

GRAFİKSEL TASARIMLAR

Aylin KARABACAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2007

ANKARA

Aylin KARABACAK tarafından hazırlanan GRAFİKSEL TASARIMLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gül ERGÜN

İstatistik Anabilim Dalı, Hacettepe Ü.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Hasan BAL

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

.

Tarih: 21 / 09 / 2007

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Aylin KARABACAK

GRAFİKSEL TASARIMLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Aylin KARABACAK****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Eylül 2007****ÖZET**

Grafiksel t-tasarımları, kombinatoriyel tasarımlar sınıfına girer ve tasarım teorisinin en önemli yapılarıdır. Bu tasarımlar istatistiksel deneylerde yapı maliyetlerini minimum yapmada önemlidir. Büyük t değerlerine sahip grafiksel t-tasarımlarını oluşturmak oldukça zordur. Bunun için bilgisayar programlarından yararlanılır. Grafiksel t-tasarımlarında terminoloji kullanımı matematiğin ana görüşüne daha yakındır. Bu çalışmada grafiksel t-tasarımı ve çeşitleri tanıtılmış, bunların birbirleri ile olan ilişkilerinden ve geometrik özelliklerinden bahsedilmiş, grafiksel t-tasarımları ile ilgili yapılar verilmiştir. Konunun anlaşılabilmesi için grafiksel t-tasarımları örneklendirilmiştir. Ayrıca grafiksel t-tasarımlarıyla sonlu afin ve projektif geometriler arasında ilişkiler kurulmuş, bazı t-tasarımları bu geometriler yardımıyla sunulmuştur.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Grafiksel t-tasarımları, t-Tasarımları, Yörünge,
Projektif Düzlem, İzomorfizm
Sayfa Adedi : 75
Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Hülya Bayrak

GRAPHICAL DESIGNS**(M.Sc.Thesis)****Aylin KARABACAK****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****September 2007****ABSTRACT**

Graphical t-designs are a part of combinatorial designs and the most important structures in design theory. These designs are important to minimize construction cost in statistical experiments. It's too difficult to construct graphical t-designs with large t value, therefore computer programmes are used. The terminology used is closer to mainstream in mathematics in graphical t-designs. In this study, graphical t-designs and varieties of them are introduced. Interrelation among them, geometrical properties and the structures related to graphical t-designs are analysed. Some samples are given so that the subject can be understood. Furthermore, connections are set between graphical t-designs and finite affine and projective geometries. Some t-designs are represented by using these geometries.

Science Code : 205.1.066**Key Word : Graphical t-Designs, t-designs, Orbit,
Projective Plane, Isomorphism****Page Number : 75****Adviser : Prof.Dr. Hülya BAYRAK**

TEŞEKKÜR

Bu tezde çalışmalarım boyunca bilimsel tecrübeleri, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bundan sonraki çalışmalarım da bana destek olacak olan değerli hocam Prof.Dr. Hülya BAYRAK'a, bilgi ve tecrübeleri ile beni yetiştiren Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümündeki değerli hocalarıma, yüksek lisans eğitimim süresince maddi manevi desteğini eksik etmeyen başta annem Serpil KARABACAK, babam Kurtuluş KARABACAK, teyzem Sevinç CABBAR'a ve diğer bütün aile üyelerine, desteğini hiç eksik etmeyen değerli amirlerime ve iş arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1.GİRİŞ	1
2.GEOMETRİK TANIMLAMALAR	5
2.1 İsabet Yapısı	5
2.2 İzomorfizm ve Otomorfizm	7
2.3 Dulalite ve Kutupsallık	9
2.4 Projektif ve Afin Düzlemler	9
3. t-TASARIMI.....	14
3.1 t-yönlü Dengeli Tasarımlar	14
3.2 t-Tasarımının Özellikleri	15
3.3 t-Tasarımı İle İlgili Tasarımlar	18
3.3.1 Dengeli tamamlanmamış blok tasarımları.....	18
3.3.2 Simetrik tamamlanmamış blok tasarımları.....	21
3.3.3 Steiner sistemler.....	22
4.GRAFİKLER.....	23

Sayfa

4.1 Güçlü Düzenli Grafik.....	23
4.1.1 Tam grafik.....	28
5. GRAFİKSEL TASARIMLAR.....	29
5.1 Giriş	29
5.2 Grafiksel Tasarım Koşulları ve Bazı Tanımlar	30
5.2.1 Permütasyon grubu	30
5.2.2 Blok tasarımları	32
5.2.3 Dengeli tamamlanmamış blok tasarımları arasında izomorfizm ve otomorfizm.....	33
5.2.4 Simetrik grup	36
5.2.5 Permütasyon döngüsü	39
5.2.6 k -yörünge ve $\{k\}$ -yörünge	39
5.2.7 Grup yörünge	40
5.2.8 Kramer-Mesner matrisleri ve Kramer-Mesner metodu	41
5.2.9 Hipergrafikler	44
5.3 Grafiksel Tasarım Özellikleri.....	45
5.4 Grafiksel Genişleme Matrisleri	56
5.4.1 Blok Genişliği 3 Olan Grafiksel 2-tasarımları	59
6.GRAFİKSEL TASARIM TÜRLERİ	60
6.1 Bigrafiksel Tasarımlar	60
6.2 Hipergrafiksel Tasarımlar	60
6.3 Tasarımlardan Elde Edilen Grafikler	61

Sayfa

7.GRAFİKSEL TASARIMLARLA DİĞER TASARIMLARIN İLİŞKİSİ.....	63
7.1 Sonlu Geometriden BIB Tasarımı Kurulumu	63
7.2 Grafiksel Tasarımın Youden Kare İle Olan İlişkisi	66
8. SONUÇ	69
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	75

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. $v=b=7, r=k=3, \lambda=1$ isabet yapısı	11
Çizelge 2.2. $v=b=7, r=k=4, \lambda=2$ isabet yapısı	12
Çizelge 4.1. Güçlü düzenli grafik örnekleri	27
Çizelge 5.1. $\lambda=1$ iken grafiksel t-yönlü dengeli tasarımlara ilişkin parametreler ve Grafik gösterimleri	52
Çizelge 5.2 . $\lambda=2$ iken grafiksel t-yönlü dengeli tasarımlara ilişkin parametreler ve Grafik gösterimleri	53
Çizelge 5.3. $k=3$ olan grafiksel tasarımlar	59

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Yedi nokta ve doğruya sahip projektif düzleme ilişkin gösterim.....	11
Şeki 4.1. Güçlü düzenli grafik gösterimleri	25
Şekil 4.2. Çeşitli güçlü düzenli grafik örnekleri.....	26
Şekil 4.3. Tam Grafik Örnekleri.....	28
Şekil 5.1. S_5 Simetrik Grup	37
Şekil 5.2. K_4 Grafiğine ait Alt Grafikler	39
Şekil 5.3. K_5 Grafiğine Ait Alt Grafikler	39
Şekil 5.4. Hipergrafik	44
Şekil 5.5. $3-(10,4,1)$ Grafiksel tasarımına ilişkin gösterim.....	47
Şekil 5.6. $3-(10,4,1)$ Grafiksel Tasarımın Bloklarına İlişkin Gösterim.....	48
Şekil 5.7. $2-(10,4,2)$ Grafiksel Tasarımına İlişkin Gösterim	49
Şekil 5.8. $3-(28,5,30)$ Grafiksel Tasarımına Ait Gösterim.....	55
Şekil 5.9. $2 \leq k \leq 4$ için K_n 'nin k-kenar Alt Grafiklerine İlişkin İzomorfizm Sınıfları .	57
Şekil 6.1. Bigrafiksel $3-(16, \{4,6\}, 1)$ Tasarımına İlişkin Gösterim	60
Şekil 6.2. Hipergrafiksel $2-(56,3,18)$ Tasarımına İlişkin Gösterim.....	61
Şekil 6.3. Petersen Grafik Örnekleri	62
Şekil 7.1. $2-(15,3,1)$ Grafiksel Tasarımına İlişkin Gösterim.....	65

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathcal{A}$	Sonlu blok kümesi
Aut D	Otomorfizm grubu
b	Blok sayısı
B	Blok
$\mathcal{B}$	Blok kümesi
$B[v,k,\lambda]$	Dengeli tamamlanmamış blok tasarımı
$D=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$	Sonlu isabet yapısı
$\overline{D}$	Standartlaştırılmış D yapısı
$G=(P, U)$	Grafik
k	Blok Genişliği
n	Köşe sayısı
I	İsabet İlişkisi
λ	Her farklı t noktanın birlikte görüldüğü blok sayısı
v	Nokta (işlem=deneme) sayısı
P	Noktalar seti
$\mathcal{P}$	Sonlu nokta kümesi
p	Nokta
$PG(m,n)$	m boyutlu n mertebeli projektif geometri
π	İzomorfizm
r	Tekrar sayısı
$S(v,k,\lambda)$	Steiner Sistemler
$SB[v,k,\lambda]$	Simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı
t	Noktaların t alt kümesi
$t-(v,k,\lambda)$	t-tasarımı
$\mathcal{X}$	Sonlu nokta Kümesi

Simgeler**U****Açıklama**

Kenar Kümesi

Kısaltmalar**BIBD****SBIBD****SRG****tBD****POLS****LLL-ALGORİTMASI****Açıklama**

Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı

Simetrik Dengeli Tamamlanmış Blok Tasarımı

Güçlü Düzenli Grafik

t-yönlü dengeli tasarım

İkişer Ortogonal Latin Kareler Seti

Latice İndirgeme Algoritması

1.GİRİŞ

Modern tasarım teorisi kökleri XIX. yüzyıla dayanan uzun bir geçmişe sahiptir. Eliakim Hastings Moore tarafından yapılan klasik bilimsel inceleme, olan “ taktikal memoranda” tasarım teorisinde yer alan bir çok kurulum metotlarının, problemlerin ve kavramların pek çok çoğu için ana kaynak olmuştur (özellikle steiner sistemler için). Tasarım ya da daha genel olarak isabet yapılarının kurulumunda, uygun permütasyon grupları temel araç olarak kullanılmıştır. $\Omega=\{1,2,...,n\}$ olmak üzere bir küme ve G , Ω kümesi (seti) üzerinde etkili bir permütasyon grubu olsun. bu permütasyon grubu (G,Ω) ile gösterilmektedir. uygun bir isabet yapısına ilişkin tüm otomorfizm grubu olarak öngörülen permütasyon grubu (G,Ω) ‘nın karakteristik özellikleri, (G,Ω) tanımlamada kullanılan en çekici yollardan biri olmuştur. R.Carmichael bir kitabında; D tasarımını ve D ’ye ait noktaların seti olan Ω üzerinde permütasyon grubu olarak rol oynayan D ’nin otomorfizm grubu olan $G=Aut(D)$ ’den söz etmiştir [1].

Moore’un çalışmasında bu zamana kadar, izomorfizme uygun parametre değerlerine sahip tasarımların belirlenmesi ilgi çeken bir çalışma olmuştur. İstenilen parametrelere sahip tasarımların yapısal sayımlarına ilişkin ilk deneme yıllar önce yapılmıştır [1-2]. Bununla birlikte, bilgisayar çağının gelişmesiyle bu problemle sistematik olarak uğraşmak olanaklı hale gelmiştir. İlk ciddi başarı H.K Nandi ve P.B. Gibbons tarafından elde edilmiştir [1-3].

1978 yılında I.A Faradzev, grafiklerin ve isabet yapılarının yapısal sayımları için etkin olan bilgisayarlarla ilgili geçmişi yayınlamıştır [1-4]. Onun yaklaşımı, sırası ile grafikleri ya da isabet yapılarını gösteren kanonik matrislerin kurulumu için kullanılan bir geriye dönüş algoritmasından oluşmaktadır. Günümüzde bu metodoloji grafiklerin yapısal sayımı içindeki modern hesap biliminin bir özeti için düzenli çıkarım olarak kabul edilmektedir. İsabet yapılarının sayımı grafiklerin sayımından daha zor olmaktadır. İsabet yapılarının sayımı ile ilgili ana fikirler I.A. Faradzev

tarafından verilmiştir [1]. Bu fikirlerin önemli gelişimi ve algoritmaların uygulamaları birkaç yıl sonra A.V Ivanov tarafından yapılmıştır [1-5].

Kombinatorik, belirlenmiş kesin kurallara göre nesnelerin ayrılması ve düzenlenmesi problemleriyle ilgili matematiğin bir koludur. “Kombinatorik tasarım”, verilen sonlu bir kümeden belirli özellikleri olan alt kümeler topluluğunun seçilmesinin bir yoludur ve 1782’de Euler , 1847’de Kirkman ve 1853’de Steiner’in problemlerine kadar uzanır. Bu problemlere ilişkin çok sayıda makale olmasına rağmen, 19,20. yüzyıllarda kombinatoriyal konfigürasyonların deney tasarımlarının istatistiksel teoride yararlı olduğu fark edilene kadar, sistematik bir işlem bulunamamıştır. Bu nedenle istatistikçiler bu konuya ilgi duymuşlar ve bu konuyla ilgili önemli makaleler yazmışlardır [6].

Grafiksel tasarımlar özel kombinatorik tasarımlardan biri olan t -wise dengeli ve t -tasarımları ile ilişkili olan yapılardır. Grafiksel tasarımları oluşturmada bugüne kadar pek çok farklı yöntem kullanılmıştır. Bunlardan biri olan Kramer –Mesner matrisleri, t -tasarımlarını ve grafiksel tasarımları oluşturmada güçlü bir araç olarak kullanılmıştır. 1970’li yılların başlarında, Klin grafiksel 2- ve 3- tasarımlarını tanımlamak üzere Kramer-Mesner matrislerini kullanmıştır [10]. Polinomial matrislere ilişkin bir diğer yaklaşıma Driessen’in çalışmasında rastlamak mümkündür [10]. Bundan başka Driessen grafiksel 3-(10,5,6) 3-(10,4,1) ve 3-(10,5,30) tasarımlarını vermiştir.

Chee, grafiksel t -tasarımları için polinomial girişleri göstermiştir [7].

Grafiksel tasarımlara ait önemli teoremler Chouinard II tarafından yapılmıştır [8].

Cameron ve Praeger, Petersen grafikten, 2-(78,15, λ) tasarımını elde etmişlerdir [9].

Grafiksel tasarımlara ilişkin daha fazla örnek Kramer ve Chee tarafından yayınlanmıştır [10]. Kramer’in tasarımı 3-(21,4,3) ve Chee’nin tasarımı 3-(28,5,30) parametrelerine sahiptir.

1900 yılların başında bilgisayarlar grafiksel $t(v,k,\lambda)$ tasarımlarını kurmak üzere getirildi. Kreher, grafiksel $t(v,k,\lambda)$ tasarımlarını kurulumunda Latice indirgeme algortimasını (Lattice Reduction Algorithm-LLL algoritması) kullanmıştır [11]. Chee, tüm grafiksel $2-(v,3,\lambda)$, $2-(v,4,\lambda)$, $3-(v,4,\lambda)$ ve $4-(v,5,\lambda)$ tasarımlarını bulmak için sembolik hesaplamalar kullanmıştır [12]. Daha fazla sporadic örnekler Kramer ve Chee tarafından elde edilmiştir [13-14].

1900 yılların sonuna doğru daha fazla grafiksel $t(v,k,\lambda)$ tasarımları Betten tarafından, LLL algoritmasının daha geliştirilmiş şeklini kullanarak bulunmuştur [10].

Grafiksel tasarımların tanımlanmasından bu zamana kadar belli bir zaman geçmiş olmasına rağmen çok az sayıda grafiksel tasarım bilinmektedir.

Bir grafiksel tasarıma ilişkin ilk örnek Kramer ve Mesner tarafından R.M Wilson için verilmiştir [15].

t -tasarımları kombinatoryal yapılar olduğundan daha önce söz edilmişti. t -tasarımları, tasarımın teorisindeki en önemli yapılardır. t -tasarımları, aynı zamanda kombinatoryal optimizasyon problemleriydi ve bu nedenle istatistiksel deneyler, network tasarımları gibi uygulamalı problemlerle yapı maliyetini minimum yapmada önemli olduğu ifade edilmişti. t -tasarımları, 1969'dan beri askeri taktiklerde, bilgisayar çiplerinin tasarımlarında ve özellikle istatistikte (tıp ve ziraat deneylerinde, nükleer araştırmalarda, demoskopide, kalite kontrolünde,..... vb.) sık kullanılmaktadır.

Tasarımların bu özel türleri ile ilgili bazı çalışmalar bulunmaktadır. Bunlardan biri

Alltop tarafından çalışılan ilk grafiksel $2-\left(\binom{n}{2}, k, \lambda\right)$ tasarımlarıdır [16].

Tez çalışması kapsamında yer alan konuların, bölümlere göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş bölümünde, grafiksel t-tasarımlarının tasarım teorisindeki yerinden ve öneminden bahsedildi, grafiksel t-tasarımlarının kullanım alanları belirtildi ve konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmaların özetleri verildi.

Tezin ikinci bölümünde konunun rahat anlaşılabilmesi için gerekli olan temel geometrik tanımlamalar verildi.

Tezin üçüncü bölümünde t-tasarımlarına, genel t-tasarımı tanımı, özellikleri, t-tasarımları ile ilgili tasarımlara yer verildi.

Tezin dördüncü bölümünde grafik tanımına, güçlü düzenli grafik yapılarına ve özel güçlü düzenli grafik örneklerine yer verildi.

Tezin beşinci bölümünde grafiksel tasarımlara temel teşkil eden tanımlara, grafiksel tasarım tanımına, özellikleri ve grafiksel tasarımlara ilişkin örneklere yer verildi.

Tezin altıncı bölümünde grafiksel tasarım türleri olan bigrafiksel tasarımlara ve hipergrafiksel tasarımlara yer verildi.

Tezin yedinci bölümünde grafiksel tasarımların diğer tasarımlarla olan ilişkilerine yer verildi.

Sekizinci bölümünü oluşturan sonuç bölümünde ise daha önceki çalışmalardan yararlanılarak grafiksel t-tasarımları ve bu tasarımların özellikleri ile ilgili kısaca bilgi verildi. Eldeki yeterliliklerden bahsedilerek birtakım önerilerde bulunuldu.

2. GEOMETRİK TANIMLAMALAR

2.1 İsalet Yapısı

“Noktalar” ve “Blokler” olarak adlandırılan sonlu iki nesne kümesi, aralarındaki bir I isabet ilişkisi (incidence relation) ile birlikte bir yapıdır. Bu yapıda, genellikle noktaları göstermek için küçük Latin harfleri ve blokları göstermek için de büyük Latin harfleri kullanılır. Verilen herhangi bir blokla ilişkili bir noktalar kümesi vardır ve blok, bu noktalar kümesi ile tanımlanır. Böylece, bir p noktası bir B bloğu ile ilişkili ise bu, $p \in B$ ya da $p \in B$ şeklinde yazılabilir ve “ p , B ’nin üzerinde” ,” B , p ’yi içerir”,...vb şeklinde ifade edilir. Eşdeğer bir yaklaşım ise, yapıyı sonlu nokta kümesi $\mathcal{P}$, sonlu blok kümesi $\mathcal{B}$ ve $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ ile verilen isabet (incidence) gibi kabul etmektir. Buradaki I isabet ilişkisi noktanın doğru üzerinde bulunması şeklindedir. Yani $(p, B) \in I$ (şeklinde gösterilir) ise p , B bloğu üzerine bir noktadır. Bu takdirde yapı $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ile gösterilir ve “sonlu isabet yapısı” (finite incidence structure) olarak adlandırılır.

Bazı kaynaklarda “sonlu isabet yapısı” terimi “konfigürasyon” ismiyle kullanılmaktadır.

D ; bir yapı ise, D ’nin nokta (işlem=deneme) sayısı “ v ” ve blok sayısı “ b ” ile gösterilir. Bir yapının noktalar kümesi ve bloklar kümesi (her ikisinde) boş olmamalıdır.

D yapısının bir noktası p ve bir bloğu B ise $\langle p \rangle, p$ üzerindeki blokların kümesini aynı şekilde $\langle B \rangle, b$ üzerindeki noktaların kümesini belirtir.

