

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFİKSEL MODÜLER UZAYLARDA BAZI YENİ
YAKLAŞIMLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ÖZBAY AZAP

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

EYLÜL 2025

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFİKSEL MODÜLER UZAYLARDA BAZI YENİ
YAKLAŞIMLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ÖZBAY AZAP

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK

Ortak Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Ekber GİRGIN

EYLÜL 2025

Elif ÖZBAY AZAP tarafından hazırlanan “Grafiksel Modüler Uzaylarda Bazı Yeni Yaklaşımlar” adlı tez çalışması 16.09.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı’ nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “GRAFİKSEL MODÜLER UZAYLARDA BAZI YENİ YAKLAŞIMLAR” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(30/05/2025)

ELİF ÖZBAY AZAP



TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve tecrübesinden yararlandığım, teşvik ve desteğini hiç eksik etmeyen, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyip aynı titizlikte beni yönlendiren, bu yolda bana en güzel örnek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi bitirmem için her konuda yardımlarına başvurduğum ortak danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGIN'e teşekkür ederim.

Sadece tez çalışmalarım boyunca değil hayatımın her aşamasında hep yanımda olan, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim eşim Ahmet AZAP'a çok teşekkür ederim.

ELİF ÖZBAY AZAP



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
1.2. Metrik Sabit Nokta Kavramı	9
1.3. Graf Teorisi	16
2. BAZI GENEL METRİK YAPILARI.....	23
2.1. Modüler Metrik Uzaylar.....	23
2.2. Grafiksel Metrik Uzaylar	28
2.3. Grafiksel Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	32
3. GRAFİKSEL MODÜLER METRİK UZAYLARda SABİT NOKTA TEORİSİ	35
3.1. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylar.....	35
3.2. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri	40
3.3. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Dinamik Piyasa Denge Problemine Uygulaması.....	51
3.4. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Isı İletim Problemine Uygulaması	53
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61



SİMGELER

$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$(\mathfrak{M}, \mu_s)$	: Modüler metrik uzay
$(\mathfrak{M}, \mathfrak{u})$	: Topolojik uzay
$(\mathfrak{M}, \mathfrak{h})$	: Metrik uzay
$\mathfrak{u}$	: $\mathfrak{M}$ kümesinin alt kümelerinin bir ailesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbf{Fix}(S)$	: S dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathbb{K}$	: Cisim



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. $S(\mathfrak{Z}) = \sin(\mathfrak{Z}^2 + \pi\mathfrak{Z} - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları	10
Şekil 1.2. Pregel nehri için graf	19
Şekil 1.3. ψ grafının düğümleri	17
Şekil 3.1. Grafiksel modüler metrik uzay için graf modeli	38
Şekil 3.2. Grafiksel modüler-Banach daralma dönüşümü için graf modeli	43
Şekil 3.3. Grafiksel modüler-Kannan daralma dönüşümü için graf modeli	46
Şekil 3.4. Grafiksel modüler-Reich daralma dönüşümü için graf modeli	50
Şekil 3.5. Isı iletim süreci modeli	55



GRAFİKSEL MODÜLER UZAYLARDA YENİ YAKLAŞIMLAR

ÖZET

Sabit nokta kavramı matematikte bir fonksiyonun uygulandığı bir noktayı değiştirmedığı durumları inceleyen önemli bir yapıdır. Bir S fonksiyonu için $S(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$ eşitliğini sağlayan $\mathfrak{S}$ noktalarına sabit nokta denir.

Bu teori özellikle analiz, topoloji, diferansiyel denklemler ve nümerik analiz gibi birçok alanda kullanılır. Sabit nokta bulmak bazen denklemlerin çözümü ile eşdeğer olur ve bu da teoriyi hem teorik hemde uygulamalı alanlarda değerli kılar.

Metrik sabit nokta teorisi, matematiksel analiz ve topolojinin önemli bir dalı olup, metrik uzaylarda tanımlanan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ve özelliklerini incelemektedir. Bu teori, Banach'ın sabit nokta teoremi ile başlamış ve zamanla genişleyerek birçok farklı alanda uygulanabilir hale gelmiştir. Uzaklık fonksiyonunun değiştirilmesi, var olan fonksiyondan bazı özelliklerin çıkarılması ya da yeni özelliklerin eklenmesi ile literatüre birçok yeni topolojik yapı girmiştir. Banach'ın sabit nokta teoremi ile başlayan bu teori, zamanla genişleyerek birçok farklı alanda uygulanabilir hale gelmiştir ve modern matematiğin vazgeçilmez bir parçası olmuştur. Toplanabilirlik teorisi, dizi uzayları, bulanık teori, Banach uzaylarının geometrisi gibi matematiği ilgilendiren uygulamaların yanı sıra mühendislikten uzay bilimine hidromekanikten astrofiziğe, kimyadan biyolojiye, teorik mekanikten biyomekaniğe ve ekonomiden stokastik oyun teorisine kadar disiplinler arası alanlarda geniş bir yelpazede uygulama sahasına sahip olduğundan metrik sabit nokta teorisi bu yeni metrik yapıları ile oldukça zengin bir hale gelmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Bir ve ikinci bölümler literatür taraması şeklinde iken üçüncü ve dördüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Birinci bölümünde metrik sabit nokta teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmektedir. Ayrıca metrik uzayları genelleyen çeşitli uzayların tanımları yapılmış ve özellikleri incelenmiştir. Bir çok araştırmacının ortaya koyduğu Banach daralma prensibinin ya da bir diğer ifade ile Banach sabit nokta teoreminin genellemeleri olarak ya metriğin üzerindeki şartların değiştirilerek yeni uzayların oluşturulması, ya da dönüşümler üzerindeki daralma şartlarının değiştirilerek literatüre kazandırılması amaçlanmıştır.

İkinci bölümde ise çalışmanın devamında kullanılan bazı genel metrik yapılarına ve bu yapıların özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, grafiksel modüler metrik ve archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay tanımlanmıştır. Ayrıca modüler-Banach, modüler-Kannan ve modüler-Reich daralma dönüşümleri tanımlanarak ilgili sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen sabit nokta teoremlerinin piyasa denge problemine uygulaması verilmiştir.

Son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlara ve literatüre kazandırılan yapıların uygulanabilirliği ile ilgili önerilere yer verilmiştir.



SOME NOVEL APPROACHES IN GRAPHICAL MODULAR SPACES

SUMMARY

Fixed point theory represents a compelling and continually advancing domain within the mathematical sciences of the twenty-first century. It is characterized by a distinctive integration of nonlinear functional analysis, nonlinear operator theory, topology, and mathematical modeling, along with various applications. Recognized as a pivotal area of research in nonlinear analysis, fixed point theory serves as a foundational mathematical framework for establishing the existence of solutions to a diverse array of real-world problems. This underscores its significance as both a theoretical and applied discipline within mathematics, with its relevance as a burgeoning area of research.

The breadth of fixed point theory extends beyond the geometric considerations of infinite-dimensional function spaces and operator-theoretic challenges; it encompasses a wide spectrum of interdisciplinary applications. These span various fields, including engineering, space science, hydromechanics, astrophysics, chemistry, biology, theoretical mechanics, biomechanics, economics, and stochastic game theory. The well-established concepts and methodologies intrinsic to fixed point theory furnish essential tools for the formulation of more realistic and precise models addressing phenomena encountered across a multitude of applied fields.

Fixed point theory is an important concept in mathematics that studies situations where a function does not change the point to which it is applied. In other words, for a function S a point $\mathfrak{Z}$ that satisfies $S(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$ is called a fixed point.

This theory is used in many areas such as analysis, topology, differential equations and numerical analysis . Finding a fixed point is sometimes equivalent to solving an equation, which makes the theory valuable in both theoretical and applied fields.

Metric fixed point theory constitutes a significant domain within mathematical analysis and topology, focusing on the exploration of fixed points of mappings defined on metric spaces. This theory originated with Banach's fixed point theorem, serving as a foundational result that has been progressively expanded to encompass a myriad of disciplines. Banach's fixed point theorem is one of the cornerstones of metric fixed point theory. This theorem guarantees the existence of fixed points of contraction maps defined on a metric space. As a formulation,

$(\mathfrak{M}, h)$ is a complete metric space and $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ is a contraction mapping; that is, there exists a constant $0 \leq k < 1$ and for each $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$

$$h(S(\mathfrak{Z}), S(\mathfrak{H})) \leq kh(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$$

inequality is satisfied. Then, the mapping S has a unique fixed point and this fixed point can be found by iterative methods.

Through the alteration of distance functions, the removal of certain properties from existing functions, or the introduction of novel properties, numerous topological

structures have emerged in the literature. Initially rooted in Banach's fixed point theorem, metric fixed point theory has evolved into a critical component of contemporary mathematics, demonstrating its relevance across various mathematical disciplines. Beyond its theoretical implications in areas such as summability theory, sequence spaces, fuzzy set theory, and the geometry of Banach spaces, this theory exhibits extensive applicability in interdisciplinary realms. Fields such as engineering, space science, hydromechanics, astrophysics, chemistry, biology, theoretical mechanics, biomechanics, economics, and stochastic game theory have all benefited from the insights provided by metric fixed point theory, underscoring its versatility and importance in both pure and applied mathematics.

This study consists of four chapters. The first and second chapters are in the form of a literature review, while the third and fourth chapter constitutes the original part of the thesis.

The first chapter presents the fundamental definitions and theorems related to metric fixed point theory. Additionally, various spaces that generalize metric spaces are defined and their properties are examined. The aim is to contribute to the literature either by creating new spaces through modifications of the conditions on the metric or by altering contraction conditions on transformations, as generalizations of the Banach contraction principle also known as the Banach fixed point theorem put forth by many researchers.

In the third chapter, the extended forms of classical fixed point theory under modular and graphical metric structures are discussed. The aim of the study is to establish fixed point results on graphical modular metric spaces, which are obtained by combining metric and modular approaches, and to demonstrate the analytical power of these structures, thereby extending the abstract theory to more general frameworks. Throughout the section, the definitions and fundamental topological properties of the new spaces arising from the combination of modular metric concepts and graphical structures will first be examined. Subsequently, fixed point theorems will be obtained for transformations satisfying the Banach, Kannan, and Reich contraction conditions within these spaces.

The applicability of the fixed point results obtained in graphical modular metric spaces to various fields is also explored. Using transformations that satisfy the Reich-type contraction condition, the dynamic market equilibrium problem is addressed, and a fixed point formulation determining the stability of economic systems is developed. The same approach is then extended to a physical model — the heat conduction problem. Thus, the graphical modular-Reich contraction principle is evaluated within a unified framework that guarantees the existence of steady states in both economic and physical systems.

First, the mathematical foundation of the heat conduction model will be presented, followed by a detailed examination of the physical interpretation of the fixed point of the operator defined in the graphical modular metric structure. This approach reveals the interdisciplinary strength of fixed point theory, demonstrating the applicability of abstract mathematical principles to the behavior of real-world systems.

An example of a dynamic market equilibrium problem, which is an application of fixed point theory, will be presented. The proposed solutions to the dynamic market equilibrium problem are integrated into the dynamic market equilibrium framework commonly used in economic analyses, thereby forming a mathematical model through the solution of an initial value problem. Both consumer and producer markets are

subject to significant fluctuations arising from daily price variations and pricing data. Despite the inherent volatility of prices, daily pricing trends have a substantial impact on the production market and the consumption market. Throughout this economic analysis, the economist aims to determine the prevailing price.

In addition, the applicability of the fixed point results obtained in graphical modular metric spaces to a physical model is demonstrated. In particular, a one-dimensional nonlinear heat conduction problem is considered, and it will be shown that the solution of this problem is the fixed point of an operator satisfying the graphical modular–Reich contraction condition. Thus, the abstract theorems obtained in the previous sections become applicable to the analysis of real physical processes such as heat diffusion.

In the concluding section, the findings derived from the study are presented, along with the recommendations concerning the practical implementation of the theoretical frameworks discussed in the literature.





1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

$\mathfrak{M}$ kümesi üzerinde tanımlı $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümünde $S\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ eşitliğini sağlayan $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}$ noktası varsa, bu noktaya S dönüşümünün sabit noktası adı verilir. Sabit noktalar, dönüşüm altında değişmez (invariant) kalan noktalardır.

Sabit nokta teorisi, geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir ve çeşitli disiplinlerde önemli rol oynamaktadır. Örneğin, mühendislik alanında, kontrol sistemlerinin stabilitesini analiz etmek ve optimal kontrol stratejileri geliştirmek için kullanılmaktadır. Uzay bilimi ve astrofizikte yörünge dinamikleri ve gök cisimlerinin hareketlerinin modellenmesinde sabit nokta yapısı kritik öneme sahiptir.

Kimya ve biyolojide sabit nokta teorisi kimyasal reaksiyonların denge durumlarının analizi ve biyolojik sistemlerin dinamik davranışlarının incelenmesinde uygulanmaktadır. Ekonomide, Nash dengesi gibi kavramların varlığını ispatlamak ve ekonomik modellerin denge analizini yapmak için sabit nokta teoremleri kullanılmaktadır. Ayrıca, stokastik oyun teorisi ve karar teorisi gibi alanlarda, oyuncuların stratejilerinin dengede olduğu durumların belirlenmesinde sabit nokta teorisi önemli bir kavramdır.

Matematiksel modelleme ve doğrusal olmayan analizde, sabit nokta teorisi, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını ve eşsizliklerini belirlemek için temel bir araçtır. Bu bağlamda metrik sabit nokta teoremleri, topolojik uzaylarda tanımlanan doğrusal olmayan dönüşümlerin analizinde geniş bir uygulama alanına sahiptir ve bu nedenle modern matematiğin vazgeçilmez bir parçası haline gelmiştir.

Bu geniş uygulama alanları, sabit nokta teorisinin matematiksel ve pratik önemini vurgular.

Sabit nokta teorisinin gelişimine ve önemli sonuçlarına ilk olarak Brouwer [1] liderlik etmiştir. Brouwer, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ içindeki kapalı birim yuvar üzerinde tanımlı sürekli dönüşümlerin en az bir sabit noktasının var olduğunu ispatladı. Bu sonuç, özellikle sınırlı ve kapalı kümelerde geçerlidir ve şu şekilde ifade edilir:

“Eğer $Y, \mathbb{R}^n$ de kapalı birim yuvar ve $S: Y \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümse, bu durumda S dönüşümünün Y kapalı birim yuvarında en az bir sabit noktası vardır.”

Ayrıca, Banach uzaylarında Brouwer Sabit Nokta Teorisi'nin doğrudan genelleştirilemeyeceğini gösteren Kakutani [2]'nin örneği, sonsuz boyutlu uzaylarda sabit nokta teoremlerinin geçerli olabilmesi için ek koşulların gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Brouwer'ın teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi, Banach uzaylarında sabit nokta teorisinin temelini oluşturur. Schauder [3], bu teoremi sonsuz boyutlu Banach uzaylarına uygun şekilde genelleştirerek belirli ek koşullar altında benzer bir sonucu elde etmiştir:

“ $\mathcal{M}$ bir Banach uzayı ve Y boş kümeden farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her sürekli ve kompakt $S: Y \rightarrow Y$ dönüşümünün Y kümesinde en az bir sabit noktası vardır.”

Bu teorem, sonsuz boyutlu uzaylarda bile belirli koşullar altında sabit nokta teorisinin geçerli olduğunu gösterir. Schauder'in eklediği koşullar (özellikle kompaktlık), bu genellenmenin yapılmasını mümkün kılmıştır.

Bu çalışmalar, sabit nokta teorisinin matematiksel analiz, topoloji ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda derin etkileri olan güçlü bir araç haline gelmesini sağlamıştır.

Banach Sabit Nokta Teoremi sabit nokta teorisinin en önemli ve en yaygın olarak kullanılan teoremlerinden biridir. Banach Sabit Nokta Teoremi, herhangi bir tam metrik uzayda daralma dönüşümleri için sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder. Aynı zamanda sabit nokta hesaplama yolu ile de bulunur. Bu teorem, matematiksel analiz ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir araçtır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$(\mathcal{M}, h)$ bir tam metrik uzaylar olsun. Bir $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dönüşümü verildiğinde her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M}$ için $h(S(\mathfrak{I}), S(\mathfrak{H})) \leq kh(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ koşulu sağlanacak şekilde $0 \leq k < 1$ olan bir k sabiti varsa S dönüşümünün $\mathcal{M}$ içinde bir ve yalnız bir sabit noktası vardır.

Tanım 1.1.1. [4] $\mathcal{M} \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H}, c \in \mathcal{M}$ için $\mathcal{M}$ kümesi üzerinde bir $h: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(h_1) \quad h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{H}$$

$$(h_2) \ h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = h(\mathfrak{H}, \mathfrak{I}),$$

$$(h_3) \ h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq h(\mathfrak{I}, c) + h(c, \mathfrak{H}).$$

Bu durumda, h fonksiyonuna $\mathfrak{M}$ uzayında bir metrik, $(\mathfrak{M}, h)$ ikilisine ise metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.1.2. [4] $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathbb{R}$ için tanımlanan

$$h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{I} - \mathfrak{H}|$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik olarak bilinir. Bu metrik genellikle mutlak değer metriği, (doğal, salt değer metriği) olarak da adlandırılır ve $(\mathbb{R}, h)$ ikilisine alışılmış metrik uzay denir.

Örnek 1.1.3. [5] $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan $h_1: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ metriği her $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2)$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$h_1(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \sqrt{(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{H}_1)^2 + (\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{H}_2)^2}$$

Euclid metriği (veya Pisagor metriği) olarak adlandırılır ve iki nokta arasındaki doğrudan mesafeyi ölçer.

$$h_2(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \max \{|\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{H}_1|, |\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{H}_2|\}$$

şeklinde tanımlı $h_2: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ise maksimum metriği (veya Chebyshev metriği, Tchebychev uzaklığı) olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{H}$ noktaları arasındaki en büyük farkı ölçer.

Örnek 1.1.4. [6] $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ keyfi bir küme ve $h: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathfrak{I} = \mathfrak{H} \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } \mathfrak{I} \neq \mathfrak{H} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. h fonksiyonu $\mathfrak{M}$ kümesi üzerinde bir metriktir ve bu metriğe ayrık (diskret) metrik, $(\mathfrak{M}, h)$ ikilisine ise ayrık metrik uzay denir.

Örnek 1.1.5. [4] Her $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{I}_n\}$, $\mathfrak{H} = \{\mathfrak{H}_n\} \in \mathfrak{M}$ için sınırlı dizilerin kümesi

$$\mathfrak{M} = \ell_\infty = \left\{ \{\mathfrak{I}_n\} \subseteq \mathbb{R}(\text{veya } \mathbb{C}) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathfrak{I}_n| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. $h_\infty: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$h_\infty(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathfrak{I}_n - \mathfrak{H}_n|$$

$\mathfrak{M}$ uzayında bir metrik fonksiyonudur.

Örnek 1.1.6. [5] $\mathbb{R} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$, $\forall \mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için $1 \leq P < \infty$ sabit reel sayı ve

$$\mathfrak{M} = Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] := \{\mathfrak{Z}: [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathfrak{Z} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun.

$$h_P(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = \left(\int_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}} |\mathfrak{Z}(r) - \mathfrak{H}(r)|^P dr \right)^{1/P}$$

ile tanımlı $h_P: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ üzerinde bir metriktir, $(\mathfrak{M}, h_P)$ ikilisi de bir metrik uzaydır.

Örnek 1.1.7. [6] $\mathbb{R} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ ve her $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$\mathfrak{M} = Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] = \{\mathfrak{Z}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathfrak{Z} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi tanımlansın.

$$h_{\infty}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = \sup_{r \in [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]} |\mathfrak{Z}(r) - \mathfrak{H}(r)|$$

şeklinde tanımlanan $h_{\infty}: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ üzerinde bir metrik belirtir. h_{∞} metriğine $Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ üzerinde supremum metriği veya düzgün metrik de denir.

Bu kısımda, metrik uzaya ait topolojik özellikler ve tanımlara yer verilecektir:

Tanım 1.1.8. [6,7] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathfrak{M}$ uzayından bir dizi olsun.

