittir.

Notasyon 2.2 G bir graf ve $A, B \subseteq V(G)$ teoremde olsun. Bu durumda, G içinde A kümesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısını $k = k(G, A, B)$ biçiminde gösterelim.

Menger Teoreminin Birinci İspatı.

Aşık bir şekilde, G grafi k den daha fazla sayıda ayrık $A - B$ yolu içermez. Bu sebeple, ispat edilmesi gereken, böylesi k tane ayrık yolun var olduğu gerçeğidir.

İspatı G nin kenar sayısı, yani $\|G\|$ üzerinden tümevarımla yapacağız. Eğer G grafında hiç kenar yok ise, A yı B den ayıran minimum köşe sayısı k olduğundan, $|A \cap B| = k$ dır

ve k tane trivial (yani hiçbir kenar içermeyen, tek köşeden ibaret olan) $A - B$ yolu vardır. Bu sebeple, G grafinin bir $e = xy$ kenarı içerdiğini kabul edelim. Eğer G grafında k tane ayrık $A - B$ yolu yok ise, G/e grafi içinde de yoktur. Burada, eğer G grafi içinde x ve y köşelerinden en az birisi A (karşılık olarak B) kümesine ait ise, büzülmüş v_e köşesini (yani x ve y köşelerinin bir araya getirilmesi ile elde edilen köşeyi) A nın (karşılık olarak B nin) bir elemanı olarak sayıyoruz. Bu durumda, tümevarım hipotezinden, G/e grafi, k den daha az sayıda eleman içeren bir $A - B$ ayıran Y kümesini içerir. v_e köşesi Y kümesi içinde olmalıdır, çünkü aksi takdirde $Y \subseteq V$, G içinde bir $A - B$ ayırma kümesi olurdu ve bu, G grafindeki bir $A - B$ ayırma kümesinin eleman sayısının en az k olduğu kabulüyle çelişirdi.

Bu durumda, $X := (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$, G içinde, tam olarak k tane köşe içeren bir $A - B$ ayırma kümesidir. Şimdi $G - e$ grafini ele alalım. $x, y \in X$ olduğundan, $G - e$ içindeki her $A - X$ ayırma kümesi, G içinde bir $A - B$ ayırma kümesidir. ($G - e$ içinde A ile X ayıran bir küme, X kümesi A ile B yi ayırdığından ve e köşesinin uç noktaları $x, y \in X$ olduğundan, G içinde A ile B kümelerini de ayırır.) Bu sebeple, bir $A - X$ ayırma kümesi en az k tane köşe içerir. Bu nedenle, tümevarım hipotezinden $G - e$ içinde k tane ayrık $A - X$ yolu vardır. Benzer şekilde, yine $G - e$ içinde, k tane ayrık $X - B$ yolu vardır. X köşe kümesi A yı B den ayırdığından, bu iki yol sistemi X kümesi dışındaki herhangi bir köşede kesişemezler. Bu sebeple, bu iki sistem birleştirilerek, G içinde k tane ayrık $A - B$ yolu elde edilir. (Her iki yol sistemi de k tane ayrık yol içerdiğinden ve $|X| = k$ olduğundan, X in her bir köşesinde, her iki sistemden sadece birer yol kesişir. Bu sebeple, bu iki sistemdeki k yolun birleştirilmesiyle elde edilen k tane $A - B$ yolu ayrıktır.) ■

Tanım 2.7 $\mathcal{P}$, ayrık $A - B$ yollarının bir kümesi ve $\mathcal{Q}$ böylesi bir başka küme olsun. Eğer A kümesinin $\mathcal{P}$ içindeki bir yol üzerinde olan tüm köşelerinin kümesi, A kümesinin $\mathcal{Q}$ içindeki bir yol üzerinde olan tüm köşelerinin kümesinin öz alt kümesi ve aynı şekilde B kümesi için de aynı şart sağlanıyor ise; $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ yi "aşmaktadır" denir. Bu durumda, her şeyden önce, $|\mathcal{Q}| \geq |\mathcal{P}| + 1$ dir.

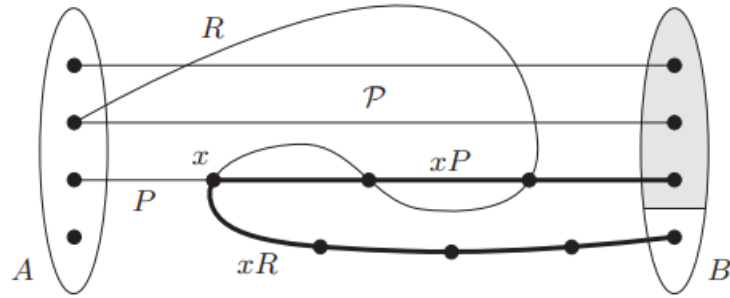
Menger Teoreminin İkinci İspatı.

Daha kuvvetli olan şu iddiayı ispat edelim:

"Eğer $\mathcal{P}$, G içinde, k den daha az sayıda ayrık $A - B$ yolu içeren bir küme ise; bu durumda, G grafi, $\mathcal{P}$ kümesini aşan ve $|\mathcal{P}| + 1$ tane eleman içeren ayrık $A - B$ yollarının bir kümesini içerir."