İki farklı nokta aynı noktalar kümesi ile tanımlanıyorsa bu durumda “ yapı tekrarlanmış bloklara sahiptir” denir.

D tekrarlanmış bloklara sahip ise, aynı noktalar kümesi ile ilişkili blokların bir kümesi tamamen silinerek D ’den yeni bir yapı oluşturabilir. Yani blok kümeleri

üzerinde bir R-denklik ilişkisi $B \sim C$, $\langle B \rangle = \langle C \rangle$ ile tanımlanmış ise, B bloğunun çokluğu B'nin R-denklik sınıfının büyüklüğüdür ve eğer B, birden büyük çokluğa sahipse B'nin tekrarlanmış blok olduğu söylenir. Noktaları D'nin noktaları, blokları D'nin bloklarının R-denklik sınıfları ile tanımlanan bir yapı göz önüne alınsın. p, D'nin B bloğu üzerinde ise B'nin denklik sınıfı üzerindeki p ile, yeni bir indirgenmiş D yapısı ile tanımlanır ve D/R şeklinde ifade edilir.

D yapısının bir elemanı, D yapısının diğer elemanları olan 0 ya da 1 ile ilişkili ise bu eleman “izole edilmiş” diye adlandırılır. Diğer taraftan “dolu” (full) bir eleman ise muhtemel diğer bütün elemanlarla ilişkili olan elemandır. (yani nokta bloklarla ya da blok noktalarla) Tekrarlı olarak önce bütün dolu elemanları sonra bütün izole edilmiş elemanları çıkararak “standartlaştırılmış D” adı verilen yeni bir $\bar{D}$ yapısına (bu yapı boş olmalı) ulaşılabilir. Sonunda dolu ya da izole edilmiş elemanlara ve tekrarlanmış bloklara sahip olmayan , hem standartlaştırılmış hem de indirgenmiş bir yapı “ tamamen indirgenmiş” sayılır.

İsabet Matrisi : D, noktaları $p_1, p_2, \dots, p_v$ ve blokları $B_1, B_2, \dots, B_b$ ($v > 0, b > 0$) olarak indekslenmiş bir yapı olarak farz edilsin. D için $v \times b$ boyutlu isabet matrisi (incidence matrix)

$A = (a_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_{ij} = 1 \quad ; (p_i \in B_j) \text{ ise}$$

$$a_{ij} = 0 \quad ; \text{diğer durumlarda}$$

Böylece, D hakkındaki tüm bilgiler A matrisinde ifade edilmiş olur (A matrisi, bütün elemanları 0 ya da 1 ise “(0,1) –matrisi” olarak isimlendirilir. Her isabet matrisi bir (0,1) –matrisidir. A matrisi, nokta ve blokların indekslenmesine bağlı olduğundan, farklı indekslemeler farklı isabet matrisleri oluşturur. Bununla beraber verilen bir D yapısı için isabet matrisleri arasında yakın bir ilişki vardır. $A, p_1, p_2, \dots, p_v$ ve

$B_1, B_2, \dots, B_b$ indekslemesi ile verilen D 'nin isabet matrisi ve $M, q_1, q_2, \dots, q_v$ ve $B_1, B_2, \dots, B_b$ indekslenmesiyle verilen isabet matrisi olsun. (yani noktalar farklı nitelendirilmiş fakat bloklar aynı). Bu durumda her q_i, p_j ' den biridir. Dolayısıyla, $q_i = p_j$ ise $i^0 = j$ olacak şekilde $\{1, \dots, v\}$ üzerinde θ 'nın bir permütasyonu elde edilir. Bunun anlamı her bir i için M 'nin i inci satırının A 'nın i^0 yıncı satırı ile aynı olmasıdır. Diğer bir deyişle M, A 'nın satırlarının sıraları değiştirilerek elde edilmiştir.

$A, p_1, \dots, p_v; B_1, \dots, B_b$ indekslenmesi ile verilen bir D yapısının isabet matrisi ise i satırındaki sıfır sayısı, p_i ile ilişkili olmayan blokları göstermektedir. Bu nedenle izole edilmiş bir eleman A 'nın bir satırına (ya da sütununa) en fazla bir tane “ sıfır olmayan” eleman (sayı) sağlar. Benzer şekilde dolu bir eleman tüm elemanları “1” olan bir satıra (ya da sütuna) denktir.

Eğer bir $(0,1)$ -matrisi olan A , aşağıdaki şartları sağlıyorsa tamamen indirgenmiş bir yapının isabet matrisidir.

- (i) Her satır ve sütunun en az bir tane sıfır elemanı ve en az iki tane “1” elemanı olmalıdır.
- (ii) A 'da iki özdeş (aynı) sütun olmamalıdır.

Her pozitif m tamsayısı ve $r > 0$ sabiti için $AJ_{b,m} = rJ_{v,m}$ ise D yapısı “düzenli” dir. Burada J , bütün elemanları 1 olan boyuta uygun matristir [17].

2.2 İzomorfizm ve otomorfizm

$D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ve $D' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ isabet yapıları ve $\pi: \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}' \cup \mathcal{B}'$ 1-1 ve örten bir fonksiyon olsun. π aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir izomorfizmdir:

- (i) $\mathcal{P}^\pi = \mathcal{P}'$ ve $\mathcal{B}^\pi = \mathcal{B}'$;

(ii) $pIB \Leftrightarrow p^{\pi}I^{\pi}B^{\pi}$ bütün $p \in \mathcal{P}$ ve bütün $B \in \mathcal{B}$ ler için

Bu durumda D ve D' nün izomorfik olduğu söylenir. D ve D' izomorfik ise $D \cong D'$ şeklinde gösterilir. İzomorfizm bir denklik ilişkisidir. Eğer $D \cong D'$ ise o zaman π , otomorfizm olarak adlandırılır.

D , bir isabet yapısı olsun. D 'nin bütün otomorfizmlerinin grubu “ D 'nin tam otomorfizm grubu” (full automorphism group) olarak adlandırılır ve $\text{Aut } D$ şeklinde gösterilir. $\text{Aut } D$ 'nin herhangi bir alt grubu “ D 'nin otomorfizm grubu” olarak adlandırılır ve $\text{Aut } D$ şeklinde gösterilir. $\text{Aut } D$ 'nin herhangi bir alt grubu “ D 'nin otomorfizm grubu” olarak adlandırılır.

Teorem: Her $(0,1)$ - matrisi bir yapının isabet matrisidir. M ve $A, (0,1)$ -matrisleri olsun. Bunların izomorfik olabilmeleri için gerek ve yeter koşul $PMQ=A$ eşitliği sağlanacak şekilde P ve Q permütasyon matrislerinin mevcut olmasıdır [17].

Bir D yapısının blok kümeleri boş değil ve her bloğu $k>0$ nokta içeriyorsa bu yapıya “düzgün” (uniform) denir. Bir yapının düzgünlüğü onun isabet matrisine bakılarak kolay bir yoldan bulunabilir. Düzgün bir yapının isabet matrisinde sütun toplamaları eşittir. Yani her bloğunda eşit sayıda eleman vardır.

$D, v>0$ noktaları olan bir yapı olsun. D 'nin t noktalı her alt kümesi, λ ortak blokları ile tam ilişkili olacak şekilde $\lambda, t(0<\lambda$ ve $0 \leq t \leq v)$ tam sayıları mevcutsa, D 'ye, λ için bir t -yapısıdır denir. Burada v , noktaların sayısı ve λ, t noktaların üzerindeki ortak blok sayısıdır. Yalnız dikkat edilmelidir ki, her düzgün yapı ya da t -yapısı boş olmamalıdır. Aynı zamanda (v, k, λ) için t -yapısından bahsederken “ k ” dan dolayı otomatik olarak bu yapının düzgün olduğu belirtilmiş olur.

Bir D yapısı eşit sayıda nokta ve bloğa sahipse D için herhangi bir isabet matrisi karedir. Bu nedenle $b=v$ olan yapılara “ kare yapı ” (square structure) ve ya “ simetrik yapı ” (symmetric structure) denir [17].

2.3 Dualite ve kutupsallık

$D=(V,B,I)$ bir isabet yapı olsun. D nin D^* dual yapısı $D^*=(B,V,I^*)$ dır, burada $(B,P) \in I^*$ olması için gerek ve yeter koşul $(B,P) \in I$ olmasıdır. Genellikle I^* yerine I yazılır. D bir isabet yapısı olsun. Onun D^* dual yapısı üzerindeki D nin bir izomorfizmi, *bir dualite* veya *korelasyon* olarak adlandırılır. 2.mertebeden bir korelasyon bir *kutupsal* olarak adlandırılır. Eğer D nin bir korelasyonu varsa o zaman D , *kendi-dual* olarak adlandırılır.

D tasarımının dualitesi (duality) D 'den onun dualine bir izomorfizmdir. $\sigma: X \rightarrow B$
 $\tau: B \rightarrow X, X \in B \Leftrightarrow B^\tau \in X^\sigma$ (bu bir 1-1 örten çifti gibi düşünülebilir).
 Dualitenin iki kez uygulanması sonucu, $\sigma\tau: X \rightarrow X$ ve $\tau\sigma: B \rightarrow B$ tasarımının bir otomorfizmini verir. Dualite, bir kutupsal, olarak adlandırılır. Eğer bu otomorfizm trivial ise, yani, τ, σ 'nın tersi ise bu durumda kutupsal bir tek σ dönüşümü ile tanımlanır.

$$x \in y^\sigma \Leftrightarrow y \in x^\sigma$$

Önerme: Tasarımın kutupsala izin vermesi için g.y.k onun simetrik isabet matrisine sahip olmasıdır.

2.4 Projektif ve afin düzlemler

W, F_q alanı üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olsun. (q birinci kuvvet). V, W 'nin tüm tek boyutlu alt uzaylara ait bir set ve B, W 'nin tüm iki boyutlu alt uzaylara ait bir set olsun. İsalet ilişkisi şu şekilde tanımlanabilir:

$x \in V$ elemanı, $B \in \mathbf{B}$ 'ye isabet elemanıdır, eğer x , B 'nin içinde yer alıyorsa .
 (V,B,I) isabet yapısı bir projektif geometridir ve $PG(n-1,q)$ ya da $PG(W)$ olarak gösterilir. V seti, $PG(W)$ 'nin nokta seti ve B setine ait her bir eleman, çizgi olarak adlandırılır.

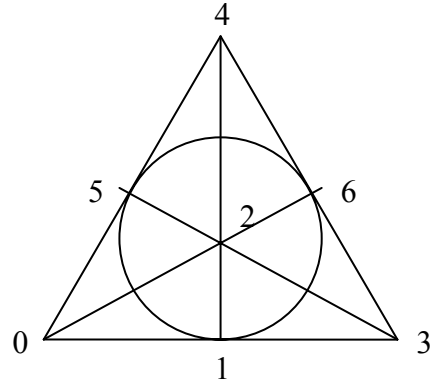
Bir projektif geometri $PG(2,q)$ bir $2-(q^2+q+1,q+1,1)$ –tasarımıdır. Ve projektif düzlem olarak adlandırılır.

Bir $D=(V,B,I)$ isabet yapısının bir projektif düzlem olarak adlandırılması için aşağıdaki aksiyomların sağlanması gerekir:

- (a) Herhangi farklı iki nokta tek bir doğru ile birleşir.
- (b) Herhangi farklı iki doğru tek bir noktada kesişir.
- (c) Üçü aynı doğru üzerinde olmayan dört nokta vardır.

Örnek: Nokta kümesi olarak $V=\{0,...,6\}$ blok kümesi olarak $B=\{\{0,1,3\},\{1,2,4\},\{2,3,5\}, \{3,4,6\},\{4,5,0\},\{5,6,1\},\{6,0,2\}\}$ ve isabet bağıntısı olarak ϵ üzerinde bulunma bağıntısı alınsın.

Aşağıdaki şekil yedi noktalı ve yedi doğrulu bir projektif düzlem tanımlar.(Gerçekte bu aksiyomlar göz önüne alınarak kontrol edilebildiğinde en küçük projektif düzlemdir.) Her bir nokta üç doğru üzerindedir. Her bir doğru üç nokta içerir. Nokta ve doğru sayısı uyuşur. Buna ilişkin bir gösterim aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 2.1. Yedi nokta ve doğruya sahip projektif düzleme ilişkin gösterim

Örnek : $v=b=7$, $r=k=3$, $\lambda=1$ parametreleri için çizelge 2.1. düşünölsün.

Çizelge 2.1. $v=b=7$, $r=k=3$, $\lambda=1$ ile $D=(V,B,I)$ isabet yapısı

	Bloklar						
Noktalar	1	2	3	4	5	6	7
D_1	X	X		X			
D_2		X	X		X		
D_3			X	X		X	
D_4				X	X		X
D_5	X				X	X	
D_6		X				X	X
D_7	X		X				X

Çizelge 2.1. için isabet matrisi şöyledir.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen geometrik yapı 2. mertebeden projektif düzlemdir (Fano düzlem).

Çizelge 2.2. $v=b=7$, $r=k=4$, $\lambda=2$ ile $\bar{D} = (V, B, J)$ isabet yapısı.

	Bloklar						
Noktalar	1	2	3	4	5	6	7
D_1			X	X	X	X	X
D_2	X					X	X
D_3	X	X			X		X
D_4	X	X	X	X		X	
D_5		X	X	X			X
D_6	X		X	X	X		
D_7		X			X	X	

Çizelge 2.2. için isabet matrisi aşağıdaki gibidir.

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen yapı biplanedir ($\lambda=2$ olan simetrik tasarım olarak tanımlanır).

Önerme: $D=(V,B,I)$ sonlu projektif düzlem olsun. O zaman aşağıdaki şartları sağlayan, D nin mertebesi olarak adlandırılan bir n doğal sayısı vardır.

$$\forall p \in V \text{ ve } G \in B \text{ için } |(p)|=|(G)|=n+1,$$

$$|V|=|B|=n^2+n+1$$

Afin Düzlem : Bir $D=(V,B,I)$ isabet yapısı, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir afin düzlem olarak adlandırılır;

(a) Herhangi iki farklı nokta tek bir doğru ile birleşir.

(b) G herhangi bir doğru olmak üzere $p \notin G$ olarak alınsın. Bu taktirde, p yi üzerinde bulunduran G ile kesişmeyen bir H doğrusu vardır.

(c) Üç noktası aynı doğru üzerinde değildir.

İki G ve H doğrusu, eğer $G=H$ veya $|(G,H)|=0$ ise paraleldir denir, $G \parallel H$ şeklinde yazılır. Böylece (b) öklid paralellik aksiyomudur.

$D=(V,B,I)$ bir afin düzlem olsun. O zaman paralellik, B üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Eğer D sonlu ise aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir doğal n sayısı (D nin dizisi olarak adlandırılmıştır) vardır:

Her p noktası için $|(p)|=n+1$

Her G doğrusu için $|(G)|=n$

$|V|=n^2$ $|B|=n^2+n$

Grafik : k bir doğal sayı ve $D=(P,B,I)$ bir sonlu isabet yapı olsun. Her B bloğu için $|(B)|=k$ sağlanırsa D , k -hipergrafik olarak adlandırılır. Eğer $k=2$ ise bir grafikten bahsedilir. O zaman noktalar köşe olarak adlandırılır ve bloklar kenarlar olarak adlandırılır.

3. t-TASARIMI

t-tasarımları kombinatorial yapılardır. t-tasarımları, tasarım teorisindeki en önemli yapılardır ve gelişmiş bilgisayarlar olmasına rağmen birçok t-tasarımını oluşturmak zordur. Çünkü bütün kabul edilebilir parametreler için hala genel bir formül yoktur.

t-tasarımları, aynı zamanda kombinatorial optimizasyon problemleridir. Bu nedenle istatistiksel deneyler, network tasarımları gibi uygulamalı problemlerle yapı maliyetini minimum yapmada önemlidir. t-tasarımları, 1969'dan beri askeri taktiklerde, bilgisayar çiplerinin tasarımlarında ve özellikle istatistikte (tıp ve ziraat deneylerinde, nükleer araştırmalarda, demoskopide, kalite kontrolünde,..... vb.) sık kullanılmaktadır.

Önceleri t 'nin küçük değerleri için t-tasarımları araştırılırken 1980'lerden sonra büyük t ve λ 'ya sahip t-tasarımları araştırılmaya başlamıştır.

Sonlu projektif ve afin geometriler eğer boyut en azından üç ise çeşitli yollardan özel tasarımlar gibi yorumlanabilir. O nedenle kombinatorial yapıların analizi için olan metodlar bu geometrileri çalışmak için kullanılabilir. Böyle bir metot, isabet matrislerinin kullanımıdır. İsabet matrisleri ve onların genelleştirmeleri tasarımlar ve daha genel yapılar üzerine olan çeşitli alanlarda kullanılabilir. Ayrıca istatistikte geniş bir uygulama alanı görür [6].

3.1 t-Yönlü Dengeli Tasarımlar

X , v elemandan oluşan noktalar kümesi, B X 'in alt setlerinden oluşan bloklar olmak üzere her bir blok genişliğinin K içinde yer aldığı, X ' e ait her t -elemanlı alt setinde tam olarak λ blokta gözüktüğü (X,B) çifti bir t -yönlü dengeli tasarımdır (t-wise balanced design-tBD). Eğer K , t ve v arasındaki tam sayılardan oluşan bir set ise bu durumda tBD uygundur. Eğer B , bazı k 'lar için X 'e ait k -altsetlerin tümünü kapsarsa bu durumda (X,B) bir basit tasarım olmaktadır [18].

Bir $t-(v,K,\lambda)$ tasarımı $S_\lambda(t,K,v)$ ya da $B_t[K,\lambda;v]$ ile gösterilir. Eğer $K=\{k\}$ ise ve dolayısı ile $|K|=1$ ise bu durumda tBD t-tasarımıdır. Eğer $\lambda=1$ ise, $S(t,K,v)$ notasyonu kullanılır ve tasarım Steiner sistem olur [18].

3.2 t-Tasarımının Özellikleri

t -tasarımı : $D=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ isabet yapısı,aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $t-(v,k,\lambda)$ tasarımı (t-design) olarak adlandırılır.

(i) $|\mathcal{P}|=v$;

(ii) $B \in \mathcal{B}$ için her blok k nokta ile ilişkilidir.

(iii) Her farklı t nokta birlikte λ blokla ilişkilidir.

(yani noktaların her t - alt kümesi λ blokta bulunuyorsa)

Negatif olmayan t,v,k,λ,b ve r tamsayıları “ tasarımın parametreleri “ olarak bilinir. r ,”tekrar sayısı” dır (replication number) ve bir noktanın görüldüğü blok sayısını belirtir [19].

t - tasarımı “ Taktikal Konfigürasyon” (Tactical Configuration) kelimesinin kısaltılmışıdır.

Tekrarlı blokları olmayan bir t -tasarımına “basit (simple) t -tasarımı” denir [19].

t -tasarımı için parametrelerin bulunması devam eden çözülmemiş bir problemdir. Fakat t,v,k,λ parametreleri gerekli koşulları sağlıyorsa o zaman bir $t-(v,k,\lambda)$ tasarımının var olduğu ispatlanmıştır [20].

Teorem: $D=(\mathcal{P},\mathcal{B})$, bir t -(v,k,λ) tasarımı olsun. $0 \leq s < t$ şartını sağlayan her s tamsayısı için, s farklı nokta ile ilişkili blok sayısı λ_s dir [19].

$$\lambda_s = \lambda \frac{(\nu - s)(\nu - s - 1) \dots (\nu - t + 1)}{(k - s)(k - s - 1) \dots (k - t + 1)} \quad (3.1)$$

Eş. 3.1 kısaca aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\lambda_s = \lambda \binom{\nu - s}{t - s} / \binom{k - s}{t - s} \quad (3.2)$$

Sonuç : D , bir t -(v,k,λ) tasarımı ve $t > 0$ olmak üzere s , $0 \leq s < t$ şartını sağlayan herhangi bir tamsayı ise D , bir s -(v,k,λ_s) tasarımıdır.

v,k,λ 'nın birçok seçeneği için düzgün t -yapıları bulunamaz. Bunun nedeni $\lambda_t = \lambda$ olan λ_s ($0 \leq s \leq t$) büyüklüklerinin tamsayı olması zorunluluğudur [17].