- (i) Her $\varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ için $h(\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{Z}^*) < \varepsilon$ olan $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ indisi var ise $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{Z}^* \in \mathfrak{M}$ noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $n \rightarrow \infty$ iken $\mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{Z}^*$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^*$ ile ifade edilir ve $\mathfrak{Z}^*$ noktası dizinin limit noktası olarak adlandırılır.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m, n \geq n_0$ olan bütün $m, n \in \mathbb{N}^+$ indisleri için $h(\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{Z}_m) < \varepsilon$ ifadesini gerçekleyen $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ indisi mevcut ise $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
- (iii) $(\mathfrak{M}, h)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise $(\mathfrak{M}, h)$ uzayına tam metrik uzay denir.

Uyarı 1.1.9. [4,7] Metrik uzaylarda aşağıdaki durumlar sağlanır:

- (i) Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Ek olarak, bir dizinin yakınsaklığı, tanımlandığı uzaya ve uzay üzerinde tanımlanmış metriğe bağlı olarak değişir.
- (ii) Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir, ancak tersinin doğru olması gerekmez. Tam metrik uzaylarda her Cauchy dizisi yakınsaktır.
- (iii) Yakınsak bir dizinin herhangi bir alt dizisi de dizinin limiti olan aynı noktaya yakınsaktır.
- (iv) Tam metrik uzayların her alt uzayının tam olması gerekmez. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{Z} - \mathfrak{H}|$ ile tanımlı alışılmış metriğe göre tam uzaydır, ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan alışılmış metriğe göre tam uzay değildir. Tam metrik uzayların her kapalı alt uzayları da tam metrik uzaydır. Reel sayılar kümesinin $[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ ile tanımlı kapalı alt uzayı üzerinde tanımlı alışılmış metriğe göre tam uzaydır.

Örnek 1.1.10. [4] Örnek 1.2.5 de verilen (ℓ_∞, h_∞) dizi uzayı ve Örnek 1.2.7 de verilen $(Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}], h_\infty)$ fonksiyon uzayı tam uzaylardır.

Tanım 1.1.11. [6] $(\mathfrak{M}, h)$ ve $(\mathfrak{M}, \mathfrak{d})$ iki metrik uzay ve $S: (\mathfrak{M}, h) \rightarrow (\mathfrak{M}, \mathfrak{d})$ bir fonksiyon olsun.

- (i) $\forall \varepsilon > 0$ ve $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ için $h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}_0) < \delta$ iken $\mathfrak{d}(S(\mathfrak{Z}), S(\mathfrak{z}_0)) < \varepsilon$ olan $\delta(\varepsilon, \mathfrak{Z}) > 0$ vardır $\Leftrightarrow S$ fonksiyonu $\mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{M}$ noktasında süreklidir.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ ve $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ için $h(\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}) < \delta$ iken $S(\mathfrak{Z}_0) - \varepsilon < S(\mathfrak{Z})$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır $\Leftrightarrow S$ fonksiyonu $\mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{M}$ noktasında alttan yarı süreklidir.
- (iii) Her $\varepsilon > 0$ ve $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ için $h(\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}) < \delta$ olacak şekilde $S(\mathfrak{Z}) < S(\mathfrak{Z}_0) + \varepsilon$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır $\Leftrightarrow S$ fonksiyonu $\mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{M}$ da üstten yarı süreklidir.
- (iv) S fonksiyonu $(\mathfrak{M}, h)$ üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ ve her $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{M}$ için $h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_0) < \delta$ iken $\mathfrak{d}(S(\mathfrak{Z}), S(\mathfrak{Z}_0)) < \varepsilon$ olan sadece ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.
- (v) S fonksiyonu bir $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ noktasında dizisel süreklidir $\Leftrightarrow$ her $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ dizisi $\mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{M}$ noktasına yakınsak iken $\{S(\mathfrak{Z}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ dizisi de $S(\mathfrak{Z}_0) \in \mathfrak{M}$ noktasına yakınsaktır; yani $n \rightarrow \infty$ iken $\mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{Z}_0 \Rightarrow S(\mathfrak{Z}_n) \rightarrow S(\mathfrak{Z}_0)$ dir.

Metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik tanımları birbirine denktir. $S(\mathfrak{S}_n) \rightarrow S(\mathfrak{S}_0)$ iken $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_0, n \rightarrow \infty$ ifadesi sürekli bir fonksiyon için her zaman doğru değildir.

Örneğin, $S: (\mathbb{R}, h) \rightarrow (\mathbb{R}, h)$ fonksiyonu $S(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^2$ ve $\mathfrak{S}_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $S(\mathfrak{S}_n) = 1 \rightarrow S(1)$ dir ancak $(\mathfrak{S}_n) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ olur [8].

Örnek 1.1.12. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan alışılmış metrik $h(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = |\mathfrak{S} - \mathfrak{S}|$ için

- $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iken $S\mathfrak{S} = \sin \mathfrak{S}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün süreklidir,
- $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iken $S\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^3$ fonksiyonu süreklidir, ancak düzgün sürekli değildir.

Tanım 1.1.13. [6] $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ve $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{M}$ kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{u}$ ailesine $\mathfrak{M}$ için bir topoloji ve $(\mathfrak{M}, \mathfrak{u})$ ikilisine de topolojik uzay denir:

- (i) $\mathfrak{M}, \emptyset \in \mathfrak{u}$ dir,
- (ii) $\mathfrak{u}$ ya ait kümelerin sonlu sayıda kesişimi yine $\mathfrak{u}$ ya aittir,
- (iii) $\mathfrak{u}$ ya ait olan herhangi sayıda kümenin birleşimi yine $\mathfrak{u}$ ya aittir.

Tanım 1.1.14. [6] $(\mathfrak{M}, \mathfrak{u})$ bir topolojik uzay ve $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}$ olsun. $\mathfrak{M}$ kümesinin bir $K_{\mathfrak{S}}$ alt kümesi, $\mathfrak{S} \in U_{\mathfrak{S}} \subseteq K_{\mathfrak{S}}$ olacak şekilde $U_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{u}$ kümesi varsa bu $K_{\mathfrak{S}}$ kümesine $\mathfrak{S}$ noktasının bir komşuluğu adı verilir. $\mathfrak{S}$ noktasını içeren ve topolojiye göre de açık olan kümeye de $\mathfrak{S}$ noktasının bir açık komşuluğu denir.

Tanım 1.1.15. [6] $(\mathfrak{M}, \mathfrak{u})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathfrak{u}$ topolojisinin elemanlarına açık kümeler denir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{M}$ için eğer $\mathfrak{M} \setminus \mathcal{H}$ kümesi açık ise $\mathcal{H}$ kümesine kapalı küme denir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{M}$ kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine $\mathcal{H}$ kümesinin içi denir ve $\mathcal{H}^\circ$ ile ya da $\text{int}\mathcal{H}$ ile gösterilir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{M}$ kümesini içeren tüm kapalı kümelerin kesişimine $\mathcal{H}$ kümesinin kapanışı denir ve $\overline{\mathcal{H}}$ ile gösterilir. $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ ise $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{M}$ kümesi kapalı kümedir.

Tanım 1.1.16. [6] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay olsun.

$$\mathfrak{u}_h = \{\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{M} \mid \mathcal{U} \text{ kümesi } (\mathfrak{M}, h) \text{ uzayında açık}\}$$

ailesi $\mathfrak{M}$ üzerinde bir topoloji olup h topolojisine metrik topoloji veya h metriğinin ürettiği topoloji denir.

Tanım 1.1.17. [6] $(\mathfrak{M}, u)$ topolojik uzay olsun. Eğer her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{H}$ için $\mathcal{U}$ ve $V \subset \mathfrak{M}$ gibi iki açık küme $\mathfrak{I} \in \mathcal{U}$, $\mathfrak{H} \in V$ ve $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bulunabilirse $(\mathfrak{M}, u)$ uzayına Hausdorff uzayı veya T_2 uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.18. [6] $(\mathfrak{M}, h)$ herhangi bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her sonsuz dizi yakınsak bir alt diziye sahipse bu uzaya kompakt metrik (dizisel kompakt) uzay denir. Bir metrik uzayın kompakt alt kümeleri kapalı ve sınırlıdır. Çünkü kompaktlık, sınır noktalarının da kümeye dahil olmasını gerektirir. Ayrıca bir küme sınırsız ise, bu kümeden seçilen bir dizinin yakınsamayan bir alt dizisi olacaktır, bu da kompaktlık şartını bozacaktır.

Tanım 1.1.19. [6] $\mathfrak{M}$ ve $\mathfrak{D}$ boştan farklı iki küme ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{D}$ bir fonksiyon olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ ve $\mathfrak{I} < \mathfrak{H}$ iken $S(\mathfrak{I}) \geq S(\mathfrak{H})$ ($S(\mathfrak{I}) \leq S(\mathfrak{H})$) eşitsizliği sağlanırsa S fonksiyonu $\mathfrak{M}$ kümesinde sırasıyla artmayan (nonincreasing), (azalmayan (nondecreasing)) fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.20. [6] $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $+: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ ve $\cdot: \mathbb{K} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ ikili işlemleri her $u, v \in \mathbb{K}$ ve her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H}, c \in \mathfrak{M}$ için

- (i) $\mathfrak{I} + \mathfrak{H} = \mathfrak{H} + \mathfrak{I}$,
- (ii) $\mathfrak{I} + (\mathfrak{H} + c) = (\mathfrak{I} + \mathfrak{H}) + c$,
- (iii) $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için $\mathfrak{I} + e = e + \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ olan bir $e \in \mathfrak{M}$ vardır,
- (iv) $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için $\mathfrak{I} + (-\mathfrak{I}) = (-\mathfrak{I}) + \mathfrak{I} = e$ olan bir $(-\mathfrak{I}) \in \mathfrak{M}$ vardır,
- (v) $1.\mathfrak{I} = \mathfrak{I}$,
- (vi) $u(\mathfrak{I} + \mathfrak{H}) = u.\mathfrak{I} + u.\mathfrak{H}$,
- (vii) $(u + v).\mathfrak{I} = u.\mathfrak{I} + v.\mathfrak{I}$,
- (viii) $(u.v).\mathfrak{I} = u.(v.\mathfrak{I})$,

şartlarını sağlıyorsa $(\mathfrak{M}, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ise $\mathfrak{M}$ uzayı reel vektör uzayı, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ise $\mathfrak{M}$ kompleks vektör uzayıdır.

Tanım 1.1.21. [6] $\mathfrak{M}$, $\mathbb{K}$ cismi ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa $\mathfrak{M}$ üzerinde bir norm fonksiyonu ve $(\mathfrak{M}, \|\cdot\|)$ ikilisi de bir normlu uzaydır:

$\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ ve $\forall u \in \mathbb{K}$ için

- (i) $\|\mathfrak{I}\| = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \theta$,
- (ii) $\|u\mathfrak{I}\| = |u|\|\mathfrak{I}\|$,
- (iii) $\|\mathfrak{I} + \mathfrak{H}\| \leq \|\mathfrak{I}\| + \|\mathfrak{H}\|$

dir.

Örnek 1.1.22. [6] Aşağıda verilen $\mathfrak{M}$ kümeleri üzerinde tanımlanan norm fonksiyonları ile birer normlu uzaydır:

- (i) $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ olsun. $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$ için $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\|\mathfrak{I}\| = |\mathfrak{I}|$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ de bir normdur.
- (ii) $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}_n) \in \ell_r$ ve $1 \leq r < \infty$ olmak üzere

$$\mathfrak{M} = \ell_r = \left\{ \mathfrak{I} = (\mathfrak{I}_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{I}_n|^r < \infty \right\}$$

kümesi verilsin.

$$\|\mathfrak{I}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{I}_n|^r \right)^{1/r}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|: \ell_r \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ℓ_r üzerinde bir normdur. $\mathfrak{M}$ kümesi üzerindeki bir norm, $\mathfrak{M}$ üzerinde her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \|\mathfrak{I} - \mathfrak{H}\|$$

olan bir metrik tanımlar. Bu metrik norm tarafından üretilen bir metriktir. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan üretilmeyebilir. Tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı $\mathfrak{M}$ bir vektör uzayıdır. $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}_j)$

ve $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_j)$ için

$$h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\mathfrak{I}_j - \mathfrak{H}_j|}{1 + |\mathfrak{I}_j - \mathfrak{H}_j|}$$

şeklinde verilen metrik normdan üretilmez. Bir norm tarafından üretilen h metriği $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H}, c \in \mathfrak{M}$ ve $\forall \alpha$ skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $h(\mathfrak{I} + c, \mathfrak{H} + c) = h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$, (öteleme değişmezliği)
- $h(u\mathfrak{I}, u\mathfrak{H}) = |u|h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ (homotesi)[6].

Tanım 1.1.23. [6] Bir normlu uzayda alınan her Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir.

Örnek 1.1.24. [6] Aşağıda Banach uzayı örnekleri verilmiştir:

(i) $1 \leq r < \infty$ ve $(\mathfrak{S}_n) \in \ell_r$ için

$$\eta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{S}_n|^r \right)^{1/r}$$

normuna göre $\{\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_n): \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{S}_n|^r < \infty\}$ uzayı bir Banach uzayıdır.

(ii) $\ell_{\infty} = \{\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_n): \sup |\mathfrak{S}_n| < \infty\}$ sınırlı diziler uzayı olsun. Bu uzay üzerinde verilen

$$\|\mathfrak{S}\| = \sup_n |\mathfrak{S}_n|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.25. [4] $\mathfrak{M}$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı ve $\mathfrak{M}$ üzerindeki topoloji u olsun. $(\mathfrak{M}, u)$ topolojik uzayında $u \in \mathbb{K}$ ve her $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

- (i) $(u, \mathfrak{S}) \rightarrow u \cdot \mathfrak{S}$ ile tanımlı skalerle çarpma işlemi sürekli,
- (ii) $(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \rightarrow \mathfrak{S} + \mathfrak{H}$ ile tanımlı vektörlerin toplama işlemi sürekli

ise; yani lineer uzay işlemleri $(\mathfrak{M}, u)$ topolojik uzayına göre sürekli ise $\mathfrak{M}$ uzayına bir topolojik vektör uzayı ya da lineer topolojik uzay denir.

1.2. Metrik Sabit Nokta Kavramı

Tanım 1.2.1. [9] $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun.

$$S\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$$

eşitliğini sağlayan $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}$ noktasına S dönüşümünün sabit noktası adı verilir. Yani sabit nokta dönüşüm altında invaryant kalan noktalardır. Bir dönüşümün tek sabit noktası, birden fazla sabit noktası ya da sonsuz çoklukta sabit noktası olabileceği gibi hiç sabit noktası da olmayabilir.

S dönüşümünün sabit noktaları kümesi

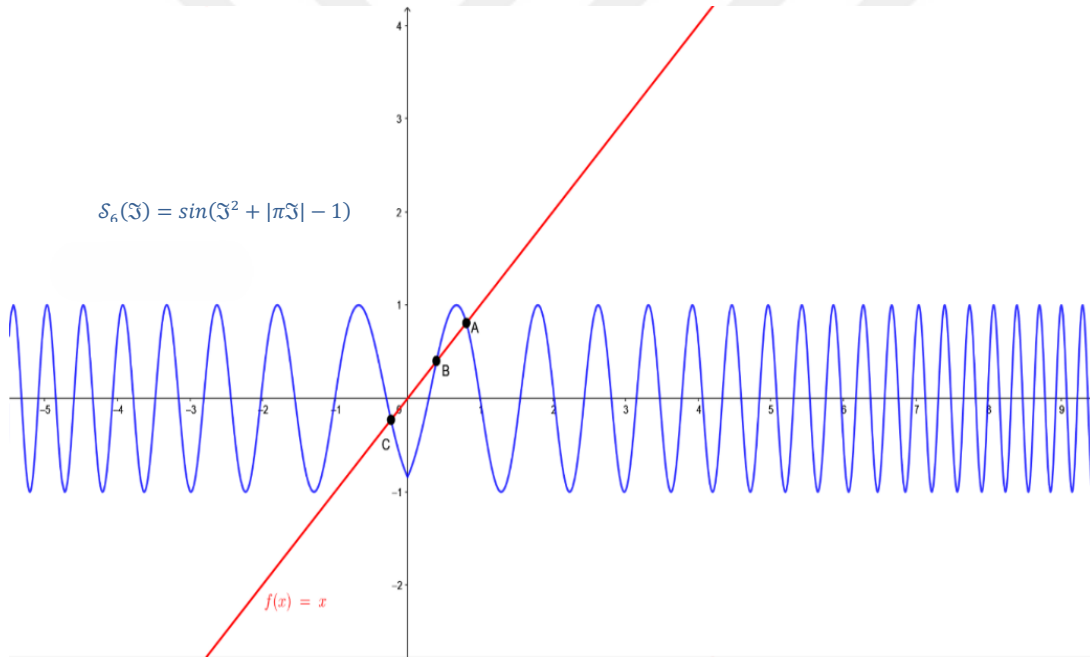
$$F(S) = \text{Fix}(S) = \{\mathfrak{S} \in \mathfrak{M} : S\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.2.2. [5] $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ ve $i = [1,5], i \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{S}_i: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ olsun.

- $\mathcal{S}_1(\mathfrak{Z}) = \sqrt{\mathfrak{Z}^2 - 8\mathfrak{Z} + 40} \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{S}) = \{5\}$ dir.
- $\mathcal{S}_2(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}^2 - 6 \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{S}) = \{-2, 3\}$ dir,
- $\mathcal{S}_3(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}^5 - 4\mathfrak{Z}^3 + \mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z} - 4 \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{S}) = \{-2, -1, 2\}$ dir.
- $\mathcal{S}_4(\mathfrak{Z}) = e^{\mathfrak{Z}+1} \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{S}) = \emptyset$ dir.
- $\mathcal{S}_5(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z} \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{S}) = \mathbb{R}$ dir.
- $\mathfrak{Z} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{S}_6(\mathfrak{Z}) = \sin(\mathfrak{Z}^2 + |\pi\mathfrak{Z}| - 1)$

fonksiyonunun ise sabit noktaları aşağıdaki grafikte belirtilen A, B ve C noktalarından oluşur, burada fonksiyonun $\mathfrak{H} = h(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$ doğrusu ile kesim noktaları grafikteki gibidir.



Şekil 1.1. $\mathcal{S}(\mathfrak{Z}) = \sin(\mathfrak{Z}^2 + |\pi\mathfrak{Z}| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları.

Tanım 1.2.3. [10,11] $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{S}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ için

$$\mathcal{S}^{n+1}(\mathfrak{Z}) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^n(\mathfrak{Z}))$$

eşitliği ile tanımlanan $\mathcal{S}^n(\mathfrak{Z})$ dönüşümüne $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ noktasının n . iterasyonu adı verilir.

$\mathcal{S}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olmak üzere

(i) $\text{Fix}(\mathcal{S}) \subset \text{Fix}(\mathcal{S}^n)$

(ii) keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $Fix(S^n) = \{\mathfrak{S}\}$ ise $Fix(S) = \{\mathfrak{S}\}$

ifadeleri doğrudur.

Tanım 1.2.4. [11] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve S^n ($n \geq 1$) dönüşümü S dönüşümünün n . iterasyonu olsun. Herhangi bir $\mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{M}$ için

$$\mathfrak{S}_n = S\mathfrak{S}_{n-1} = S\mathfrak{S}_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile tanımlı $\{\mathfrak{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ dizisine $\mathfrak{S}_0$ başlangıç noktası ile en iyi yaklaşım dizisi veya Picard iterasyon dizisi denir.

Tanım 1.2.5. [10] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) \leq k h(\mathfrak{S}, \mathfrak{H})$$

eşitsizliğini sağlayan $k \geq 0$ sabiti varsa S dönüşümüne $\mathfrak{M}$ üzerinde bir Lipschitzian dönüşümü denir. Bu eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti adı verilir.

Örnek 1.2.6. $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$, $S(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{S} - \mathfrak{H}|$ ve $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $S\mathfrak{S} = 3\mathfrak{S}$ olsun. Bu durumda $k \geq 3$ için S dönüşümü

$$S(S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) = |3\mathfrak{S} - 3\mathfrak{H}| = 3|\mathfrak{S} - \mathfrak{H}| = 3 h(\mathfrak{S}, \mathfrak{H})$$

eşitliğinden Lipschitz şartını gerçekleştirmektedir.

Tanım 1.2.7. [10] $(\mathfrak{M}, h)$ ikilisi bir metrik uzay olsun. $\forall \mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) \leq k h(\mathfrak{S}, \mathfrak{H})$$

ifadesini sağlayan $k \in [0, 1)$ sabiti varsa $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümüne “daralma (Banach daralma)” dönüşümü denir.