G ve A kümelerini sabit tutalım ve fakat B kümesin değişmesine izin verelim. Bu durumda $|\bigcup \mathcal{P}|$ üzerinde tümevarım uygulayalım. ($\bigcup \mathcal{P}$ kümesi, $\mathcal{P}$ deki yolların köşelerinin birleşimidir.)

R , $\mathcal{P}$ içindeki bir yolun uç noktası olan B kümesinin (k den daha az sayıdaki) köşelerinden herhangi birisini uç noktası olarak içermeyen bir $A - B$ yolu olsun. Eğer R , $\mathcal{P}$ içindeki hiçbir yol ile kesişmiyor ise, bu durumda $\mathcal{P} \cap R$, $\mathcal{P}$ yi aşar ve ispat tamamlanmış olur. ($\mathcal{P} = \emptyset$ olduğu zaman da bu durum gerçekleşir ve tümevarımla ispat tam bu noktada başlar.) Eğer R , $\mathcal{P}$ içindeki bazı yollarla kesişiyor ise, R nin bir $P \in \mathcal{P}$ yolu üzerinde de olan (A dan B ye giderken ki) son köşesi x olsun (Şekil 2.6).



Şekil 2.6 $xy \in G_{i+1}$ kenarlarının konumu (Diestel 2017)

Şimdi $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ ve $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus P) \cup Px$ olsun. Bu durumda, $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ dir ve fakat $|\bigcup \mathcal{P}'| < |\bigcup \mathcal{P}|$ dir. (Dikkat edilirse, P yolunun x köşesinden sonraki köşeleri Px yolunda yoktur. $\therefore$ kümesindeki yolların köşelerinin birleşim kümesi, $\mathcal{P}$ kümesindeki yolların köşelerinin birleşim kümesinin özalt kümesidir.) Ayrıca, $k(G, A, B') \geq k(G, A, B)$ dir. ($B \subseteq B'$ olduğundan, G grafi içinde, A ve B' kümelerini ayıran bir köşeler kümesi, A ve B kümelerini de ayırır.) Bu durumda, $\mathcal{P}$, G içinde, $k' = k(G, A, B')$ den daha az sayıda ayrık $A - B'$ yolu içerdiğinden (çünkü $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| \leq k(G, A, B) \leq k(G, A, B')$ dir) ve $|\bigcup \mathcal{P}'| < |\bigcup \mathcal{P}|$ olduğundan, tümevarım hipotezinden, $|\mathcal{P}'| + 1$ tane ayrık $A - B'$ yolu içeren ve $\mathcal{P}'$ kümesini aşan bir $\mathcal{Q}$ kümesi vardır. Bu durumda, $\mathcal{P}'$ kümesi, B' kümesindeki uç noktası x olan bir yol (yani Px) içerdiğinden; $\mathcal{Q}'$ kümesi de uç noktası x olan bir $\mathcal{Q}$

yolu içerir. Ayrıca, Q' kümesi, $\mathcal{P}'$ kümesindeki yolların (B' içindeki) uç noktası olmayan bir y köşesinde biten, tek bir Q' yolu içerir.

Eğer $y \notin xP$ ise, Q, Q' kümesine, Q yoluna xP yolunun eklenmesiyle ve eğer $y \notin B$ (eğer $y \in B$ ise, doğrudan Q' yolunu alırız) ise, Q' yoluna yR ($y \notin xP$ olduğundan, $y \notin B$ ise, $y \in xR$ olmak zorundadır. Yani y köşesi, R yolu üzerindedir.) yolunun eklenmesiyle elde edilen yolların katılmasıyla elde edilen küme olsun. Aksi takdirde, ($y \in xP$ dir. Ayrıca, $Px \in \mathcal{P}'$ yolunun uç noktası x ve diğer yandan, $y, \mathcal{P}'$ kümesindeki yolların (B içindeki) uç noktalarından birisi olmadığından, $y \neq x$ dir.) $y \in \dot{x}P$ dir ve bu durumda, Q, Q' kümesine, Q yoluna xR yolunun eklenmesiyle ve Q' yoluna yP yolunun eklenmesiyle elde edilen yolların katılmasıyla elde edilen küme olsun.

Tüm bu durumlarda, istenildiği gibi, $Q, \mathcal{P}$ yi aşar. ■

Şimdi Menger Teoreminin üçüncü ispatı için gerekli tanımları, notasyonları ve lemmaları verelim.

Yine G, A, B verilsin ve $\mathcal{P}, G$ içinde, ayrık $A - B$ yollarının bir kümesi olsun. $X \subseteq V$, bir $A - B$ ayrım kümesi olsun. Eğer X kümesi, $\mathcal{P}$ içindeki her bir yoldan tam olarak bir tane köşe seçilerek oluşturulmuş ise; $X, \mathcal{P}$ "üzerindedir" diyelim. Aşık bir şekilde, eğer böylesi bir X ayrım kümesi bulabilirsek, bu durumda $k \leq |X| = |\mathcal{P}|$ olduğundan, Menger teoremi ispat edilmiş olacaktır.

Notasyon 2.3 $V[\mathcal{P}] := \bigcup \{V(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ ve $E[\mathcal{P}] := \bigcup \{E(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ olsun.