Sonuç: t -tasarımlarının parametreleri birbirlerinden bağımsız değildir. Aralarında bazı önemli ilişkiler vardır. D bir t -(v,k,λ) tasarımı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(i) \quad b = \lambda_0 = \lambda \frac{\nu(\nu - 1) \dots (\nu - t + 1)}{k(k - 1) \dots (k - t + 1)} \quad (3.3)$$

(Eş 3.1'deki λ_s formülünde s yerine 0 yazılarak bu eşitliğe ulaşılabilir.)

Bu eşitlik aşağıdaki gibi de verilebilir [17].

$$b = \lambda_0 = \lambda \binom{\nu}{t} / \binom{k}{t} \quad (3.4)$$

$$(ii) \quad t > 0 \text{ ise } bk = \nu r \quad (3.5)$$

$$(iii) \ t=2 \text{ ise } r(k-1)=\lambda_2(v-1) \quad (3.6)$$

Eş. 3.2’de $s=1$ yazılırsa tekrar sayısı r elde edilir.

$$r = \lambda_1 = \lambda \binom{v-1}{t-1} / \binom{k-1}{t-1} \quad (3.7)$$

$\lambda_t = \lambda$ yazılırsa yukarıdaki teoremden, λ_s tamsayılarının geri dönüşümünden (recursion) aşağıdaki eşitlik ile kolaylıkla hesaplandığını gösterir:

$$\lambda_s = \frac{(v-s)}{(k-s)} \lambda_{s+1} \quad (3.8)$$

Örneğin; 5-(12,6,1) parametrelili bir tasarım vardır. Sadece bu tasarım için değil bu parametrelere sahip herhangi bir tasarım içinde $\lambda_4=4, \lambda_3=12, \lambda_2=30, \lambda_1=66$ ve blok sayısı $b=\lambda_0=132$ dir.

Witt Tasarımları : $\lambda=1$ için $t-(t+7, t+1, \lambda)$ düzenlerinin ailesi Witt düzenleri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem : $t \geq s+2$ ($s \geq 0$) ise $\lambda_s \geq v-s$ dir. Bu şartların sağlandığı bir t -tasarımında,

$$b \binom{k-1}{t} \dots \binom{k-t+3}{t} \geq v \binom{v-1}{t} \dots \binom{v-t+2}{t} \quad (3.9)$$

dir. $t=2$ ise bu eşitsizlik $b \geq v$ olur ve Fisher eşitsizliği olarak bilinir [21].

Teorem : t, k, v ; $t \leq k \leq v$ olan pozitif tamsayılar olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlandığında bir $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı mevcut olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı vardır [22].

$$(i) \lambda \binom{v-i}{t-i} \equiv 0 \pmod{\binom{k-i}{t-i}}, i=0,1,\dots,t$$

$$(ii) \lambda \geq n$$

Sonuç :

$$v-1 \equiv 0 \pmod{k-1}$$

$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$$

olacak şekilde $k, v \in \mathbb{N}$ tamsayıları verilsin. Eğer m yeterli derecede büyük ise $\lambda = mk(k-1)+1$ olan bir $2-(v, k, \lambda)$ tasarımı vardır [22].

3.3 t-tasarımı ile ilgili tasarımlar

Verilen herhangi bir t -tasarımı D ile ilgili birtakım doğal yapılar vardır. Bu yapılar bazı durumlarda yeni tasarımlar oluştururlar. Bunlara ilişkin tanım ve teoremler aşağıda verilecektir.

3.3.1 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları

Tasarım : Bütün blokları aynı sayıda noktaya (işleme) sahip olan ve bütün noktaları aynı sayıda blokta gözüken v, b, r, k, λ parametrelili bir 2 - tasarımı “blok tasarımı” veya kısaca “tasarım” (design) denir.

Bir blok tasarımında $1 < k < v$ şartı sağlanıyorsa bu tasarım “dengeli tamamlanmamış blok tasarımı” (balanced incomplete block design-BIBD) olarak adlandırılır [17].

Buradaki “dengeli” sözcüğü 2 -tasarım şartlarına ve “tamamlanmamış” sözcüğü ise $k < v$ şartına işaret eder.

BIBD aslında bir 2-tasarım olduğundan buradaki $\lambda, p \neq q$ olmak üzere $(p, q) \in \binom{v}{2}$

çiftinin birlikte görüldüğü ortak blok sayısını belirtir.

Bir BIBD farklı şekillerde gösterilebilir: $B[v, k, \lambda]$, $B[k, \lambda; v]$, $S_\lambda(2, k; v)$, $S_{\lambda 2}(2, k; v)$, $S(\lambda; 2, k; v)$. Ama bunlardan en genel olarak kullanılanı $B[v, k, \lambda]$ dır.

Bir BIBD aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tasarımıdır;

(i) $k \geq 2$

(ii) Hiçbir işlem bir blokta bir kereden fazla gözükmez.

(iii) Her işlem eşit sayıda gözükür (yani r 'ler aynıdır)

(iv) Her işlem çifti aynı sayıda blokta gözükür. (yani λ 'lar aynıdır.)

Not: Bir tamamlanmamış blok tasarımının dengeli olabilmesi için,

$$b \geq v$$

(Fisher Eşitsizliği) kısıtı gereklidir ama yeterli değildir.

Örnek: $v=b=7, r=k=3$ parametrelili tamamlanmamış bir blok tasarımı aşağıdaki bloklarla verilsin:

$$\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}, \{5,6,0\}, \{6,0,1\}, \{0,1,2\}$$

$k=3 < v=7$ olduğundan tasarım tamamlanmamıştır. Fakat $v=7 \leq b=7$ olmasına rağmen dengeli değildir. Çünkü işlem çiftleri aynı sayıda blokta meydana gelmez. Yani; 01,12,...,vd. işlem çiftleri iki blokta; 02,13,...,vd. işlem çiftleri bir blokta gözükür. 03,14,...vd. işlem çiftleri hiçbir blokta gözükmez.

Teorem: (v,b,r,k,λ) parametrelili bir BIBD'nin parametreleri arasında aşağıdaki eşitlikler vardır [24].

$$(i) \quad bk=vr \quad (3.11)$$

$$(ii) \quad r(k-1)=\lambda(v-1) \quad (3.12)$$

Sonuç : Bir BIBD'nin varlığı için aşağıdaki şartlar gereklidir.

$$(i) \quad \lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$$

$$(ii) \quad \lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{(k-1)}$$

Teorem : Bir $B[v,k,\lambda]$ tasarımının duali yine bir $B[v,k,\lambda]$ tasarımı olması için, gerek ve yeter koşul $v=b$ (yani simetrik) olmasıdır [23].

Teorem: A , bir BIBD'nin isabet matrisi ise;

$$AA^T = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \dots & \dots & \dots & r \end{bmatrix} = (r-\lambda)I + \lambda J$$

dir. Burada I , $v \times v$ 'lük birim matris ve J de 1'lerden oluşan $v \times v$ 'lük matristir [24].

Bu sonuç, BIBD parametreleri üzerinde bir kısıt olan Fisher eşitsizliğini ispatlamada kullanılabilir.

Teorem: Herhangi bir BIBD için, Eş.(3.1)'de verilen $b \geq v$ (Fisher Eşitsizliği) sağlanır ve $b \geq v$ ise $r \geq k$ dır [24].

3.3.2 Simetrik Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı

Bir BIBD’de $v=b$ eşitliğini varsa tasarıma “simetrik dengeli tamamlanmış blok tasarımı” (symmetric balanced incomplete block designs –SBIBD) denir. Bazı kaynaklarda SBIBD terimi yerine “ kare dengeli tamamlanmamış blok tasarımı “ (square balanced incomplete block design) terimi de kullanılabilir. Ama en yaygın kullanımı SBIBD şeklindedir. SBIBD’ler $SB[v,k,\lambda]$ veya $SB[k,\lambda;v]$ şeklinde gösterilebilir.

Teorem: Bir SBIBD’nin duali yine bir SBIBD’dir [23].

Teorem: Bir SBIBD’de $(k-\lambda)^{v-1}$, kare bir sayıdır [22].

Önerme : $2-(v,k,\lambda)$ tasarımı $1 < k < v-1$ olan bir SBIBD ise $n=k-\lambda$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [22].

$$4n-1 \leq v \leq n^2+n+1$$

Yardımcı Teorem : Bir $SB[4n,n+\lambda,\lambda]$ tasarımı mevcutsa bu takdirde $n=u^2$, kare bir sayıdır ve $\lambda=u^2 \pm u$ dur. Eğer $v \geq 2k$ ise bu tasarım şu şekilde ifade edilebilir:

$$2-(v,k,\lambda)=2-(4u^2,2u^2-u,u^2u) \text{ [22].}$$

Teorem (Bruck-Ryser_Chowla Teoremi) : Bir SBIBD’nin varlığı için aşağıdaki şartlar gereklidir:

(i) v çift ise $k-\lambda$ bir tamsayının karesidir. ($k > \lambda$)

(ii) v tek ise $x^2=(k-\lambda)y^2+(-1)^{(v-1)/2}\lambda z^2$ eşitliği x,y,z tamsayılarının hepsinin birden sıfır olmadığı bir çözüme sahiptir [24].

3.3.3 Steiner Sistemler

$S=\{1,2,\dots,v\}$ olsun. Eğer $0 < t \leq k < v$, $\lambda > 0$ ve S 'nin her t elemanlı alt setleri D bloklarında λ defa görünürse; S 'nin l elemanlı ayrık alt setlerinin bir bileşimi olan D bir t -(v,k,λ) tasarımı olarak adlandırılır. Bir Steiner sistemi $S(t,k,v)$; bir t -($v,k,1$) düzenidir.

Eğer her bir $B \in \mathcal{B}$ için $|V|=v$, $|(B)| \in K$ ise o zaman D , bir $S_\lambda(t,K,v)$ olarak adlandırılır. Aynı zamanda D , k -hipergrafik ise k ve λ parametreleri ile bir t -tasarımı olarak adlandırılır. v noktaları üzerindeki bir t -tasarımı, bir $S_\lambda(t,k,v)$ dır ve $\lambda=1$ durumunda $S(t,k,v)$, Steiner sistemi veya $S_\lambda(t,k,v)$ olarak adlandırılır. Böylece afin ve projektif düzlemler, Steiner sistemleridir.

4. GRAFİKLER

Bir $t-(v,k,\lambda)$ tasarımı eğer $k=2$ ise bir “grafik” tir. (graph)[döngüsüz]. Bir grafik $G=(P, U)$ sistemi ile gösterilir. Burada P , noktalar kümesi; U ise kenarlar kümesidir. U ’daki bir u kenarı p ve q noktaları ile $u=(p,q)$ şeklinde tanımlanır.

Noktalar “köşeler” (vertices) olarak, bloklarda “kenarlar olarak adlandırılır. Aynı kenardaki ikiköşe “bitişik” (adjacent) olarak ifade edilir. Bir grafik $t \geq 1$ ise r dereceli (degree- bir köşe etkisi altındaki kenar sayısı) “ düzenli” dir ve $t=2$ ise “tam” dır.(complete) [yani bütün mümkün kenarlar mevcuttur]; benzer şekilde hiç kenarı yoksa “etkisiz” (null) olarak adlandırılır. İki kısımlı (bipartite) bir grafik köşe kümesi içinde tektir. Bu köşe kümesi iki kümenin ortak olmayan birliğidir. Bu iki kümede bitişik olan iki köşe yoktur. Yani kümelerden dolayı herhangi bir kenar kesinlikle bir köşeye sahiptir. Tasarım teorisi ile ilgili özel bir durum “güçlü düzenli grafik” tir.

4.1 Güçlü Düzenli Grafik

$G=(P,U)$, n köşe üzerinde r dereceli düzenli bir grafik olsun ve verilen iki, p,q köşesine bitişik köşe sayısının sadece p ve q ’nun bitişik olup olmamasına bağlı olduğu varsayılın. Herhangi iki bitişik köşe c ortak komşuya sahip olurken herhangi iki bitişik olmayan köşe d ortak komşuya sahip olursa, G ’nin n,r,c,d parametrelili bir “güçlü düzenli grafik” (strongly regular graph) olduğu söylenir ve $SRG-(n,r,c,d)$ şeklinde gösterilir

Önerme : Bir SRG ’nin parametreleri arasında şu eşitlik vardır:

$$r(r-c-1)=(n-r-1)d$$

G^* , tümleyen grafiği $[G^*=P, \binom{V}{2} \setminus U]$ aynı zamanda SRG dir ve parametreleri şöyledir:

$n, r^* = n-r-1, c^* = n-2r-d-2$ ve $d^* = n-2r+c$
[22].

Simetrik bir $D=(P, B)$ isabet yapısının kutupsal'ı (polarity) aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\pi: P \rightarrow B$, 1-1 örten fonksiyondur.

$xIy^\pi \Leftrightarrow yIx^\pi$, bütün $x, y \in P$ için

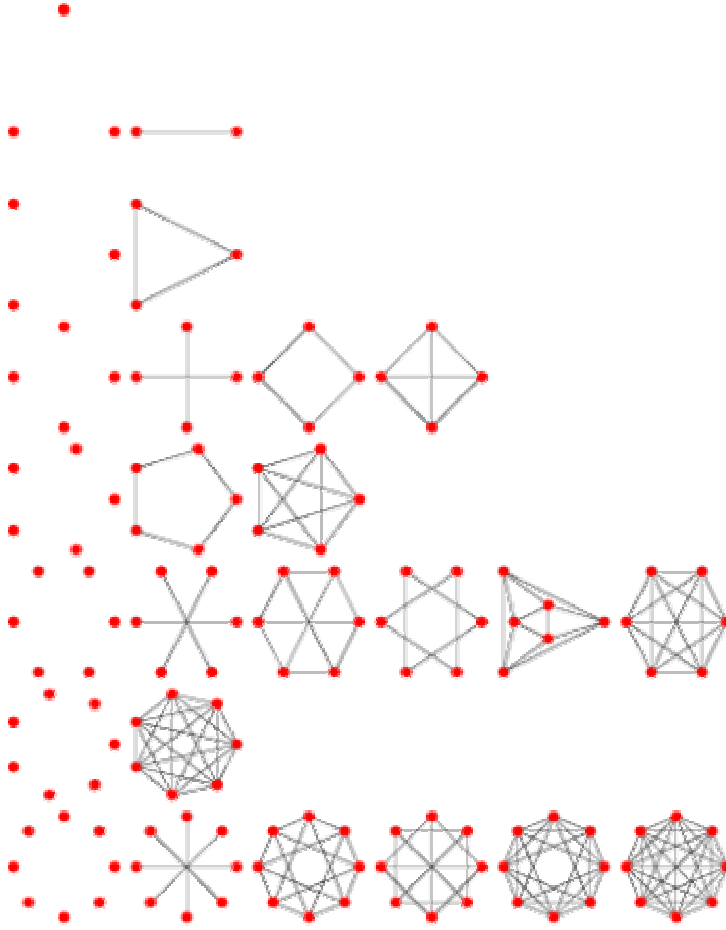
D 'nin kutupsal'ı bir G grafiğini oluşturmada kullanılabilir.

P köşe kümesine sahip bu G grafiğinde iki farklı x ve y noktası, x 'in y^π üzerinde olması gerek ve yeter koşulu altında bitişiktir. D , sabit bir blok genişliğine sahip olsa bile x 'in derecesi, x 'in x^π üzerinde olup olmamasına bağlı olduğundan G , genelde düzenli olmaz. Bu tür özelliğe sahip noktalar “mutlak (absolute) noktalar” olarak adlandırılır.

Teorem : Mutlak noktalar dışında bir π kutupsal'ını kabul eden simetrik bir $2-(v, k, \lambda)$ tasarımının mevcut olması için gerek ve yeter koşul (v, k, λ, λ) parametrelili bir SRG'nin olmasıdır [22].

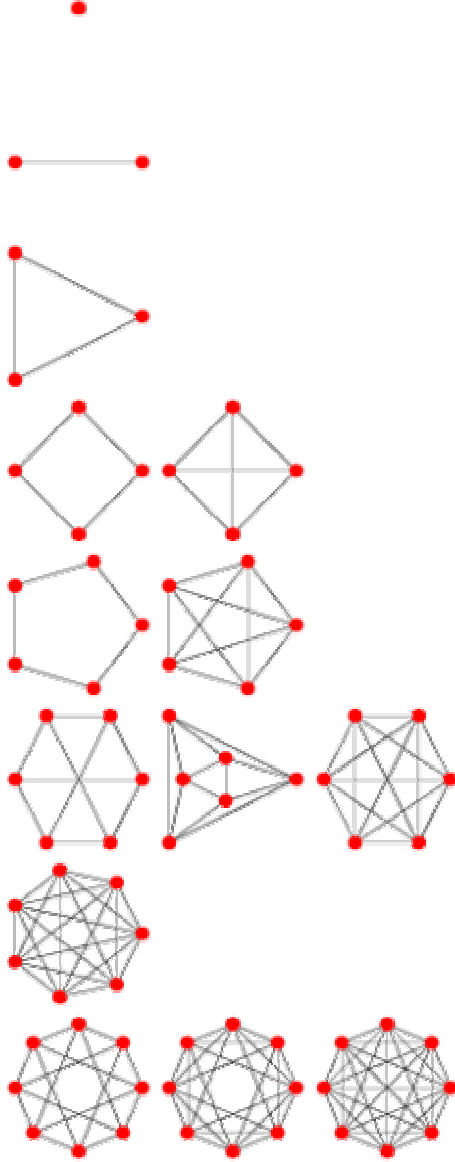
(v, k, λ, λ) parametrelili SRG “tasarım grafiği” (design graph) olarak adlandırılır. Bu grafiğin mevcut olması için $v \leq \lambda^2(\lambda+2)$ koşulu gereklidir [22].

Teorem : Bütün noktaları mutlak olan bir π kutupsal'ını kabul eden simetrik bir $2-(v, k, \lambda)$ tasarımının mevcut olması için gerek ve yeter koşul $(v, k-1, \lambda-2, \lambda)$ parametrelili bir SRG'nin olmasıdır. Bazı SRG örnekleri aşağıda verilmiştir [22].



Şekil 4.1. Güçlü düzenli grafik gösterimleri

$v=1,2,\dots$ düğümleri üzerindeki güçlü düzenli grafiklerin sayısı $1,2,2,4,3,6,2,6,5,\dots$, ilki şekil 4.1’de verilmiştir . Şekil 4.1’de $v=1$ için 1, $v=2$ için 2, $v=3$ için 2, $v=4$ için 4 tane grafik verilmiştir. Benzer şekilde farklı v yani köşe sayıları için farklı grafik çizimlerine yer verilmiştir.



Şekil 4.2. Çeşitli güçlü düzenli grafik örnekleri

Benzer olarak, $v=1,2,\dots$ düğümleri üzerinde güçlü düzenli grafiklerle bağlantılı olanların sayısı, $1,1,1,2,2,3,1,3,3,\dots$

Burada $v=1,2,3$ için 1 tane, $v=4$ için 2 grafik verilmiştir. Farklı v değerleri için çizilebilecek tüm grafikler gösterilmektedir.

Tamamlanmış grafik K_n , tüm $n \geq 1$ için güçlü düzenlidir. Güçlü düzenli grafiklerle ilişkili olan grafikler çizelge 4.1’de verilmiştir.

$\lambda = \mu$ için güçlü düzenli grafikler aynı zamanda simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı olmaktadır.

