

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**GRAFLARDA BAZI ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ VE
ARALARINDAKİ İLİŞKİLER**

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN**



MANİSA-2016

TEZ ONAYI

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ tarafından hazırlanan "**Graflarda Bazı Zedelenebilirlik Ölçümleri ve Aralarındaki İlişkiler**" adlı tez çalışması 24/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN
Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Mehmet SEZER
Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI
Karabük Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TABLO DİZİNİ	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL TANIMLAR.....	6
3. AYRIT KOMŞULUK KOPMA DERECEŚİ	10
3.1. Tanım ve Teoremler	10
3.2. Bazı Özel Grafların Ayrıt Komşuluk Kopma Derecesi.....	13
3.3. Graf İşlemleri ve Ayrıt Komşuluk Kopma Derecesi.....	16
3.3.1. Kuvvet İşlemi.....	16
3.3.2. Tümleyen İşlemi	20
3.4. Gear Grafın Graf İşlemleri	23
3.4.1. Tümleyen İşlemi	23
3.4.2. Kartezyen Çarpım İşlemi.....	24
4. AYRIT SAÇILIM SAYISI	26
4.1. Tanım ve Teoremler	26
4.2. Bazı Özel Grafların Ayrıt Saçılım Sayısı	29
4.3. Graf İşlemleri ve Ayrıt Saçılım Sayısı	30
4.3.1. Kuvvet İşlemi.....	30
4.3.2. Tümleyen İşlemi	32
4.4. Gear Grafın Graf İşlemleri	33
4.4.1. Tümleyen İşlemi	33
4.4.2. Kartezyen Çarpım İşlemi.....	35
4.4.3. Ardışık Toplama İşlemi	37
5. SONUÇ	40
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

G	Bağlantılı graf
$V(G)$	Bir G grafının tepeler kümesi
$E(G)$	Bir G grafının ayrıtlar kümesi
n	Bir G grafının tepe sayısına bağlı seviyesi
v	Bir grafın tepesi
e	Bir grafın ayrıtı
S	Kesim kümesi
$ S $	Kesim kümesinin eleman sayısı
$\deg(v)$	v tepesinin derecesi
$\delta(G)$	Bir G grafının en küçük tepe derecesi
$\Delta(G)$	Bir G grafının en büyük tepe derecesi
$\alpha(G)$	Bağımsızlık sayısı
$w(G/S)$	Etkilenmiş bileşen sayısı
$w(G - S)$	Bileşen sayısı
$m(G/S)$	Etkilenmiş en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$m(G - S)$	En büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$\kappa(G)$	Bağlantılılık sayısı
$sc(G)$	Saçılım sayısı
$\lambda(G)$	Ayrıt bağlantılılık sayısı
$r'(G)$	Ayrıt kopma derecesi
$es(G)$	Ayrıt saçılım sayısı
$N(e)$	Bir e ayrıtının açık komşuluğu
$N[e]$	Bir e ayrıtının kapalı komşuluğu
$NC(G)$	Komşu bağlantılılık sayısı
$\lambda_{NB}(G)$	Ayrıt komşuluk bağlantılılık sayısı
$ENS(G)$	Ayrıt komşuluk saçılım sayısı
$ENR(G)$	Ayrıt komşuluk kopma derecesi
P_n	n tepeli yol graf
C_n	n tepeli çevre graf
K_n	n tepeli tam graf
$K_{1,n}$	$n+1$ tepeli yıldız graf
$C_{n,m}$	n ve m tepeli kuyruklu yıldız graf

$W_{1,n}$	$n+1$ tepeli tekerlek graf
G_n	$2n+1$ tepeli gear graf
P_n^d	n tepeli d . dereceden kuvvet graf
$\overline{G}$	Bir G grafının tümleyen grafi
$G_1 \times G_2$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpım işlemi
$G_1 \cup G_2$	G_1 ve G_2 graflarının birleşim işlemi
$G_1 + G_2$	G_1 ve G_2 graflarının toplama işlemi