Örnek 1.2.8. [5] h Öklid metriği $\mathfrak{M} = [0, 100] \times [-2, 2]$ kümesi üzerinde tanımlansın. Her $(w, n) \in \mathfrak{M}$ için

$$S(w, n) = \left(2 + \sqrt{w^2 - 8w + 40}, \tan^{-1} \frac{n}{2} \right)$$

biçiminde tanımlı $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.2.9. [5] $(\mathfrak{M}, h)$ alışılmış metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir fonksiyon olsun. Her $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}$ için aşağıda verilen dönüşümler birer daralma dönüşümüdür:

- $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ iken $S(\mathfrak{Z}) = \frac{\mathfrak{Z}}{2}$,
- $\mathfrak{M} = [0,100]$ iken $S(\mathfrak{Z}) = \sqrt{\mathfrak{Z}^2 - 8\mathfrak{Z} + 40}$,
- $\mathfrak{M} = [0,10]$ ve $k \in [0,1)$ iken $S(\mathfrak{Z}) = \text{sech}(k\mathfrak{Z})$,
- $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ iken $S(\mathfrak{Z}) = \cos(\cos\mathfrak{Z})$,
- $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ iken $S(\mathfrak{Z}) = e^{-e^{-\mathfrak{Z}}}$.

Örnek 1.2.10. [5] $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde $\forall \mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3), \mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3) \in \mathbb{R}^3$ için $h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}, z) = \max\{|\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{H}_1|, |\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{H}_2|, |\mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{H}_3|\}$ olan $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ maksimum metriği verilsin. $\forall \mathfrak{Z} \in \mathfrak{M}$ için

$$P = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & -0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

iken

$$S(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z} - P\mathfrak{Z} + \mathcal{V}$$

ile tanımlı $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir daralma dönüşümüdür.

Daralma dönüşümleri düzgün sürekli dönüşümlerdir. Herhangi bir S dönüşümü sürekli değilse bir daralma dönüşümü de olamaz. Bununla birlikte, S daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir N için S^N daralma dönüşümü olabilir.

Örnek 1.2.11. $S: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$S\mathfrak{Z} = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathfrak{Z} \in [0,1] \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } \mathfrak{Z} \in (1,2] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. S dönüşümü daralma dönüşümü değildir. Çünkü $\mathfrak{Z} = 1$ noktasında süreksizdir. Ayrıca, $S^2: [0,1] \rightarrow \{0\}$, $S^2\mathfrak{Z} = 0$ olup S^2 bir daralma dönüşümüdür. S^2 dönüşümünün tek sabit noktası $\mathfrak{Z} = 0$ noktasıdır.

Metrik sabit nokta teorisinin temelleri, Polonyalı matematikçi Stefan Banach'ın 1922 yılında doktora tezinde ortaya koyduğu ve "Banach Daralma Prensibi" (Banach Contraction Principle) olarak da bilinen sabit nokta teoremi ile atılmıştır. Banach'ın bu çalışması, metrik uzaylar üzerindeki dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garanti eden temel bir sonuç sunmuş ve doğrusal olmayan analizdeki birçok modern gelişmenin yolunu açmıştır. Bu teorem, daralma dönüşümlerinin sabit noktalarının

varlığını ve tekliklerini sağlamakta olup, matematiksel analiz ve uygulamalı matematikte geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Teorem 1.2.12. (Banach sabit nokta teoremi) [12] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda S dönüşümü $\mathfrak{M}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\forall \mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{M}$ için $\mathfrak{S}_n = x_{n-1}$ biçiminde tanımlanan $\{\mathfrak{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi S dönüşümünün tek sabit noktasına yakınsaktır.

Örnek 1.3.8, 1.3.9 ve 1.3.10 da gösterilen S daralma dönüşümleri, Banach sabit nokta teoremi uyarınca tam metrik bir uzay üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bununla birlikte her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez. Bir dönüşümün bir veya daha fazla sabit noktası olabilir. Ayrıca, tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daralma dönüşümlerinin sabit noktaya sahip olması da gerekmez. Örneğin; $\mathfrak{M} = (0,1]$ kümesi mutlak değer metriği ile donatılsın. Bu durumda $S\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}$ ile tanımlı $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

1968 yılında Bryant [12] Banach sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 1.2.13. (Bryant sabit nokta teoremi) [12] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Bazı $N \in \mathbb{N}$ için S^N dönüşümü bir daralma dönüşümü ise S dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Her $\mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{M}$ için $\{\mathfrak{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisinin yakınsadığı nokta S dönüşümünün sabit noktasıdır.

Tanım 1.2.14. [10] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}, \mathfrak{S} \neq \mathfrak{H}$ için

$$h(S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) < h(\mathfrak{S}, \mathfrak{H})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa S dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir.

Örnek 1.2.15. $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ üzerinde $h(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{S} - \mathfrak{H}|$ alışılmış metrik verilsin.

$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathfrak{S} \rightarrow S\mathfrak{S} = 1 + \ln(1 + e^{\mathfrak{S}})$$

dönüşümü kesin daralma dönüşümü olup daralma dönüşümü değildir.

Edelstein [13] tam metrik uzaylarda bir $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ kesin daralma dönüşümünün sabit noktasının var olmasının gerekmediğini göstermiştir. Kompakt metrik uzaylar için sabit nokta teoremini ifade etmiştir.

Teorem 1.2.16. (Edelstein sabit nokta teoremi) [13] $(\mathfrak{M}, h)$ kompakt metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ kesin daralan bir dönüşümü olmak üzere S bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.2.17. [9] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{Z}, S\mathfrak{H}) \leq h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$$

eşitsizliğini sağlayan S dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 1.2.18. $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde h alışılmış metrik verilsin.

$$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{Z} \rightarrow S\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{Z}}{2} - k, (k \neq 0)$$

dönüşümü tanımlansın. Her $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathbb{R}$ için

$$h(S\mathfrak{Z}, S\mathfrak{H}) = \left| \frac{\mathfrak{Z}}{2} - k - \frac{\mathfrak{H}}{2} + k \right| = \frac{|\mathfrak{Z} - \mathfrak{H}|}{2} = \frac{h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})}{2} \leq h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$$

ifadesi sağlandığından S dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür.

Yukarıda belirtilen dönüşümler dikkate alındığında aşağıdaki gerektirme elde edilir [8].

$$S \text{ daralma} \Rightarrow S \text{ kesin daralma} \Rightarrow S \text{ genişlemeyen} \Rightarrow S \text{ Lipschitzian.}$$

Ancak bu gerektirmenin tersinin doğru olması her zaman gerekmez.

Tanım 1.2.19. [10] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{Z}, S\mathfrak{H}) \geq \mathfrak{Z} h(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\mathfrak{Z} > 1$ sabiti varsa S dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Daralma dönüşümleri süreklilik özelliğine sahip olan dönüşümlerdir ve bu özellik oldukça zorlayıcı bir koşuldur. Süreklilik özelliğine sahip olmayan dönüşümler için Kannan [14] 1968 yılında aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.2.20. (Kannan sabit nokta teoremi) [14] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için,

$$h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \leq k[h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}) + h(\mathfrak{J}, S\mathfrak{J})]$$

eşitsizliği sağlayan bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa S dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Her $\mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{M}$ için $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi S dönüşümünün sabit noktasına yakınsaktır.

Kannan sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi değildir. Bununla birlikte, kullanılan metrik uzayın tamlığını da gerektirdiği için son derece önemlidir. Subrahmanyam [15], Kannan sabit nokta teoreminin uzayın tamlığını gösterdiğini ifade etmiştir. Yani, $\mathfrak{M}$ üzerindeki her Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olması için $\mathfrak{M}$ metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşuldur. Banach daralma dönüşümleri bu özelliğe sahip değildir.

Bianchini [16], Kannan daralma dönüşümünün bir genellemesi olarak ‘Bianchini Sabit Nokta Teorem’ini ispatlamıştır:

Teorem 1.2.21. (Bianchini sabit nokta teoremi) [16] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \leq k \max\{h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}), h(\mathfrak{J}, S\mathfrak{J})\}$$

olan bir $k \in [0, 1)$ sabiti varsa $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremler metrik sabit nokta teorisinin gelişiminde köşe taşı niteliğindeki ifadelerdir.

Teorem 1.2.22. (Chatterjea sabit nokta teoremi) [17] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \leq k [h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) + h(\mathfrak{J}, S\mathfrak{I})]$$

olan bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa, S dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.2.23. (Reich sabit nokta teoremi) [18] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay üzerinde her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için $k_1 + k_2 + k_3 < 1$ özelliğindeki $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ sabitleri

$$h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \leq k_1 h(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) + k_2 h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}) + k_3 h(\mathfrak{J}, S\mathfrak{J})$$

olacak şekilde varsa $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.2.24. (Hardy-Rogers sabit nokta teoremi) [19] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq \kappa_1 h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) + \kappa_2 h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}) + \kappa_3 h(\mathfrak{H}, S\mathfrak{H}) \\ + \kappa_4 h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) + \kappa_5 h(\mathfrak{H}, S\mathfrak{I})$$

şeklinde $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5 < 1$ olan $\kappa_i, i = 1, \dots, 5 \in \mathbb{R}^+$ sabitleri varsa S dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.2.25. (Ciric sabit nokta teoremi) [20] $(\mathfrak{M}, h)$ tam metrik uzay ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

$$h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{I} \max \left\{ h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}), h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}), h(\mathfrak{H}, S\mathfrak{H}), \frac{h(\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) + h(\mathfrak{H}, S\mathfrak{I})}{2} \right\}$$

olan $\mathfrak{I} \in [0, 1)$ sabiti varsa S dönüşümüne Ciric daralma dönüşümü denir. Ayrıca, S dönüşümü $\mathfrak{M}$ üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.2.26. [6] $\mathfrak{M}$ boştan farklı bir küme ve $<, \mathfrak{M}$ kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer

- i. Her $\mathfrak{I} \in \mathfrak{M}$ için $\mathfrak{I} < \mathfrak{I}$ (yansıma özelliği),
- ii. $\mathfrak{I} < \mathfrak{H}$ ve $\mathfrak{H} < \mathfrak{I}$ ise $\mathfrak{I} = \mathfrak{H}$ (ters simetri özelliği),
- iii. $\mathfrak{I} < \mathfrak{H}$ ve $\mathfrak{H} < z$ ise $\mathfrak{I} < z$ (geçişme özelliği),

şartlarını sağlıyorsa $<$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

$\mathfrak{M}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa $\mathfrak{M}$ kümesine kısmi sıralı küme denir. Eğer kısmi sıralı bir kümede $\mathfrak{I}, \mathfrak{H}$ elemanları için $\mathfrak{I} < \mathfrak{H}$ veya $\mathfrak{H} < \mathfrak{I}$ şartlarından en az biri gerçekleşirse $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{H}$ elemanlarına karşılaştırılabilir eleman denir.

Tanım 1.2.27. [6] $(\mathfrak{M}, <)$ ikilisi kısmi sıralı bir küme olsun. $\mathfrak{M}$ kümesinin bir A alt kümesinin iyi sıralı bir küme olabilmesi için A kümesinin her iki elemanın karşılaştırılabilir olması gerekir.

1.3. Graf Teorisi

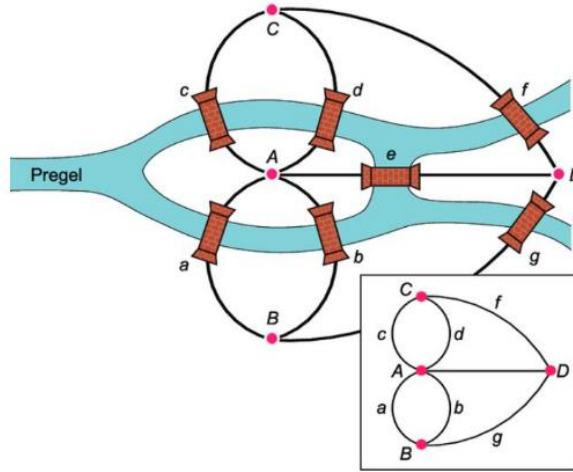
Graf teorisi, modern matematiğin en önemli ve geniş uygulama alanlarına sahip disiplinlerden biridir. Temel olarak düğümler (veya köşeler) ve bunlar arasındaki bağlantılardan (kenarlar) oluşan yapıları inceleyen bu teori, soyut matematiksel bir

yaklaşım olmasına karşın, günümüzde çok çeşitli alanlarda uygulama bulmaktadır. Graf yapıları, özellikle ilişkisel verilerin modellenmesinde güçlü bir matematiksel çerçeve sunmakta ve karmaşık sistemlerin analizi için evrensel bir temsil dili oluşturmaktadır.

Graf; düğüm adı verilen noktalar ile bu noktaları birbirine bağlayan kenar (ayrıt) adı verilen çizgilerden oluşan bir yapıdır . Örneğin, şehirleri düğüm (verticle), bu şehirleri birbirine bağlayan yolları ayrıt olarak temsil eden bir yol haritası bir graf modeli olarak düşünülebilir.

Örnek 1.3.1. [23] (Könnisberg köprüsü problemi) Euler 1736 yılında yazdığı makale ile graf teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Bu makale Şekil 1.3 de gösterilen Könnisberg Köprü problemının çözümünü içeriyordu. Pregel nehri Könnisberg kasabasının içinden akmaktadır. Nehrin ortasında nehrin kıyılara ve birbirlerine köprü ile bağlı iki ada bulunmaktadır. Könnisberg kasabasının vatandaşları için problem kıyıların veya adaların birinden başlayıp köprülerden sadece bir kez geçerek başlangıç noktasına gelmektir.

Euler öncelikle Könnisberg coğrafyasının gerekli özelliklerini bir graf yardımı ile tanımladı. Her bir nehir kıyısı ve adalar bir düğüm ile, köprüler ise ayrıtlar ile temsil edildi.



Şekil 1.2. Pregel nehri için graf

Graf teorisinin tarihsel kökeni, 18.yüzyılın en önemli matematikçilerinden biri olan Leonhard Euler'in 1736 yılında yayımladığı "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" (Geometrik konumla ilgili bir problemin çözümü) başlıklı çalışmasına dayanmaktadır. Bu çalışma, literatürde yaygın olarak "Königsberg Köprüleri

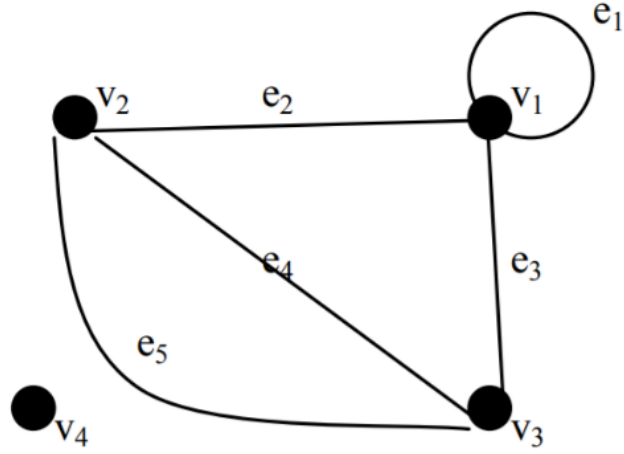
Problemi” olarak bilinmektedir. Söz konusu problem, dönemin Prusya’sında yer alan Königsberg (bugünkü Kaliningrad, Rusya) şehrinin coğrafi yapısından kaynaklanmaktadır. Şehir, Pregel Nehri üzerine kurulu olup, nehrin kollarıyla ayrılmış dört kara parçası ve bu parçaları birbirine bağlayan yedi köprüden oluşmaktaydı. Halk arasında merak uyandıran soru şuydu: “Şehrin herhangi bir noktasından başlanarak, her bir köprüden yalnızca bir kez geçilmek suretiyle tüm köprüler dolaşılabilir mi?”

Euler, bu soruyu çözümlmek için klasik geometri yada aritmetik yöntemlerin yetersiz kaldığını fark etmiştir. Bunun yerine, şehrin kara parçalarını düğüm (vertex), köprüleri ise bu düğümleri birbirine bağlayan kenar (edge) olarak temsil etmiştir. Böylece problem, geometrik veya fiziksel bir sorundan ziyade, soyut bir yapısal ilişki problemine dönüşmüştür. Euler, bu temsil üzerinden yaptığı analizde, her düğümün (kara parçasının) köprülerle olan bağlantı sayısını (derece kavramını) incelemiş ve şu sonuca ulaşmıştır:

- i. Bir graf üzerinde, başlangıç noktasına geri dönülerek her kenarın yalnızca bir kez geçildiği bir yol (Euler devresi) olması için her düğümün derecesi çift olmalıdır.
- ii. Eğer yalnızca iki düğüm tek dereceli ise, bu durumda her kenarı yalnızca bir kez geçerek başlayan ve farklı bir noktada biten bir yol (Euler yolu) mümkündür.

Königsberg köprülerinde ise dört kara parçasının da derecesi tek olduğundan, böyle bir yolun varlığı mümkün değildir. Euler’in bu çözümü, yalnızca o dönemin popüler bir bilmecesini yanıtlamakla kalmamış, aynı zamanda graf teorisinin temellerini atan ilk sistematik çalışma olmuştur.

Bu yaklaşım, matematiksel düşüncenin yalnızca sayısal hesaplama veya geometrik ölçüm ile sınırlı olmadığını, aynı zamanda ilişkiler ve yapılar üzerine de kurulabileceğini göstermiştir. Euler’in çalışması sayesinde matematik tarihinde yeni bir dönem başlamış; bu yeni alan daha sonra “geometriya situs” (yer geometrisi) ve “topoloji” kavramları ile birlikte gelişerek günümüzde graf teorisi adıyla bağımsız bir disiplin haline gelmiştir.



Şekil 1.3. ψ grafının düğümleri

Şekil 1.3 ile verilen ψ grafı incelendiğinde ψ grafının düğüm kümesinin $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve ayrit kümesinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olduğu açıktır. Örneğin, e_1 ayrıtının v_1 düğümü kendisine, e_2 ayrıtının ise v_1 ve v_2 düğümlerinin bağladığını gösterir.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi bir ayrıt bir düğümü yine kendisine bağlayacağı (loop) gibi, bir düğüm hiçbir ayrıtla bağlanmamış olabilir (v_4 düğümünde olduğu gibi). Ayrıca iki düğüm birden fazla ayrıt (multiple edge) ile de bağlanmış olabilir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta bir graf ile onu temsil eden diyagram aynı değildir. Çünkü, graf bir fonksiyon ile birlikte iki kümeden oluşur. Eğer bir graf bir düğümü yine kendisine bağlayan (çevrim içermeyen) bir ayrıt ve aynı iki düğümü birden fazla bağlayan ayrıtlara sahip değilse basit graf olarak adlandırılır.

Bir ψ grafında eğer birbirinden ayrı düğümleri bağlayan bir yol varsa ψ grafına bağlantılıdır denir

Graf teorisi, disiplinler arası niteliği ile öne çıkmaktadır. Matematiksel soyutlamaların farklı alanlara uyarlanabilmesi, graf teorisinin geniş bir uygulama yelpazesi sunmasına olanak tanımaktadır.

- i. Bilgisayar bilimleri: Veri yapıları ve algoritmalar, grafiksel modeller üzerine kuruludur. En kısa yol, en düşük maliyetli ağ veya akış optimizasyonu gibi problemler graf teorisinin temel algoritmaları (ör.Dijkstra, Bellman-Ford, Floyd-Warshall) ile çözümlenmektedir. İnternetin yapısı, sosyal medya ağları ve arama motoru algoritmaları (ör.Google PageRank) grafik tabanlı modeller üzerine kuruludur.