Çizelge 4.1. Güçlü düzenli grafik örnekleri

(v, k, λ, μ)	Grafik
(1, 0, 0, 0)	singleton Grafik
(2, 1, 0, 0)	path Grafik P_2
(3, 2, 1, 0)	Tam Grafik K_3
(4, 2, 0, 2)	Döngü Grafik C_4
(4, 3, 2, 0)	Tam Grafik K_4
(5, 2, 0, 1)	Döngü Grafik C_5
(5, 4, 3, 0)	Tam Grafik K_5
(6, 3, 0, 3)	circulant Grafik $C_6^i(1, 3)$
(6, 4, 2, 4)	octahedral Grafik
(6, 5, 4, 0)	Tam Grafik K_6
(7, 6, 5, 0)	Tam Grafik K_7
(8, 4, 0, 4)	circulant Grafik $C_8^i(1, 3)$
(8, 6, 4, 6)	circulant Grafik $C_8^i(1, 2, 3)$
(8, 7, 6, 0)	Tam Grafik K_8
(9, 6, 3, 6)	circulant Grafik $C_9^i(1, 2, 3)$
(9, 8, 7, 0)	Tam Grafik K_9
(10, 3, 0, 1)	Petersen Grafik P
(16, 5, 0, 2)	Clebsch Grafik
(50, 7, 0, 1)	Hoffman-Singleton Grafik
(56, 10, 0, 2)	Gewirtz Grafik
(100, 22, 0, 6)	Higman-Sims Grafik

Grafikte, köşelerin komşuluk ilişkilerini gösteren komşuluk matrisinin (adjacency matrix) öz değerlerine grafik öz değerleri denir. Komşuluk matrisinde iki kenar komşu ise o hücreye gelen eleman 1'dir, diğerleri 0'dır.

Grafik öz değerlerinin oluşturduğu, kümeye grafik spektrum adı verilir.

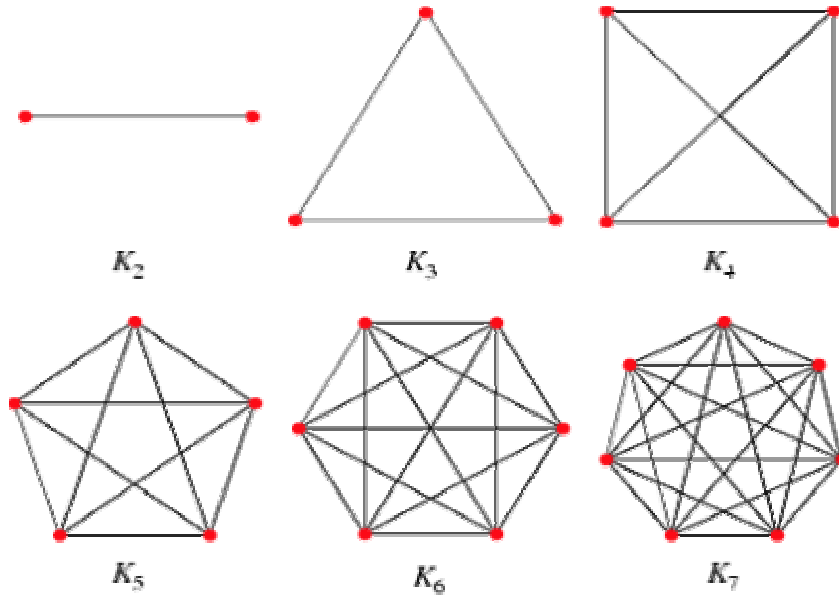
4.1.3 Tam Grafik

Her köşe çifti bir kenarla bağlantılı (bağlanmış) olan grafiğe tam grafik adı verilir. n

köşeye sahip tam grafik K_n ile gösterilir ve $\binom{n}{k}$ binomial katsayı olmak üzere,

$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ (triangular numbers) tane yönlendirmemiş kenara sahiptir. Aşağıdaki

şekilde farklı köşe sayıları için tam grafik gösterimlerine yer verilmiştir.



Şekil 4.3. Tam grafik Örnekleri

5. GRAFİKSEL TASARIMLAR

5.1 Giriş

Bugüne kadar istenilen parametrelere sahip, kombinatorik tasarımlardan biri olan t-tasarımlarının kurulumu amacına yönelik çalışmalar yapılmış ve değişik yöntemler ve bakış açıları sunulmuştur. Bir t-tasarımı olan grafiksel tasarımlarını oluşturulması amacına hizmet eden yöntemlerde bu kapsamda araştırılmış ve bir çok yöntemin kullanılabildiği ortaya çıkmıştır.

Grafiksel tasarım oluşturmakta bir çok yöntem kullanılmakla birlikte iyi bilinen alternatif yaklaşım, öngörölmüş bir permütasyon grubuna bağlı sabit parametrelere sahip tasarımın yapısal sayımı şeklinde birkaç kelime ile tanımlanabilir. Bu yaklaşım E.S Kramer ve D.M.Mesner 'e dayanmaktadır. Birkaç deneme, yaklaşıma ait bir uygulama bir bilgisayarda yapılmıştır, en iyi programlar Kreher D.L., tarafından verilmiştir [25].

Kramer-Mesner' e ait her bir programın iki yöntemi vardır: $\left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\}$, Ω 'ya ait k-elemanlı alt seti göstermek üzere, bu set üzerindeki (H, Ω) grubuna ait tüm yörüngeleri oluşturmak ve diophantine eşitliğine ait bir çözüm bulmak (istenilen tasarımın varolması için gerekli ve yeterli koşulları veren bir çözüm sistemi). Bu iki görevin çözümünde takip edilen geleneksel yollar, bazı kombinatorik tartışmalara dayanmaktadır. Örneğin, permütasyon grubunun temelini değiştirmek, $\left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\}$ üzerindeki yörüngeleri oluşturmanın alt yapısı olarak kabul edilmiştir [26].

Tasarım teorisindeki bilgisayar uygulamalarına ilişkin yeni bir yaklaşım yıllar önce Bayreuth'ta başlatılmıştır. İlk ana buluş, (H, Ω) ' ya ait tüm $\{k\}$ -yörüngelerin determinasyonuna ilişkin problemin azaltılmasına dayanmaktadır. Bir sonraki problem için, R.Laue oldukça etkin bir teknik geliştirilmiştir [27]. Bir başka gelişim

ve bu oldukça etkin tekniğe ilişkin bir uygulama B.Schmalz tarafından yapılmıştır [28-29].

Bir sonraki buluş Diophantine eşitlik sistemine ilişkin tüm çözümlerin determinasyonu için birkaç yeni çözücünün oluşturulmasıydı. Bu çözücülerden en güçlü olanı, LLL-çözücüsü (LLL-solver) olarak adlandırılan, LLL-algoritmasının bir uygulamasıdır ve Kramer-Mesner metodu çerçevesinde kullanılmak üzere, özel olarak A.Wesserman tarafından oluşturulmuştur [30].

Bir bilgisayar paket programı olan DISCRETA, kalıcı bir yenilik olmuştur. Bu paket programın amacı, yeterince büyük t değerleri için yeni t -tasarımlarını bulmaktır. DISCRETA için girdi, öngörülen bir parametre seti ve (H, Ω) grubundan oluşmaktadır. Elde edilen çıktı ise (H, Ω) 'ya bağlı parametrelere sahip t -tasarımlarının bir tam setidir.

Bazen, milyonlarla hesaplanan tasarımların söz konusu olduğu durumlarla karşılaşmaktadır. Böyle durumlarda, gerekli veri yapısının elde edilmesi, izomorfizm testi ve tasarımla ilişkin otomorfizm gruplarının bulunması, birçok rutin süreci içeren önemli bir iş haline gelmektedir. Bu amaç için DISCRETA programının yanı sıra, GAP, GRAPE, COCO gibi yeni bilgisayar programları da kullanılmaktadır [1].

5.2 Grafiksel Tasarım Koşulları Ve Bazı Tanımlar

5.2.1 Permütasyon Grubu

Ω bir set olsun. $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ şeklinde birebir bir eşleme, Ω 'ya ait permütasyon ya da Ω üzerindeki permütasyon olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem : Ω bir set olsun. Bu durumda, Ω 'nın tüm permütasyonları olan $S(\Omega)$ seti, $(S(\Omega), \circ, {}^{-1})$ biçiminde bir grup oluşturmaktadır [1].

Not: Ω sonlu bir set olduğu varsayılınsın. Şayet, $\Omega=\{1,2,\dots,n\}$ olduğu özel durumda $S(\Omega)$ yerine S_n kullanılmaktadır. o gösterimi genellikle, permütasyon düzeninde ihmal edilir.

Yardımcı Teorem : Bir $H \subseteq S(\Omega)$ setinin, bir grup oluşturması için gerek ve yeter koşul o düzenine yakın olmasıdır. Böylesi bir gruba Ω üzerindeki permütasyon grubu denilir ve (H,Ω) ile gösterilir [1].

G bir sonlu grup olsun, Ω sonlu bir set

$$\varphi: G \times \Omega \rightarrow \Omega$$

(G,Ω,φ) üçlüsü, aşağıdaki koşulları sağladığında Ω üzerinde, G 'ye ait bir fonksiyon olarak adlandırılır.

$$1. \forall x \in \Omega \varphi(e,x)=x$$

$$2. \forall g \in G, \forall h \in G \varphi(gh,x)=\varphi(h,\varphi(g,x)).$$

Not: $x \in \Omega$ üzerindeki, grup elemanı g 'ye ait $\varphi(g,x)$ fonksiyonuna ilişkin sonuç genellikle x^g ile gösterilir.

Eğer $(\forall x: \varphi(g,x)=x) \Rightarrow g=e$ ise φ fonksiyonu gerçek olarak adlandırılır.

(G,X) ve (H,Y) iki permütasyon grubu olsun. $m=|X|$, $n=|Y|$ olsun. $X \cap Y = \emptyset$ olduğu varsayılınsın. G ve H ' a ait doğrudan çarpımın iki farklı fonksiyonu tanımlanmaktadır.

$$G+H:=(G \times H, X \cup Y, \varphi_1)$$

$$\varphi_1((g,h),x)= \begin{cases} x^g & x \in X \\ x^h & x \in Y \end{cases}$$

$G+H$; (G,X) ve (H,Y) permütasyon gruplarının doğrudan toplamı olarak adlandırılır.

$$G \times H := (G \times H, X \times Y, \varphi_2)$$

$$\varphi_2((g,h),(x,y)) = (x^g, y^h)$$

$G \times H$, (G,X) ve (H,Y) permütasyon gruplarının doğrudan çarpımı olarak adlandırılır.

Örnek : Z_n , n nokta üzerinde bir dögüsel grup olsun. Id_n ise n -nokta seti üzerindeki önemsiz grup fonksiyonu olarak tanımlansın.

$$Z_2 + Z_2 \text{ grubu } \langle (12), (34) \rangle$$

$$Z_2 \times Z_2 \text{ grubu } \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$$

$$Z_2 + Id_2 \langle (12)(3)(4) \rangle$$

$$Z_2 \times Id_2 \langle (12)(34) \rangle$$

5.2.2 Blok Tasarımları

Bir A seti ve $k \in \mathbb{N}$ için, A 'ya ait k -elemanlı alt setlerin tümüne ait seti $\left\{ \begin{matrix} A \\ k \end{matrix} \right\}$ ile gösterilmektedir.

$\mathcal{P}$ noktalara ait sonlu bir set ve $v = |\mathcal{P}|$ olsun. $\mathcal{B}$ bloklara ait sonlu bir set $b = |\mathcal{B}|$ olsun. $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ isabet ilişkisi olsun. Aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ üçlüsü bir blok tasarımıdır.

1. Herhangi bir blok $a \in \mathcal{B}$ aynı k sayıda nokta ihtiva etmeli ($k < v$ olmak üzere, k sabit).

2. Herhangi bir nokta $A \in \mathcal{P}$ aynı r sayıda blokta gözükmeli ($r < b$ olmak üzere r sabit sayı).

3. Herhangi $\{A, B\} \in \binom{\mathcal{P}}{2}$ çifti aynı zamanda λ blokta gözükmesi.

(v, b, r, k, λ) tasarımın parametreleridir.

Not: Aynı noktalara sahip bloklar mevcutsa bu bloklara tekrarlı bloklar denilir.

3. koşul yeniden düzenlendiğinde şöyle bir sonuç elde edilebilir:

3') $t \geq 2$ olmak üzere sabit bir t değeri için $\{A_1, \dots, A_t\}$ noktalarına ait herhangi bir t -alt seti için tüm bu noktaları eş zamanlı olarak içeren tam olarak λ_t blok mevcuttur.

Bu tür tasarımlar (v, b, r, k, λ_t) parametrelerine sahip t -tasarımları olarak adlandırılır.

5.2.3 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları Arasında İzomorfizm ve Otomorfizm

Bu bölümde iki BIBD arasındaki izomorfizm ve otomorfizm kavramlarına yer verilmiştir.

(X, A) ve (Y, B) , iki (v, k, λ) -BIBD olduğu düşünölsün. $\{\{\alpha(x) : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\} = B$ olacak şekilde $\alpha : X \rightarrow Y$ 1-1 dönüşümse (X, A) ve (Y, B) 'nin izomorfik olduğu söylenir. Böylece $x \in X$ olmak üzere, her nokta $\alpha(x)$ ile yeniden isimlendirilirse, A bloklarının koleksiyonu B 'ye dönöştürölür. 1-1 α (bijection α), bir “ izomorfizm” olarak adlandırılır.

Örnek : Burada (X,A) ve (Y,B) , iki $(7,3,1)$ -(BIBD) alınsın.

$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve

$A=\{123,145,167,246,257,347,356\}$

$Y=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ve

$B=\{abd,bce,cdf,deg,aef,bfg,acg\}$.

$\alpha(1)=a, \alpha(2)=b, \alpha(3)=d, \alpha(4)=c, \alpha(5)=g, \alpha(6)=e, \alpha(7)=f$ olacak şekilde 1-1 α tanımlansın. Ardından X 'deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur:

$123 \rightarrow abd$

$145 \rightarrow acg$

$167 \rightarrow aef$

$246 \rightarrow bce$

$257 \rightarrow bfg$

$347 \rightarrow cdf$

$356 \rightarrow deg$

Böylece α , iki BIBD'in bir izomorfizmidir.

Teorem : $M=(m_{i,j})$ ve $N=(n_{i,j})$ iki (v,b,r,k,λ) -BIBD'in isabet matrisleri olsun. İki BIBD izomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\{1,...,v\}$ 'nin permütasyonu γ ve $\{1,...,b\}$ permütasyonu β olmak üzere, her $1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq b$ için

$$m_{i,j} = n_{\gamma(i),\beta(j)}$$

mevcut olmasıdır [36].

Genel olarak iki BIBD'in izomorfik olup olmadığını belirlemek zor bir hesaplama problemidir.

Otomorfizm : (X, A) bir (v, k, λ) -BIBD olsun. (X, A) 'nın bir otomorfizmi kendi içinde bir izomorfizmdir. Bu durumda 1-1, α dönüşümü, X 'in

$$\{\{\alpha(x): x \in A\}: A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

şeklinde bir permütasyondur. X 'in üzerinde birim dönüşüm daima bir otomorfizm 'dir.

Örnek : (X, A) aşağıdaki $(7, 3, 1)$ -BIBD olsun.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ ve}$$

$$A = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$$

1-1 α ; $\alpha(1)=1, \alpha(2)=2, \alpha(3)=3, \alpha(4)=5, \alpha(5)=4, \alpha(6)=7$ ve $\alpha(7)=6$ gibi tanımlansın
Ayrıca, X 'deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur.

$$123 \rightarrow 123$$

$$145 \rightarrow 145$$

$$167 \rightarrow 167$$

$$246 \rightarrow 257$$

$$257 \rightarrow 246$$

$$347 \rightarrow 356$$

$$356 \rightarrow 347$$

Böylece α , BIBD'in bir otomorfizmdir.

(X,A) BIBD'in bütün otomorfizmlerinin setleri, bir grup oluşturularak gösterilebilirler. Bu grup, BIBD'in otomorfizm grubu olarak adlandırılır ve $\text{Aut}(X,A)$ ile gösterilir.

Örnek : Yukarıdaki örnekte (X,A) , $(7,3,1)$ -BIBD, $\beta(1)=2$, $\beta(2)=4$, $\beta(3)=6$, $\beta(4)=3$, $\beta(5)=1$, $\beta(6)=7$ ve $\beta(7)=5$ gibi tanımlanan β otomorfizmine sahiptir.

$\gamma = \alpha \circ \beta$ $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ gibi tanımlanan γ aşağıdaki gibi olur:

$\gamma(1)=2$, $\gamma(2)=4$, $\gamma(3)=6$, $\gamma(4)=1$, $\gamma(5)=3$, $\gamma(6)=5$, $\gamma(7)=7$. Böylece γ 'da bir BIBD'in otomorfizmidir.

Not: Bir grafiğe ilişkin otomorfizm daima bir grubu tanımlamaktadır. Yaygın grafiklerin bir sayısı için grafik otomorfizmi, G tam grafik K_n olduğunda $\text{Aut}(G)$ simetrik grup S_n olmaktadır.

5.2.4 Simetrik Grup

$f:[n] \rightarrow [n]$ bir, birebir örten olsun. Bu durumda f 'in set n ' e ilişkin permütasyon olduğu söylenebilir. Bu tanım daha önceki permütasyon tanımı ile ters düşmemektedir. Daha önceden 34512'nin 5 uzunluğunda bir permütasyon olduğu söylenmişti. Cümle tekrar kurulursa; $f:[5] \rightarrow [5]$ olmak üzere $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=2$; $[5]$ 'e ilişkin permütasyondur. Geriye dönüldüğünde tek çizgi notasyonu şeklinde yazmak için $f(1).f(2)....f(n)$ yazılması gerekmektedir.

Permütasyonlarla bu yeni bakış açısı onların başka bir yolla yazılmasını mümkün kılmıştır. Bu durumda ;

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 f = & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2
 \end{array}$$

f 'in 1'i 3'e, 2'yi 4'e, 4'ü 5'e, 5'i 2'ye eşleştirdiğini ifade eder. Bu notasyon permütasyonların 2-çizgi notasyonu olarak ifade edilmektedir.

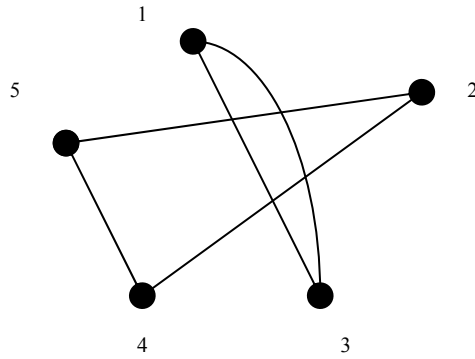
f ve g $[n]$ 'e ilişkin 2 permütasyonlar olsun. Bu durumda onların birleşimi $f.g(fg)(i)=g(f(i))$ $i \in [n]$ biçiminde tanımlamak mümkündür.

$[n]$ 'e ilişkin tüm permütasyonlarının setinin bir grup oluşturduğu aşikardır. Bu nedenle $[n]$ 'in tüm permütasyonlarının seti S_n ile gösterilir ve n . mertebeden simetrik grup olarak ifade edilir.

S_n sıra sayısına ilişkin genel formül $n!=1.2....n$ dir.

Dikkat edilmelidir ki $n \geq 3$ için; S_n grubu değişmeli olmamakta yani daha genel bir ifade ile $fg \neq gf$ olmamaktadır. n elemanın her sonlu grubu, S_n 'e ilişkin alt gruptur. Bu nedenle simetrik gruplara ilişkin daha kapsamlı araştırmalar yapılmaktadır.