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. G_1 ve P_5 grafları	2
Şekil 2.1. P_5 yol graf	7
Şekil 2.2. C_6 çevre graf	7
Şekil 2.3. $K_{1,5}$ yıldız graf	8
Şekil 2.4. $C_{4,4}$ kuyruklu yıldız graf	8
Şekil 2.5. $W_{1,6}$ tekerlek graf	8
Şekil 2.6. G_6 gear graf	9
Şekil 2.7. P_5^2 kuvvet graf	9
Şekil 2.8. K_4 tam graf	9
Şekil 3.1. Bağlantılı bir G grafi	10
Şekil 4.1. Bağlantılı bir G grafi	26



TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 5.1. $C_{n,m}$ kuyruklu yıldız grafinin ENR ve es değerleri	40
Tablo 5.2. P_n^d kuvvet grafinin ENR ve es değerleri	41
Tablo 5.3. $\overline{P}_n$ tümleyen grafinin ENR ve es değerleri	42
Tablo 5.4. $\overline{G}_n$ tümleyen grafinin ENR ve es değerleri.....	42



TEŞEKKÜR

Çalışmamın ve lisansüstü öğrenim hayatımın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN'a, bilgi ve tecrübesi ile tüm zorlu aşamalarda destek olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ
Manisa, 2016



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Graflarda Bazı Zedelenebilirlik Ölçümleri ve Aralarındaki İlişkiler

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN

Bir ağın (iletişim, bilgisayar, elektrik, ulaşım vb.), belli merkezleri ya da bağlantı hatları zarar görmesinden sonra iletişim kesilene kadar ağın göstermiş olduğu dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik denir. Bir ağın, zedelenebilirlik değerinin belirlenebilmesi için merkezleri bir grafın tepelerine, bağlantıları grafın ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde bir graf ile modellenir. Bağlantılı bir G grafının ayrıt komşuluk kopma derecesi, S bir ayrıt subversion stratejisi, G/S grafındaki bileşen sayısı $w(G/S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G/S)$ olmak üzere

$$ENR(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G/S) - |S| - m(G/S) : w(G/S) \geq 1\}$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan, bağlantılı bir G grafının ayrıt saçılım sayısı, S ayrıt kesim kümesi, $G - S$ grafındaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere

$$es(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır.

Bu tezde bilinen bazı özel graf yapıları için ayrıt komşuluk kopma derecesi ve ayrıt saçılım sayısı değerleri hesaplanmıştır. Son kısımda bu ölçümler arasında ki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf Teorisi, Zedelenebilirlik, Ayrıt Komşuluk Kopma Derecesi, Ayrıt Saçılım Sayısı.

2016, 57 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Some Vulnerability Measures In Graphs and Their Relationships

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ

Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assis. Prof. Dr. Ersin ASLAN

In the network (communication, computer, electricity, transportation etc.), after the failure of certain centers or connecting lines, the network shows the resistance to disruption of a operation, which is measured with the vulnerability in graph theory. To determine the value of vulnerability of a network, a graph is modelled with a network whose centers are corresponded to the vertices of a graph and whose links are corresponded to the edges of a graph. The edge neighbor rupture degree of a connected graph G is defined as

$$ENR(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G/S) - |S| - m(G/S) : w(G/S) \geq 1\}$$

where S is any edge subversion strategy of G , $w(G/S)$ is the number of components of G/S and $m(G/S)$ is the maximum order of the components of G/S . On the other hand, the edge scattering number of a connected graph G is defined as

$$es(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) > 1\}$$

where S is any edge-cut set of G , $w(G - S)$ is the number of the components of $G - S$.

In this thesis, the edge neighbor rupture degree (ENR) and the edge scattering number (es) are calculated for the some specific graph structures. Finally, the relationships between these parameters are given.

Keywords: Graph Theory, Vulnerability, Edge Neighbor Rupture Degree, Edge Scattering Number.

2016, 57 pages

1. GİRİŞ

Bir ağ (iletişim, bilgisayar, elektrik, ulaşım vb.), merkezlerden ve merkezleri birbirine bağlayan hatlardan oluşur. Bu ağın, merkezleri veya bağlantı hatları zarara uğradığında, ağda bazı sorunların çıkması hatta bağlantı kopukluğu söz konusudur. Buradan akla gelen ilk soru; ağda iletişim durana kadar ağın ne kadar ve nasıl dayanacağıdır. O zaman bu soru için daha önceden tanımlanmış olan zedelenebilirlik kavramını verebiliriz. Bir ağda, belli merkezlerin ya da bağlantı hatları zarar görmesinden sonra iletişim kesilene kadar ağın göstermiş olduğu dayanma gücünün ölçümüne *zedelenebilirlik* denir.