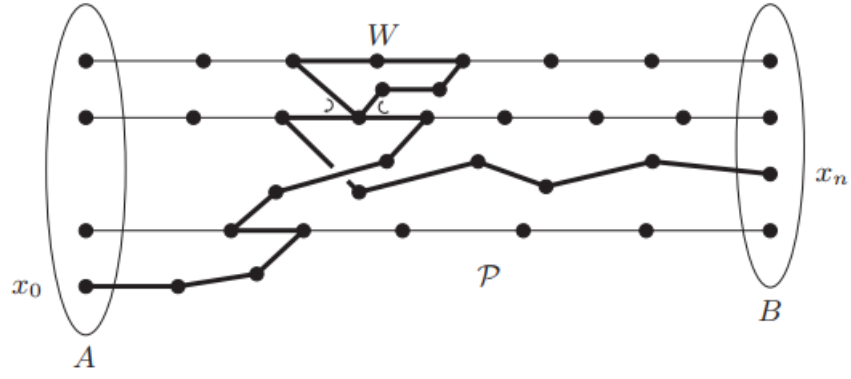
Tanım 2.8 Her $i \neq j$ için, $e_i \neq e_j$ olmak üzere, $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots x_{n-1} e_{n-1} x_n$, G içinde bir yürüyüş olsun. Eğer W yürüyüşü, $A V[\mathcal{P}]$ içindeki bir köşeden başlıyor ve her $i < n$ için:

(i) Eğer $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$ ise, $W, e = x_i x_{i+1}$ kenarını geriye doğru yürür, yani, bir $P \in \mathcal{P}$ yolu vardır öyle ki $x_{i+1} \in P^\circ$;

(ii) Eğer $i \neq j$ iken $x_i = x_j$ ise, $x_i \in V[\mathcal{P}]$;

(iii) Eğer $x_i \in V[\mathcal{P}]$ ise, $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$ ($e_{-1} := e_0$) dir.)

şartları sağlanıyor ise, W yolu $\mathcal{P}$ kümesine göre "alterne ediyor" denir. (Şekil 2.7)



Şekil 2.7 A dan B ye bir alterne W yolu (Diestel 2017)

Not 2.3 W , $\mathcal{P}$ ye göre alterne bir yol olsun. Bu durumda, (ii) den, $V[\mathcal{P}]$ dışındaki herhangi bir köşe, W üzerinde en fazla bir sefer olabilir. Ayrıca, W yolunun tüm e_i kenarları farklı olduğundan (yani hiçbir e_i kenarı tekrar yürünmediğinden), (iii) den, herhangi bir $v \in V[\mathcal{P}]$ köşesi, W üzerinde en fazla iki sefer tekrar edilebilir. Böylesi bir durum ise, $v \neq x_n$ için, tam olarak iki farklı durumda gerçekleşebilir. Bunlar, $0 < i < j < n$ olmak üzere ($x_0 \notin V[\mathcal{P}]$ olduğundan, $i = 0$ olamaz):

$$\text{Ya } e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}] \quad \text{ve} \quad e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}],$$

$$\text{ya da } e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}] \quad \text{ve} \quad e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]$$

durumlarından birisi olmak zorundadır.

Bu notta belirtilen gözlemlerden, şimdi ifade edeceğimiz ve Menger teoreminin üçüncü ispatında kullanılacak olan lemmaların ispatlarında yararlanılmaktadır. Bu iki lemmada ve devamında, aksi belirtilmedikçe $\mathcal{P}$ sembolü, belirlenmiş bir yol sistemini göstermektedir.

Lemma 2.7 *Eğer yukarıda tanımlanan gibi olan bir W alterne yolu, bir $B \setminus V[\mathcal{P}]$ köşesinde son buluyor ise, bu durumda G grafi, $\mathcal{P}$ yi aşan, bir ayrık $A - B$ yollarının kümesini içerir.*

Lemma 2.8 *Eğer yukarıda tanımlanan gibi olan W yollarının hiçbirisi bir $B \setminus V[\mathcal{P}]$ köşesinde son bulmuyor ise, bu durumda G grafi, $\mathcal{P}$ üzerinde, bir $A - B$ ayrım kümesi içerir.*

Menger Teoreminin Üçüncü İspatı.

$\mathcal{P}$, G içinde, içerebileceği mümkün olan en fazla sayıdaki ayrık $A - B$ yollarını içersin. Bu durumda, iki önceki lemmadan, hiçbir alterne yol bir $B \setminus V[\mathcal{P}]$ köşesinde son bulmaz. Bu sebeple, bir önceki lemmadan, G grafi, $\mathcal{P}$ üzerinde, bir $A - B$ ayrım kümesi içerir. Bu nedenle, tam da istenildiği gibi, $k \leq |X| = |\mathcal{P}|$ elde edilir. ■

Tanım 2.9 Eğer $a - B$ yollarının bir kümesindeki herhangi iki yolun tek ortak köşeleri a ise, bu kümeye bir " $a - B$ fanı" denir.

Sonuç 2.1 $B \subseteq V$ ve $a \in V \setminus B$ olsun. Bu durumda, G içinde, a köşesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısı; G içinde, bir $a - B$ fanı oluşturan yolların maksimum sayısına eşittir.