$f=34152$ permütasyonu 3 ve 1'i kendi aralarında sıralarının değiştiğini aynı şekilde 2,4,5'in kendi arasında sırasının değiştiğini göstermektedir. Yani f 'in kaç kez uygulandığı önemli değildir. Daima $f^m(3)=1$ ya da $f^m(3)=3$ mevcuttur ve $f^m(3)=3$ mevcuttur ve $f^m(3)$ asla bir başka değere sahip olmamaktadır. Diğer bir ifade ile f döngüsel olarak 1 ve 3, 2 ve 4'ü ve 5'in sırasını değiştirmektedir. Bu ilişki aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 5.1. S_5 simetrik grubu

Tam grafiğin otomorfizm grubu $\text{Aut}(K_n)$ bir simetrik gruptur (S_n). $n=3,4,\dots$ için K_n 'deki grafik döngülerin (bir grafiğe ait döngü G 'nin kenar setlerine ait alt settir) sayısı, 1,37,..... Bu sayıyı analitik olarak aşağıdaki formülle hesaplamak mümkündür.

$$C_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! \quad (5.1)$$

$n=4$ olduğunda, Eş 5.1'de yerine yazarsak;

$$C_4 = \sum_{k=3}^4 \frac{1}{2} \binom{4}{k} (k-1)! = \frac{1}{2} \binom{4}{3} 2! + \frac{1}{2} \binom{4}{4} 3! = 4 + 3 = 7$$

elde edilir.

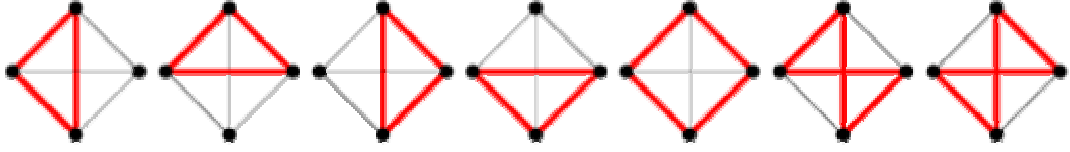
Burada $k=3$, K_4 grafiğinin 3 kenarlı alt grafiklerini ifade etmektedir. Ve formülden bu grafiklerin sayısı 4 olarak hesaplanmıştır. $k=4$, iken 4 kenarlı alt grafik sayısı ise 3 olarak hesaplanmıştır ve toplamda K_4 grafiğinin 7 tane alt grafiği olduğu ortaya çıkmıştır. Şekil 5.2. K_4 grafiğine ait mevcut tüm alt grafikleri göstermektedir.

Benzer şekilde Eş 5.1'de n yerine 5 yazarsak;

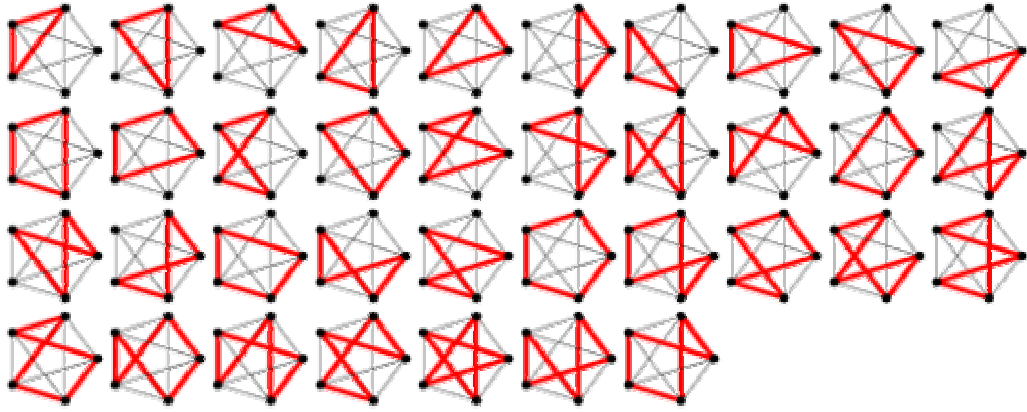
$$C_5 = \sum_{k=3}^5 \frac{1}{2} \binom{5}{k} (k-1)! = \frac{1}{2} \binom{5}{3} 2! + \frac{1}{2} \binom{5}{4} 3! + \frac{1}{2} \binom{5}{5} 4! = 10 + 15 + 12 = 37$$

elde edilir.

Burada $k=3, K_5$ grafiğinin 3 kenarlı alt grafiklerini, $k=4$ ve 5, 4 ve 5 kenarlı alt grafiklerini ifade etmektedir. $k=3,4,5$ kenarlı alt grafiklerinin sayısı sırası ile 10,15 ve 12 dir. K_5 grafiğinin toplamda 37 tane alt grafiği vardır. Şekil 5.3. K_5 grafiğinin mevcut tüm alt grafiklerini göstermektedir.



Şekil 5.2. K_4 grafiğine ait alt grafikler.



Şekil 5.3. K_5 grafiğine ait alt grafikler

5.2.5 Permütasyon Döngüsü

Bir permütasyon döngüsü, elemanlarının kendi aralarında yer değiştirdiği bir permütasyonun alt grubudur. Permütasyon döngüleri “yörüngeler” olarak adlandırılır. Örneğin; permütasyon grubu $\{4,2,1,3\}$, (143) bir 3-döngü ve (2) 1-döngüdür. Buradaki (143) notasyonu, orijinal sırası $\{1,2,3,4\}$ şeklinde başlamak üzere, ilk elemanın dördüncü elemana, dördüncü elemanın üçüncü elemana ve üçüncü elemanın ilk elemana gittiğini gösterir. $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

5.2.6 k-Yörünge ve {k}-Yörünge

(G, Ω) permütasyon grubu ve $x \in \Omega$ olsun. Bu durumda $\{x^g : g \in G\}$ (G, Ω) 'ya ait bir yörünge olarak adlandırılır (x tarafından oluşturulan).

Ω üzerinde etkin olan bir G permütasyonu için diğer nesneler üzerinde meydana gelen birkaç doğal hareket tanımlamak mümkündür.

Yardımcı Teorem : (G, Ω) bir permütasyon grubu olsun. $0 < k \leq |\Omega|$ olsun. Bu durumda

$$\varphi: G \times \Omega^k \rightarrow \Omega^k$$

$$\varphi(g, (x_1, \dots, x_k)) = (x_1^g, \dots, x_k^g)$$

$$\tilde{\varphi}: G \times \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$\tilde{\varphi}(g, \{x_1, \dots, x_k\}) := \{x_1^g, \dots, x_k^g\}$$

Ω^k ya da $\left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\}$ üzerinde bir hareket sağlar [1].

(G, Ω^k) ' ya ait yörüngeler k -yörüngeleri ve $(G, \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ k \end{matrix} \right\})$ ' ya ait yörüngeler $\{k\}$

yörüngeleri olarak adlandırılır.

5.2.7 Grup Yörünge

Bir G grubu, bir X seti üzerinde rol aldığı anda, X 'in elemanlarını sıralar. X 'in herhangi bir özel elemanı yörünge adı verilen sabit bir yol üzerinde hareket etmektedir. Set teorisine ilişkin notasyon içerisinde, X elemanının grubuna ilişkin grup yörüngesi aşağıdaki tanımlanmaktadır.

$$G(x) = \{g \mid x \in X: g \in G\},$$

Burada g , G elemanlarının hepsi üzerinden geçmektedir. Örneğin, permütasyon grubu $G_1 = \{(1234), (2134), (1243), (2143)\}$ için, 1 ve 2'ye ait yörüngeler $\{1,2\}$ ve 3 ve 4 'e ait yörüngeler $\{3,4\}$ dür.

5.2.8 Kramer-Mesner -Matrisleri ve Kramer-Mesner Metodu

Şayet $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$, (v,b,r,k,λ) parametrelerine sahip bir t-tasarımı ve $(H,\mathcal{P}) \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ ise bu durumda $\mathcal{B}$, $(H,\mathcal{P})$ 'ye ait $\{k\}$ -yörüngelerin bir birleşimi olarak ifade edilebilir.

Kramer-Mesner metodu, t-tasarımı oluşturan $(H,\mathcal{P})$ 'ya ait yörüngelerin seçimine ilişkin bir yol vermektedir.

Yardımcı Teorem : (H,Ω) bir permütasyon grubu ve $0 < t < k \leq |\Omega|$ olsun. O_1 bir $\{t\}$ -yörünge, O_2 $\{k\}$ -yörünge olsun ve $a \in O_1$ olsun.

$$m_{O_1 O_2}(a) := |\{x \in O_2 : a \subseteq x\}| \text{ olsun.}$$

Bu durumda $m_{O_1 O_2}(a)$, $a \in O_1$ özel olarak seçimine bağlı değildir. Bu $m_{O_1 O_2}$ şeklinde gösterilme nedenini açıklamaktadır [1].

$0 < t < k \leq |\Omega|$ olmak üzere, (H,Ω) bir permütasyon grubu olsun. $\wp_{\{t\}}$ $\wp_{\{k\}}$ sırası ile $\{t\}$ -ve $\{k\}$ -yörüngelerine ait sistemdir.

Kramer-Mesner matrisini aşağıdaki şekilde tanımlamak mümkündür.

$$\mathfrak{R} = (m_{O_1 O_2})_{O_1 \in \wp_{\{t\}}, O_2 \in \wp_{\{k\}}}$$

(G,Ω) ile ilişkili, t ve k değerlerini veren KM-matrisidir.

Not: $\mathfrak{R}$ satır ve sütunlarındaki sıralama $\wp_{\{t\}}$ ve $\wp_{\{k\}}$ yörüngelerinin sıralanışını yansıtır. Yani $\mathfrak{R}$ satır ve sütunu, satır ve sütunların permütasyonlarına göre tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, KM-matrisleri ile tasarımların kurulumu arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem: (H, Ω) bir permütasyon grubu olsun. $0 < t < k \leq |\Omega| = v$ için $\mathfrak{R} \in N^{l_{xc}}$ ($l = |\mathcal{P}_{\{t\}}|$ ve $c = |\mathcal{P}_{\{k\}}|$) KM-matrisine uygun olsun. Bu durumda aşağıdaki Diophantine eşitlik sistemine ait tüm çözümler, (H, Ω) 'ya uygun, (v, b, r, k, λ_t) parametrelerine sahip farklı tüm t -tasarımlarını vermektedir [1].

$$\mathfrak{R}_x = \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \lambda_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_t \end{pmatrix} \quad x \in \{0, 1\}^l$$

Burada $x_i = 1$ olması, (H, Ω) 'ya ait k -yörüngenin $\mathfrak{B}$ 'nin bir parçası olduğu anlamına gelmektedir.

Örnek : $H = D_7 = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 7), (3, 6), (4, 5) \rangle$

Burada D_7 14. mertebeden ve 7.dereceden bir dihedral geçişli permütasyon grubudur. H 'a bağlı, $k=3$ ve $\lambda=2$ olan bir 2-tasarımı kurmak isteniyor. Bunun için $\{2\}$ -yörüngeleri ve $\{3\}$ -yörüngeleri hesaplanmalıdır. $O_{\{t\}}^{(i)}$, i . $\{1\}$ -yörüngeyi göstermektedir.

$$O_{\{2\}}^{(1)} = \{\{1, 2\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$$

$$O_{\{2\}}^{(2)} = \{\{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\}$$

$$O_{\{2\}}^{(3)} = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}\}$$

$$O_{\{3\}}^{(1)} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}\},$$

$$O_{\{3\}}^{(2)} = \{\{1,2,4\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,7\}, \{1,5,6\}, \{1,5,7\}, \{1,5,7\}, \{2,3,5\}, \{2,3,7\}, \{2,4,5\}, \{2,6,7\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}\}$$

$$O_{\{3\}}^{(3)} = \{\{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{1,4,7\}, \{2,3,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,7\}, \{3,6,7\}\}$$

$$O_{\{3\}}^{(4)} = \{\{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,6\}, \{2,4,6\}, \{2,4,7\}, \{2,5,7\}, \{3,5,7\}\}$$

KM-matrisini hesaplamak için, $\{3\}$ -yörüngeleri içindeki $\{2\}$ -yörüngelerinin görünüm sayılarını hesaplamak gerekir. Örneğin $O_{\{2\}}^{(1)}$ 'de yer alan $\{1,2\}$,

$O_{\{3\}}^{(1)}$ içerisinde $\{1,2,3\}, \{1,2,7\}$ olmak üzere iki kez ortaya çıkmaktadır. Böylece

$\mathfrak{R}$ 'nin ilk satırındaki giriş 2 olmalıdır.

	$O_{\{3\}}^{(1)}$	$O_{\{3\}}^{(2)}$	$O_{\{3\}}^{(3)}$	$O_{\{3\}}^{(4)}$
$O_{\{2\}}^{(1)}$	2	2	1	0
$O_{\{2\}}^{(2)}$	1	2	0	2
$O_{\{2\}}^{(3)}$	0	2	2	1

Böylece

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 2210 \\ 1202 \\ 0221 \end{pmatrix}$$

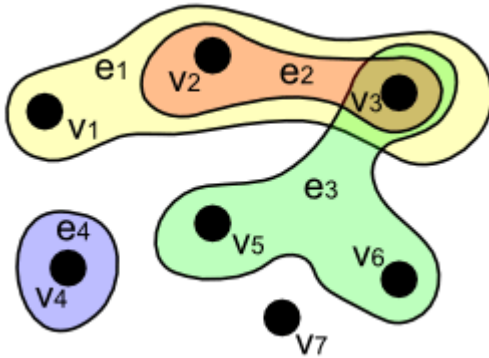
$$\mathfrak{R}_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Buradan çözümün $x=(0,1,0,0)^t$ olduğu görülmektedir. Bunun anlamı $O_{\{3\}}^{(2)}$ 'in istenilen özelliklere sahip tasarımın blok setini oluşturduğudur.

Burada H' a bağlı bir 2- tasarımı kurmak üzere öncelikle 2'li ve 3'erli yörüngeler oluşturulmuştur. Daha sonra 2'li yörüngeleri oluşturan çiftlerin 3'lü yörüngeler içerisinde kaçar kez gözüktüğüne bakılmıştır. Ve 2 kez gözüken çiftlerin yer aldığı 2'li yörüngelerin karşılığında matriste 2 sayısı yazılır. Daha açık bir şekilde ifade edilirse, burada 2'li ve 3'lü olarak oluşabilecek tüm mümkün durumlar (sıralamalar) yazıldıktan sonra tüm mümkün 2'li durumları kendi içerisinde bulunduran 3'lü sıralama seçilmektedir. Böylece istenilen 2-tasarıma ait bloklar elde edilmiş olur. Ortaya çıkan tüm 2'li sıralamayı içerisinde bulunduran (kapsayan) 3'lü $O_{\{3\}}^{(2)}$ olduğundan istenilen 2-tasarımının bloklarını da $O_{\{3\}}^{(2)}$ yörüngesinin elemanları oluşturmaktadır.

5.2.9 Hipergrafikler

Matematikte, bir hipergrafik, kenarları herhangi sayıda köşe ile bağlantılı olan bir grafiğin genellemesidir. Bir hipergrafik, X 'in düğümler ya da köşeler olarak adlandırıldığı elemanların bir seti, E 'nin ise hiperkenarlar olarak adlandırılan, X 'in boş olmayan alt setlerine ilişkin bir set olduğu bir (X,E) çiftidir. Hipergrafikler bir isabet yapısı olarak görülebilir. Aşağıdaki grafik bir hipergrafik örneğidir.



Şekil 5.4. Hipergrafik ; $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_5, v_6\}, e_4 = \{v_4\}\}$

5.3 Grafiksel Tasarım Özellikleri

Bir grafiksel tasarım noktaları n köşeye sahip tam grafiğin kenarları ve blokları tasarım koşullarını sağlayan grafikler üzerindeki S_n simetrik gruba ait dolu yörüngeler olan bir tasarımdır [31].

Sonlu bir X seti ve negatif olmayan t tamsayısı için X ' e ait tüm t -alt setlerden oluşan

set $\binom{X}{t}$ ile gösterilmektedir. Bir k -düzgün set sistemi, X 'in, noktalar olarak

adlandırılan elemanların sonlu bir seti olduğu ve $\mathcal{B} \subseteq \binom{X}{k}$ olduğu bir $(X, \mathcal{B})$ çiftidir.

$\mathcal{B}$ 'ye ait elemanlar bloklar olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{B})$ 'nin mertebesi noktaların

sayısıdır yani $|X|$ dir. $t(v,k,\lambda)$ parametrelerine sahip bir tasarım, her $T \in \binom{X}{t}$ 'nin

$\mathcal{B}$ 'ye ait bloklarda tam olarak λ kez gözüktüğü v . Mertebeden bir k -düzgün (uniform) set sistemi $(X, \mathcal{B})$ dir [32].

Önemsizlikten kaçınmak için aşağıdaki sınırlamalar getirilmiştir.

(i) $t \geq 2$

(ii) $t < k$

(iii) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{B} \neq \binom{X}{k}$

$(X, \mathcal{A})$ ve $(Y, \mathcal{B})$ olmak üzere iki tasarım, $(X, \mathcal{A})$ 'dan $(Y, \mathcal{B})$ üzerine olan bir izomorfizm; $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ sağlayan bir $\sigma: X \rightarrow Y$ birebir örten olarak tanımlanmaktadır.

Bir tasarıma ilişkin otomorfizm ise tasarımın kendi üzerine olan bir izomorfizmdir.

Bir $\mathcal{D}$ tasarımına ilişkin tüm otomorfizmlerin seti, fonksiyonel oluşum altında bir

grup oluşturur. Bu grup $\mathcal{D}$ 'ye ilişkin otomorfizm grubu olarak adlandırılır ve $\text{Aut}(\mathcal{D})$ olarak gösterilir.

$H \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ olmak üzere bir alt grup, $\mathcal{D}$ 'ye ait otomorfizm grubudur. V, n kardinalitiliğinde bir set olsun ve $X = \binom{V}{2}$ seti üzerindeki simetrik grup $S_n = \text{Sim}(V)$ 'e ait hareket dikkate alınsın. Bu, $S_n^{[2]}$ görüntü grubuna sahip $S_{\binom{n}{2}} = \text{Sim}(X)$

içindeki S_n ' e ait yerleşikleri tanımlamaktadır (kanonikal genişleme ile $S_n^{[2]}$, $\binom{X}{k}$ üzerinde rol oynamaktadır) [32].

Bir $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı $(X, \mathcal{B})$, $v = \binom{n}{2}$ olmak üzere $S_n^{[2]}$ izomorfik olan permütasyon olan otomorfizm grubuna sahipse grafikseldir.

Burada $\mathcal{B} \left(\binom{X}{k} \right)$ üzerindeki $S_n^{[2]}$ 'e ait yörüngelerin bir birleşimi olmaktadır.

“Grafiksel Tasarım” ifadesini aşağıdaki gibide tanımlamak mümkündür. Köşe seti V 'ye sahip tam grafik K_n dikkate alınsın. X, K_n 'e ait kenar seti olarak kabul edilsin.

Burada, $\binom{X}{k}$ üzerindeki $S_n^{[2]}$ ' e ait yörüngeler, K_n 'e ait k-kenar alt grafiklerinin izomorfizm sınıfları ile birebir uyum içindedir.

Böylece, bir grafiksel tasarıma ilişkin blok seti $\mathcal{B}, K_n$ ' e ait her t-kenar alt grafiğin, $\mathcal{B}$ 'deki λ grafiklerin bir alt grafiği olduğu, grafiklerin izomorfizmlerine yakın olan, K_n 'e ait k-kenar alt grafiklerinin bir seti olarak görülebilir. Bir grafiksel tasarıma ilişkin tanımlama tam olarak bu grafiksel yapıyı varsaymasa da gerekli bir otomorfizm grubu yapıyı öngörmektedir ($n \neq 4$ için kanonik tarzda). Çünkü $S_n^{[2]}$ ' e ait yörüngelerden biri, K_n 'e ait doğru grafiğine uymaktadır.

Gerekli otomorfizm grupları ile tanımlanmış iki grafiksel tasarım $(X, \mathcal{A})$ ve $(Y, \mathcal{B})$ H ve K sırası ile eşit olması için,

$$\sigma H \sigma^{-1} = K$$

sağlayan $(X, \mathcal{A})$ ' dan $(Y, \mathcal{B})$ üzerine olan bir σ izomorfizminin var olması gerekmektedir.

Grafiksel tasarımlara ilişkin ilk örnek R.M Wilson'a Kramer ve Mesner tarafından verilmiştir [32].