Örneğin, İzmir ilinin telefon ağı, telefon merkezlerinden ve merkezleri birbirine bağlayan kablolardan oluşmaktadır. Bu ağda bozulmalar meydana geldiğinde oluşan zararın belirlenebilmesi için zarar sonrasında zarara uğrayan ağın incelenmesi gereklidir. Bu incelemenin sonucunda oluşan zarar görülebilir. Oluşan zararı incelemek için aşağıdaki sorunların yanıtı aranmalıdır (bu sorular daha da çoğaltılabilir).

1. İletişim sağlanamayan telefon merkezinin sayısı kaçtır?
2. Ağ kaç alt ağa ayrılmıştır?
3. Ağın kendi içerisinde devam ettiği alt ağın sayısı kaçtır?
4. Ağın kendi içerisinde devam ettiği en çok elemana sahip alt ağın telefon merkezinin sayısı kaçtır?
5. İletişim sağlanamayan telefon merkezlerine komşu olan telefon merkezinin sayısı kaçtır?
6. Zarar görmüş olan kabloların ve onlara komşu olan kabloların sayısı kaçtır?
7. Zarar gören kabloların ve onların komşu kabloları ağdan çıkarıldığında zarara uğrayan telefon merkezinin sayısı kaçtır?

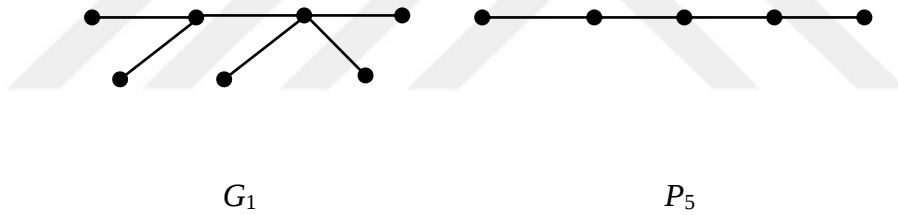
Buradaki soruların her bir yanıtı ağın ne kadar zarara uğradığı hakkında bilgi verecektir. Yukarıdaki ilk olarak merak edilen soru “İletişim sağlanamayan telefon merkezinin sayısı kaçtır” sorusudur. Bu sorunun yanıtı için bir ağ, merkezler tepelere ve bağlantılar ayrıtlara denk gelecek şekilde modellenir ve bu ağı tasvir eden bir G grafinin zedelenebilirlik değerini ölçmek için bir ölçüme gerek vardır. Bu ölçüm; en

eski ve birinci sorunun yanıtını verecek olan bir G grafinin bağlantılılık sayısı (connectivity) ölçümüdür [8].

Tanım 1.1. [8] Bağlantılı (connected) bir G grafini, bağlantısız (disconnect) bir graf ya da izole tepelerden oluşan graf haline getirmek için graftan atılması gereken en az tepe sayısına bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. S , G grafinin bir kesim kümesi olmak üzere

$$\kappa(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\}$$

kısaca tanımlanabilir. Burada, bağlantılılık sayısının zedelenebilirlik için yeterli olup olmadığı sorulabilir. Yukarıdaki diğer sorulardan da görülebildiği gibi, sadece bağlantılılık sayısına bağlı kalarak bir grafin zedelenebilirlik değerini ölçmenin yeterli olmayacağı açıktır. Bu durumu örneğin Şekil 1.1’de 5 tepeli G_1 grafi ve 5 tepeli P_5 yol grafini ele alalım.



Şekil 1.1. G_1 ve P_5 grafları

G_1 ve P_5 graflarından görüleceği gibi $\kappa(G_1) = \kappa(P_5) = 1$ olur. Her iki grafin bağlantılılık sayısı 1 olmasına rağmen bağlantılılık sayısı bu iki graf arasında ayırt edici bir ölçüm olmayacaktır. Bu yüzden Şekil 1.1’deki grafların zedelenebilirliği için başka ölçüme ihtiyacımız olacaktır. Bu gereksinimden yola çıkarak ve yukarıdaki soruları yanıtlamak için aşağıdaki bazı önemli ölçümler tanımlanmıştır.