İspat. $G' := G - a$, $A = N_G(a)$ ve B kümelerine Menger teoremini uygulayalım:

G' içinde, A kümesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısı; G' içinde, ayrık $A - B$ yollarının maksimum sayısına eşittir. Şimdi, G içinde, a köşesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısı; $G - a$ içinde, $N_G(a)$ kümesini B kümesinden ayıran köşelerin minimum sayısına eşittir. Diğer yandan, G içinde, $a - B$ fanı oluşturan yolların maksimum sayısı; $G - a$ içinde, ayrık $N_G(a) - B$ yollarının sayısına eşittir.

Sonuç olarak, teoremin ifadesinde belirtilen iki sayı birbirine eşittir. ■

Sonuç 2.2 a ve b , G nin iki farklı köşesi olsun. Bu durumda:

- (i) Eğer $ab \neq E$ ise, G içinde, a yı b den ayıran köşelerin minimum sayısı; G içinde, bağımsız $a - b$ yollarının maksimum sayısına eşittir.
- (ii) G içinde, a yı b den ayıran kenarların minimum sayısı; G içinde, kenar-ayrık $a - b$ yollarının maksimum sayısına eşittir.

İspat.

(i) Menger teoremini, $G' := G - \{a, b\}$, $A := N_G(a)$ ve $B := N_G(b)$ üçlüsüne uygularsak, sonuç doğrudan ispat edilmiş olur.

(ii) Menger teoremini, $G' := L(G) : G$ nin çizgi grafına, $A := E(a) : a$ ya bağlı kenarlar

kümesi ($\leftrightarrow L(G)$ de, bu kümenin elemanlarına, karşılık birbirine komşu köşeler gelir), $B := E(b) : b$ ye bağlı kenarlar kümesine ($\leftrightarrow L(G)$ de, bu kümenin elemanlarına karşılık birbirine komşu köşeler gelir), uygularsak, sonuç doğrudan ispat edilmiş olur.

(*Hatırlatma:* Bir G grafinin çizgi grafi $L(G)$ nin köşeleri, G grafinin kenarlarıdır ve $L(G)$ nin iki köşesi komşudur ancak ve ancak G içinde bu köşelere karşılık gelen kenarların bir ortak uç noktaları vardır. Bu sebeple, çizgi grafindeki ayıran köşe kümeleri, grafin kendisinde ayıran kenar kümelerine karşılık gelir ve çizgi grafindeki ayırık $E(a) - E(b)$ yolları, grafin kendisinde kenar-ayırık $a - b$ yollarına karşılık gelir.) ■

Teorem 2.6 (*Menger Teoreminin Genel Biçimi*)

- (i) Bir graf k -bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Herhangi iki köşesi arasında k tane bağımsız yol vardır.
- (ii) Bir graf k -kenar bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ Herhangi iki köşesi arasında k tane kenar-ayırık yol vardır.

İspat.

(i) ($\Leftarrow$) Eğer bir G grafi, herhangi iki köşesi arasında k tane bağımsız yol içeriyor ise, $|G| > k$ dir ve G , k dan daha az sayıda köşe ile ayrılamaz. Bu sebeple, G grafi k -bağlantılıdır.

($\Rightarrow$) G grafinin k -bağlantılı olduğunu kabul edelim (ve tabi ki bu durumda, G nin köşe sayısının k den fazla olduğunu kabul ediyoruz). Diyelim ki G içinde, k bağımsız yol ile birbirine bağlanmayan a ve b köşeleri olsun. Bu durumda, önceki sonucun (i) kısmından, a ve b köşeleri komşudur. $G' := G - ab$ olsun. Bu durumda, G' grafi en fazla $k - 2$ tane bağımsız $a - b$ yolu içerir. (G grafi en fazla $k - 1$ tane bağımsız $a - b$ yolu içerdiğinden ve ab kenarı da bu yollardan birisi olduğundan, $G - ab$ grafi en fazla $k - 2$ tane bağımsız $a - b$ yolu içerir.) Yine önceki sonucun (i) kısmından, G' içinde, a ve b köşelerini, en fazla $k - 2$ tane köşe içeren bir X kümesi ile ayırabiliriz. $|G| > k$ olduğundan, G içinde, en az bir $v \notin X \cup \{a, b\}$ vardır. Şimdi, G' içinde, X kümesi, v köşesini a köşesinden veya b köşesinden ayırır. (Hem a dan hem de b den ayırmasaydı, a dan v ye ve v den b ye giden yolları kullanarak, a dan b ye gidebilirdik. Bu da X in a ve b köşelerini ayırdığı hipoteziyle çelişirdi.) X in, G' içinde, v yi a dan ayırdığını kabul edelim. Fakat bu durumda, $X \cup \{b\}$, G içinde, v kümesini a dan ayıran, en fazla $k - 1$ elemanlı bir kümedir. Ki bu durum, G nin k -bağlantılı olmasıyla çelişir.

(ii) Önceki sonucun (ii) kısmından doğrudan elde edilir. ■

2.4 Mader Teoremi

Menger teoremine paralel olarak şu soruyu sorabiliriz:

Bir G grafi ve bir H indüke altgrafi verilsin. Bu durumda, G grafi içinde kaç tane bağımsız H –yolu bulabiliriz?