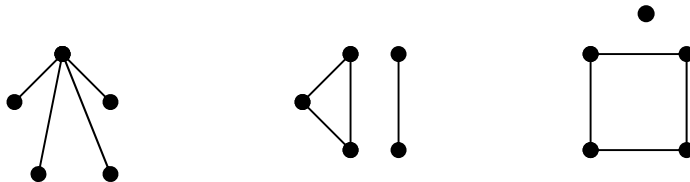
Örnek :Bir grafiksel 3-(10,4,1) tasarımı K_5 'in 4-kenar alt grafikleri oluşturulmuştur. Bu tasarıma ilişkin noktalar kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

BIBD düzenine ait bu noktaları grafiksel tasarımda K_5 grafiğinin kenarları olarak aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

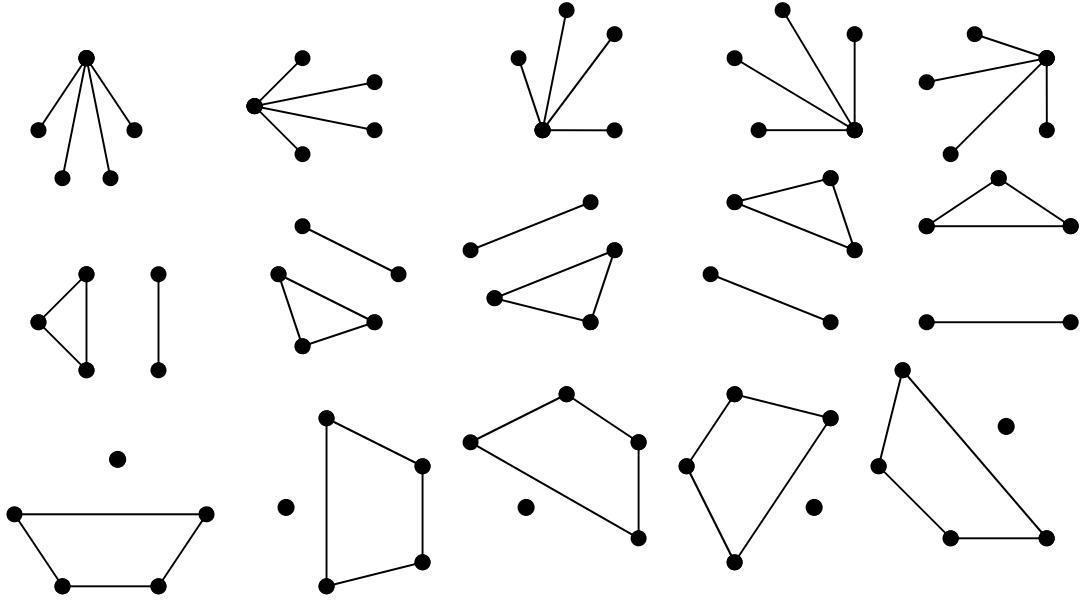
$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow (12) & x_5 &\rightarrow (23) & x_9 &\rightarrow (35) \\ x_2 &\rightarrow (13) & x_6 &\rightarrow (24) & x_{10} &\rightarrow (45) \\ x_3 &\rightarrow (14) & x_7 &\rightarrow (25) \\ x_4 &\rightarrow (15) & x_8 &\rightarrow (34) \end{aligned}$$

Bu tasarıma ait blokları göstermek üzere aşağıdaki grafikler kullanılmaktadır.



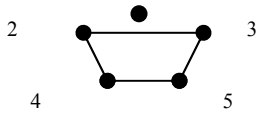
Şekil 5.5. 3-(10,4,1) Grafiksel tasarımına ilişkin gösterim

Bu grafiksel tasarıma ilişkin 15 bloğu aşağıdaki grafiklerle göstermek mümkündür.



Şekil 5.6. 3-(10,4,1) Grafiksel tasarımın bloklarına ilişkin gösterim

Buradaki grafiklerin her biri tasarımın bloklarını göstermektedir. Grafikteki kenarların toplam sayısı tasarımda blok genişliğini ifade ederken her bir kenar ise tasarımdaki nokta ya da diğer bir ifade ile değişken sayısını temsil etmektedir. Dolayısı ile tasarımdaki grafiklerin her biri 4 kenardan oluşmaktadır.



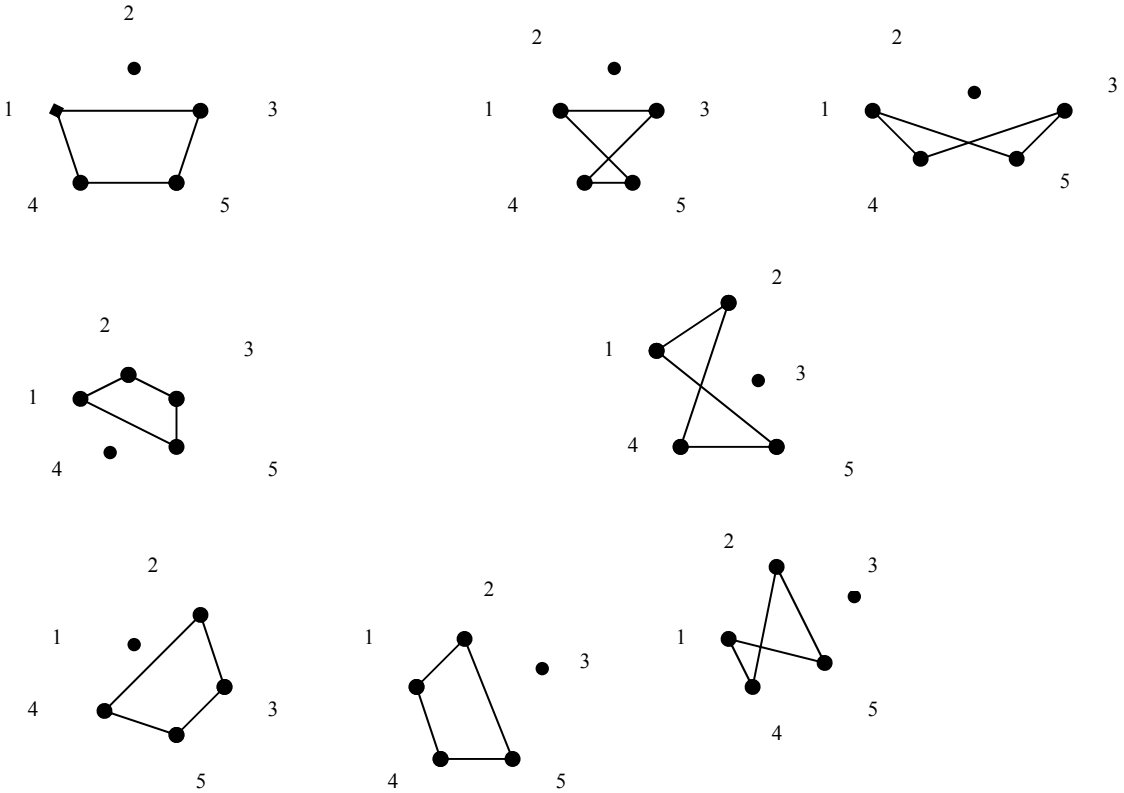
grafığı dikkate alınırsa, bu grafiğin temsil ettiği bloktaki değişkenler $(23)(34)(45)(52)$ ' dir. Bu bölüm 5.2.4'de anlatılan permütasyon döngüsüdür. Yani bir yörüngedir. Bu yörüngelerin birleşimi grafiksel tasarımı oluşturmaktadır. Burada tasarıma ilişkin sadece 15 blok gösterilmiştir. Diğer 15 blok ise bu grafiklerin izomorfik grafikler kullanılarak gösterilebilir. Bu nedenle 30 bloğu göstermek yerine bu tasarım 15 tane blok kullanılarak da temsil edilebilir. Bununla birlikte Betten 1970'de, M.H Klin'in grafiksel tasarımları $S_n^{[2]}$ üst gruplarından

tanımladığını rapor etmiştir [16]. Ancak Klin'nin bu sonucu, az bilinen makale bir makalede kısa bir not haricinde yayınlanmamıştır [33].

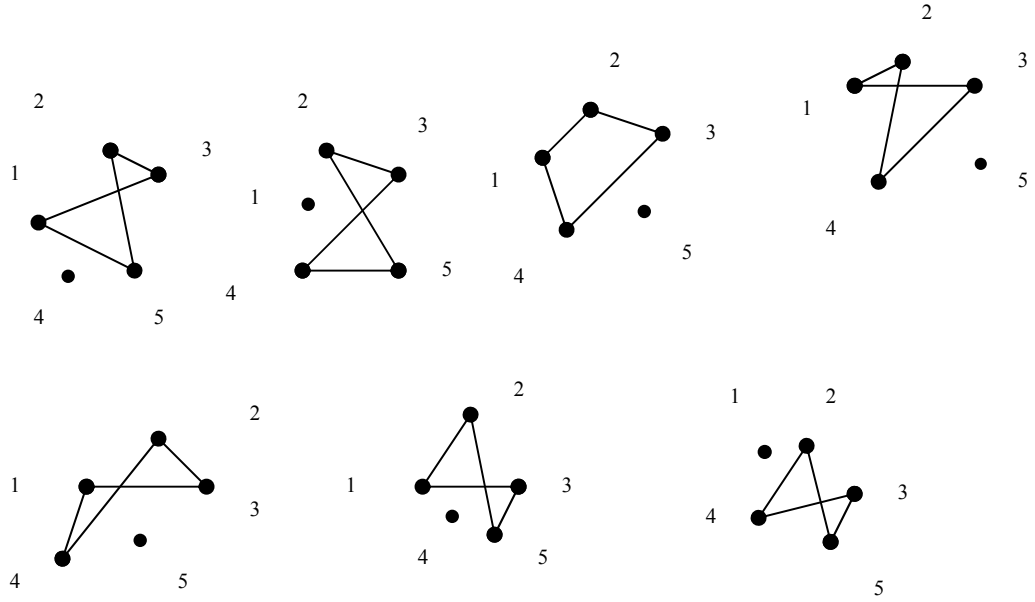
Örnek : $v=10$, $k=4$, $r=6$, $b=15$ ve $\lambda=2$ olan bir BIBD ele alınsın. Bu tasarımın blokları aşağıda verilmiştir.

(1) 3 2 9 10	(6) 1 3 10 7	(11) 3 1 5 8
(2) 2 4 8 10	(7) 3 4 6 7	(12) 1 2 6 8
(3) 3 4 8 9	(8) 1 4 6 10	(13) 3 2 6 5
(4) 1 5 9 4	(9) 2 4 5 7	(14) 1 7 2 9
(5) 6 5 9 10	(10) 5 7 8 10	(15) 6 7 8 9

Bu, bir blok-geçişli grafiksel $2-(10,4,2)$ tasarımına ilişkin bir örnektir. Bu tasarıma ilişkin grafik gösterimi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.7. $2-(10,4,2)$ Grafiksel tasarımına ilişkin gösterim



Şekil 5.7. (Devam) 2-(10,4,2) Grafiksel tasarımına ilişkin gösterim

2-(10,4,2) BIBD ait blokları grafiksel tasarım gösterimine uygun olarak aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

(1) (14)(13)(35)(45)	(6) (12)(14)(45)(25)	(11) (14)(12)(23)(34)
(2) (13)(15)(34)(45)	(7) (14)(15)(24)(25)	(12) (12)(13)(24)(23)
(3) (14)(15)(34)(35)	(8) (12)(15)(24)(45)	(13) (14)(13)(24)(23)
(4) (12)(23)(35)(15)	(9) (13)(15)(23)(25)	(14) (12)(25)(13)(35)
(5) (24)(23)(35)(45)	(10)(23)(25)(34)(45)	(15) (24)(25)(34)(35)

Bu örnekte tasarım $n=5$ köşe üzerinde kurulmuştur. Burada grafiksel tasarım tanımdan hareketle, K_5 tam grafiğine ait (12),(13),(14),(15),(23),(24),(25),(34),(35),(45) kenarları bu tasarımın noktalarını oluşturmaktadır ve yukarıdaki şekildeki her bir grafik tasarımın bloklarını

oluşturmaktadır. Bu grafikte yukarıda verilen bloktaki her bir nokta tam grafiğin kenarları ile temsil edilmiştir. Dolayısı ile $v=10$, $k=4$, $r=6$, $b=15$ ve $\lambda=2$ parametrelerine sahip BIBD grafiksel tasarım şartlarını sağladığından bir $2-(10,4,2)$ grafiksel tasarımı olmaktadır.

Bu grafiksel tasarım, K_5 'in 4-kenar alt grafikleri kullanılarak oluşturulmuştur. K_5 'in 4-kenar alt grafiklerini Eş.5.1'den aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür.

$n=4$ için

$$\frac{1}{2} \binom{5}{4} (4-1)! = 15$$

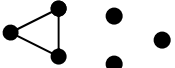
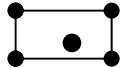
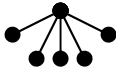
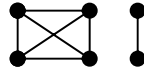
Bu bize tasarımdaki blokların sayısını vermektedir. $2-(10,4,2)$ aynı zamanda bir t -tasarımı olduğundan Eş.3.4'den blok sayısını aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür.

$$b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \lambda = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{4}{2}} 2 = 15$$

Yukarıdaki grafiklerde 5 köşe üzerindeki tam seçilmiş grafiğe ait her bir kenar çifti yukarıdaki gibi 4 kenara sahip grafiklerin 15-elemanlı setinde tam olarak 2 kez gözükmetedir. Yukarıdaki grafikler bir yörünge oluşturmaktadır. Bu nedenle bir unlabelled (etiketsiz) grafik tarafından gösterilen grafiklerin bir izomorfizm sınıfı olmaktadır. Eğer bir grafiksel tasarım birden fazla yörünge tarafından oluşturulmuşsa her bir yörünge için bir grafik çizilmelidir.

Teorem : $\lambda=1$ iken grafiksel t -yönlü dengeli tasarımlar aşağıdaki çizelgede verilmiştir [14].

Çizelge 5.1. $\lambda=1$ iken grafiksel t-yönlü dengeli tasarımların parametreleri ve grafik gösterimleri

t	p	parametreler	Grafik Gösterimi			
1	4	1-(6,2,1)				
2	6	2-(15,3,1)				
2	6	2-(15, {3,5}, 1)				
3	5	3-(10,4,1)				
4	6	4-(15, {5,7}, 1)				

Çizelgede p, köşe ya da nokta sayısını ifade etmektedir. $t=1$, $p=4$ olan ilk grafiksel tasarım 1-(6,2,1) dikkate alınsın. Çizelgede bu tasarımın grafiksel gösterimine yer verilmiştir. Grafiksel gösterime bakıldığında bu tasarımın bloklarını 4 köşe ve iki kenarlı grafiklerle ifade etmenin mümkün olduğu görülmektedir.

Aynı şekilde 2-(15,3,1) tasarımında da, blok genişliği $k=3$ olduğundan bu tasarıma ait blokları 3 kenarlı 6 köşeli iki farklı grafik gösterimi ile çizmek mümkündür.

2-(15, {3,5}, 1) tasarımında iki farklı blok gösterimi söz konusudur çünkü bu tasarıma ait blokların bazılarında blok genişliği yani $k=3$ bazılarında ise $k=5$ dir. Bu nedenle blokların grafiklerle gösteriminde 3 ve 5 kenarlı olmak üzere iki farklı grafiğin kullanıldığı göze çarpmaktadır.

Teorem : $\lambda=2$ iken grafiksel t-yönlü dengeli tasarımlar aşağıdaki listede verilmiştir [14].

Çizelge 5.2. $\lambda=2$ iken grafiksel t-yönlü dengeli tasarımlara ilişkin parametreler ve grafik gösterimleri

t	p	Parametreler	Grafik Gösterimi
1	$p \geq 4$	$1 - \binom{p}{2}, p-1, 2)$	$K_{1,p-1}$
1	4	$1 - (6, 3, 2)$	
1	4	$1 - (6, 4, 2)$	
2	4	$2 - (6, \{3, 4\}, 2)$	
2	4	$2 - (6, \{3, 4\}, 2)$	
2	5	$2 - (10, \{3, 4\}, 2)$	
2	5	$2 - (10, 4, 2)$	
2	5	$2 - (10, 4, 2)$	
2	6	$2 - (15, \{3, 6\}, 2)$	
2	6	$2 - (15, \{5, 6\}, 2)$	
3	5	$3 - (10, \{4, 5, 6\}, 2)$	

Bu çizelgede de çizelge 5.1.'de olduğu gibi grafiksel tasarımların parametrelerine ve bu grafiksel tasarımlara ait blokların grafiksel gösteriminde kullanılan şekillere yer verilmiştir.

Teorem : $T \subseteq B \in \mathcal{B}$ olmak üzere, $(X, \mathcal{B})$ bir grafiksel tBD olsun. Eğer $i=1, \dots, \lambda$ için $\alpha_i T \subseteq B$ ise bu durumda ya bazı $i=1, \dots, \lambda$ için $\alpha_i B = B$ ya da bazı $i \neq j$ için $\alpha_i^{-1} B = \alpha_j^{-1} B$ olmaktadır [8].

Sonuç : $\lambda=1$ olmak üzere $(X, \mathcal{B})$ bir grafiksel tBD olsun. Eğer $T \subseteq B \in \mathcal{B}$ ve $\alpha T \subseteq B$ ise bu durumda $\alpha B = B$ olmaktadır [8].

Sonuç : $\lambda=2$ olmak üzere $(X, \mathcal{B})$ grafiksel bir tBD olsun. Eğer $\alpha T \subseteq B$ olmak üzere $T \subseteq B \in \mathcal{B}$ ve $\alpha^2 T \subseteq B$ ise bu durumda $\alpha^2 B = B$ olmaktadır [8].

Teorem : $\lambda=1$ ya da 2 için $(X, \mathcal{B})$ bir grafiksel tBD ise bu durumda $p \neq t$ olmaktadır [8].

Teorem : $(X, \mathcal{B})$, $T \subseteq B \in \mathcal{B}$ olmak üzere bir grafiksel tBD olsun. $V(T)$, T 'deki kenarlarla ilişkili olan K_p 'deki köşeler olsun. Eğer $\lambda=1$ ya da 2 bu durumda oluşan alt grafik $B[V(K_p) \setminus V(T)]$ ya boştur ya da tamamlanmıştır [8].

Not: Bu sonuç $\lambda \geq 3$ olduğunda yanlıştır.

Teorem : Tüm $p \geq 4$ için $1 - \left(\binom{p}{2}, p-1, 2 \right)$ parametrelerine sahip tBDs' ler mevcuttur [8].

Teorem : $\lambda=1$ ya da 2 olduğu varsayılınsın. Eğer $(X, \mathcal{B})$ grafiksel bir tBD ancak bir yıldız-grafik tasarımı değilse bu durumda $p \leq 2t+2$.

Bir tBD'nin önemli olması için gerek ve yeter koşul

(i) $1 \leq t < k < v$, tüm $k \in K$ için

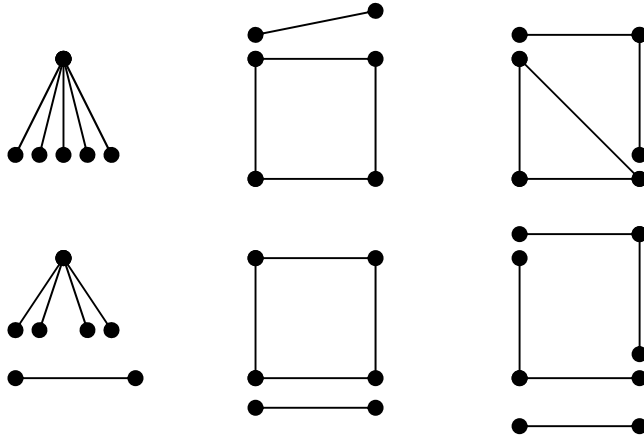
(ii) $\mathcal{P}_k(X) \not\subset \mathcal{B}$ herhangi $k \in K$

Bu şartları sağlamadığı takdirde tasarım basit olmaktadır [8].