Tanım 1.2. [16] Bağlantılı bir G grafindan S tepe kesim kümesi atıldığında geriye kalan $G - S$ grafinin bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere G grafinin saçılım sayısı (scattering number)

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır.

Şimdiye kadar tepe (merkez) zedelenebilirlik ölçümleri verilmiştir. Buradan itibaren ayrıt zedelenebilirlik ölçümlerini verelim.

Tanım 1.3. [11] Bağlantılı bir G grafını, bağlantısız hale getirmek için graftan atılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt bağlantılılık sayısı (edge connectivity) denir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir ayrıca

$$\lambda(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S|\}$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 1.4. [3] Bağlantılı bir G grafindan S ayrıt kesim kümesi atıldığında geriye kalan $G - S$ grafının bileşen sayısı $w(G - S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere ayrıt kopma derecesi (edge rupture degree)

$$r'(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S| - m(G - S) : w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.5. [1] Bağlantılı bir G grafının ayrıt saçılım sayısı (edge scattering number), S ayrıt kesim kümesi, $G - S$ grafindaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere

$$es(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi, önce komşuluk kavramı verilmek üzere komşulukla ilgili olan bazı önemli zedelenebilirlik ölçümlerini verelim.

Bir casus ağında (spy network), birkaç ajan (merkez) arasındaki haberleşmeyi sağlayan bir şifre (bağlantı) çözüldüğünde, bu müdahaleye komşu olan diğer ajanların arasındaki haberleşme de zarara uğrayacaktır. Benzer şekilde bir ajan deşifre olduğunda, bu ajanla bağlantılı olan ajan veya ajanlar da deşifre olacaktır [2]. Buradaki düşüncelerden yola çıkarak komşu bağlantılılık sayısı (neighbor connectivity) [12,14], ayrıt komşuluk bağlantılılık sayısı (edge neighbor connectivity) [18], ayrıt komşuluk saçılma sayısı (edge neighbor scattering number) [17], ayrıt komşuluk kopma derecesi (edge neighbor rupture degree) [2] gibi önemli zedelenebilirlik ölçümleri tanımlanmıştır. Bu önemli ölçümlerin tanımını vermeden önce komşuluk kavramı tanımlanmalıdır.

Bir G grafinin tepeler kümesi $V(G)$, ayrıtlar kümesi $E(G)$ olmak üzere

$$N(e) = \{e, f \in E(G) \mid f \neq e; e \text{ ile } f \text{ komşu}\}$$

kümesine e ayrıtının açık komşuluğu ve $N[e] = N(e) \cup \{e\}$ kümesine e ayrıtının kapalı komşuluğu denir. $N[e]$ kapalı komşuluğunda graftan atılan e ayrıtına subverted ayrıt ve tüm ayrıtları subverted olan $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kümesine G grafinin subversion stratejisi denir. S kümesinin tüm ayrıtları graftan atıldığında geriye kalan G/S grafinin bileşen sayısı $w(G/S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G/S)$ ile gösterilir. Şimdi yukarıda bahsedilmiş olan komşuluk ölçümlerini verelim.

Tanım 1.6. [12,14] S , bir G grafinin ayrıt subversion stratejisi olmak üzere G grafini bağlantısız hale getirmek için atılması gereken en az tepe sayısına komşu bağlantılılık sayısı (neighbor connectivity) denir ve $NC(G)$ ile gösterilir ayrıca

$$NC(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\}$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 1.7. [18] Bir G grafini, bağlantısız bir graf haline getirmek için graftan atılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt komşuluk bağlantılılık sayısı (edge

neighbor connectivity) denir ve $\lambda_{NB}(G)$ ile gösterilir ayrıca S , bir G grafinin ayrıt subversion stratejisi olmak üzere