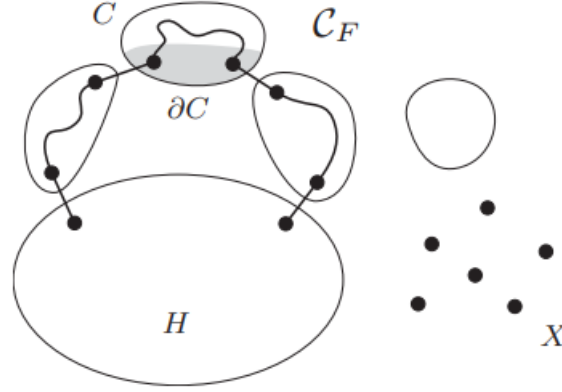
Bu alt bölümde, Mader’in, Menger teoremine benzer bir biçimde yukarıdaki problemi çözen, derin ve karmaşık bir teoremini ispatsız olarak ifade edeceğiz. Bu teorem de Menger teoremi gibi, böylesi yolların sayısı ile ilgili olarak, bazı ayrım kümelerinin büyüklüklerinden doğal olarak kaynaklanan üst sınıra, gerçekten de uygun yol kümeleri tarafından erişildiğini belirtmektedir.

Peki böylesi bir üst sınır neye benzer? Aşık bir şekilde, eğer G içindeki her H –yolu, $X \subseteq V(G - H)$ ve $F \subseteq E(G - H)$ olmak üzere, $X \cup F$ kümesinden bir köşe veya bir kenar içeriyor ise, bu durumda, G grafi $|X \cup F|$ den daha fazla sayıda bağımsız H –yolu içeremez. Bu sebeple, böylesi bir $X \cup F$ kümesinin en küçük kardinalitesi, bağımsız H –yollarının maksimum sayısı için bir üst sınırdır. (Dikkat edilirse, her H –yolu, $G - H$ grafi ile kesişir; çünkü H , G içinde indükedir ve H grafinin kenarları H –yolu olarak sayılmaz.)

Menger teoreminin aksine, bu üst sınır biraz daha geliştirilebilir. $|X \cup F|$ sayısının minimalliği, F kümesi içindeki hiçbir kenarın, X köşe kümesi içinde bir uç noktası olmasını gerektirir: Aksi takdirde, ayrım kümesi içinde bu kenara ihtiyaç olmazdı. $Y := V(G - H) \setminus X$ olsun ve $\mathcal{C}_F$, (Y, F) grafinin bileşenlerinin kümesini göstere. (Dikkat edilirse, F kümesindeki herhangi bir kenarın uç noktalarının X kümesinde olması gerçeği, $Y - F$ grafi tanımlanırken kullanılmaktadır.)

Şimdi, X kümesinden herhangi bir köşe içermeyen H –yolu, F kümesinden bir kenar

içerdiğinden, bir $C \in \mathcal{C}_F$ bileşiminin sınırı olan ∂C kümesinden en az iki köşe içerir. (∂C , G nin kenarlarından, bir ucu C bileşeninde ve diğer ucu $G - X - C$ altgrafında olan C içindeki köşelerin kümesini göstermektedir.)



Şekil 2.8 $G - X$ de bir H -yolu. (Diestel 2017)

Bu sebeple, G içindeki bağımsız H -yollarının sayısı üstten:

$$M_H(G) := \min \left(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor \right)$$

sayısı ile sınırlıdır. Buradaki minimum, yukarıda tarif edilen tüm X ve F kümeleri üzerinden alınmaktadır: $X \subseteq V(G - H)$ ve $F \subseteq E(G - H - X)$ öyle ki G içindeki her H -yolu, $X \cup F$ kümesinden bir köşe veya bir kenar içerir.

Mader teoremi, bu üst sınıra, bazı bağımsız H -yol kümeleri tarafından her zaman için erişildiğini söylemektedir:

Teorem 2.7 (Mader 1978)

Bir G grafi ve bir indüke H altı grafi verilsin. Bu durumda, G içinde her zaman $M_H(G)$ tane bağımsız H -yolu bulunur.

Menger teoreminin köşe ve kenar biçiminin doğrudan benzerini elde etmek için, yukarıdaki problemin iki özel halini ele alalım: Ya F kenar kümesinin ya da X köşe kümesinin boş küme olduğu durumları değerlendirelim.

Notasyon 2.4 Bir $H \subseteq G$ indüke altgrafi verilsin.

$\kappa_H(G)$, G içindeki her H -yolu ile kesişim boş kümeden farklı olan, bir $X \subseteq V(G - H)$ köşe kümesinin minimum kordinalitesini gösterebilir; $\lambda_H(G)$, G içindeki her H -yolu ile kesişimi boş kümeden farklı olan, bir $F \subseteq E(G)$ kenar kümesinin minimum kordinalitesini gösterir.

Sonuç 2.3 Bir G grafi ve bir H indüke alt-grafi verilsin. Bu durumda, G içinde, en az $\frac{1}{2}\kappa_H(G)$ tane bağımsız H -yolu ve en az $\frac{1}{2}\lambda_H(G)$ tane kenar-ayrık H -yolu vardır.