- ii. Mühendislik alanları: Elektrik mühendisliğinde devrelerin analizinde, endüstri mühendisliğinde lojistik ve rota optimizasyonunda, inşaat mühendisliğinde ulaşım ağlarının modellenmesinde graf teorisi kullanılmaktadır. Telekomünikasyon ve haberleşme sistemleri de ağ optimizasyonu için grafiksel yapılardan yararlanmaktadır.
- iii. Matematik ve Fizik: Kombinatorik problemlerin çözümünde, topolojik özelliklerin incelenmesinde, kuantum sistemlerinde parçacık etkileşimlerinin modellenmesinde graf teorisi önemli bir araçtır. Kaos teorisi ve dinamik sistemlerde de graf temelli yöntemler uygulanmaktadır.
- iv. Biyoloji ve Kimya: Protein-protein etkileşim ağları, genetik düzenleyici ağlar, moleküler yapılar ve biyoinformatik analizlerde graf modelleri kullanılmaktadır. Kimyada moleküllerin atom ve bağ yapıları grafiklerle temsil edilebilmektedir.
- v. Sosyal Bilimler ve Ekonomi: Sosyal ağ analizi, toplumsal etkileşimlerin matematiksel modellenmesinde graf teorisinin önemli bir uygulama alanıdır. Ekonomide ise ticaret, finansal ilişkiler ve piyasa ağları graf modelleri üzerinden incelenmektedir.

Öte yandan, günümüzde özellikle graf teorisinin sabit nokta teorisine entegrasyonu dikkat çekmektedir. Bu yaklaşım, ilk olarak 2008 yılında Jachymski [29] tarafından sistematik biçimde ele alınmış ve grafiksel sabit nokta teorisi adıyla literatüre kazandırılmıştır. Burada amaç, yalnızca metrik yapıda değil, aynı zamanda düğümler ve kenarlardan oluşan bir graf yapısına da başvurarak sabit nokta sonuçlarını daha geniş ve esnek koşullar altında elde etmektir. Özellikle sosyal ağlar, biyolojik ağlar, bilgisayar ağları ve iletişim sistemleri gibi karmaşık yapılar, graf tabanlı sabit nokta teorisinin doğal uygulama alanlarıdır.

Tanım 1.3.2. $(\mathfrak{M}, h)$ metrik uzay ve $\Delta = \{(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}): \mathfrak{S} \in \mathfrak{M}\}$ kümesi $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ kartezyen çarpımının köşegenleri olsun. $\mathfrak{M}$ kümesinin elemanları ile

- $V(\psi) \rightarrow$ grafın noktalar kümesi
- $E(\psi) \rightarrow$ grafın doğrular kümesi

tanımlansın. Bu durumda ψ grafı $(V(\psi), E(\psi))$ çifti ile tanımlanır. Bu basit yönlü bir graftır. Basit yönlü graf tüm düğüm noktalarını içerdiği için $\Delta \subseteq E(\psi)$ dir.

Eğer ψ grafinin kenarlarının yönü değiştirilir ise ψ grafinin tersi, yani ψ^{-1} grafi elde edilir.

$$E(\psi^{-1}) = \{ (\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \mid (\mathfrak{H}, \mathfrak{I}) \in E(\psi) \},$$

ve aynı zamanda $V(\psi^{-1}) = V(\psi)$ dir.

Tanım 1.3.3. ψ grafinin yönü ihmal edilir ise $\tilde{\psi}$ yönsüz (yönlendirilmemiş) grafi elde edilir. Böylece $\tilde{\psi}$ grafinin doğrular kümesi simetrik olduğundan

$$E(\tilde{\psi}) = E(\psi) \cup E(\psi^{-1})$$

yazılır. Diğer yandan $V(H) \subseteq V(\psi)$ ve $E(H) \subseteq E(\psi)$ ise H grafına ψ grafinin alt grafi denir. Eğer $\tilde{\psi}$ grafi bağlantılı ise ψ grafi zayıf bağlantılıdır denir.

Jachymski [29] metrik uzay üzerinde graf yapısını kullanarak Banach ψ –daralma dönüşümünü tanımlamış ve sabit nokta kavramının graf teorisine uygulamasının en temel sonucunu elde etmiştir.

Tanım 1.3.4. [29] $\psi, (\mathfrak{M}, h)$ üzerinde bir graf ve $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için

- (i) S dönüşümü ψ grafinin doğrularını korur. Yani, $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi) \Rightarrow (S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \in E(\psi)$ dir,
- (ii) $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi)$ için $h(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{I} h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ ifadesini sağlayan $\mathfrak{I} \in (0,1)$ vardır,

şartları sağlanırsa S dönüşümüne Banach ψ –daralma veya daha sade bir şekilde ψ –daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.3.5. [29] $(\mathfrak{M}, h)$ bir tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(\mathfrak{M}, h, \psi)$ üçlüsüne düzenli (regular) uzay adı verilir.

- (i) $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$ dizisi için $\mathfrak{I}_n \rightarrow \mathfrak{I}^*$ ve $(\mathfrak{I}_n, \mathfrak{I}_{n+1}) \in E(\psi)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(\mathfrak{I}_n, \mathfrak{I}^*) \in E(\psi)$ dir.
- (ii) $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$ dizisi için $\mathfrak{I}_n \rightarrow \mathfrak{I}^*$ ve $(\mathfrak{I}_{n+1}, \mathfrak{I}_n) \in E(\psi)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{I}_n) \in E(\psi)$ dir.



2. BAZI GENEL METRİK YAPILARI

Modüler metrik ve grafiksel metrik yapıları, klasik metrik uzay kavramının doğal genellemeleri olarak ortaya çıkmıştır. Modüler metrik, norm ve mesafe kavramlarını modüler fonksiyonlar üzerinden tanımlayarak yakınsaklık, süreklilik ve tamlık gibi topolojik özelliklerin daha geniş sınıflar altında incelenmesine imkan tanır. Özellikle Chistyakov [30-35] ve diğer araştırmacıların katkılarıyla geliştirilen bu yapı, lineer uzaylarda normun yerini alabilecek bir esneklik sunar. 2017 yılında Shukla ve arkadaşları [22] tarafından tanımlanan grafiksel metrik ise, bir uzayın yalnızca mesafe fonksiyonu ile değil, aynı zamanda bir graf yapısı ile birlikte ele alınması üzerine kuruludur. Bu yaklaşım, operatörlerin davranışlarını grafik kenarları ile kısıtlayarak daha zengin sabit nokta sonuçları elde edilmesine olanak sağlar. Böylece grafiksel metrikler, klasik metrik uzay teorisinin ötesinde, bağlantısal ve topolojik özelliklerin aynı çatı altında incelenmesine imkan veren güçlü bir araç haline gelmiştir.

2.1. Modüler Metrik Uzaylar

Modüler metrik uzaylar, klasik metrik uzay kavramını daha genel bir çerçevede ele alan yapılardır. Bu kavramın kökeni fonksiyonel analizde Nakano [36] ve Musielak ve Orlicz [37-38] tarafından ortaya konulan modüler fonksiyonlara dayanmaktadır. Orlicz uzaylarının gelişimi ile birlikte, modüler fonksiyonların sağladığı esnekliğin, mesafe fonksiyonu yerine kullanılabilecek yeni yapılar oluşturabileceği fikri doğmuştur. Bu doğrultuda Chistyakov ve diğer araştırmacılar tarafından modüler metrik uzay kavramı tanımlanmış ve sistematik olarak incelenmeye başlanmıştır.

Klasik metrik uzaylarda mesafe fonksiyonu $d(x, y)$, yalnızca iki nokta arasındaki uzaklığı ölçerken, modüler metriklerde bu ölçüm, belirli bir modüler fonksiyon s aracılığıyla yapılmaktadır. Bu sayede yakınsaklık, Cauchy dizileri ve tamlık gibi topolojik kavramlar, daha geniş ve esnek bir bakış açısıyla incelenebilmektedir. Özellikle s yakınsaklık kavramı, klasik yakınsaklık kavramından ayrırmakta ve yeni sabit nokta sonuçlarının elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

Modüler metrik uzayların önemli bir özelliği, klasik metrik yapılar ile normlu uzaylar arasında köprü kurabilmeleridir. Bu bağlamda, normun yetersiz kaldığı yada metriklerin istenilen eksikliği sağlamadığı durumlarda modüler metrikler kullanılabilmekte, böylece daha genel sonuçlara ulaşılabilmektedir. Son yıllarda sabit nokta teorisinde elde edilen pek çok yeni teorem, modüler metrik uzayların bu yapısal özelliklerine dayanmaktadır. Özellikle Banach tipi daralma eşitsizliklerinin modüler versiyonları, Wardowski tipi kontraksiyonlar, Kannan ve chatterjea benzeri genelleştirilmiş dönüşümler modüler metrikler altında ele alınarak literatüre yeni katkılar yapılmıştır. Dolayısıyla modüler metrik uzaylar, yalnızca teorik açıdan değil, aynı zamanda optimizasyon problemleri, integral denklemler ve diferansiyel denklemlerin çözümleri gibi uygulamalı alanlarda da önemli bir rol üstlenmektedir.

Tanım 2.1.1. [26] $\mathfrak{M}$ boştan farklı bir küme ve $\mu_s: (0, \infty) \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, z \in \mathfrak{M}$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(\mu_1) \text{ her } s > 0 \text{ için } \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{J} \text{ dir,}$$

$$(\mu_2) \text{ her } s > 0 \text{ için } \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = \mu_s(\mathfrak{J}, \mathfrak{I}) \text{ dir,}$$

$$(\mu_3) \text{ her } s, \ell > 0 \text{ için } \mu_{s+\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \leq \mu_s(\mathfrak{I}, z) + \mu_\ell(z, \mathfrak{J}) \text{ dir.}$$

Bu durumda μ_s fonksiyonuna modüler metrik ve $\mathfrak{M}_{\mu_s} = (\mathfrak{M}, \mu_s)$ ikilisine de modüler metrik uzay denir. Her $s > 0$ ve $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için $\mu(s, \mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ gösterimi yerine $\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2. Yukarıdaki tanımda (μ_1) şartı yerine her $\mathfrak{I} \in \mathfrak{M}$ için

$$(\mu_1') \text{ her } s > 0 \text{ için } \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) = 0$$

ifadesi sağlanırsa μ_s fonksiyonuna pseudo modüler metrik denir. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathfrak{M}$ için (μ_1') şartı ve $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{J}$ noktalarına bağlı bir $s > 0$ sayısı için

$$(\mu_s) \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = 0 \Rightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{J}$$

şartı da sağlandığında ise μ_s fonksiyonuna kesin (strict) modüler denir. Ayrıca modüler metrik fonksiyonu (μ_1) şartından daha zayıf olan

$$(\mu_1'') \text{ bazı } s > 0 \text{ için } \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{J}$$

şartını sağladığında ise μ_s fonksiyonuna regülerdir denir. Son olarak, her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, z \in \mathfrak{M}$ ve $s, \ell > 0$ için (μ_3) şartı yerine

$$(\mu_3') \mu_{s+\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq \frac{s}{s+\ell} \mu_s(\mathfrak{I}, z) + \frac{\ell}{s+\ell} \mu_\ell(z, \mathfrak{H})$$

ifadesi sağlanırsa μ_s fonksiyonuna konvektir denir.

Örnek 2.1.3. [26] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ ve $s > 0$ için

$$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \frac{h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})}{s}$$

ile tanımlanan μ_s fonksiyonu konveks modüler metrik fonksiyonudur. Ayrıca bu örnekle modüler metrik yapısının fiziksel yorumu yapılır. $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ noktaları arasında geçen zaman s ve $h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ bu noktalar arasındaki uzaklığı belirtmek üzere

$$0 \leq \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) < \infty$$

değeri ortalama hızı gösterir. Buradan hareketle aşağıdaki yorumlar yapılır.

$\mathfrak{M}$ kümesindeki $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{H}$ noktalarının çakışık olması ($h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = 0$) için gerek ve yeter şart herhangi bir $s > 0$ zamanında $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına hareketin hızının $\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = 0$ olmasıdır. Özetle, herhangi bir $s > 0$ zamanında hareket yoktur.

$h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = h(\mathfrak{H}, \mathfrak{I})$ olduğundan herhangi $s > 0$ zamanında $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına hareketin ortalama hızı ile ters yöndeki ortalama hızlar birbirine eşittir.

Zamanlar eşit olmak üzere $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına hareket aşağıdaki gibi iki şekilde yapılsın.

- (i) $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına olan harekette üçüncü bir $z \in \mathfrak{M}$ noktasından geçilsin,
- (ii) Doğrudan $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına hareket edilsin.

$\mathfrak{I}$ noktasından z noktasına olan harekette geçen süre s ve z noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına olan harekette geçen süre ise ℓ olsun. Bu durumda ortalama hızlar sırasıyla $\mu_s(\mathfrak{I}, z)$ ve $\mu_\ell(z, \mathfrak{H})$ dir. (i) durumundaki harekette harcanan zaman $s + \ell$ dir. Her iki harekette de geçen süreler eşit olduğundan (ii) durumundaki ortalama hız $\mu_{s+\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ dir. Üçgen eşitsizliğinden $h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq h(\mathfrak{I}, z) + h(z, \mathfrak{H})$ dir. Yani $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{H}$ noktaları arasındaki uzaklık (ii) durumundaki yolların toplamını aşamayacağından her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H}, z \in \mathfrak{M}$ ve $s, \ell > 0$ için

$$\mu_{s+\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq \max\{\mu_s(\mathfrak{I}, z) + \mu_\ell(z, \mathfrak{H})\} \leq \mu_s(\mathfrak{I}, z) + \mu_\ell(z, \mathfrak{H})$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 2.1.4. [26] $(\mathfrak{M}, h)$ bir metrik uzay olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ ve $s > 0$ için

$$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } s \geq h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \text{ ise} \\ \infty, & \text{eğer } s < h(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ_s fonksiyonu $\mathfrak{M}$ üzerinde konveks modülerdir. Bu örneğin bir sonucu olarak modüler metriğin görüntü kümesi de $[0, \infty]$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.5. [26] $s > 0$ ve pozitif reel sayıların $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}, \mathfrak{H} = \{\mathfrak{H}_s\}_{s \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ iki dizisi için

$$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{|\mathfrak{I}_s - \mathfrak{H}_s|}{s} \right)^p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

ile tanımlanan μ_s fonksiyonu kesin ve konveks modülerdir. Ayrıca aynı koşullar altında μ modülleri

$$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \sup_{s \in \mathbb{N}} \left(\frac{|\mathfrak{I}_s - \mathfrak{H}_s|}{s} \right)^{\frac{1}{s}}$$

ile tanımlanırsa kesin konveks olmayan modülleri elde edilir.

$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyondur. $(\mu_1) - (\mu_3)$ koşulları dikkate alındığında $0 < \ell < s$ için

$$\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq \mu_{s-\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) + \mu_{\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq \mu_{\ell}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$$

İfadesinin doğru olduğu görülür.

Tanım 2.1.6. [26] $\mu, \mathfrak{M}$ üzerinde pseudo modüler ve $\mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{M}$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{M}_{\mu} = \mathfrak{M}_{\mu}(\mathfrak{I}_0) = \{\mathfrak{I} \in \mathfrak{M} : \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_0) \rightarrow 0, (s \rightarrow \infty)\}$$

$$\mathfrak{M}_{\mu}^* = \mathfrak{M}_{\mu}^*(\mathfrak{I}_0) = \{\mathfrak{I} \in \mathfrak{M} : \exists s = s(\mathfrak{I}) > 0 \text{ öyle ki } \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_0) < \infty\}$$

kümelerine ($\mathfrak{I}_0$ civarındaki) modüler uzaylar denir. Tanımlardan $\mathfrak{M}_{\mu} \subset \mathfrak{M}_{\mu}^*$ olduğu açıktır.

μ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ üzerinde bir modüler ise $\mathfrak{M}$ modüler uzayı herhangi $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}_{\mu}$ için

$$h_{\mu}(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \inf \{s > 0 : \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq s\}$$

metriği ile verilen ve μ tarafından üretilen (nontrivial) metrik ile donatılmıştır. Ayrıca $\mu, \mathfrak{M}$ üzerinde bir konveks modüler ise $\mathfrak{M}_{\mu} = \mathfrak{M}_{\mu}^*$ olur ve bu ortak kümeler herhangi $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}_{\mu}$ için

$$h_\mu^*(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \inf \{s > 0: \mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq 1\}$$

metriği ile donatılmıştır. Bu metriğe Luxemburg uzaklığı denir.

$\mathfrak{M}_\mu^*$ modüler metrik uzay üzerinde $\mathfrak{I} \in \mathfrak{M}_\mu^*$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$B_\mu(\mathfrak{I}, r) = \{\mathfrak{H} \in \mathfrak{M}_\mu^* \mid h_\mu(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) < r\}$$

kümesi ile tanımlanır. Ayrıca her $\mathfrak{I} \in U$ için $B_\mu(\mathfrak{I}, r) \subset U$ olan bir $r = r(\mathfrak{I}) > 0$ sayısı varsa U kümesine açık küme denir.

$\mathfrak{M}_\mu^*$ kümesi üzerindeki bütün açık alt kümelerinin ailesine h_μ metriği tarafından $\mathfrak{M}_\mu^*$ kümesi üzerine indirgenen metrik topoloji denir ve S_{h_μ} ile gösterilir.

Modüler metrik uzaya ait bazı kavramlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.7.[26] $\mathfrak{M}_\mu^*$ bir modüler metrik uzay ve $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\mu^*$ bir dizi olsun.

- (i) $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathfrak{I}^* \in \mathfrak{M}_\mu^*$ noktasına μ –yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $s > 0$ için $s \rightarrow \infty$ iken $\mu_s(\mathfrak{I}_s, \mathfrak{I}^*) \rightarrow 0$ olmasıdır. Ayrıca $\mathfrak{I}^*$ noktasına $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ dizisinin μ –limiti denir.
- (ii) $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ dizisinin μ –Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $s > 0$ ve $s, m \rightarrow \infty$ için $\mu_s(\mathfrak{I}_s, \mathfrak{I}_m) \rightarrow 0$ olmasıdır.
- (iii) $\mathfrak{M}_\mu^*$ modüler metrik uzay alınan her μ –Cauchy dizisi $\mathfrak{M}_\mu^*$ uzayında bir noktaya yakınsak ise $\mathfrak{M}$ modüler metrik uzay μ –tamdır denir.
- (iv) $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{M}_\mu^*$ verilsin. $\mathcal{N}$ kümesindeki μ –yakınsak her dizinin limiti yine $\mathcal{N}$ kümesinde ise $\mathcal{N}$ kümesine μ –kapalıdır denir.
- (v) Her $s > 0$ için $\mathfrak{M}_\mu(\mathcal{N}) = \{\mu_s(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \mid \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathcal{N}\} < \infty$ ise $\mathcal{N}$ kümesine μ –sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.8. [27] $\mathfrak{M}_\mu^*$ bir modüler metrik uzay ve $S: \mathfrak{M}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{M}$ bir dönüşüm olsun. $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ dizisi $s \rightarrow \infty$ için $\mathfrak{I}_s \xrightarrow{\mu} \mathfrak{I}$ oluyor iken $S\mathfrak{I}_s \xrightarrow{\mu} S\mathfrak{I}$ oluyorsa S dönüşümüne μ –sürekli dönüşüm denir.

Teorem 2.1.9. [28] $\mathfrak{M}_\mu^*$ bir μ –tam modüler metrik ve $S: \mathfrak{M}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{M}_\mu^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}_\mu^*$ için

$$\mu_s(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq k \mu_s(\mathfrak{I})$$

ifadesi $k \in [0,1)$ için sağlansın. Her $s > 0$ için $\mu_s(\mathfrak{I}_0, S\mathfrak{I}_0) < \infty$ olan $\mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{M}_\mu^*$ elemanı varsa S dönüşümü $\mathfrak{M}_\mu^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.1.10. [28] $\mathfrak{M}_\mu^*$ bir μ –tam modüler metrik uzay ve $S: \mathfrak{M}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{M}_\mu^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}_\mu^*$ için

$$\mu_s(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq k[\mu_{2s}(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}) + \mu_{2s}(\mathfrak{H}, S\mathfrak{H})]$$

ifadesi $k \in [0, \frac{1}{2})$ için sağlansın. Her $s > 0$ için $\mu_s(\mathfrak{I}_0, S\mathfrak{I}_0) < \infty$ olan $\mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{M}_\mu^*$ elemanı varsa S dönüşümü $\mathfrak{M}_\mu^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. 2015 yılında Alfuraidan [25], Banach sabit nokta teorisinin grafla donatılmış modüler metrik uzay genellemesini elde etmiştir.

Tanım 2.1.11. [25] $(\mathfrak{M}, \mu)$ modüler metrik uzay ve $\mathfrak{M}_\mu$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi $\mathcal{C}$ olsun. Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ için $S: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ dönüşümü verilsin.