Teorem : $p \leq t$ olduğu varsayalım. Eğer $t - \left(\binom{p}{2}, K, \lambda \right)$ parametrelerine sahip bir grafiksel tBD mevcutsa bu durumda $(t-p+1) - \left(\binom{p-1}{2}, K-p+1, \lambda \right)$ parametrelerine sahip bir grafiksel tBD mevcuttur [8].

Teorem : Eğer $\lambda=1$ ya da $\lambda=2$ ise ve $p \leq t$ ve $(X, \mathcal{B})$ önemli bir grafiksel tBD ise bu durumda yıldız-biçimli tasarımdan elde edilmiş olan tasarımlar basittir [8].

Örnek : $X, v = \binom{n}{2}$ olmak üzere, K_8 yön verilmemiş tam grafiğin seçilmiş kenarları olsun. Bir grafiksel $t(v, k, \lambda)$ tasarımı $(X, \mathcal{B})$, $B \in \mathcal{B}$ ve B 'ye izomorfik olan K_n 'e ait tüm alt grafikler $\mathcal{B}$ 'de yer alıyor ise tektir. Diğer bir ifade ile, $(X, \mathcal{B})$, otomorfizm grubu olarak simetrik grup S_n 'e sahiptir. Bir grafiksel 3-(28,5,30) grafiksel tasarımı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 5.8. 3-(28,5,30) grafiksel tasarımına ait gösterim

Bu grafikte X , K_8 grafiğinin 28 tane seçilmiş kenarından oluşmaktadır. Yani burada nokta sayısı 28 tanedir. Diğer bir ifade ile $v=28$ dir. $v=\binom{n}{2}$ olduğu grafiksel tasarım özelliklerinden bilinmektedir. Buradan $n=8$ olduğunu bulmak kolaydır. Grafiksel tasarım özelliklerinden K_n grafiğinin $v=\binom{n}{2}$ kenarlarının tasarımın noktalarını oluşturduğunu söylemek mümkündür. Yukarıda gösterilen altı grafiğe izomorfik olan K_8 'in tüm alt grafikleri $\mathcal{B}$ 'nin blokları olarak alınmaktadır [14].

5.4 Grafiksel Genişleme Matrisleri

N_t , K_n 'e ait t -alt kenar alt grafiklerinin izomorfizm sınıflarının bir sayısını gösterebilir. Bir grafiksel genişleme matrisi G_{tk} , satırları t - kenar alt grafiklerine ait $h_1^{(t)} \dots h_{N_t}^{(t)}$ izomorfizm sınıfları ile indekslenen sütunları ise K_n 'nin k -kenar alt grafiklerine ait $h_1^{(k)}, \dots, h_{N_k}^{(k)}$ izomorfizm sınıfları ile indekslenen, bir $N_t \times N_k$ matrisidir. G_{tk} 'nin (i,j) girişleri, $h_i^{(t)}$ 'nin $h_j^{(k)}$ 'ya genişletilebilme yollarının sayısını vermektedir. Aşağıdaki yardımcı teorem Kramer ve Mesner'in daha genel bir sonucuna ilişkin özel bir durumu vermektedir [7].

Yardımcı Teorem : Bir grafiksel $t(v,k,\lambda)$ tasarımının var olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $(0,1)$ -vektörü U 'nun olmasıdır [7].

$$G_{tk}U=\lambda J,$$

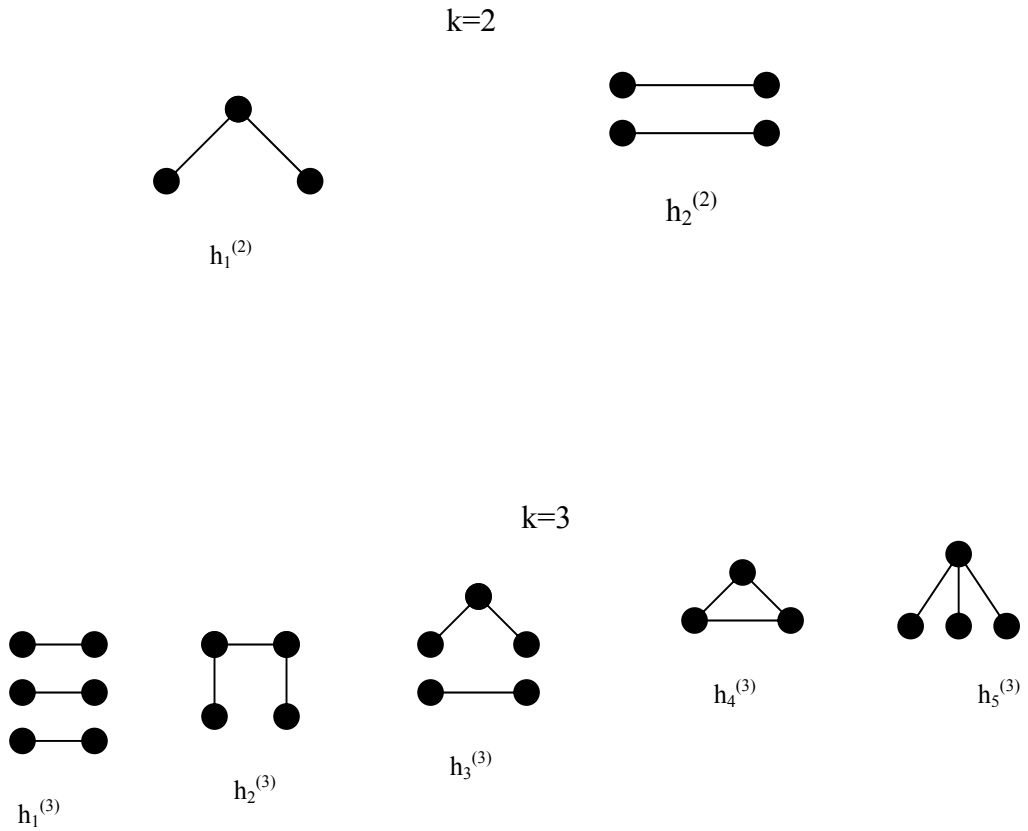
J , tümü 1'lerden oluşan N_t -boyutlu bir vektördür.

n belirli iken $G_{tk}U=\lambda J$ gibi bir matris eşitliğini çözmek için daha fazla zaman ve çaba gerektiren yöntemler mevcuttur [34]. n bilinmiyorken kullanılacak bir algoritma yoktur. $G_{tk}U=\lambda J$ denkleminin çözümü, satır toplamı tek ve λ eşit olan G_{tk} 'nin sütunlarına ait C alt setlerini bulan eşitliktir. Bunu yapmak için, sütunların alt setleri

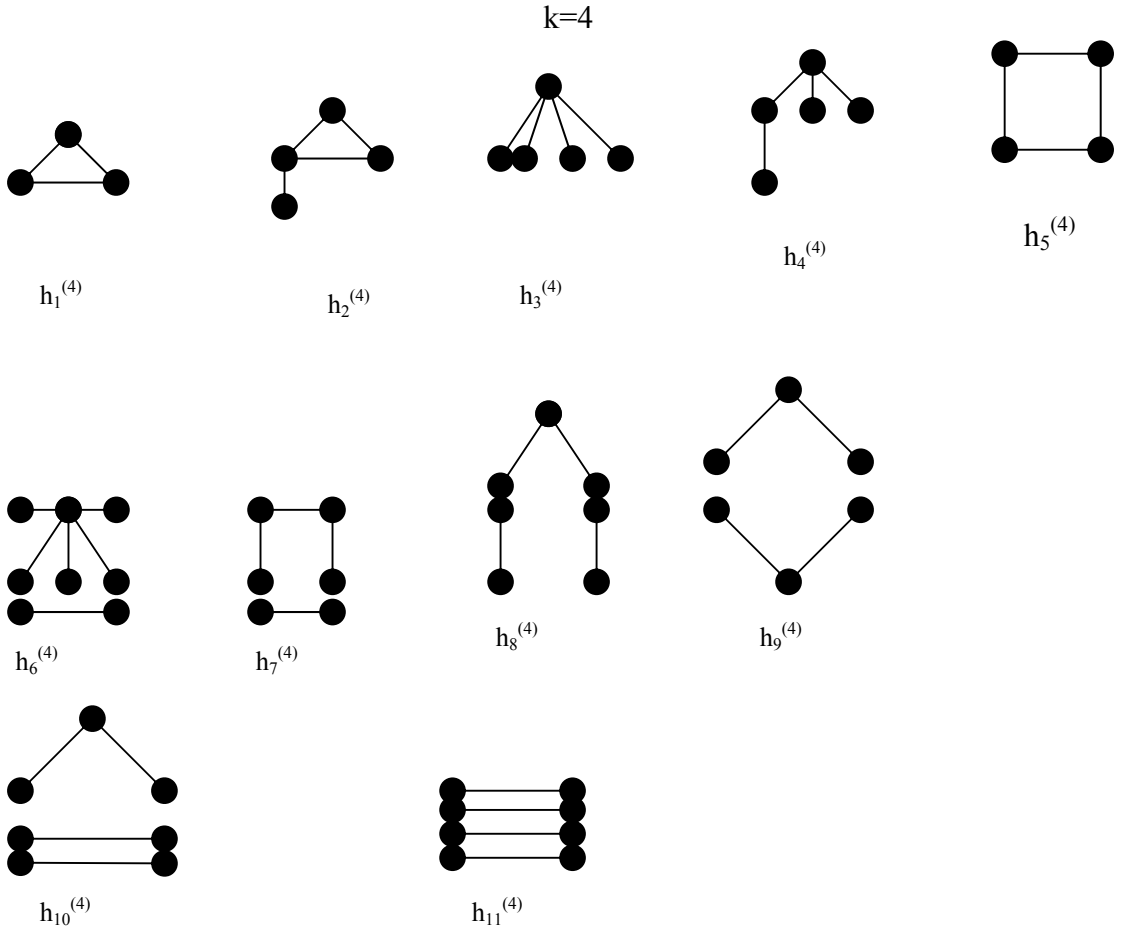
oluşturulur ve N_t eş zamanlı diophantine eşitlikleri çözümlenmelidir. Bunu MACSYMA ya da MAPLE gibi paket programlarla yapmak mümkündür. Bir tasarımın tamamlayıcısı yine bir tasarım olduğunda bu araştırma $|C| \leq [N_k/2]$ ile kısıtlanabilir. Bu gözleme dayanarak, $2-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 3, \lambda\right)$, $2-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 4, \lambda\right)$ ve $3-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 4, \lambda\right)$ tasarımlarına ilişkin araştırmalar yapılmıştır.

MAPLE kullanımı sayesinde bu işlemler kolayca yapılmaktadır.

Aşağıda verilen şekil 5.9., $2 \leq k \leq 4$ için K_n 'nin k -kenar alt grafiklerine ilişkin izomorfizm sınıflarını veren bir listeyi göstermektedir. Gösterimde kolaylık sağlamak için izole edilmiş köşeler seçilmemiştir. Burada $p=n'$ dir.



Şekil 5.9. $2 \leq k \leq 4$ için K_n 'nin k -kenar alt grafiklerine ilişkin izomorfizm sınıfları



Şekil 5.9. (Devam) $2 \leq k \leq 4$ için K_n 'nin k -kenar alt grafiklerine ilişkin izomorfizm sınıfları

Burada, kenar sayısı 2,3 ve 4 için farklı grafik gösterimlerine yer verilmiştir. Kenar sayısı 2 olan mümkün tüm grafik gösterimleri $h_1^{(2)}, h_2^{(2)}$ olmak üzere verilmiştir. Kenar sayısı ya da blok genişliği 3 olan tüm mümkün grafik gösterimleri $h_1^{(3)}, h_2^{(3)}, h_3^{(3)}, h_4^{(3)}, h_5^{(3)}$ olmak üzere verilmiştir. Aynı şekilde kenar sayısı ya da blok genişliği 4 olan mümkün grafik gösterimlerine yer verilmiştir.

p 'nin küçük değerleri için grafiksel uzanım matrisleri, p köşeden daha fazla köşe üzerinde bulunan grafiklerin izomorfizm sınıflarına uygun olarak satırlar ve sütunlar silinerek elde edilebilir.

5.4.1 Blok Genişliği 3 Olan Grafiksel 2-Tasarımları

Yalnızca grafiksel $2-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 3, \lambda\right)$ tasarımları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Aşağıdaki çizelgede grafiksel tasarımların parametreleri ve gösterim ifadesi ile de bu tasarımların bloklarının hangi grafiklerle ifade edildiği anlatılmaktadır. Örneğin ilk tasarım örneğinde $2-(10,3,4)$ grafiksel tasarımına ilişkin gösterim $\{2\}$ 'dir. Yani bu tasarımın bloklarını göstermek üzere şekil 5.9'daki $h_2^{(3)}$ şekli kullanılmaktadır.

Çizelge 5.3. $k=3$ olan grafiksel tasarımlar

Grafiksel $2-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 3, \lambda\right)$ Tasarımı			
$\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \lambda$	GÖSTERİM	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \lambda$	GÖSTERİM
(10,4)	$\{2\}$	(15,1)	$\{1,4\}$
(28,6)	$\{1,3,5\}$	(28,10)	$\{1,2\}$
(55,25)	$\{1,2,4,5\}$		

Grafiksel $2-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 4, \lambda\right)$ ve $3-\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right), 4, \lambda\right)$ tasarımlarına ilişkin parametreler Chee tarafından verilmiştir [7].

6. GRAFİKSEL TASARIM TÜRLERİ

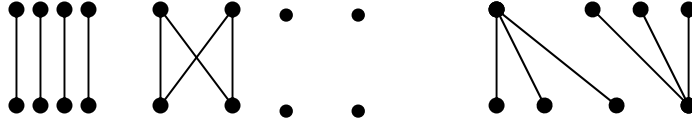
6.1 Bigrafiksel Tasarımlar

Bir önemli t -(v, k, λ) tBD $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ aşağıdakiler sağlandığı takdirde bigrafikseldir.

1. X , tam bi partite grafik $K_{m,n}$ 'ye ait $v=mn$ kenarının bir seti ve
2. $A \in \mathcal{A}$ ve $\sigma \in K_{m,n}$ 'e ait bir otomorfizm olmak üzere, $\sigma(A) \in \mathcal{A}$ olmalıdır [35].

Bir grafiksel t -(mn, K, λ) tasarımı $S_n \times S_m$ simetrik gruba sahiptir.

Örnek : Bir bigrafiksel 3 -($16, \{4, 6\}, 1$) tasarımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.



Şekil 6.1. Bir bigrafiksel 3 -($16, \{4, 6\}, 1$) tasarımına ilişkin gösterim

Teorem: $t > 1$ olmak üzere, yalnızca grafiksel t -(v, K, λ) tasarımı sahip olduğu parametreler: 2 -($9, 3, 1$), 3 -($8, 4, 1$), 3 -($16, 4, 1$), 3 -($16, \{4, 1\}, 1$) ve 5 -($16, \{6, 8\}, 1$) dir [43]

Bigrafiksel tasarımların parametrelerine ilişkin daha fazla örnek Chee tarafından verilmiştir [35].

6.2 Hipergrafiksel Tasarımlar

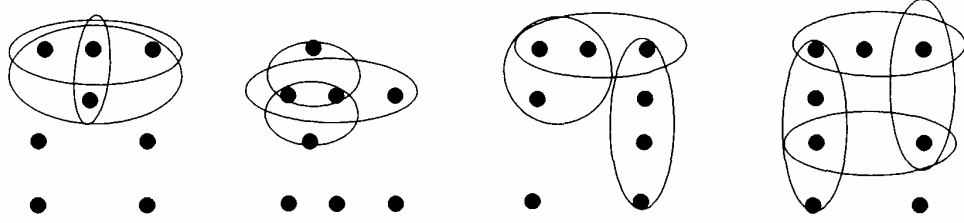
Bir önemli t -(v, k, λ) tBD $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ aşağıdakiler sağlandığı takdirde hipergrafikseldir.

1. X , tam grafik r -hipergrafik $K_n^{(r)}$ 'ye ait $v = \binom{n}{r}$ kenarlarının bir seti
2. $A \in \mathcal{A}$ ve $\sigma \in K_n^{(r)}$ 'e ait bir otomorfizm olmak üzere, $\sigma(A) \in \mathcal{A}$ olmalıdır.

Bir r -hipergrafiksel $t - \left(\binom{n}{r}, K, \lambda \right)$ tasarımı S_n otomorfizm grubuna sahiptir.

Bir 2-hipergrafiksel $t - (v, K, \lambda)$ tasarımı bir grafiksel $t - (v, K, \lambda)$ tasarımıdır [35] .

Örnek: Bir 3-hipergrafiksel $2 - (56, 3, 18)$ tasarımı aşağıdaki grafikte verilmiştir.

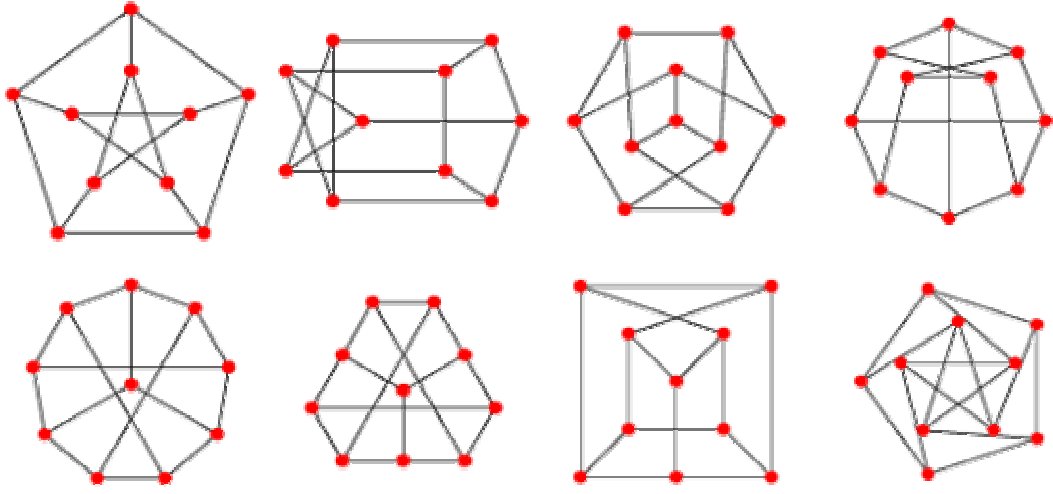


Şekil 6.2 Hipergrafiksel $2 - (56, 3, 18)$ tasarımına ilişkin gösterim

6.3 Tasarımlardan Elde Edilen Grafikler

Tasarımlardan grafikleri elde etmenin farklı yolları vardır. Özel olarak, güçlü düzenli grafikler ve distance-düzenli (distance-regular graph) grafikler tasarımlardan gelmektedir.

Bir tasarıma ait bloklar üzerinde bir grafiği tanımlamanın birçok yolu vardır. Aşağıdaki grafik tek $2 - (6, 3, 2)$ tasarımı blokları üzerinde tanımlanmaktadır. Burada uygun bloklar tam olarak iki noktada birleştiği takdirde iki köşe bitişik (adjacent) olmaktadır. Bu grafik bir güçlü düzenli grafik olan Petersen grafiğidir. Ve aşağıda farklı çizimlerle gösterilmektedir [36].



Şekil 6.3. Petersen grafik örnekleri

Cameron ve Praeger, izole edilmiş üç köşeyi genişleterek Petersen grafikten 2-(78,15,7) grafiksel tasarımını elde etmiştir [9].

7. GRAFİKSEL TASARIMLARLA DİĞER TASARIMLARIN İLİŞKİSİ

Grafiksel tasarım özellikleri ve koşullarından hareketle tasarımların bazı geometrik yapılarla arasında geçişler olduğu, bazıları ile aralarında bu geçişin sağlanmadığı gözükmemektedir. Grafiksel tasarımın bilinen BIBD düzenleri ile arasında bir geçiş olduğu söylenebilmektedir. Aşağıda bu geçişler anlatılmaktadır.