$$\lambda_{NB}(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S|\}$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 1.8. [17] S , bir G grafinin ayrıt subversion stratejisi ve $w(G/S)$, G/S grafinin bileşen sayısı olmak üzere G grafinin ayrıt komşuluk saçılma sayısı (edge neighbor scattering number)

$$ENS(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G/S) - |S|\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.9. [2] Bir G grafinin ayrıt komşuluk kopma derecesi, S bir ayrıt subversion stratejisi, G/S grafindeki bileşen sayısı $w(G/S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G/S)$ olmak üzere

$$ENR(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G/S) - |S| - m(G/S) : w(G/S) \geq 1\}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki verilen ölçümlerden görüleceği üzere bir graf zarara uğradığında göstereceği davranış açısından zedelenebilirliğini incelemek önemli olacaktır. Ayrıca bir grafin tepe atma stratejisi yerine ayrıt atma stratejisi daha ilginç olacaktır. Çünkü bir grafin zedelenebilirlik ölçümü için farklı bir yaklaşım elde edilecektir. Bu düşünceden yola çıkarak bu tezde, zedelenebilirlik ölçümlerinden ayrıt komşuluk kopma derecesi (ENR) ve ayrıt saçılım sayısı (es) ele alınmış ve aralarındaki ilişkilendirmeler yapılmıştır.

2. GENEL TANIMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılmış olan gerekli tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1. [15] Herhangi bir G grafinin bir v tepesine bağlı ayrıtlarının sayısına, o tepenin derecesi denir ve $\deg(v)$ ile gösterilir. Bir tepenin derecesi sıfır ise o tepeye izole tepe denir.

Tanım 2.2. [15] Bir G grafinin tepe dereceleri içinde en küçüğüne minimum tepe derecesi denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. [15] Bir G grafinin tepe dereceleri içinde en büyüğüne maximum tepe derecesi denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. [8] $V(G)$, G grafinin tepeler kümesi olmak üzere, $V(G)$ kümesinde birbirine komşu olmayan maksimum tepe sayısına bağımsızlık sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. [15] Bir G grafinin bazı tepelerini veya ayrıtlarını graftan çıkardığımızda bileşen sayısı artıyor veya sabit kalıyorsa atılan tepelerin veya ayrıtların kümesine kesim kümesi denir ve $|S|$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. [15] Bir G grafinin, her bir tepesinden grafin diğer tüm tepelerine ulaşılabilirse bu grafa bağlantılı (connected) graf denir.

Tanım 2.7. [11] Herhangi bir G grafinin komşu (bitişik) olan tepeler arasındaki ayrıtların kaldırılıp, komşu olmayan tepelere ayrıt eklenmesiyle oluşan yeni grafa bir grafin tümleyen grafi ya da tümleyeni denir ve $\overline{G}$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. [4,15] G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı (cartesian product) $G_1 \times G_2$ ile gösterilir ve $V(G_1) \times V(G_2)$ grafin tepeler kümesini oluşturur. Bu tepelerden ikisi (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) olsun. Eğer $u_1=v_1$ ve u_2, v_2 'ye bitişik ise ya da $u_2=v_2$ ve u_1, v_1 'e bitişik ise bu iki tepe bir ayrıtla birleştirilir.

Tanım 2.9. [4,11] G_1 ve G_2 iki graf olsun. İki grafın birleşimi (union) $G = G_1 \cup G_2$, tepeler kümesi $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve ayrıtlar kümesi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ 'dir.

Tanım 2.10. [4,11] G_1 ve G_2 graflarının toplamı (join) G_1+G_2 ile gösterilir ve tepeler kümesi $V(G_1)+V(G_2)$ dir. G_1+G_2 grafında G_1 grafının her bir tepesi G_2 grafının her bir tepesine bir ayrıt ile birleştirilir.

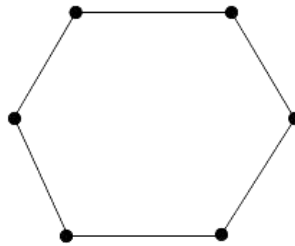
Tanım 2.11. [4,10] $G_1, G_2, \dots, G_n$ graflarının ardışık toplamı (sequential join) $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ şeklinde gösterilir ve $G_1 + G_2 + \dots + G_n = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{n-1} + G_n)$ dir.