İspat. Birinci iddiayı ispat etmek için, k , G içinde, bağımsız H -yollarının maksimum sayısı olsun. Mader teoreminden, $X \subseteq V(G - H)$ ve $F \subseteq E(G - H - X)$ kümeleri vardır öyle ki

$$M_H(G) := \min \left(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor \right)$$

eşitliği sağlanır ve G içindeki her H -yolu, X kümesinden bir köşe veya F kümesinden bir kenar içerir.

Şimdi, $\partial C \neq \emptyset$ olan her $C \in \mathcal{C}_F$ için, bir $v \in \partial C$ alalım ve $Y_C := \partial C \setminus \{v\}$ olarak tanımlayalım. Eğer $\partial C = \emptyset$ ise, $Y_C := \emptyset$ olsun. Bu durumda, her $C \in \mathcal{C}_F$ bileşeni için, $\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \rfloor \geq \frac{1}{2} |Y_C|$ dir. (Eğer $\partial C \neq \emptyset$ ise, $|Y_C| = |\partial C| - 1$ dir. Bu sebeple, $\frac{1}{2} |Y_C| = \frac{|\partial C| - 1}{2} \leq \lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \rfloor$. $\therefore \frac{1}{2} |Y_C| \leq \lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \rfloor$.) Ayrıca, $Y = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_F} Y_C$ olmak üzere, her H -yolu, $X \cup Y$ köşe kümesinden bir köşe içerir. Bu sebeple, iddia edildiği gibi: $k \geq |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \frac{1}{2} |Y_C| \geq \frac{1}{2} |X \cup Y| \geq \frac{1}{2} \kappa_H(G)$ elde edilir.

İkinci iddia, G grafinin çizgi grafinin ele alınmasıyla, yukarıdaki birinci iddianın bir sonucu olarak ispat edilmiş olur. ■

Not 2.4 Bir önceki sonuçta verilen sınırlar, genel olarak, olası en iyi sınırlardır. Yani bir G grafi ve bir H indüke altgrafi bulunabilir öyle ki G , $\frac{1}{2}\kappa_H(G)$ sayısından daha fazla sayıda bağımsız H -yolu veya $\frac{1}{2}\lambda_H(G)$ sayısından daha fazla sayıda kenar-ayrık H -yolu içermez.

2.5 Köşe Çiftlerinin Birbirine Bağlanması

G bir graf ve $X \subseteq V(G)$ bir köşe kümesi olsun.

Tanım 2.10 Eğer X kümesinden alınan birbirinden farklı her $s_1, s_2, \dots, s_{\uparrow}, t_1, t_2, \dots, t_{\uparrow}$ köşeleri için, G içinde, her P_i, s_i köşesini t_i köşesine bağlayan ve hiçbir iç köşesi X kümesinde olmayan bir yol olmak üzere, ayrık $P_1, P_2, \dots, P_{\uparrow}$ yolları var ise; X kümesi, G içinde "bağlıdır" denir. Dikkat edilirse, Menger teoreminden farklı olarak, sadece verilen iki köşe kümesi arasındaki ayrık yolları istemiyoruz; böylesi yolların her birisinin, belirlenmiş köşe çiftleri arasında bir bağlantı kurması hususunda ısrar ediyoruz.

Tanım 2.11 Eğer $|G| \geq 2k$ ve en fazla $2k$ tane köşe içeren her X kümesi G için de bağlı ise, G grafi " k -bağlıdır" denir.

Aşık bir şekilde, G grafının k -bağlı olması, $|G| \geq 2k$ ve $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$, birbirinden farklı tam $2k$ tane köşe olmak üzere, ayrık $P_i = s_i \dots t_i$ yollarının var olmasına denktir: Eğer X kümesinin eleman sayısı $2k$ den küçük ise, eleman sayısını $2k$ ya çıkarmak için, fazladan kukla köşeler X kümesine katılır. Pratikte, bu ikinci tanım gösterilmesi daha kolaydır, çünkü X kümesindeki iç köşeler ile ilgili herhangi bir endişe duymamıza gerek yoktur.

Yine aşık bir şekilde her k -bağlı graf k -bağlantılıdır. Bununla birlikte bu önermenin karşıtı doğru olmaktan uzaktır: k -bağlı olmak, aşık bir şekilde, k -bağlantılı olmaktan çok daha güçlü bir özelliktir. Bu alt bölümde, bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu için, bir grafın $f(k)$ -bağlantılı olduğunu kabul edersek, bu grafın k -bağlı olmasını garanti edebileceğimizi gösteren teoremi ifade edeceğiz. Önce böylesi bir f fonksiyonunun varlığını garanti eden teoremi ve ardından, bu f fonksiyonunun lineer bir fonksiyon olarak dahi seçilebileceğini garanti eden teoremi ifade edelim:

Teorem 2.8 (Jung 1970, Larman and Mani 1970) Bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Fonksiyonu vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için, her $f(k)$ -bağlantılı graf k -bağlıdır.

Bu teoremi ispatında, varlığı garanti edilen bu f fonksiyonu için üstel bir üst sınır verilmektedir. Buna karşılık, şimdi ifade edeceğimiz teorem, $2\epsilon(G) \geq \delta(G) \geq \kappa(G)$ olduğundan, f fonksiyonu için yalnızca bir lineer üst sınır vermektedir, daha açık ve net olarak $f(k) = 16k$ dır:

Teorem 2.9 (*Thomas and Wollan 2005*)

G bir graf ve $k \in \mathbb{N}$ olsun . Eğer G grafi $2k$ –bağlantılı ve $\epsilon(G) \geq 8k$ ise, G grafi k –bağlıdır.