(i) ψ_μ grafinin doğrularını korur. Yani,

$$(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi_\mu) \Rightarrow (S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \in E(\psi_\mu)$$

ve eğer herhangi bir $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi_\mu)$, $k \in [0, 1)$ için

$$\mu_1(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq k \mu_1(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$$

eşitsizliği sağlanırsa S dönüşümüne ψ_μ –daralma dönüşümü adı verilir.

(ii) Eğer S dönüşümü ψ_μ grafinin doğrularını korur ve herhangi bir $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi_\mu)$ için $\mu_1(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) < \varepsilon$ iken

$$\mu_1(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq k \mu_1(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$$

olan $k \in [0, 1)$ sabiti mevcut ise S dönüşümüne $(\varepsilon, \mathfrak{I}) - \psi_\mu$ –düzenli yerel daralma dönüşümü adı verilir.

2.2. Grafiksel Metrik Uzaylar

Grafiksel metrik uzay kavramı, kalsik metrik uzayların sabit nokta teorisinde oynadığı merkezi rolün bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşımın temelinde Jachymski'nin [29] “graf ile donatılmış metrik uzaylar” fikri yatmakta olup, Shukla ve arkadaşları [22] de belirtilen çalışmalarıyla sistematik hale getirilmiştir. Klasik metrik uzaylarda mesafe fonksiyonunun üçgen eşitsizliği tüm noktalar için global olarak

sağlanırken, grafiksel metrik uzaylarda bu koşul yalnızca verilen bir grafin kenarları boyunca, yani doğrudan veya dolaylı olarak bağlantılı olan noktalar için geçerlidir. Böylece, grafiksel metrik yapılar bir yandan metrik uzayın topolojik özelliklerini korurken, diğer yandan grafin sunduğu ek yapıyı kullanarak operatörlerin davranışlarını daha esnek biçimde inceleme imkanı tanır.

Grafiksel metrikler, özellikle daralma tipinde dönüşümlerin analizinde önemlidir. Çünkü üçgen eşitsizliğinin “graf kısıtlı” versiyonu, daralma eşitsizliklerinin daha geniş sınıflar altında çalışılmasına olanak sağlar. Bu durum, Banach tipi sabit nokta teoremlerinden başlayarak, Kannan ve Chatterjea tipindeki genelleştirilmiş sabit nokta sonuçlarına kadar pek çok klasik teoremin grafiksel metrik uzaylara taşınabilmesini mümkün kılar. Ayrıca bu yaklaşım, yalnızca teorik olarak değil, integral denklemler, diferansiyel denklemler ve optimizasyon problemleri gibi uygulamalı alanlarda da yeni çözüm yolları sunmaktadır.

Bu nedenle grafiksel metrik uzaylar, hem mevcut sabit nokta teorisini genişleten hemde matematiksel modelleme ve uygulamalarda alternatif araçlar geliştiren güçlü bir yapı olarak literatürde yerini almıştır.

Tanım 2.2.1. [22] $\mathcal{M}$ boştan farklı bir küme ve ψ grafi ile donatılsın

$d_\psi: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ise,

$$(d\psi_1) d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \geq 0 \quad \forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M},$$

$$(d\psi_2) d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{H},$$

$$(d\psi_3) d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = d_\psi(\mathfrak{H}, \mathfrak{I}) \quad \forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M},$$

$$(d\psi_4) (\mathfrak{I}P\mathfrak{H})_\psi, z \in (\mathfrak{I}P\mathfrak{H})_\psi \quad \forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H}, z \in \mathcal{M} \text{ için } d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \leq d_\psi(\mathfrak{I}, z) + d_\psi(z, \mathfrak{H})$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Burada d_ψ dönüşümüne $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde bir grafiksel metrik ve $(\mathcal{M}, d_\psi)$ çiftine de grafiksel metrik uzay denir.

Örnek 2.2.2. [22] Her $(\mathcal{M}, d)$ metrik uzay, grafi ψ olan bir grafik metrik uzaydır. Burada $V(\psi) = \mathcal{M}$ ve $E(\psi) = \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dir.

Tanım 2.2.3. [22] $(\mathcal{M}, \subseteq)$ kısmi sıralı bir küme ve $d_\subseteq: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$(OM_1) d_\subseteq(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \geq 0, \quad \forall \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M},$$

$$(OM_2) d_\subseteq(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{I} = \mathfrak{H},$$

$$(OM_3) d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) \Leftrightarrow d_{\subseteq}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}) \quad \forall \mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M},$$

$$(OM_4) d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) \leq d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, z) + d_{\subseteq}(z, \mathfrak{H}) \quad \forall \mathfrak{Z}, \mathfrak{H}, z \in \mathcal{M}, \mathfrak{Z} \subseteq z \subseteq \mathfrak{H}.$$

O zaman $d_{\subseteq}$, $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde sıralı metrik ve $(\mathcal{M}, d_{\subseteq})$ çiftine de sıralı metrik uzay denir. $d_{\psi}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$ olarak gösterilir.

Uyarı 2.2.4. $(\mathcal{M}, d_{\subseteq})$ sıralı bir metrik uzay ve ψ_1 ise $V(\psi_1) = \mathcal{M}$ ve

$$E(\psi_1) = \{(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{H}\}$$

ile tanımlanan bir graf olsun. $(\mathcal{M}, d_{\psi})$ uzayı, $\mathfrak{H} \in \mathcal{M}$ için $d_{\psi}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$ olan grafiksel metrik uzaydır. Dolayısıyla her sıralı metrik uzay bu ψ grafına sahip bir grafiksel metrik uzaydır.

Örnek 2.2.5. [22] $\mathcal{M} = \mathbb{N}$ kümesi ve bu küme üzerinde $\sqsubseteq = \{(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mathfrak{H}, \mathfrak{Z} \text{ ile bölünebilsin}\}$ bağıntısı verilsin. Bir $d_{\subseteq} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{H} & ; \text{eğer } \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{H} \text{ ise} \\ 0 & ; \text{eğer } \mathfrak{Z} = \mathfrak{H} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $d_{\subseteq}$ dönüşümü $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde sıralı metriktir ve $(\mathcal{M}, d_{\subseteq})$ ikilisi de sıralı metrik uzaydır. ψ_1 grafı $\sqsubseteq$ tarafından üretilen kısmı sıralı bir grafik olsun. O halde grafiksel metrik $d_{\psi_1} = d_{\subseteq}$ bir metrik değildir.

Örneğin,

$$\mathfrak{Z} = 1, \mathfrak{H} = 5 \text{ ve } z = 4 \text{ için } d_{\subseteq}(\mathfrak{H}, z) = 20 > 5 + 4 = d_{\subseteq}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}) + d_{\subseteq}(\mathfrak{Z}, z)$$

olduğundan metrik şartı sağlanmadığı açıktır.

Uyarı 2.2.6. [22] ψ yönlendirilmemiş bir graf ve $V(\psi) = \mathcal{M}$ olsun.

$V(\psi) = \bigcup_{j=1}^n V(\psi_j)$, $E(\psi) = \Delta_{\mathcal{M}} \cup \{\bigcup_{j=1}^n E(\psi_j)\}$ olan $j = 1, 2, \dots$ olmak üzere ψ_j , ψ grafının bağıntılı bileşenleri olarak tanımlansın. $\mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in \mathcal{M}$ için $l_{\mathfrak{Z}\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{Z}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına en kısa yol ve $l_{\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}} = 0$ ile verilsin. $d_{\psi} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü ise

$$d_{\psi}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} l_{\mathfrak{Z}\mathfrak{H}}, & \text{eğer } \mathfrak{Z}, \mathfrak{H} \in V_i, i \in \{1, 2, \dots, s\} \text{ ise} \\ 1 & , \text{eğer } \mathfrak{Z} \in V_i, \mathfrak{H} \in V_j \in \{1, 2, \dots, s\}, i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.1)$$

ile tanımlansın. Bu durumda d_{ψ} , $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde bir grafiksel metriktir ve $(\mathcal{M}, d_{\psi})$ ise bir grafiksel metrik uzaydır.

Örnek 2.2.7. [22] ψ yönlendirilmemiş bir graf olsun.

$$V(\psi) = \{\mathfrak{I}_i, i \in \{1, 2, \dots, 6\}\}, E(\psi) = \Delta \cup \{e_i, i \in \{1, 2, 3, 5\}\}$$

ve $e_i = \{\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_{i+1}\}$, ψ_1, ψ_2 olsun. Burada $V(\psi_1) = \{\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}_4\}$, $E(\psi_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $V(\psi_2) = \{\mathfrak{I}_5, \mathfrak{I}_6\}$, $E(\psi_2) = \{e_5\}$ dir. Burada $V(\psi) = V(\psi_1) \cup V(\psi_2)$ ve ψ_1, ψ_2, ψ grafının bağlantılı bileşenleridir. (2.1) ile tanımlanan d_ψ , $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde bir grafiksel metriktir.

d_ψ , U uzayı üzerinde bir metrik değildir. Gerçekten

$$d_\psi(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_4) > d_\psi(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_6) + d_\psi(\mathfrak{I}_6, \mathfrak{I}_4) \text{ olduğundan } d_\psi \text{ metrik değildir.}$$

Örnek 2.2.8. [22] $\mathcal{M} = [0, 1]$ uzayı verilsin. ψ grafi $V(\psi) = \mathcal{M}$ ve

$$E(\psi) = \{(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : (\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in [0, 1], \mathfrak{I} \leq \mathfrak{H}\}$$

olsun. $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} 0 & ; \text{eğer } \mathfrak{I} = \mathfrak{H} \text{ ise} \\ \mathfrak{I}\mathfrak{H} & ; \text{eğer } \mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in (0, 1], \mathfrak{I} \neq \mathfrak{H} \text{ ise} \\ \mathfrak{I} + \mathfrak{H} & ; \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda d_ψ , $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde bir grafiksel metrik ve $(\mathcal{M}, d_\psi)$ ise bir grafiksel metrik uzaydır. Ancak d_ψ , $\mathcal{M}$ kümesi üzerinde bir metrik değildir.

Uyarı 2.2.9. Kenarları içeren herhangi bir yönlendirilmiş graftaki bağıntı (yani bir ψ grafi ve $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{H}$ noktası verildiğinde, $\mathfrak{I}$ noktasından $\mathfrak{H}$ noktasına bir yol olup olmadığı belirlenir.) kısmi bir sıralama olmayan yansımali, geçişli bir P bağıntıdır. Eğer yönlendirilmiş graf döngüsel ise, P bağıntısı kısmi bir sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.2.10. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir grafiksel metrik uzay olsun. Merkezi $\mathfrak{I} \in \mathcal{M}$ ve yarıçapı $\varepsilon > 0$ olan bir açık $B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon)$ yuvarı

$$B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon) = \{\mathfrak{H} \in \mathcal{M} : (\mathfrak{I}P\mathfrak{H})_\psi, d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) < \varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümedir. $E(\psi) \supseteq \Delta$ olduğundan $\mathfrak{I} \in B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon)$ olduğu açıktır. Her $\mathfrak{I} \in U$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur. $B = \{B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon) : \mathfrak{I} \in \mathcal{M}, \varepsilon > 0\}$ ailesi $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde d_ψ metriği tarafından üretilen S_ψ topolojisi için bir komşuluk sistemidir. $\mathcal{M}$ uzayının bir D alt kümesi, her $\mathfrak{I} \in D$ için $B_\psi(\mathfrak{I}, \varepsilon) \subset D$ ifadesi sağlanacak biçimde

bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa D kümesine açık küme adı verilir. $\mathcal{M}$ uzayının bir C alt kümesi, tümleyeni olan $\mathcal{M} \setminus C$ kümesi açık ise kapalı küme olarak isimlendirilir.

Lemma 2.2.11. [22] Her açık yuvar $\mathcal{M}$ uzayının bir açık kümesidir.

Tanım 2.2.12. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir grafiksel metrik uzay ve $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{M}$ uzayı içinde bir dizi olsun. $\mathfrak{I} \in \mathcal{M}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $k \geq k_0$ için $d_\psi(\mathfrak{I}_k, \mathfrak{I}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisine $\mathfrak{I}$ noktasına grafiksel yakınsaktır denir. Buradan $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{I}$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_\psi(\mathfrak{I}_k, \mathfrak{I}) = 0$ sağlanır.

Tanım 2.2.13. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir grafiksel metrik uzay ve $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{M}$ uzayı içinde bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $k, m > k_0$ için $d_\psi(\mathfrak{I}_k, \mathfrak{I}_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.14. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ grafiksel metrik uzay, $\mathcal{M}$ uzayındaki her grafiksel Cauchy dizisi $\mathcal{M}$ uzayı elemanı olan bir noktaya yakınsıyorsa grafiksel tamdır denir.

2.3. Grafiksel Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 2.3.1. [22] $\mathcal{M}$ boştan farklı bir küme olsun. Eğer ψ grafi üzerinde $\mathfrak{I}$ ten $\mathfrak{J}$ ye bir yol varsa $\mathcal{M}$ üzerindeki P bağlantısı $(\mathfrak{I}P\mathfrak{J})_\psi$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.2. [22] Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $(\mathfrak{I}_n P \mathfrak{I}_{n+1})_\psi$ sağlanıyorsa $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine terim terime ψ -bağlantılı denir. Kısaca ψ -AWC diye gösterilir.

Tanım 2.3.3. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir grafiksel metrik uzay, $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ bir dönüşüm ve ψ^*, ψ grafinin bir alt grafi olsun, öyle ki $E(\psi^*) \supseteq \Delta$ sağlansın. Aşağıdaki koşullar sağlandığında S dönüşümü $\mathcal{M}$ uzayı üzerinde bir (ψ, ψ^*) grafiksel daralma olarak adlandırılır:

(ψC_1) S dönüşümü $E(\psi^*)$ kümesindeki kenarları kenarlara götürür. Yani

$$(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \in E(\psi^*) \text{ iken } (S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \in E(\psi^*) \text{ sağlanır.}$$

(ψC_2) Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathcal{M}$ ve $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \in E(\psi^*)$ iken $d_\psi(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \leq \lambda d_\psi(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ olacak şekilde $\lambda = (0,1)$ vardır.

Örnek 2.3.4. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ metrik uzay ve ψ_0 grafi $V(\psi_0) = \mathcal{M}$ olacak şekilde bir graf olsun. $\mathcal{M}$ uzayı üzerindeki her ψ_0 daralması (Jachymski yaklaşımına göre), $E(\psi) = \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ve $\psi^* = \psi_0$ olan bir (ψ^*, ψ_0) grafiksel daralmadır.

Teorem 2.3.5. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir ψ^* tam grafiksel metrik uzay ve $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ bir (ψ, ψ^*) grafiksel daralma olsun. Aşağıdakiler sağlansın.

i) $l \in \mathbb{N}$ için $S\mathfrak{I}_0 \in [\mathfrak{I}_0]_{\psi^*}^l$ olacak şekilde $\mathfrak{I}_0 \in \mathcal{M}$ vardır.

ii) Eğer bir ψ^* terim terime bağlantılı $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S –Picard dizisi $\mathcal{M}$ uzayında yakınsak ise bu durumda $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $z \in \mathcal{M}$ limiti vardır ve her $n > n_0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $(\mathfrak{I}_n, z) \in E(\psi^*)$ veya $(z, \mathfrak{I}_n) \in E(\psi^*)$ dir.

Bu durumda, öyle bir $\mathfrak{I}^* \in \mathfrak{I}$ vardır ki, başlangıç değeri $\mathfrak{I}_0 \in \mathcal{M}$ ile $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S –Picard dizisi ψ^* terim terime bağlantılıdır ve $\mathfrak{I}^*$ noktasına yakınsar. Ayrıca $\mathfrak{I}^*$ noktası S dönüşümünün sabit noktasıdır.

Tanım 2.3.6. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir grafiksel metrik uzay ve $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda S dönüşümü aşağıdaki şartı sağlıyorsa $(\mathcal{K})$ özelliğine sahiptir denir :

ψ^* terim terime bağlantılı $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S –Picard dizisi, $\mathfrak{I}^* \in \mathcal{M}$ ve $\mathfrak{H}^* \in S(\mathcal{M})$ olmak üzere iki $\mathfrak{I}^*$ ve $\mathfrak{H}^*$ limiti varsa $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{H}^*$ dir.

Teorem 2.3.7. [22] $(\mathcal{M}, d_\psi)$ bir ψ^* tam grafiksel metrik uzay ve $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ bir (ψ, ψ^*) grafiksel daralma olsun. Aşağıdakiler sağlansın :

i) $l \in \mathbb{N}$ için $S\mathfrak{I}_0 \in [\mathfrak{I}_0]_{\psi^*}^l$ olacak şekilde $\mathfrak{I}_0 \in \mathcal{M}$ vardır.

ii) Eğer bir ψ^* -terim terime bağlantılı $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ S –Picard dizisi $\mathcal{M}$ uzayında yakınsak ise bu durumda $\{\mathfrak{I}_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir $z \in \mathcal{M}$ limiti ve her $n > n_0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $(\mathfrak{I}_n, z) \in E(\psi^*)$ veya $(z, \mathfrak{I}_n) \in E(\psi^*)$ sağlanır.

Bu durumda, başlangıç değeri $\mathfrak{I}_0 \in \mathcal{M}$ olan $\{\mathfrak{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S –Picard dizisi, ψ^* –terim terime bağlantılıdır ve hem $\mathfrak{I}^*$ hem de $S\mathfrak{I}^*$ noktalarına yakınsayacak biçimde $\mathfrak{I}^* \in \mathcal{M}$ vardır. Ayrıca, eğer S dönüşümü $(\mathcal{K})$ özelliğine sahipse $\mathcal{M}$ uzayında bir sabit noktası vardır.



3. GRAFİKSEL MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ

Bu bölümde, klasik sabit nokta teorisinin modüler ve grafiksel metrik yapılar altında genişletilmiş biçimleri ele alınmaktadır. Çalışmanın amacı, metrik ve modüler yaklaşımların bir araya getirilmesiyle elde edilen grafiksel modüler metrik uzaylar üzerinde sabit nokta sonuçları ortaya koymak ve bu yapıların analitik gücünü göstermek, böylece soyut teoriyi daha genel çerçevelere taşımaktır. Bölüm boyunca, önce modüler metrik kavramı ile grafiksel yapıların birleştirilmesinden doğan yeni uzayların tanımı ve temel topolojik özellikleri incelenecek, ardından bu uzaylarda Banach, Kannan ve Reich daralma koşullarını sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde edilecektir. Grafiksel modüler metrik uzaylarda elde edilen sabit nokta sonuçlarının farklı alanlara uygulanabilirliği incelenmektedir. Reich tipi daralma koşulunu sağlayan dönüşümler yardımıyla dinamik piyasa dengesi problemi ele alınmış ve ekonomik sistemlerin kararlılığını belirleyen bir sabit nokta formülasyonu geliştirilmiştir. Aynı yaklaşım, fiziksel bir model olan ısı iletim problemi üzerine uygulanarak genişletilmektedir. Böylece grafiksel modüler-Reich daralması ilkesi hem ekonomik hem de fiziksel sistemlerde kararlı durumun varlığını garanti eden ortak bir çatı altında değerlendirilmiş olacaktır. İlk olarak, ısı iletim modelinin matematiksel temeli verilecek, ardından grafiksel modüler metrik yapıda tanımlanan operatörün sabit noktasının fiziksel anlamı ayrıntılı biçimde incelenecektir. Bu yaklaşım, sabit nokta teorisinin disiplinler arası gücünü ortaya koyarak, soyut matematiksel ilkelerin gerçek sistem davranışlarına uygulanabilirliğini göstermektedir.

3.1. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylar

Bu bölümde, modüler metrik yapının grafiksel yaklaşımla birleştirilmesiyle elde edilen grafiksel modüler metrik uzay kavramı tanımlanacak ve bu uzayların temel topolojik özellikleri incelenecektir. Klasik metrik uzaylar yalnızca mesafe kavramına dayanırken, modüler metrikler fonksiyonel bir genelleme sunmakta; grafiksel yapı ise elemanlar arasındaki ilişkileri yönlü kenarlar üzerinden ifade ederek daha esnek bir

analitik çerçeve oluşturmaktadır. Böylece, hem modüler metriklerin fonksiyonel avantajları hem de grafiksel modellerin yapısal gücü tek bir uzayda birleştirilmektedir. Bu birleşim, özellikle yönlü bağımlılıklar, asimetrik ilişkiler veya zamana bağlı dinamik sistemler gibi durumlarda sabit nokta teoremlerinin daha geniş sınıflarda uygulanabilmesini sağlamaktadır.