Tanım 2.12. [15] Başlangıç ve bitiş tepeleri tek dereceli olup diğer tepeleri iki dereceli olan grafa yol graf (path graph) denir ve n bir tam sayı olmak üzere P_n şeklinde gösterilir. Şekil 2.1'de P_5 yol grafı gösterilmiştir.



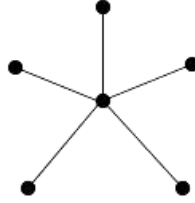
Şekil 2.1. P_5 yol graf

Tanım 2.13. [15] Bir grafın tüm tepelerinin derecesi iki olan grafa çevre graf denir ve C_n ile gösterilir. Şekil 2.2'de C_6 çevre grafı gösterilmiştir.



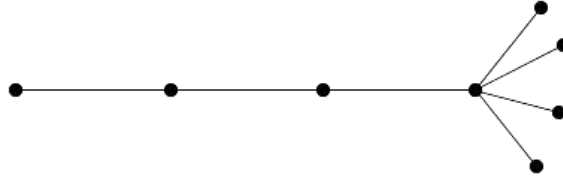
Şekil 2.2. C_6 çevre graf

Tanım 2.14. [15] $n+1$ tepeli bir grafın n tane tepesinin derecesi bir ve merkezindeki tepesinin derecesi n olmak üzere $n+1$ tepeli grafa yıldız (star) graf denir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir. Şekil 2.3’de $K_{1,5}$ yıldız grafi gösterilmiştir.



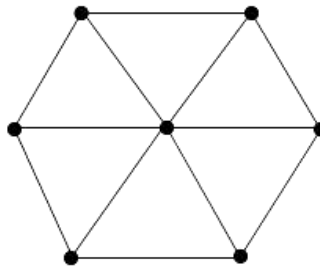
Şekil 2.3. $K_{1,5}$ yıldız graf

Tanım 2.15. [5] $K_{1,r}$ yıldız grafının merkez tepesine, $n-1$ tepeli P_{n-1} yol grafının eklenmesi ile oluşan grafa kuyruklu yıldız grafi denir ve $C_{n,m}$ ile gösterilir. Şekil 2.4’de $C_{4,4}$ kuyruklu yıldız grafi gösterilmiştir.



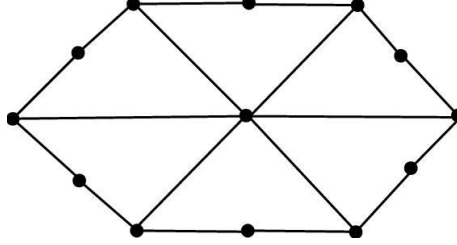
Şekil 2.4. $C_{4,4}$ kuyruklu yıldız graf

Tanım 2.16. [15] n tepeli bir çevre grafın, her bir tepesine komşu olacak şekilde merkezine bir tepe eklenmesiyle oluşan grafa tekerlek graf denir ve $W_{1,n}$ ile gösterilir. Şekil 2.5’de $W_{1,6}$ tekerlek grafi gösterilmiştir.



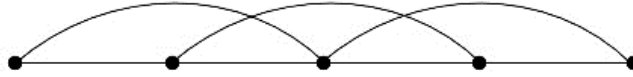
Şekil 2.5. $W_{1,6}$ tekerlek graf

Tanım 2.17. [9] Bir tekerlek grafin dış çevresi üzerindeki komşu olan tepelerin arasına bir tepe eklenmesiyle oluşan grafa gear graf denir ve G_n ile gösterilir. Bir G_n gear grafında $2n+1$ tepe ve $3n$ ayrıt vardır. Şekil 2.6’da G_6 gear grafi gösterilmiştir.



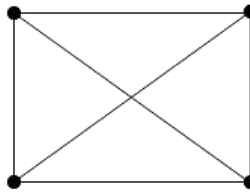
Şekil 2.6. G_6 gear graf

Tanım 2.18. [13] d . dereceden bir G_n kuvvet grafi, G_n grafindaki uzaklığı en fazla d olan tüm tepe çiftlerinin arasına bir ayrıt eklenmesiyle oluşur. Bu graf işlemine kuvvet işlemi (power) denir ve G_n^d ile gösterilir. $d=1$ olduğunda $G_n^1 = G_n$ olur. Şekil 2.7’de P_5^2 kuvvet grafi gösterilmiştir.