3. LİTERATÜR TARAMASI

Bağlantılılık teoremleri kuşkusuz en doğal ve aynı zamanda en uygulanabilir graf teori sonuçları arasında olsa da, bu konuda hala bir monograf yoktur. Bugüne kadarki en kapsamlı kaynaklar, Schrijver (2003) ve Frank (2011) dir. Bazı alanlar Bollobas'ta (1978), Halin'de (1980) ve Frank'te (1995) ele alınmıştır. Minimal k -bağlantılı graflara ilişkin teknikler ve sonuçlarla ilgili özel bir araştırma Mader (1996) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.2 genellikle Barnette ve Grünbaum'a (1969) atfedilir. Tutte'den (1966) de çıkarılabilir. Tutte'nin (1961) kanıtladığı Tutte tekerlek teoremi, Teorem 2.3'ten aşağıdaki açıdan farklıdır. İndirgeme adımında bir kenarın büzülmesine bir alternatif olarak, tekerlek teoremi silinmesine de izin verir. Bununla birlikte, büzülecek kenarların herhangi bir üçgen içinde bulunmamalarını gerektirir. Bu nedenle, tüm 3-bağlantılı grafların oluşturulması için başlangıç seti, yalnızca K^4 tam grafini değil, tüm tekerlekleri içerir.

Tutte'nin tekerlek teoremi, K^4 dışındaki 3-bağlantılı H grafiklerine genişletilir: Tekerek olmayan herhangi bir 3-bağlantılı $G \succ H$ grafindan, her adımda 3-bağlantılı kalarak, kenarları adım adım daraltarak veya silerek H elde edebiliriz. (Tutte teoreminde olduğu gibi, bir üçgende bulunan kenarların büzülmesine izin verilmez.) Bu, Negami (1982) tarafından kanıtlanmıştır. Aynı zamanda, Seymour'un matroid ayrışmaları üzerine daha önceki bir teoreminden de elde edilebilir ve bazen Seymour'un 3-bağlantılı graflar için ayırıcı teoremi olarak adlandırılır.

Teorem 2.3'ün ispatından sonra bahsedilen, k -bağlantılı graflarda bir kenarı silebilir veya daraltabiliriz öyle ki ortaya çıkan grafların, her birisi sınırsız sayıda çok kenar içeren ve sayısı $< k$ olan taraflara ayrıştırılamayacağı gerçeği, Geelen *et al.* (2003) deki Lemma 3.1'den de elde edilebilir.

Bu tezde değinilmeyen bağlantılılık çalışmasına yönelik bir yaklaşım, bir kenarı sildiğimiz anda k -bağlantılıklarını kaybeden minimal k -bağlantılı grafların araştırılmasıdır. Tüm k -bağlantılı graflar gibi, bunların da minimum derecesi en az k 'dır ve Halin'in

(1969) temel bir sonucu olarak, minimum dereceleri tam olarak k 'dır. Küçük dereceli bir köşenin varlığı, k -bağlantılı graflarla ilgili tümevarım ispatlarında özellikle yararlı olabilir. Halin'in teoremi, minimal k -bağlantılı graflarla ilgili giderek daha karmaşık bir dizi çalışmanın başlangıç noktasıydı; Bollobas'ın (1978) kitaplarına ve özellikle Mader'in (1998) araştırmasına bakınız.

Menger'in teoreminin, kendi makalesi olan Menger (1927) kadar geri izi sürülebilir. Bu sonuç, muhtemelen graf teorisinde en çok kullanılan klasik sonuçtur. İlk kanıtımız Halin'in (1980) kitabından alınmıştır. İkincisi, Böhme *et al.* (2001) den ve üçüncüsü Grünwald (1938) den alınmıştır. Menger teoreminin genel biçimi (Teorem 2.6), ilk olarak Whitney (1932) tarafından ifade edilmiş ve ispatlanmıştır. Menger teoreminin topolojik genellemeleri ise, 1930'lardan beri bilinmektedir; bkz. Thomassen ve Vella (2008).

Mader Teoreminin (Teorem 2.7) bizim ifade ettiğimiz halinin, Mader'de (1978) verilen, teoremin orijinaline eşdeğer olduğu kolayca görülebilir. Şimdilik bildiğimiz kadarıyla, teoremin en kısa ispatı Schrijver (2003) kitabında verilmiştir. Teorem, Menger teoreminin ve Tutte'nin 1-faktör teoreminin ortak bir genellemesi olarak görülebilir.

Teorem 2.9, Thomas ve Wollan'a (2005) dayanmaktadır.

Son olarak, Mader (1998) tarafından gösterildiği gibi, yeterince geniş çevresi olan graflar, $2k$ -bağlantılı oldukları anda k -bağlantılıdır ki bu mümkün olanın en iyisidir. (Mader, çevre üzerinde k 'ye bağlı bir alt sınır olduğunu varsayar, ancak bu gerekli değildir; bkz. Kühn ve Osthus (2002).) Aslında, her $s \in \mathbb{N}$ için öyle bir k_s vardır öyle ki $G \not\subseteq K_{s,s}$ ve $\kappa(G) \geq 2k \geq k_s$ ise, G grafi, k -bağlıdır; bkz. Kühn ve Osthus (2005).