Tanım 3.1.1. G_M boştan farklı bir küme olsun. ψ bu küme üzerinde bir graf olarak verilsin.

$\eta: (0, \infty) \times G_M \times G_M \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

(η_1) her $m > 0$ ve $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in G_M$ için $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} \Leftrightarrow \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) = 0$,

(η_2) her $m > 0$ ve $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in G_M$ için $\eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) = \eta_m(\mathfrak{H}, \mathfrak{S})$,

(η_3) her $m, n > 0$ ve $\mathfrak{S}, \mathfrak{H}, z \in G_M$ için $(\mathfrak{S}P\mathfrak{H})_\psi, z \in (\mathfrak{S}P\mathfrak{H})_\psi$ ise

$$\eta_{m+n}(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \leq \eta_m(\mathfrak{S}, z) + \eta_n(z, \mathfrak{H}) \text{ dir.}$$

Bu durumda η_m fonksiyonuna G_M üzerinde bir grafiksel modüler metrik adı verilir ve (G_M, η_m) ikilisi ise bir grafiksel modüler metrik uzaydır.

G_M üzerinde tanımlı bir grafiksel modüler metrik η_m fonksiyonu (η_1) koşulunun zayıf bir formu olan aşağıdaki şartı sağlıyorsa düzenli modüler metriktir..

(η_4) Bazı $m > 0$ için $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} \Leftrightarrow \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) = 0$ dır.

Ayrıca tüm $n > 0$ ve $\mathfrak{S}, \mathfrak{H}, z \in G_M$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa η_m konvektir.

$$(\eta_5) \quad \eta_{m+n}(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \leq \frac{m}{m+n} \eta_m(\mathfrak{S}, z) + \frac{n}{m+n} \eta_n(z, \mathfrak{H})$$

şartı eğer (η_3) yerine

(η_6) Tüm $m, n > 0$ ve $\mathfrak{S}, \mathfrak{H}, z \in G_M$ için $(\mathfrak{S}P\mathfrak{H})_\psi, z \in (\mathfrak{S}P\mathfrak{H})_\psi$ ise

$$\eta_{\max\{m,n\}}(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \leq \eta_m(\mathfrak{S}, z) + \eta_n(z, \mathfrak{H})$$

şartı sağlanıyorsa bu durumda (G_M, η_m) bir Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2. (G_M, η_m) bir Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay olsun. Bazı $m > 0$ için $\mathfrak{S} \in G_M$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon) = \{ \mathfrak{H} \in G_M : (\mathfrak{S}P\mathfrak{H})_\psi, \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) < \varepsilon \}$$

ile tanımlanır.

$\Delta \subset E(\psi)$ olduğundan $\eta \in B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ dır ve buradan tüm $\mathfrak{S} \in G_M$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_\psi(\eta, \varepsilon) \neq \emptyset$ sağlanır. $B = \{B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon) : \mathfrak{S} \in G_M, \varepsilon > 0\}$ ile tanımlı B ailesi archimedean

olmayan grafiksel modüler metrik uzay η tarafından üretilen τ_ψ topolojisi için bir komşuluk sistemidir.

Tanım 3.1.3. G_M Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay, $U \subseteq G_M$ ve $\mathfrak{S} \in U$ olsun. Her $\mathfrak{S} \in U$ için $B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon) \subseteq U$ olacak biçimde en az bir $\varepsilon > 0$ varsa U kümesine G_M uzayında bir açık küme adı verilir.

Tanım 3.1.4. G_M uzayının bir F alt kümesi verildiğinde $G_M \setminus F$ kümesi açık küme ise F kümesi G_M uzayında kapalı küme denir.

Teorem 3.1.5. G_M uzayındaki her açık yuvar, açık bir kümedir.

İspat : $\mathfrak{S} \in G_M$ ve $\varepsilon > 0$ için $\mathfrak{S} \in B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ olsun. $z \in B_\psi(\mathfrak{S}, \delta)$ olmak üzere

$\delta = \varepsilon - \eta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) > 0$ tanımlansın. Buradan $(\mathfrak{S}P\mathfrak{S})_\psi$ ve $(\mathfrak{S}Pz)_\psi$ sağlanır ve $(\mathfrak{S}Pz)_\psi$ bulunur. (η_6) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\eta_m(z, \mathfrak{S}) &= \eta_{\max\{m, m\}}(z, \mathfrak{S}) \leq \eta_m(z, \mathfrak{S}) + \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) \\ &< \delta + \eta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \varepsilon - \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) + \eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $B_\psi(\mathfrak{S}, \delta) \subseteq B_\psi(\mathfrak{S}, \varepsilon)$ kapsamı sağlanır.

Şimdi, Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzaylarda yakınsaklık, Cauchy-dizisi ve tamlık kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 3.1.6. (G_M, η_m) Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı her $n > \mathcal{N}_\varepsilon$ ve $m > 0$ için $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilirse $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\vartheta \in G_M$ noktasına ψ -yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \vartheta$ ile gösterilir. $\vartheta \in G_M$ noktasına $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ψ -limiti denir.

Tanım 3.1.7. (G_M, η_m) Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı her $m, n > \mathcal{N}_\varepsilon$ için $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilirse $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine ψ -Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.8. G_M uzayındaki her ψ -Cauchy dizisi ψ -yakınsak ise (G_M, η_m) ikilisine ψ -tam uzay denir.

Uyarı 3.1.9. $G_M = 2_{\mathbb{N}} \cup \{0\}$, $2_{\mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ve ψ bir grafi

$V(\psi) = G_M$ ve $E(\psi) = \{(\vartheta_n, \vartheta_m) \in G_M \times G_M : \vartheta_m \leq \vartheta_n\}$ olarak tanımlansın.

$\eta_m: G_M \times G_M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $m > 0$ için

$$\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } \vartheta_n = \vartheta_m \text{ ise} \\ \frac{\vartheta_n \cdot \vartheta_m}{m} & , \text{ eğer } \vartheta_n, \vartheta_m \in 2_{\mathbb{N}}, \vartheta_n \neq \vartheta_m \text{ ise} \\ \frac{1}{2m}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda η_m bir grafiksel modüler metrik ve (G_M, η_m) bir grafiksel modüler metrik uzaydır. G_M de bir $\{\vartheta_n\}$ dizisini her $n \in \mathbb{N}$ için $\vartheta_n = \frac{1}{2^n}$ şeklinde tanımlansın.

Keyfi bir $k \in \mathbb{N}$ sabiti $n \rightarrow \infty$ için

$$\eta_m\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{m \cdot 2^{n+k}} \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ dizisi $\frac{1}{2^k}$ noktasına yakınsar.

Bu durumda grafiksel modüler metrik uzaylarda bir dizinin limiti tek olmayabilir.

Lemma 3.1.10. (G_M, η_m) grafiksel modüler metrik uzay ve τ_ψ bu uzayın topolojisi olsun. Bu durumda τ_ψ topolojisi T_1 dir fakat genellikle Hausdorff (T_2) değildir.

İspat : Her $\vartheta_n \in G_M$ için $\{\vartheta_n\}$ tek nokta kümesinin G_M nin kapalı alt kümesi olduğunu yani $G_M \setminus \{\vartheta_n\}$ kümesinin açık küme olduğunu göstermek yeterlidir.

$\vartheta_m \in G_M \setminus \{\vartheta_n\}$ olsun. Bu durumda $\vartheta_n \neq \vartheta_m$ yani $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) > 0$ dir.

$$\varepsilon = \frac{\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m)}{2} > 0$$

olsun. Böylece $\vartheta_n \notin B_\psi(\vartheta_m, \varepsilon)$ dir. Aksi takdirde

$$\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) < \varepsilon = \frac{\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m)}{2}$$

olur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak $B_\psi(\vartheta_m, \varepsilon) \subset G_M \setminus \{\vartheta_n\}$ elde edilir. Böylece $G_M \setminus \{\vartheta_n\}$ bir açık kümedir. Bu durumda Uyarı 3.1.9 dan grafiksel modüler metrik uzay genellikle Hausdorff uzayı değildir.

Uyarı 3.1.11. Uyarı 3.1.9 da verilen (G_M, η_m) grafiksel modüler metrik uzayı göz önüne aldığında $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ dizisinin bir limiti $\frac{1}{2}$ noktasıdır. Fakat her $k \in \mathbb{N}, k > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_m\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^k}\right) = 0 \neq \eta_m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^k}\right)$$

olduğundan bir grafiksel modüler metriğin sürekli olmasının gerekmediği açıktır.

Örnek 3.1.12. $G_M = \{0,1,2,3\}$ ve $E(\psi)=\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $m > 0$ için

$$\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = \begin{cases} \frac{|\vartheta_n - \vartheta_m|^2}{m}, & \text{eğer } \vartheta_n \neq \vartheta_m \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } \vartheta_n = \vartheta_m \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. Bu durumda

η_1 : her $m > 0$ için ve $\vartheta_n, \vartheta_m \in G_M$ için $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = 0$ olsun.

$$0 = \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = \frac{|\vartheta_n - \vartheta_m|^2}{m} = |\vartheta_n - \vartheta_m|^2$$

ve

$$|\vartheta_n - \vartheta_m|^2 = 0 \Rightarrow \vartheta_n = \vartheta_m$$

dir. $\vartheta_n = \vartheta_m$ olsun. Buradan $|\vartheta_n - \vartheta_m| = 0$ dır. Aynı zamanda her $m > 0$ için

$$\frac{|\vartheta_n - \vartheta_m|^2}{m} = 0$$

dır. Dolayısıyla $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = 0$ olur. Böylece $\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = 0 \Leftrightarrow \vartheta_n = \vartheta_m$ bulunur.

η_2 : her $m > 0$ için ve $\vartheta_n, \vartheta_m \in G_M$ için

$$\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_m) = \frac{|\vartheta_n - \vartheta_m|^2}{m} = \frac{|\vartheta_m - \vartheta_n|^2}{m} = \eta_m(\vartheta_m, \vartheta_n)$$

dir.

η_3 : her $m > 0$ için ve $\vartheta_n, \vartheta_m, \vartheta_z \in G_M$ için $(\vartheta_n P \vartheta_m)_\psi$, $\vartheta_z \in (\vartheta_n P, \vartheta_m)_\psi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta_{m+n}(\vartheta_n, \vartheta_m) &= \frac{|\vartheta_n - \vartheta_m|^2}{m+n} = \frac{|\vartheta_n - \vartheta_z + \vartheta_z - \vartheta_m|^2}{m+n} \\ &\leq \frac{|\vartheta_n - \vartheta_z|^2}{m+n} + \frac{|\vartheta_z - \vartheta_m|^2}{m+n} \\ &\leq \frac{|\vartheta_n - \vartheta_z|^2}{m} + \frac{|\vartheta_z - \vartheta_m|^2}{n} \\ &= \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_z) + \eta_m(\vartheta_z, \vartheta_m) \end{aligned}$$

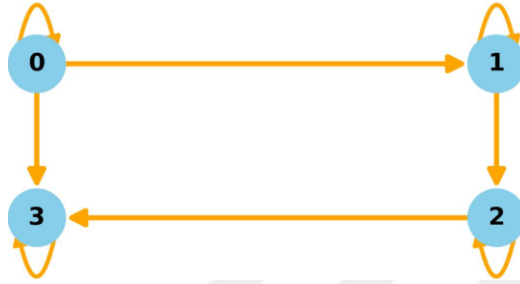
dir. Böylece (η_m, G_m) grafiksel modüler metrik uzaydır. Ayrıca

$$\eta_m(1,3) \leq \eta_m(1,2) + \eta_m(2,3)$$

$$\frac{|1-3|^2}{m} \leq \frac{|1-2|^2}{m} + \frac{|2-3|^2}{m}$$

$$\frac{4}{m} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

çelişkisi olduğundan (η_m, G_M) modüler metrik uzay değildir.



Şekil 3.1. Grafiksel modüler metrik uzay için graf modeli

3.2. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde grafiksel modüler-Banach, grafiksel modüler-Kannan ve grafiksel modüler-Reich daralma dönüşümleri tanımlanacaktır ve ilgili sabit nokta teoremleri verilecektir. Ayrıca bu sabit nokta teoremleri destekleyen örnekler sunulacaktır.

Tanım 3.2.1. G_M Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay ve

$S: G_M \rightarrow G_M$ bir dönüşüm olsun. S dönüşümü

- (i) Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in G_M$ için $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi) \Rightarrow (S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \in E(\psi)$ sağlanır, yani S dönüşümü $E(\psi)$ altında korunur;
- (ii) Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{H} \in G_M$ için $(\mathfrak{I}, \mathfrak{H}) \in E(\psi)$ iken $m > 0$ için

$$\eta_m(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{H}) \leq \beta \eta_m(\mathfrak{I}, \mathfrak{H})$$

olacak şekilde $\beta \in (0,1)$ sabiti vardır;

özelliklerini sağlarsa G_M uzayında bir grafiksel modüler- Banach daralma dönüşümü olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.2. (G_M, η_m) ψ - tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay, $S: G_M \rightarrow G_M$ bir grafiksel modüler -Banach daralma dönüşümü olsun. ψ grafi sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için $S\vartheta_0 \in [\vartheta_0]_{\psi}^{\ell}$ olan $\vartheta_0 \in G_M$ için (P) özelliğini sağlasın. Bu durumda

$\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi S -Picard dizisi ψ -AWC dir ve $\vartheta' \in G_M$ noktasına yakınsaktır. Ayrıca S dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için $S\vartheta_0 \in [\vartheta_0]_\psi^\ell$ olan $\vartheta_0 \in \psi_m$ verilsin. $j = 1, 2, \dots, \ell$ için $(\mathfrak{S}_{j-1}, \mathfrak{S}_j) \in E(\psi)$ ve ϑ_0 başlangıç noktasına sahip $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S -Picard dizisi olmak üzere

$$\vartheta_0 = \mathfrak{S}_0$$

$$S\vartheta_0 = \mathfrak{S}_1$$

olacak şekilde en az bir $\{\mathfrak{S}_j\}_{j=0}^\ell$ yolu vardır. S, ψ grafinin kenarlarını koruduğundan $j = 1, 2, \dots, \ell$ için $(S\mathfrak{S}_{j-1}, S\mathfrak{S}_j) \in E(\psi)$ bulunur. Bu ise $S\mathfrak{S}_0 = S\vartheta_0 = \vartheta_1$ elemanından $S\mathfrak{S}_1 = S^2\vartheta_0 = \vartheta_2$ elemanına tanımlı bir ℓ uzunluklu $\{S\mathfrak{S}_j\}_{j=0}^\ell$ yolunun var olması demektir.

Buradan $\vartheta_2 \in [\vartheta_1]_\psi^\ell$ yazılır. Bu şekilde devam edilirse $S^n\vartheta_0 = S^n\mathfrak{S}_0 = \vartheta_n$ noktasından $S^n\vartheta_1 = S^nS\mathfrak{S}_0 = \vartheta_{n+1}$ noktasına tanımlı ℓ uzunluklu $\{S^n\mathfrak{S}_j\}_{j=0}^\ell$ yolu elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\vartheta_{n+1} \in [\vartheta_n]_\psi^\ell$$

bulunur. Bu ise $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin her $n \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, 2, \dots, \ell$ için

$$(S^n\vartheta_{j-1}, S^n\vartheta_j) \in E(\psi)$$

özellikli bir ψ -AWC dizisi olması anlamına gelir.

$$(S^n\vartheta_{j-1}, S^n\vartheta_j) \in E(\psi),$$

$n \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, 2, \dots, \ell$ için grafiksel modüler Banach daralmasının daralma koşulu kullanılarak

$$\eta_m(S^n\vartheta_{j-1}, S^n\vartheta_j) = \eta_m(S(S^{n-1}\vartheta_{j-1}), S(S^{n-1}\vartheta_j))$$

$$\leq \beta \eta_m(S^{n-1}\vartheta_{j-1}, S^{n-1}\vartheta_j)$$

$$\leq \beta^2 \eta_m(S^{n-2}\vartheta_{j-1}, S^{n-1}\vartheta_j)$$

$$\eta_m(S^n\vartheta_{j-1}, S^n\vartheta_j) \leq \beta^n \eta_m(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j)$$

elde edilir. Şimdi $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n < k$ için $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_{n+1}) &= \eta_m(S^n \mathfrak{S}_0, S^{n+1} \mathfrak{S}_0) = \eta_m(S^n \mathfrak{S}_0, S^n \mathfrak{S}_1) \\ &= \eta_{\max\{n, n\}}(S^n \mathfrak{S}_0, S^n \mathfrak{S}_1) \\ &\leq \eta_m(S^n \mathfrak{S}_0, S^n \mathfrak{S}_1) + \eta_m(S^n \mathfrak{S}_1, S^n \mathfrak{S}_1)\end{aligned}$$

sağlanır. Benzer şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_{n+1}) &\leq \eta_m(S^n \mathfrak{S}_0, S^n \mathfrak{S}_1) + \eta_m(S^n \mathfrak{S}_1, S^n \mathfrak{S}_2) + \dots + \eta_m(S^n \mathfrak{S}_{\ell-1}, S^n \mathfrak{S}_1) \\ &\leq \beta^n \eta_m(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1) + \beta^n \eta_m(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) + \dots + \beta^n \eta_m(\mathfrak{S}_{\ell-1}, \mathfrak{S}_1) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \beta^n \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i)\end{aligned}$$

bulunur. İterasyon dizisinin ψ -AWC dizisi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\eta_m(\vartheta_n, \vartheta_k) &= \eta_{\max\{n, k\}}(\vartheta_n, \vartheta_k) \leq \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_{n+1}) + \eta_m(\vartheta_{n+1}, \vartheta_k) \\ \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_k) &\leq \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_{n+1}) + \eta_m(\vartheta_{n+1}, \vartheta_{n+2}) + \dots + \eta_m(\vartheta_{k-1}, \vartheta_k) \\ &\leq \beta^n \left[\sum_{i=1}^{\ell} \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i) \right] + \\ &\quad \beta^{n+1} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i) \right] + \dots + \beta^{k-1} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i) \right] \\ &\leq \sum_{j=n}^{k-1} \beta^j \sum_{i=1}^{\ell} \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i) \\ &= \sum_{j=n}^{k-1} \beta^j A_{\ell} \\ &= \beta^n \left[\sum_{j=n}^{k-1} \beta^{j-n} \right] A_{\ell} \\ &\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} A_{\ell}\end{aligned}$$

ve $A_{\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_m(\mathfrak{S}_{i-1}, \mathfrak{S}_i)$. $\beta \in (0, 1)$ olduğundan $\lim_{n, k \rightarrow \infty} \eta_m(\vartheta_n, \vartheta_k) = 0$ elde edilir.

Buradan $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir ve ψ -tamlıktan $\vartheta' \in G_M$ noktasına yakınsar.

$n_0 \in \mathbb{N}$ için $(\vartheta_n, \vartheta') \in E(\psi)$ veya $(\vartheta', \vartheta_n) \in E(\psi)$ her $n > n_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_m(\vartheta_n, \vartheta') = 0$$

bulunur. Şimdi ϑ' noktasının S dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilsin:

ϑ_0 başlangıç noktalı S -Picard dizisi hem ϑ' hem $S\vartheta'$ noktalarına yakınsasın. ψ bağlantılı olduğundan $(\vartheta' P S\vartheta')_{\psi} \in E(\psi)$ veya $(S\vartheta' P \vartheta')_{\psi} \in E(\psi)$ sağlanır.

Buradan

$$\begin{aligned}
\eta_m(\vartheta', S\vartheta') &= \eta_{\max\{m, m\}}(\vartheta', S\vartheta') \\
&\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(\vartheta_n, S\vartheta') \\
&= \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(S\vartheta_{n-1}, S\vartheta') \\
&\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \beta\eta_m(\vartheta_{n-1}, \vartheta')
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \vartheta'$ olduğundan $\eta_m(\vartheta', S\vartheta') = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$\vartheta' = S\vartheta'$$

eşitliği sağlandığından ϑ' noktası S dönüşümü için bir sabit noktadır. S dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için aşağıdaki özellik kullanılır

(U) Her $u, v \in \text{Fix}\{S\} \Rightarrow (v, u) \in E(\psi)$ dir. (u ve v, S dönüşümünün iki sabit noktası)

Teorem 3.2.3. Sırasıyla Teorem 3.2.2' nin hipotezleri altında (U) özelliği de sağlanırsa S dönüşümünün sabit noktası tektir.