7.1 Sonlu Geometriden BIB Tasarımı Kurulumu

Sonlu projektif düzlem özelliklerinden $PG(n,s)$ geometrisindeki noktaların, v sembolü ile, m -flat ise b setleri ile tanımlandığı açıktır. Bir BIB tasarımı aşağıdaki parametrelere sahiptir.

$$v = b = \phi(n, m, s) \quad r = \phi(n-1, m-1, s)$$

$$k = \frac{s^{m+1} - 1}{s - 1} \quad \lambda = \phi(n-2, m-2, s)$$

$$\phi(n, m, s) = \frac{(s^{n+1} - 1)(s^n - 1) \dots (s^{n-m+1} - 1)}{(s^{m+1} - 1)(s^m - 1) \dots (s - 1)}$$

Özel olarak, eğer s ilk kuvvetse tasarımlar aşağıdaki gibi farklı durumlarda tanımlanabilir.

$$v = s^2 + s + 1 = b \quad r = s + 1 = k \quad \lambda = 1 \quad (7.1)$$

$$v = (s+1)(s^2+1) \quad b = (s^2+1)(s^2+s+1) \quad (7.2)$$

$$r = s^2 + s + 1, \quad k = s + 1 \quad \lambda = 1$$

$$v = (s+1)(s^2+1) = b \quad r = s^2 + s + 1 = k \quad \lambda = s + 1 \quad (7.3)$$

Örnek : Bir 2-(15,7,3) grafiksel tasarım PG(3,2) geometrik yapısına uymaktadır.

Eş. 7.2'den

$$s=2$$

$$v=(s+1)(s^2+1)=3.5=15$$

$$r = s^2+s+1=4+2+1=7=k$$

$$\lambda=s+1=2+1=3$$

Eş. 3.4 'den

$$b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \lambda = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{7}{2}} 3 = 15$$

$$b=v=15$$

Bu tasarımın PG(3,2)'de karşılık gelen noktaları aşağıdaki gibidir.

15 farklı nokta sayısı;

$$P_1=0,0,0,1 \quad P_5=0,1,1,0 \quad P_9=1,0,1,0 \quad P_{13}=1,1,0,1$$

$$P_2=0,0,1,0 \quad P_6=0,1,1,1 \quad P_{10}=1,0,1,1 \quad P_{14}=1,1,1,0$$

$$P_3=0,0,1,1 \quad P_7=1,0,0,0 \quad P_{11}=0,1,0,1 \quad P_{15}=1,1,1,1$$

$$P_4=0,1,0,0 \quad P_8=1,0,0,1 \quad P_{12}=1,1,0,0$$

Örnek: 2-(15,3,1) tasarımı PG(3,2) geometrisine izomorfik olan bir grafiksel tasarımdır.

$$\binom{n}{2}=15, n=6 \text{ olmak üzere,}$$

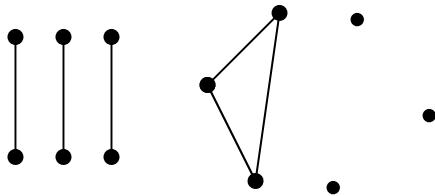
2-(15,3,1) BIBD ait nokta seti $X=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O\}$ olmak üzere bu tasarıma ait bloklar aşağıda verilmiştir.

(1) ABC	(8) KGL	(15) JGM	(22) FJL	(29) AFG
(2) FIO	(9) GHO	(16) ENK	(23) EIL	(30) BDF
(3) DIM	(10) IGN	(17) CIJ	(24) LHK	(31) CEF
(4) BHJ	(11) CMN	(18) FKM	(25) DHL	(32) DOK
(5) CDG	(12) BLN	(19) DJM	(26) EHM	(33) CLO
(6) EJO	(13) FHN	(20) BIK	(27) ANO	(34) BEG
(7) ALM	(14) AHI	(21) ADE	(28) BMO	(35) AJK

2-(15,3,1) tasarımına ait noktaları grafiksel tasarımda, K_6 tam grafiğinin kenarlarını kullanarak aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

(12) → A (16) → E (26) → I (45) → M
 (13) → B (23) → F (34) → J (46) → N
 (14) → C (24) → G (35) → K (56) → O
 (15) → D (25) → H (36) → L

Bu grafiksel tasarım blokları göstermek üzere aşağıdaki grafikleri kullanmaktadır.



Şekil 7.1. 2-(15,3,1) Grafiksel tasarımına ilişkin gösterim

Eş. 7.3'den

$$s=2$$

$$v=(s+1)(s^2+1)=3.5=15$$

$$b=(s^2+1)(s^2+s+1)=5.7=35$$

$$r=s^2+s+1=7$$

$$k=s+1=3$$

$$\lambda=1$$

PG(3,2)'de karşılık gelen noktalar yukarıdaki örnekteki gibidir. Burada PG(3,2)'ye karşılık BIBD düzeninde bloklar hiperdüzlemdir.

7.2 Grafiksel Tasarımın Youden Kare İle Olan İlişkisi

n kenara sahip bir latin kare, her bir satır ve sütunun bir sayıyı yalnızca bir kez bulundurduğu n^2 tane alt kare ve n tane sayıdan düzenlenen bir yapıdır. n terimi latin karenin mertebesi olarak bilinir. Eğer bir latin kareler setindeki her bir çift ortogonal ise set, ikişer ortogonal Latin kareler seti (pairwise orthogonal Latin square –POLS) olarak adlandırılır. POLS en çok $n-1$ üyeye sahiptir. Tam olarak $n-1$ üyeye sahipse o zaman set tam set olmaktadır [37].

2,3 ve 4. mertebeden tam set (POLS) 2,3, ve 4. mertebeden projektif düzleme uymaktadır. Sütunların bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı oluşturduğu özelliğine sahip bir çok satırı kaldırılmış olan bir latin kare youden kare olarak adlandırılır.

Bir youden kare düzen, bir kare 2-tasarım D'ye dayanmaktadır. Youden dikdörtgenin sütunları D tasarımının bloklarından ve satırları ise 1,2,...n sayılarına ait permütasyondan oluşmaktadır.

Örnek: Bir 2-(7,3,1) tasarımına ait Youden kare aşağıda verilmiştir.

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

Örnek: Latin kare L_1 aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$L_1 = \begin{bmatrix} N_1 N_2 N_3 \\ N_4 N_5 N_6 \\ N_7 N_8 N_9 \end{bmatrix}$$

Bu latin kareden elde edilen Youden karede aşağıdaki gibidir.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} N_1 N_2 N_3 \\ N_4 N_5 N_6 \end{bmatrix}$$

Youden kare Y_1 'deki her bir satır ve sütun bir doğru olarak dikkate alınmaktadır. Bu durumda aşağıdaki doğrular elde edilmektedir.

$$d_1 = \{N_1, N_2, N_3\} \quad d_4 = \{N_2, N_5\}$$

$$d_2 = \{N_4, N_5, N_6\} \quad d_5 = \{N_3, N_6\} \quad d_3 = \{N_1, N_4\}$$

$$d_6 = \{N_1, N_6\} \quad d_7 = \{N_2, N_4\} \quad d_8 = \{N_3, N_5\} \quad d_9 = \{N_1, N_5\} \quad d_{10} = \{N_2, N_6\} \quad d_{11} = \{N_3, N_4\}$$

Bu yapı aynı zamanda $\lambda=1$ olduğu bir 2-tasarım ya da $r=4$ olduğu bir 1- tasarımı uymaktadır. Blok sayısı 11, $t=2$ ve $\lambda=1$ olduğu ya da $r=4$ ve $t=1$ parametrelerine sahip bir grafiksel tasarım yoktur.

Örnek: 1-(6,2,1) grafiksel tasarımında nokta seti ve bloklar aşağıda verilmiştir. Bu grafiksel tasarımda blok sayısı $b=3$ 'tür ve bloklar yukarıdaki Youden kare örneğinde yalnızca sütunlardan oluşan doğrularla uyushmaktadır.

$$d_1 = \{N_1, N_4\} \quad d_2 = \{N_2, N_5\} \quad d_3 = \{N_3, N_6\}$$

$$X = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$$

Bloklar	(12)→1	(14)→3
(1) (12)(23)	(23)→4	(34)→6
(2) (13)(24)	(13)→2	
(3) (14)(34)	(24)→5	

1-(6,2,1) tasarımında nokta sayısı 6, blok sayısı ise 3 'tür. Burada tekrar sayısı olan $r=1$ dir. Yukarıda verilen Youden kare örneğinde 11 adet doğru vardı , doğrular bloklar olarak alındığın da $t=1$ ve $r=4$ olduğu Youden kare örneği ile 1-(6,2,1) yapılarının birebir uyuşmadığını görülmektedir. Diğer grafiksel tasarım örneklerinin Youden kare yapısı ile arasında, blok ve işlem sayıları gibi parametre farklılıklarından dolayı geçiş sağlanamamaktadır.

8.SONUÇ

t-tasarımlarının kombinatoriyal yapılar olduğundan daha önce söz edilmişti. Grafiksel tasarımlar belli koşullar gerektiren özel t-tasarım yapılarından biridir. Bu yapılarda işlem sayısının $\binom{n}{2}$ olması ve bloklarının da tam grafiğin alt grafikleri ile gösterilmesi söz konusudur. Bu tasarımı diğer t-tasarımlarından ayıran ve özel yapan bu iki koşuldur. Diğer t-tasarımlarına ilişkin blokları sayılarla ya da bazı matris kullanımları ile gösterebiliyorken bu özel olan t-tasarımlarına ait blokları bütün bunların yanı sıra grafiklerle de gösterme imkanı bulunabilmektedir. Yani adından da anlaşıldığı üzere, noktaların aralarındaki ilişkiyi ifade etmede, tasarıma ait blokların ve bu bloklardaki noktaların kendi içlerindeki eşleşmeleri göstermede grafik gösteriminden yararlanılmaktadır. Bu nedenle grafiksel ifadesi kullanılmaktadır. Daha önceden bilinen bir t-tasarımına ait blokları sayılarla ifade ederken varolan bütün blokları yazmak durumu söz konusuydu. Ancak grafiksel tasarımlarda, tasarıma ait blokların tümünü yazmak yerine, izomorfik olma özelliğini kullanarak, mümkün tüm grafiklerle bloklar daha özet bir şekilde ifade edilebilmektedir. Yani bir çeşit boyut indirgeme söz konusudur. Örnek 5.6 'da olduğu gibi 3-(10,4,1) tasarımına ait 30 bloğu göstermek yerine yalnızca 15 bloğa ait grafiksel gösterimi kullanarak bu tasarım anlatılabilmektedir. Çünkü kalan diğer 15 blok da yine aynı grafik gösterimleri ile ifade edilecektir. Diğer 15 blok ilk 15 bloğa izomorfik olan grafiklerle çizilecektir. Gösterimin aynı olması ve eşleşmenin yani izomorfizmin kendi içerisinde yine aynı değişkenlere dönmesi nedeni ile 30 bloğu yazmak ya da grafiklerle göstermek yerine 15 tanesini göstererek daha özet bir anlatım sağlanmış olur. Kısacası grafiksel tasarımlar sayesinde boyut indirgenerek daha öz bir gösterim elde edilmekte ve belli koşulları sağlayan daha özel bir yapıya sahip t-tasarımlarına ulaşılmaktadır.

Bu çalışma, grafiksel t-tasarımların, dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ve sonlu geometriler arasındaki ilişkinin incelenmesi amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda t-tasarım özellikleri ve ilgili yapılar, grafiksel tasarım için bir temel

oluşturması nedeniyle bu çalışmada yer almıştır. Genel olarak grafiksel tasarımların varlık koşulları, özellikleri ve kuruluşları için farklı metodlar incelenmiştir. Grafiksel tasarımların geometrik anlamları üzerinde durulmuştur.

Sonlu projektif geometri ve diğer ilişkili geometriler üzerinde durulmuş ve grafiksel tasarımların bu geometriler ile olan ilişkisi ifade edilmiştir. Grafiksel tasarım parametreleri dikkate alınarak BIBD bağlantısı ortaya koyulmuş, BIBD geçen parametrelerin grafiksel tasarım içerisinde ne anlama geldiği ortaya konarak, bir

BIBD'den bir grafiksel tasarıma nasıl geçiş yapıldığı gösterilmiştir.

Daha sonra özel grafiksel tasarım yapılarına yer verilmiş ve bunlara ilişkin örnekler gösterilmiştir. Grafiksel tasarımın bir başka yapı olan projektif düzleme geçişleri incelenmiş ve buna uyan grafiksel tasarım örnekleri verilmiştir.

Grafiksel tasarımların bir başka önemli blok tasarımı olan Youden Kare ile olan ilişkisine değinilmiş ve bir grafiksel tasarım ile bir Youden Kare yapısının neden örtüşmediği gösterilmiştir.

Bütün bu anlatımlardan, grafiksel tasarımların bilinen ancak daha özel koşullar gerektiren t-tasarımları olduğu, uygun parametrelere sahip bazı grafiksel t-tasarımlarının aynı zamanda birer BIBD yapısı ya da projektif düzlem olduğu sonuçlarına varılmıştır. Grafiksel tasarımlar sayesinde, tasarıma ilişkin çok fazla sayıda bloğu yalnızca bir kaç blokla grafikleri kullanarak göstermenin mümkün olduğu tespit edilmiştir. Grafiksel tasarımların parametrelerinin hesaplanmasında belirli bir formüle rastlanmamıştır. Parametre hesaplamalarında bilinen en belirgin formül tasarıma ait nokta sayısının tam grafiğin köşe sayısının ikili kombinasyonu, yani $\binom{n}{2}$ 'dir. Bunun dışında diğer parametrelerin hesabında t-tasarımlarının parametre hesabında kullanılan formüllerden yararlanılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Betten A., Klin M., Laue R., Pech C., “A Computer Approach to The Enumeration of Block Designs which Are Invariant with Respect to a Prescribed Permutation Group”, Universitat Dresden, *preprint MATH-AL-13-1997*, 74 (1997)
2. Nandi H.K., “ Enumeration of Non-Isomorphic Solutions of BIBDs”, *Sankhya* , 7: 305-312 (1946)
3. Gibbons P.B., Mathon R.A., Corneil D.G., “Computing Techniques For The Construction and Analysis of Block Designs”, *Utilitas Math*, 11: 161-192 (1977)
4. Faradzev I.A., “ Constructive Enumeration of Combinatorial Objects” *Colloq. Intern. CNRS* 260: 131-135 (1978)
5. Ivanov A.V., “Some Results of Constructive Enumeration Of Combinatorial Blok –Designs” VINITI, Manuscript , Moscow 1560:81 (Dep.) (1981)
6. Dembowski P., “ Finite Geometries”, *Springer-Verlag*, Reprint of The 1968 Edition V,VII,4-5 (1997)
7. Chee Y.M., “Graphical t-designs with Block Sizes Three and Four”, *Discrete Math.*, 91:201-206 (1991)
8. Chouinard II L.G., Kramer E.S., Kreher D.L., “Graphical t-wise Balanced Designs”, *Discrete Math.*, 46: 227-240 (1983)
9. Cameron P.J. Praeger C.E., “Block-transitive t-designs I: Point-Imprimitive Designs”, *Discrete Math.*, 118: 33-43 (1993)

10. Betten A., Klin M., Lave R., Wasserman A., “Graphical t-designs via Polynomial Kramer-Mesner Matrices”, *Discrete Math.*, 197/198: 83-109 (1999)
11. Kreher D.L., Chee Y.M., Caen D., Colbourn C.J and Kramer E.S., “Some New Simple t-designs”, *J. Combin. Comput.* 7:53-90 (1990)
12. Chee Y.M., “ On Graphical Quintuple Systems”, *J. Symbolic Comput.*, 13(6): 677-681 (1992)
13. Kramer E.S. “ An $S_3(3,5,21)$ Graph Using”, *Discrete Math.* 81(2): 223-224 (1990)
14. Chee Y.M., “ The Existence of Simple 3-(28,5,30) Designs”, *Discrete Math.*, 118: 251-252 (1993)
15. Kramer E.S. and Mesner D.M., “t-designs On Hypergraphs”, *Discrete Math.*, 15: 263-296 (1976)
16. Alltop W.O., “On The Construction of Block Design”, *J. Combin.*, Theory 1: 501-502 (1966)
17. Huges D.R., Piper F.C., “Design Theory”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1-35 (1985)
18. Kramer E.S., “ t-wise Balanced Designs”, The Handbook Of Combinatorial Designs, Colbourn C.J. and Dinitz J.H. (Editors), *CRC Press* , 484-490 (1996)
19. Assmus E.F. and Key J.D., “ Designs and Their Codes” , *J. Of Combinatorial Theory*, Series A, 76: 139-144 (1993)

20. Internet: The Ohio State University, "t-designs",
<http://www.math.ohio-state.edu/~mohacsy/research/research.html> (1999)
21. Hughes D.R., "On t-designs and Groups", *The American Journal of Mathematics*, 87: 761-778 (1966)
22. Beth T., Junknickel D., Lenz H., "Decasign Theory", "Encyclopedia of Mathematics, vol 1", Second Edition, *Cambridge University Press*, Cambridge 1-29,50-64,77-78,82-96,101-129,136-144,234,584-598 (1999)
23. Street A.P., Street D.J., "Combinatorics of Experimental Design", *Clarendon Press*, Oxford, 1-12,28-34,164-173 (1987)
24. Internet: University of Colorado at Denver and Health Sciences Center
 Department of Mathematical Sciences, "Comb.Structures Notes On Block
 Designs", <http://www.math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m6406/cslnb.html>
 (2001)
25. Kreher D.L., "Design Theory Toolchest-user Manual Report. In: Coding Theory
 and Design Theory, Part II", Ray-Chaudhuri D.K (Editor), Inst. Appl.Math.,
Springer-Verlag, New York, 227-235 (1990)
26. Brown C.A., Finkelstein L., Purdom P.W., "A New Base Change Algorithm For
 Permutation Groups", *SIAM J. Of Comp.*, 18: 1037-1047 (1989)
27. Laue R., "Computing Double Coset Representatives for The Generation of
 Solvable Groups", *Lecture Notes in Comp.Sci.*, 144:65-70 (1982)
28. Schmalz B., "t-designs zu vorgegebener Automorphismengruppe" *Dissertation*,
 Bayreuther Math. Schr. 41 (1992)

29. Schamlz B., "The t-designs with Prescribed Automorphism Group, New Simple 6-Designs", ***J.Comb. Des.*** 1:125-170 (1993)
30. Wasserman A., "Finding Simple t-design with Enumeration Techniques", ***J.Combin. Design***, 2: 79-90 (1998)
31. Tuan N.D., "Hypergraphical t-designs", ***Discrete Math.***, 306: 1189-1197 (2006)
32. Chee Y.M., Kaski P., "An Enumeration of Graphical t-designs" , ***Journal of Combinatorial Designs***, Early View (online in advance of print): n/a (2007)
33. Klin M.H., " On an Infinite Family of Maximal Groups of Symmetric Groups" ***Tr. Nikolaevskogo Korablestroitel'nogo Inst.***, Russian, 41:148-151 (1970)
34. Kreher D.L., Radziszowski S.P., "Finding Simple t-designs by Basic Reduction" ***Congr. Numer.***, 55:235-244 (1986)
35. Colbourn C.J. and Dinitz J.H., The CRC Handbook of Combinatorial Designs, ***CRC Pres***, New York, 366-369 (1996)
36. Colbourn C.J. and Dinitz J.H., The CRC Handbook of Combinatorial Designs, ***CRC Pres***, New York, 47-51, 66-67, 70-71, 231-232, 430-432, 651-652 (1996)
37. Bayrah H., Vanlı A., " The Geometrical Structures Corresponding The Complete Sets of Pairwise Orthogonal Youden Square of Order (3,2) and (4,3)", ***Journal of Quafqaz University***, (3) 1: 165-172 (2000)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,adı : KARABACAK,Aylin
Uyruğu : T.C
Doğum tarihi ve yeri : 04.05.1982, Ankara
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 533 523 53 93
e-mail : aylinkarabacak@tuik.gov.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üni./İstatistik Bölümü	2004
Lise	Halide Edip Süper Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-	Türkiye İstatistik Kurumu	Uzman Yrd.

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Müzik,Koleksiyon yapmak