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Graf teorisinde bağlantılılık kavramı, graf teorisinin önemli ve temel alanlarından birisidir ve hala bu alan ile ilgili birçok açık problem mevcuttur. Bu sebeple, graf teorisinde bağlantılılık kavramı aktif araştırma alanlarından birisidir.

Bu tezde, graf teorisinde bağlantılılık kavramı ve önemi ile ilgili temel kavram ve teoremleri sunduk ve bu alan ile ilgili son zamanlarda elde edilmiş olan bazı sonuçları gözden geçirdik.

Bu tezin amacı, bu zengin ve aktif araştırma alanını temel bir düzeyde tanıtmak, son dönemde elde edilmiş olan bazı sonuçları ve gelişmeleri bir araya getirmek, derli toplu bir şekilde sunmak ve bu alanında uzman olmayanlar için bir derleme çalışma / bir öğretici kaynak ortaya koymaktır.

Bu sebeple bu tezin, etkileyici ve sürükleyici bu alan ile ilgili temel düzeyde bilgi sahibi olmak isteyen öğrenciler ve araştırmacılar için yararlı olacağını ümit ediyoruz.

KAYNAKLAR

- Barnette D.W. and Grünbaum B. 1969. On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs. In: The Many Facets of Graph Theory (Lecture Notes in Mathematics Volume 110). Chartrand, G., Kapoor, S.F. (eds.). Springer, pp. 27 – 40, Berlin.
- Bollobas, B. 1978. Extremal Graph Theory. Academic Press, 488 pages, Cambridge, Massachusetts.
- Böhme, T., Göring, F. and Harant, J. 2001. Menger's theorem, J. Graph Theory, 37: 35–36.
- Diestel (2017)]diestel Diestel, R. 2017. Graph Theory, Fifth Edition (Graduate Texts in Mathematics, 173). Springer, 448 pages, Berlin.
- Frank, A. 1995. Connectivity and network flows. In: Handbook of Combinatorics (Vol. 1). Graham, R.L., Grötschel, M. and Lovasz, L. (eds.). North-Holland, pp 211-178, Amsterdam.
- Frank, A. 2011. Connections in combinatorial optimization. Oxford University Press, 664 pages, Oxford.
- Geelen, J., Gerards, B., Robertson, N. and Whittle, G. 2003. On the excluded minors for the matroids of branch-width k . J. Comb. Theory B, 88: 261–265.
- Grünwald, T. 1938. Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes. J. Lond. Math. Soc., 13: 188–192.
- Halin, R. 1969. A theorem on n -connected graphs. J. Combin. Theory, 7(2): 150-154.
- Halin, R. 1980. Graphentheorie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 324 pages, Darmstadt.
- Jung, H. A. 1970. Eine Verallgemeinerung des n -fachen Zusammenhangs für Graphen. Math. Ann., 187: 95-103.
- Kühn, D. and Osthus, D. 2002. Topological minors in graphs of large girth. J. Comb. Theory B, 86: 364–380.
- Kühn, D. and Osthus, D. 2005. Complete minors in $K_{s,s}$ -free graphs. Combinatorica, 25: 49–64.
- Larman, D. G. and Mani, P. 1970. On the Existence of Certain Configurations within Graphs and the 1-S. of Polytopes. Proc. London Math. Soc., 3-20(1): 144–160.

- Mader, W. 1978. Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H – Wege. Arch. Math., 31: 387–402.
- Mader, W. 1996. On vertices of degree n in minimally n -connected graphs and digraphs. In: Paul Erdős is 80 (Vol. 2). Miklos, D., Sos, V.T. and Szönyi, T. (eds.). Proc. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 516 pages, Budapest.
- Mader, W. 1998. Topological subgraphs in graphs of large girth. Combinatorica, 18: 405–412.
- Menger, K. 1927. Zur allgemeinen Kurventheorie. Fundamenta Math., 10: 96–115
- Negami, S. 1982. A characterization of 3-connected graphs containing a given graph. J. Comb. Theory B 32: 69–74.
- Schrijver, A. 2003. Combinatorial optimization – Polyhedra and efficiency. Springer, 1880 pages, Berlin.
- Thomas, R. and Wollan, P. 2005. An improved linear bound for graph linkages. Eur. J. Comb. 26: 309–324.
- Thomassen, C. and Vella, A. 2008. Graph-like continua and Menger’s theorem. Combinatorica, 28: 595–623.
- Tutte, W.T. 1961. A theory of 3-connected graphs. Nederl.Akad.Wet. Proc. Ser.A, 64: 441–455.
- Tutte, W.T. 1963. How to draw a graph. Proc. Lond. Math. Soc., 13: 743–767.
- Tutte, W.T. 1966. Connectivity in graphs. Oxford University Press, 145 pages, Oxford.
- Whitney, H. 1932. Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. American Journal of Mathematics, 54(1): 150-168.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı: İbrahim Mohammed Abbas ALAMEEN

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020–2022
---------------	--	-----------

Lisans	Telafer Üniversitesi Temel Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü	2012–2018
--------	--	-----------