İspat : S dönüşümünün ϑ' noktasından farklı olan diğer bir sabit noktası ϑ^* olsun. $\eta_m(\vartheta', \vartheta^*) \neq 0$ olur. (U) özelliğinden $(\vartheta', \vartheta^*) \in E(\psi)$ dir. S grafiksel modüler-Banach daralma dönüşümü olduğundan

$$\eta_m(\vartheta', \vartheta^*) = \eta_m(S\vartheta', S\vartheta') \leq \beta\eta_m(\vartheta', \vartheta^*)$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla S dönüşümünün (G_M, η_m) uzayında sabit noktası tektir.

Örnek 3.2.4. $G_M = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere

$E(\psi) = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $m > 0$ için

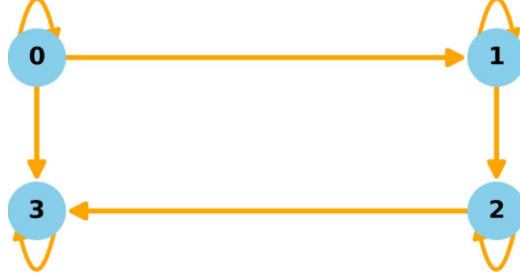
$$\eta_m(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H}) = \begin{cases} \frac{|\mathfrak{Z}-\mathfrak{H}|^2}{m}, & \text{eğer } \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{H} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } \mathfrak{Z} = \mathfrak{H} \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\eta_m(1,3) \leq \eta_m(1,2) + \eta_m(2,3)$$

$$\frac{4}{m} \not\leq \frac{2}{m}$$

olduğundan (G_M, η_m) modüler metrik uzay değil fakat grafiksel modüler metrik uzaydır. Ayrıca $S\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{S} \in G_M$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ olarak alırsak S dönüşümü grafiksel modüler-Banach daralma dönüşümüdür.



Şekil 3.2. Grafiksel modüler-Banach daralma dönüşümü için graf modeli

Tanım 3.2.5. $S: G_M \rightarrow G_M$ dönüşümü aşağıdaki koşullar sağlarsa Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay (G_M, η_m) üzerinde bir grafiksel modüler-Kannan daralması olarak adlandırılır.

(i) Her $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in G_M$ için;

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \in E(\psi) \Rightarrow (S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) \in E(\psi) \text{ dir.}$$

Yani S dönüşümü ψ grafının kenarlarını korur.

(ii) Her $\mathfrak{S}, \mathfrak{H} \in G_M$ için $(\mathfrak{S}, \mathfrak{H}) \in E(\psi)$ ve $m > 0$ için

$$\eta_m(S\mathfrak{S}, S\mathfrak{H}) \leq \gamma [\eta_m(\mathfrak{S}, S\mathfrak{S}) + \eta_m(\mathfrak{H}, S\mathfrak{H})]$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ sabiti vardır.

Teorem 3.2.6. (G_M, η_m) ψ - tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay, $S: G_M \rightarrow G_M$ bir grafiksel modüler-Kannan daralma dönüşümü olsun. ψ grafiği sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için $S\vartheta_0 \in [\vartheta_0]$ olan $\vartheta_0 \in G_M$ için (P) özelliğini sağlasın.

Bu durumda $\{\ell_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ S -Picard dizisi ψ -AWC dir ve $\vartheta' \in G_M$ noktasına yakınsaktır. Ayrıca S dönüşümü (U) şartını sağlarsa tek sabit noktası vardır.

İspat: Sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için $S\vartheta_0 \in [\vartheta_0]_\psi^\ell$ olan $\vartheta_0 \in G_M$ verilsin. $j = 1, 2, \dots, \ell$ için

$(\mathfrak{S}_{j-1}, \mathfrak{S}_j) \in E(\psi)$ ve ϑ_0 başlangıç noktasına sahip $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ S dönüşümü Picard dizisi olmak üzere

$$\vartheta_0 = \mathfrak{S}_0$$

$$S \vartheta_0 = \mathfrak{S}_1$$

olacak şekilde en az bir $\{\mathfrak{S}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolu vardır. S, ψ grafiğinin kenarları koruduğundan $j=1,2,\dots,\ell$ için $(S\mathfrak{S}_{j-1}, S\mathfrak{S}_j) \in E(\psi)$ bulunur. Bu ise $S\mathfrak{S}_0 = S\vartheta_0 = \vartheta_1$ elemanından $S\mathfrak{S}_1 = S^2 \vartheta_0 = \vartheta_2$ elemanına tanımlı bir ℓ uzunluklu $\{\mathfrak{S}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolunun var olması demektir. Buradan $\vartheta_2 \in [\vartheta_n]_{\psi}^{\ell}$ yazılır. Bu şekilde devam edilerek $S^n \vartheta_0 = S^n \mathfrak{S}_0 = \vartheta_n$ noktasından $S^n \vartheta_1 = S^n S\mathfrak{S}_0 = \vartheta_{n+1}$ noktasına tanımlı ℓ uzunluklu $\{S^n \mathfrak{S}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolu elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\vartheta_{n+1} \in [\vartheta_n]_{\psi}^{\ell}$ bulunur. Bu ise $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin her $n \in \mathbb{N}$ ve $j=1,2,\dots,\ell$ için $(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \in E(\psi)$ özellikli bir ψ -AWC dizisi olması anlamına gelir. Grafiksel modüler-Kannan daralması kullanılarak

$$\begin{aligned} \eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) &= \eta_m(S(S^{n-1} \vartheta_{j-1}), S(S^{n-1} \vartheta_j)) \\ &\leq \gamma [\eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S(S^{n-1} \vartheta_{j-1})) + \eta_m(S^{n-1} \vartheta_j, S((S^{n-1} \vartheta_j)))] \\ &\leq \gamma [\eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j) + \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j)] \end{aligned}$$

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j)$$

elde edilir. $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\frac{\gamma}{1-\gamma} = \beta$ olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \beta \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j)$$

olarak yazılır. Aynı şekilde devam edilerek

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \beta^n \eta_m(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j)$$

ifadesine ulaşılır. Teorem(3.2.2) den $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi ve

$\vartheta_n \rightarrow \vartheta \in G_M$ olduğu anlaşılr.

ϑ_0 başlangıç noktalı S -Picard dizisi hem ϑ' hem $S\vartheta'$ noktalarına yakınsar. ψ bağlantılı olduğundan $(\vartheta' P S\vartheta') \in E(\psi)$ veya $(S\vartheta' P \vartheta') \in E(\psi)$ sağlanır.

Buradan

$$\begin{aligned} \eta_m(\vartheta', S\vartheta') &= \eta_{\max(m,m)}(\vartheta', S\vartheta') \\ &\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(\vartheta_n, S\vartheta') \\ &= \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(S\vartheta_{n-1}, S\vartheta') \\ &\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \gamma \eta_m(S\vartheta_{n-1}, S\vartheta_n) + \gamma \eta_m(\vartheta', S\vartheta') \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\eta_m(\vartheta', S\vartheta') \leq \frac{\eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \gamma \eta_m(S\vartheta_{n-1}, S\vartheta_n)}{1-\gamma}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \vartheta'$ olduğundan $\eta_m(\vartheta', S\vartheta') = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$\vartheta' = S\vartheta'$ eşitliği sağlandığından ϑ' noktası S dönüşümü için bir sabit noktadır. S dönüşümünün diğer bir sabit noktası ϑ^* olsun. Yani $\eta_m(\vartheta', \vartheta^*) \neq 0$ olur. (U) özelliğinden $(\vartheta', \vartheta^*) \in E(\psi)$ dir. S grafiksel modüler-Kannan daralma olduğundan

$$\begin{aligned} \eta_m(\vartheta', \vartheta^*) &= \eta_m(S\vartheta', S\vartheta^*) \\ &\leq \gamma [\eta_m(\vartheta', S\vartheta') + \eta_m(\vartheta^*, S\vartheta^*)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla S dönüşümünün (G_M, η_m) uzayında sabit noktası yoktur.

Örnek 3.2.7. $G_M = \{5,6,7,8,9\}$ olmak üzere

$$E(\psi) = \{(5,5), (5,6), (6,6), (6,7), (7,7), (7,8), (8,8), (8,9), (9,9)\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $m > 0$ için

$$\eta_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \begin{cases} \frac{|\mathfrak{S}-\mathfrak{S}|^2}{m}, & \text{eğer } \mathfrak{S} \neq \mathfrak{S} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \text{ ise} \end{cases}$$

metriği tanımlanırsa

$$\eta_m(7,9) \leq \eta_m(7,8) + \eta_m(8,9)$$

$$\frac{4}{m} \not\leq \frac{2}{m}$$

olduğundan (G_m, η_m) grafiksel modüler metrik uzay fakat modüler metrik uzay değildir. Ayrıca

$$S\mathfrak{S} = \begin{cases} 5, & \text{eğer } \mathfrak{S} = 7 \text{ ise} \\ 6, & \text{eğer } \mathfrak{S} \in \{5,6,8,9\} \text{ ise} \end{cases}$$

dönüşümü için

$$\eta_m(S6, S7) \leq \gamma. [\eta_m(6, S6) + \eta_m(7, S7)]$$

$$\frac{1}{m} \leq \frac{4\gamma}{m}$$

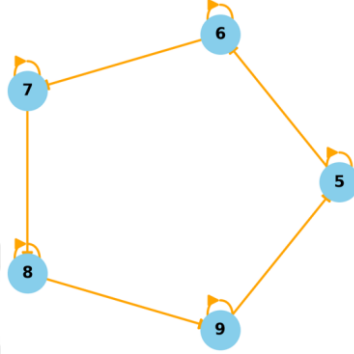
$$\eta_m(S7, S8) \leq \beta. [\eta_m(7, S7) + \eta_m(8, S8)]$$

$$\frac{1}{m} \leq \frac{8\gamma}{m}$$

$$\eta_m(S8, S9) \leq \beta \cdot [\eta_m(8, S8) + \eta_m(9, S9)]$$

$$0 \leq \frac{13\gamma}{m}$$

olup $\gamma = \frac{1}{4}$ için S dönüşümü grafiksel modüler-Kannan daralma dönüşümüdür.



Şekil 3.3. Grafiksel modüler-Kannan daralma dönüşümü için graf modeli

Tanım 3.2.8. $S : G_M \rightarrow G_M$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay (G_M, η_m) üzerinde bir grafiksel modüler-Reich daralması olarak adlandırılır.

(i) Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in G_M$ için

$$(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \in G_M \Rightarrow (S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \in E(\psi)$$

olduğundan S dönüşümü ψ grafiğinin kenarlarını korur.

(ii) Her $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in G_M$ için $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) \in E(\psi)$ ve $m > 0$ için

$$\eta_m(S\mathfrak{I}, S\mathfrak{J}) \leq \mu_1 \eta_m(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) + \mu_2 \eta_m(\mathfrak{I}, S\mathfrak{I}) + \mu_3 \eta_m(\mathfrak{J}, S\mathfrak{J})$$

eşitsizliğin sağlayan $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < 1$ negatif olmayan sabitler vardır.

Teorem 3.2.9. (G_M, η_m) ψ -tam Archimedean olmayan modüler metrik uzay, $S: G_M \rightarrow G_M$ bir grafiksel modüler-Reich daralma dönüşümü olsun. ψ grafiği sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için

$S\vartheta_0 \in [\vartheta_n]_\psi^\ell$ olan $\vartheta_0 \in G_M$ için (P) özelliğini sağlasın.

Bu durumda $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi S -Picard dizisi ψ -AWC dir ve $\vartheta' \in G_M$ noktasına yakınsaktır. Ayrıca S dönüşümü (U) özelliğini sağlarsa tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sabit bir $\ell \in \mathbb{N}$ için $S \vartheta_0 \in [\vartheta_0]_{\psi}^{\ell}$ olan $\vartheta_0 \in G_M$ verilsin. $j = 1, 2, \dots, \ell$ için $(\mathfrak{I}_{j-1}, \mathfrak{I}_j) \in E(\psi)$ ve ϑ_0 başlangıç noktasına sahip $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

S -Picard dizisi olmak üzere

$$\vartheta_0 = \mathfrak{I}_0$$

$$S \vartheta_0 = \mathfrak{I}_1$$

olacak şekilde en az bir $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolu vardır. S, ψ grafinin kenarları koruduğundan

$j = 1, 2, \dots, \ell$ için $(S\mathfrak{I}_{j-1}, S\mathfrak{I}_j) \in E(\psi)$ bulunur. Bu ise $S\mathfrak{I}_0 = S\vartheta_0 = \vartheta_1$ elemanından

$S\mathfrak{I}_1 = S^2 \vartheta_0 = \vartheta_2$ elemanına tanımlı bir ℓ uzunluklu $\{S\mathfrak{I}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolunun var olması

demektir. Buradan $\vartheta_2 \in [\vartheta_n]_{\psi}^{\ell}$ yazılır. Bu şekilde devam edilerek $S^n \vartheta_0 = S^n \mathfrak{I}_0 =$

ϑ_n noktasından $S^n \vartheta_1 = S^n S\mathfrak{I}_0 = \vartheta_{n+1}$ noktasına tanımlı ℓ uzunluklu $\{S^n \mathfrak{I}_j\}_{j=0}^{\ell}$ yolu

elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\vartheta_{n+1} \in [\vartheta_n]_{\psi}^{\ell}$ bulunur. Bu ise $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin

her $n \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, 2, \dots, \ell$ için $(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \in E(\psi)$ özellikli bir ψ -AWC dizisi olması anlamına gelir. Grafiksel modüler-Reich daralması kullanılarak

$$\begin{aligned} \eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) &= \eta_m(S(S^{n-1} \vartheta_{j-1}), (S(S^{n-1} \vartheta_j))) \\ &\leq \mu_1 \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j) + \mu_2 \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S(S^{n-1} \vartheta_{j-1})) \\ &\quad + \mu_3 \eta_m(S^{n-1} \vartheta_j, S(S^{n-1} \vartheta_j)) \\ &= \mu_1 \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j) + \mu_2 \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j) \\ &\quad + \mu_3 \eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \end{aligned}$$

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_3} \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j)$$

elde edilir. $\beta \in (0, 1)$ olmak üzere $\frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_3} = \beta$ olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \beta \eta_m(S^{n-1} \vartheta_{j-1}, S^{n-1} \vartheta_j)$$

olarak yazılır. Aynı şekilde devam edilerek

$$\eta_m(S^n \vartheta_{j-1}, S^n \vartheta_j) \leq \beta^n \eta_m(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j)$$

ifadesine ulaşılır. Teorem(3.2.2) den $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi ve

$\vartheta_n \rightarrow \vartheta' \in G_M$ olduğu anlaşılır.

ϑ_0 başlangıç noktalı S -Picard dizisi hem ϑ' hem $S\vartheta'$ noktalarına yakınsasın. ψ bağlantılı olduğundan $(\vartheta' P S\vartheta') \psi \in E(\psi)$ veya $(S\vartheta' P\vartheta') \in E(\psi)$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}\eta_m(\vartheta', S\vartheta') &= \eta_{\max\{m, m\}}(\vartheta', S\vartheta') \\ &\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(\vartheta_n, S\vartheta') \\ &= \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \eta_m(S\vartheta_{n-1}, S\vartheta') \\ &\leq \eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \mu_1 \eta_m(\vartheta_{n-1}, \vartheta') + \mu_2 \eta_m(\vartheta_{n-1}, S\vartheta_{n-1}) \\ &\quad + \mu_3 \eta_m(\vartheta', S\vartheta')\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\eta_m(\vartheta', S\vartheta') \leq \frac{\eta_m(\vartheta', \vartheta_n) + \mu_1 \eta_m(\vartheta_{n-1}, \vartheta') + \mu_2 \eta_m(\vartheta_{n-1}, \vartheta_n)}{1 - \mu_3}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \vartheta'$ olduğundan $\eta_m(\vartheta', S\vartheta') = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\vartheta' = S\vartheta'$ eşitliği sağlandığından ϑ' noktası S dönüşümü için bir sabit noktadır. Şimdi S dönüşümünün diğer bir sabit noktası ϑ^* olsun. $\eta_m(\vartheta', \vartheta^*) \neq 0$ olur. (U) özelliğinden $(\vartheta', \vartheta^*) \in E(\psi)$ olur. S grafiksel modüler-Reich daralma olduğundan

$$\begin{aligned}\eta_m(\vartheta', \vartheta^*) &= \eta_m(S\vartheta', S\vartheta^*) \\ &\leq \mu_1 \eta_m(\vartheta', \vartheta^*) + \mu_2 \eta_m(\vartheta', S\vartheta') + \mu_3 \eta_m(\vartheta^*, S\vartheta^*) \\ \eta_m(\vartheta', \vartheta^*) &\leq \mu_1 \eta_m(\vartheta', \vartheta^*)\end{aligned}$$

bulunur bu ise bir çelişkidir. Bu durumda S dönüşümünün (G_M, η_m) uzayında sabit noktası yoktur.

Örnek 3.2.11. $G_M = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ olmak üzere

$$E(\psi) = \{(11, 11), (11, 12), (12, 12), (12, 13), (13, 13), (13, 14), (14, 14), (14, 15), (15, 15)\}$$

grafı ve her $m > 0$ için

$$\eta_m(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = \begin{cases} \frac{|\mathfrak{I} - \mathfrak{J}|^2}{m}, & \text{eğer } \mathfrak{I} \neq \mathfrak{J} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } \mathfrak{I} = \mathfrak{J} \text{ ise} \end{cases}$$

metriği tanımlanırsa

$$\eta_m(11, 13) \leq \eta_m(11, 12) + \eta_m(12, 13)$$

$$\frac{4}{m} \not\leq \frac{2}{m}$$

olduğundan (G_m, η_m) grafiksel modüler metrik uzay fakat modüler metrik uzayı değildir. Ayrıca

$$S\mathfrak{S} = \begin{cases} 11, & \text{eğer } \mathfrak{S} = 13 \text{ ise} \\ 12, & \text{eğer } \mathfrak{S} \in \{11, 12, 13, 14, 15\} \text{ ise} \end{cases}$$

dönüşümü için

$$\eta_m(S11, S12) \leq \mu_1 \eta_m(11, 12) + \mu_2 \eta_m(11, S11) + \mu_3 \eta_m(12, S12)$$

$$0 \leq \mu_1 \frac{1}{m} + \mu_2 \frac{1}{m} + \mu_3 \cdot 0$$

$$\eta_m(S12, S13) \leq \mu_1 \eta_m(12, 13) + \mu_2 \eta_m(12, S12) + \mu_3 \eta_m(13, S13)$$

$$\frac{1}{m} \leq \mu_1 \frac{1}{m} + \mu_2 \cdot 0 + \mu_3 \cdot \frac{4}{m}$$

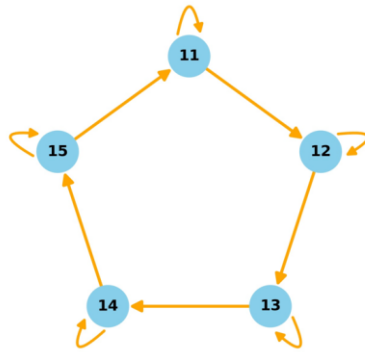
$$\eta_m(S13, S14) \leq \mu_1 \eta_m(13, 14) + \mu_2 \eta_m(13, S13) + \mu_3 \eta_m(14, S14)$$

$$\frac{1}{m} \leq \mu_1 \frac{1}{m} + \mu_2 \cdot \frac{4}{m} + \mu_3 \cdot \frac{4}{m}$$

$$\eta_m(S14, S15) \leq \mu_1 \eta_m(14, 15) + \mu_2 \eta_m(14, S14) + \mu_3 \eta_m(15, S15)$$

$$0 \leq \mu_1 \frac{1}{m} + \mu_2 \cdot \frac{4}{m} + \mu_3 \cdot \frac{9}{m}$$

olup $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_2 = \frac{1}{4}$ ve $\mu_3 = \frac{1}{5}$ için S dönüşümü grafiksel modüler-Reich daralma dönüşümüdür.



Şekil 3.4. Grafiksel modüler-Reich daralma dönüşümü için graf modeli

3.3. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Dinamik Piyasa Denge Problemine Uygulaması

Bu bölümde sabit nokta teorisinin bir uygulaması olan dinamik piyasa denge probleminin bir örneği verilecektir. Dinamik piyasa denge probleminde önerilen çözümleri ekonomik analizlerde yaygın olarak kullanılan dinamik piyasa dengesi çerçevesine entegre eder ve böylece bir başlangıç değer problemi çözümü yoluyla matematiksel bir model oluşturur. Hem tüketici hem de üretici piyasaları, günlük fiyat dalgalanmaları ve fiyatlandırma verilerinden kaynaklanan önemli dalgalanmalara maruz kalır. Fiyatlardaki doğuştan gelen değişkenliğe rağmen, günlük fiyatlandırma eğilimleri üretim piyasası (η_T ile gösterilir) ve tüketim piyasası (η_C ile gösterilir) üzerinde önemli bir etki yaratır. Bu ekonomik analiz süresince, ekonomist mevcut fiyatı ($h(\rho)$ ile gösterilir) belirlemeye çalışır.

η_T ve η_C , $h(0)=0$, $\frac{dh}{d\rho}(0)=0$, ve $t_1, t_2, \xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2, \sigma_1$ ve σ_2 sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta_T &= t_1 + \xi_1 h(\rho) + \delta_1 \frac{dh(\rho)}{d\rho} + \sigma_1 \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2}, \\ \eta_C &= t_2 + \xi_2 h(\rho) + \delta_2 \frac{dh(\rho)}{d\rho} + \sigma_2 \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2},\end{aligned}$$

sistemi ile tanımlanır. Dinamik ekonomik denge durumu piyasa güçlerinin dengeye ulaştığı yani üretim ile tüketim arasındaki farkın istikrar kazandığı bir durumu ifade eder. Bu durumda arz esnekliği (η_T ile gösterilir) talep esnekliğine (η_C ile temsil edilir) eşittir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}t_1 + \xi_1 h(\rho) + \delta_1 \frac{dh(\rho)}{d\rho} + \sigma_1 \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2} &= t_2 + \xi_2 h(\rho) + \delta_2 \frac{dh(\rho)}{d\rho} + \sigma_2 \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2}, \\ (t_1 - t_2) + (\xi_1 - \xi_2) h(\rho) + (\delta_1 - \delta_2) \frac{dh(\rho)}{d\rho} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2} &= 0,\end{aligned}$$

bu denklem sadeleştirilirse $t = t_1 - t_2, \xi = \xi_1 - \xi_2, \delta = \delta_1 - \delta_2$ ve $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ olmak üzere

$$\sigma \frac{d^2 h(\rho)}{d\rho^2} + \delta \frac{dh(\rho)}{d\rho} + \xi h(\rho) = -t,$$

$$\frac{d^2 \hbar(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\delta}{\sigma} \frac{d\hbar(\rho)}{d\rho} + \frac{\xi}{\sigma} \hbar(\rho) = -\frac{t}{\sigma},$$

olur. Bu durumda başlangıç değeri problemi aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$\hbar(0)=0$ ve $\hbar'(0) = 0$ olmak üzere

$$\hbar''(\rho) + \frac{\delta}{\sigma} \hbar'(\rho) + \frac{\xi}{\sigma} \hbar(\rho) = -\frac{t}{\sigma} \quad (3.1)$$

dir. Bu analizde, üretim ve tüketim süresi olarak adlandırılan ω ile gösterilen zamanı incelenmektedir. Denklem (3.1) ile ifade edilen problemin aşağıdaki ifadeye denk olduğu ortaya konmuştur.

$$\hbar(\rho) = \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) d\rho, \quad (3.2)$$

olup burada Green fonksiyonu $\mathcal{G}(\rho, \rho^*)$

$$\mathcal{G}(\rho, \rho^*) = \begin{cases} \rho e^{\frac{\xi}{2n}} (\rho^* - \rho) ; 0 \leq \rho \leq s \leq \omega \\ e^{\frac{\xi}{2n}} (\rho - \rho^*) ; 0 \leq s \leq \rho \leq \omega \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır ve $\mathcal{K}: [0, \omega] \times \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

$G_M = \mathcal{C}([0, \omega], \mathcal{R})$ ve Archimedean olmayan modüler metrik uzay

$$\eta_m(\hbar(\rho), \mu(\rho)) = \sup_{\rho \in [0, 1]} |\hbar(\rho) - \mu(\rho)|^2$$

ile tanımlansın. Her $(\hbar, \mu) \in E(\psi)$ için (G_M, η_m) uzayı tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzaydır. $S: G_M \rightarrow G_M$ dönüşümü ise

$$S(\hbar(\rho)) = \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) d\rho$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda dinamik piyasa dengesi probleminin çözümü yani denklem (3.1) ile tanımlanan çözümü, S dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Teorem 3.3.1. (G_M, η_m) tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay ve $S: G_M \rightarrow G_M$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) $\rho \in [0, \omega]$ olmak üzere

$$|\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_1(\rho)) - \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_2(\rho))| \leq \sqrt{\beta_1 |\hbar_1(\rho) - \hbar_2(\rho)|^2 + \beta_2 |\hbar_1(\rho) - S\hbar_1(\rho)|^2 + \beta_3 |\hbar_2(\rho) - S\hbar_2(\rho)|^2};$$

(ii) $\mathcal{G}: \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sup_{s \in [0, \omega]} \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) d\rho \leq 1$$

Bu durumda, (3.1) ile tanımlanan dinamik piyasa dengesi problemi, tek bir çözüme sahiptir.

İspat : S operatörü iyi tanımlıdır ve aşağıdaki ifade doğrudur

$$\begin{aligned} |S\hbar_1(\rho) - S\hbar_2(\rho)| &= \\ &= \left| \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_1(\rho)) d\rho - \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_2(\rho)) d\rho \right| \\ &\leq \int_0^\omega \mathcal{G}(\rho, \rho^*) d\rho \int_0^\omega \left| \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_1(\rho)) - \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar_2(\rho)) \right| d\rho \\ &\leq \sqrt{\beta_1 |\hbar_1(\rho) - \hbar_2(\rho)|^2 + \beta_2 |\hbar_1(\rho) - S\hbar_1(\rho)|^2 + \beta_3 |\hbar_2(\rho) - S\hbar_2(\rho)|^2} \end{aligned}$$

bu ifadenin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\begin{aligned} |S\hbar_1(\rho) - S\hbar_2(\rho)|^2 &\leq \beta_1 |\hbar_1(\rho) - \hbar_2(\rho)|^2 + \beta_2 |\hbar_1(\rho) - S\hbar_1(\rho)|^2 \\ &\quad + \beta_3 |\hbar_2(\rho) - S\hbar_2(\rho)|^2 \end{aligned}$$

Eşitsizliği elde edilir. Bu ifade ise modüler metrik η_m ile

$$\begin{aligned} \eta_m |S\hbar_1(\rho) - S\hbar_2(\rho)|^2 &\leq \beta_1 \eta_m(\hbar_1(\rho), \hbar_2(\rho)) + \beta_2 \eta_m(\hbar_1(\rho), S\hbar_1(\rho)) \\ &\quad + \beta_3 \eta_m(\hbar_2(\rho), S\hbar_2(\rho)) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Teorem 3.3.1. de belirtilen tüm koşullar sağlandığında, integral denklem (3.2)'in tek bir çözüme sahip olduğu sonucuna varılır. Bu da, denklem (3.1) ile ifade edilen dinamik piyasa denge probleminin yine tek bir çözüme sahip olduğunu gösterir.

3.4. Grafiksel Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Isı İletim Problemine Uygulaması

Bu alt bölümde, grafiksel modüler metrik uzaylarda elde edilen sabit nokta sonuçlarının fiziksel bir model üzerindeki uygulanabilirliği gösterilmektedir. Özellikle, bir boyutlu doğrusal olmayan ısı iletim problemi ele alınarak bu problemin çözümünün, grafiksel modüler-Reich daralması koşulunu sağlayan bir operatörün sabit noktası olduğu ispatlanacaktır. Böylece, önceki bölümlerde elde edilen soyut teoremler, ısı difüzyonu gibi gerçek fiziksel süreçlerin analizinde kullanılabilir hale gelecektir.

Uzunluğu $L > 0$ olan bir metal çubukta sıcaklık dağılımını ifade eden doğrusal olmayan integral denklem aşağıdaki biçimdedir:

$$\hbar(\rho) = \int_0^L \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) d\rho.$$

Burada

- (i) $\hbar(\rho)$: sıcaklık fonksiyonu,
- (ii) $\mathcal{G}(\rho, \rho^*)$: Green fonksiyonu,
- (iii) $\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho))$: sıcaklığa bağlı ısı üretim katsayısıdır.

Green fonksiyonu ise

$$\mathcal{G}(\rho, \rho^*) = \begin{cases} \rho (L - \rho^*) ; 0 \leq \rho \leq \rho^* \leq L, \\ \rho^* (L - \rho) ; 0 \leq \rho^* \leq \rho \leq L \end{cases}$$

biçimindedir. Ayrıca, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sabit katsayılar olmak üzere

$$\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) = \alpha_1 \hbar(\rho) + \alpha_2 (d\hbar(\rho)/d\rho) + \alpha_3 \sin(\hbar(\rho)), \quad \text{şeklinde verilsin.}$$

Tanım kümesi $G_M = \mathcal{C}([0, L], \mathbb{R})$ olup, grafiksel modüler metrik

$$\eta_m(\hbar(\rho), \mu(\rho)) = \sup_{\rho \in [0, 1]} |\hbar(\rho) - \mu(\rho)|^2$$

şeklinde tanımlansın. Bu yapı altında her $(\hbar, \mu) \in E(\psi)$ için (G_M, η_m) uzayı tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzaydır.

$S: G_M \rightarrow G_M$ operatörü de yine bir önceki bölümdekine benzer şekilde

$$S(\hbar(\rho)) = \int_0^L \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) d\rho$$

olarak tanımlanır. Bu durumda ısı iletim probleminin çözümü, S dönüşümünün sabit noktası olan $\hbar^* \in G_M$ fonksiyonu; yani $S(\hbar^*) = \hbar^*$ dir.

Teorem 3.4.1. $S: G_M \rightarrow G_M$ operatörü yukarıdaki biçimde tanımlansın. Pozitif sabitler $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ için $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 < 1$ ve her $(\hbar, \mu) \in E(\psi)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, S operatörünün (G_M, η_m) tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzayı üzerinde tek bir sabit noktası vardır

- (i) $\rho \in [0, L]$ olmak üzere

$$|\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) - \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \mu(\rho))| \leq \sqrt{\kappa_1 |\hbar(\rho) - \mu(\rho)|^2 + \kappa_2 |\hbar(\rho) - S\hbar(\rho)|^2 + \kappa_3 |\mu(\rho) - S\mu(\rho)|^2};$$

(ii) Her $\hbar, \mu \in E(\psi)$ için

$$\eta_m(S \hbar, S \mu) \leq \kappa_1 \eta_m(\hbar, \mu) + \kappa_2 \eta_m(\hbar, S \hbar) + \kappa_3 \eta_m(\mu, S \mu).$$

İspat: S operatörünün iyi tanımlı olduğu açıktır; çünkü $\mathcal{G}(\rho, \rho^*)$ ve $\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho))$ sürekli fonksiyonlardır ve integral yakınsaktır. Her $(\hbar, \mu) \in E(\psi)$ için aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned} |S \hbar(\rho) - S \mu(\rho)| &= \left| \int_0^L \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) d\rho - \int_0^L \mathcal{G}(\rho, \rho^*) \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \mu(\rho)) d\rho \right| \\ &\leq \int_0^L \mathcal{G}(\rho, \rho^*) d\rho \int_0^L |\mathcal{K}(\rho^*, \rho, \hbar(\rho)) - \mathcal{K}(\rho^*, \rho, \mu(\rho))| d\rho \\ &\leq \sqrt{\kappa_1 |\hbar(\rho) - \mu(\rho)|^2 + \kappa_2 |\hbar(\rho) - S \hbar(\rho)|^2 + \kappa_3 |\mu(\rho) - S \mu(\rho)|^2}. \end{aligned}$$

Bu durumda

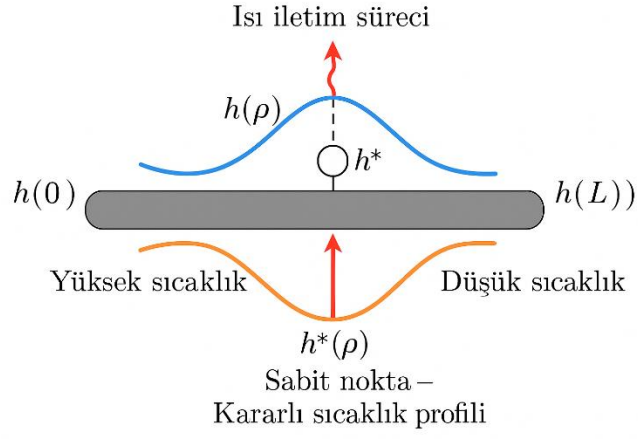
$$\eta_m(S \hbar, S \mu) \leq \kappa_1 \eta_m(\hbar, \mu) + \kappa_2 \eta_m(\hbar, S \hbar) + \kappa_3 \eta_m(\mu, S \mu)$$

ifadesinin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla S operatörü grafiksel modüler–Reich daralması koşulunu sağlar. Teorem 3.2.9’un hipotezleri altında (G_M, η_m) ψ –tam Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzay olup, Picard dizisi ψ –AWC ve Cauchy’dır. Uzay tam olduğundan $\hbar_n \rightarrow \hbar^* \in G_M$ elde edilir. S operatörü sürekli olduğundan bu nokta aynı zamanda S operatörünün sabit noktasıdır. Yine Teorem 3.2.9 bu noktanın tek olduğunu garanti etmektedir.

Elde edilen sonuç, grafiksel modüler–Reich daralmasının fiziksel bir sistemdeki ısı dengesi için çözümün varlığını ve tekliğini garanti ettiğini göstermektedir. Yani $S(\hbar^*) = \hbar^*$ eşitliği, metal çubuğun zamanla ulaştığı kararlı sıcaklık profili $\hbar^*(\rho)$ ’yi temsil etmektedir..

Bu uygulama, sabit nokta teoremlerinin soyut matematiksel yapılardan çıkarılarak mühendislikteki fiziksel sistemlere uygulanabileceğini göstermektedir. Elde edilen $\hbar^*(\rho)$ çözümü, çubuğun kararlı sıcaklık dağılımını ifade eder.

Aşağıdaki şekil $\hbar(\rho)$ anlık sıcaklık dağılımını, $\hbar^*(\rho)$ kararlı sıcaklık profilini ve $\hbar^*$ sabit noktasını göstermektedir.



Şekil 3.5. Isı iletim süreci modeli

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında grafiksel metrik uzaylar ve modüler metrik uzaylar kavramları geliştirilerek grafiksel modüler metrik uzaylar yapısı tanımlanmıştır. Ayrıca üçgen eşitsizliği şartı değiştirilerek Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzaylar oluşturulmuştur. Archimedean olmayan grafiksel modüler metrik uzaylarda Banach, Kannan ve Reich tipi daralma dönüşümleri kullanarak sabit nokta teoremleri elde edilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar dinamik piyasa denge problemine uygulanmıştır. İlk kez ortaya konulan grafiksel modüler metrik uzaylar ile bu alanda çalışmayı düşünen araştırmacılara ilham kaynağı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu yeri kavramın ortaya koyulacak farklı yaklaşımlar ile gelecekte yeni bir çalışma alanı olacağı umut edilmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Brouwer, L.E.J, (1912), Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 71, 598,97-115.
- [2] Kakutani, S. A., (1941), Generalization of brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal., 8, 3 457–459.
- [3] Schauder, J. Der., (1930), Fixpunktsatz in funktionalräumen. Studia Mathematica., 2,171-180.
- [4] Şuhubi, E., (2001), Fonksiyonel analiz, İTÜ Vakfı Yayınları.
- [5] Sintunavarant, W., (2020), Fixed point theory and applications, Lecture Notes.
- [6] Maddox, I. J., (1970), Elements of functional analysis, Cambridge University Press.
- [7] Kreyszig, E., (1978), Introductory functional analysis with applications, John Wiley and New York.
- [8] Jain, P. K., (2009), Metric spaces, narosa publishing house, New Delhi.
- [9] Banach, S., (2012), Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, Fund. Math., 1,133–181.
- [10] Granas, A., Dugundji, J., (2002), Fixed point theory, Springer Monographs in Mathematics.
- [11] Berinde, V., (2007), Iterative approximation of fixed points, Springer, Verlag.
- [12] Bryant, V. W., (1968), A remark on a fixed point theorem for iterated mappings, Am. Math.Mon 75, 399–400.
- [13] Edelstein, M., (1962), On fixed and periodic points under contractive mappings, J. Lond.Math. Soc. 37, 74–79.
- [14] Kannan, R., (1968), Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76.
- [15] Subrahmanyam, V., (1975), Completeness and fixed-points, Monatsh. Math., 80, 325–330.
- [16] Bianchini, R. M. T., (1972), Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, 3–10.
- [17] Chatterjea, S. K., (1972), Fixed point theorem, C. R. Acad. Bulgare Sci, 25, 727-730.
- [18] Reich, S., (1971), Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull, 14, 121–124.
- [19] Hardy, G. E. ve Rogers, T. D., (1973), A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 16, 201-206.
- [20] Ćirić, L., (1971), On contraction type mappings, Math. Balcanica, 1, 52–57.

- [21] Berinde, V., (2003), On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian J. Math.*, 19, 1722-732.
- [22] Shukla, S., Radenovic, S., ve Vetro, C., (2016), Graphical metric space: a generalized setting in fixed point theory, *Revista de la real academia de ciencias exactas,físicas y naturales.Serie a.matematicas*, Doi: 10.1007/s.13398-016-0316-D.
- [23] Garnier, R. ve Taylor, J., (1992), *Discrete mathematics for new technology*, Adam Hilger Publishing.
- [24] Alfuraiddan, M., R., (2015), The contraction principle for mappings on a modular metric spaces with graph., *Fixed point theory and applications*, 2015,46.
- [25] Bakhtin, I.A. (1989), The contraction mapping principle in quasi metric spaces. *Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst.*, 30, 26-37.
- [26] Chistyakov, V. V., (2015), *Metric modular spaces theory and applications*. Springer.
- [27] Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2011), Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point and Theory Appl.* 93, 1-9.
- [28] Migdaldas, A. ve Karakitsiou, A., (2015), *Optimization, control, and applications in the information Age.*, Springer Proceedings in Mathematics.
- [29] Jachymski, J., (2008), The contraction principle for mappings on a metric spaces endowed wit a graph, *Proc. Amer. Math.Soc.*, 136, 1359-1373.
- [30] Chistyakov, V. V., (2006), Metric modulars and their application, *Dokl. Math.*, 73, 32-35.
- [31] Chistyakov, V. V., (2015), *Metric modular metric spaces. Theory and applications*, Springer briefs in Mathematics, Cham.
- [32] Chistyakov, V. V., (2010), Modular metric spaces, I:basic concepts, *Nonlinear Anal.*, 72, 1-14.
- [33] Chistyakov, V. V., (2010), Modular metric spaces, II: application to superposition operators, *Nonli-near Anal.*, 72, 15-30.
- [34] Chistyakov, V. V., (2008), Modular metric spaces generated by F-modulars, *Folia Math.*, 15, 3-24,
- [35] Chistyakov, V. V., (2012), Fixed points of modular contractive maps., *Dokl. Math.*, 86, 515-518.
- [36] Nakano, H., (1950), *Modulared semi-ordered linear spaces*. In *Tokyo Math. Book Ser.*, (1) : Maruzen Co., Tokyo.
- [37] Musielak, T., Orlicz, W., (1959), On modular spaces. *Studia Math.*, 18: 49-65.
- [38] Musielak, T., Orlicz, W., (1959), Some remarks on modular spaces. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 7: 661-668.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : ELİF ÖZBAY AZAP

ÖĞRENİM DURUMU:

- Lisans** : 2014, Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik

MESLEKİ DENEYİM

- 2014-2022 : Ortaokul Matematik Öğretmenliği (Şahin Okulları)