Şekil 2.7. P_5^2 kuvvet graf

Tanım 2.19. [15] Bir grafin her bir tepesi, grafin diğer tepelerine komşu ise bu grafa tam graf (complete graph) denir ve n tepeli bir tam graf K_n ile gösterilir. Şekil 2.8’de K_4 tam grafi gösterilmiştir.



Şekil 2.8. K_4 tam graf

3. AYRIT KOMŞULUK KOPMA DERECEŚİ (EDGE NEIGHBOR RUPTURE DEGREE)

Bu bölümde, ayrıt komşuluk kopma derecesinin tanımı, bilinen ve hesaplanan bazı teoremler verilmiştir. Daha sonra bazı özel grafların ve graf işlemlerinin ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

3.1. Tanım ve Teoremler

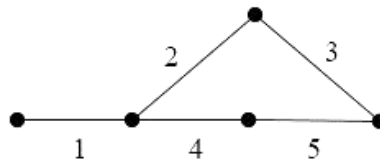
Bu kısımda, ayrıt komşuluk kopma derecesinin tanımı ve bazı bilinen teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1.1. [2] Bir G grafının ayrıt komşuluk kopma derecesi, S bir ayrıt subversion stratejisi, G/S grafindaki bileşen sayısı $w(G/S)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G/S)$ olmak üzere

$$ENR(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G/S) - |S| - m(G/S) : w(G/S) \geq 1\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.1. Şekil 3.1’de gösterilen G grafının ayrıt komşuluk kopma derecesini hesaplayalım. S , G grafının bir ayrıt subversion stratejisi olsun. Bu durumda,



Şekil 3.1. Bağlantılı bir G grafı

$|S| = 1$ olsun. S kümeleri

- $S_1 = \{1\}$ ise $w(G/S_1) = 1$, $m(G/S_1) = 3$ olur ve $ENR_1(G) = 1 - 1 - 3 = -3$ bulunur.
- $S_2 = \{2\}$ ise $w(G/S_2) = 2$, $m(G/S_2) = 2$ olur ve $ENR_2(G) = 2 - 1 - 2 = -1$ bulunur.

- $S_3 = \{3\}$ ise $w(G/S_3) = 1$, $m(G/S_3) = 3$ olur ve $ENR_3(G) = 1 - 1 - 3 = -3$ bulunur.
- $S_4 = \{4\}$ ise $w(G/S_4) = 2$, $m(G/S_4) = 2$ olur ve $ENR_4(G) = 2 - 1 - 2 = -1$ bulunur.
- $S_5 = \{5\}$ ise $w(G/S_5) = 1$, $m(G/S_5) = 3$ olur ve $ENR_5(G) = 1 - 1 - 3 = -3$ bulunur.

$|S| = 2$ olsun. S kümeleri

- $S_6 = \{1,2\}$ ise $w(G/S_6) = 1$, $m(G/S_6) = 2$ olur ve $ENR_6(G) = 1 - 2 - 2 = -3$ bulunur.
- $S_7 = \{1,3\}$ ise $w(G/S_7) = 1$, $m(G/S_7) = 1$ olur ve $ENR_7(G) = 1 - 2 - 1 = -2$ bulunur.
- $S_8 = \{1,4\}$ ise $w(G/S_8) = 1$, $m(G/S_8) = 2$ olur ve $ENR_8(G) = 1 - 2 - 2 = -3$ bulunur.
- $S_9 = \{1,5\}$ ise $w(G/S_9) = 1$, $m(G/S_9) = 1$ olur ve $ENR_9(G) = 1 - 2 - 1 = -2$ bulunur.
- $S_{10} = \{2,3\}$ ise $w(G/S_{10}) = 2$, $m(G/S_{10}) = 1$ olur ve $ENR_{10}(G) = 2 - 2 - 1 = -1$ bulunur.
- $S_{11} = \{2,4\}$ ise $w(G/S_{11}) = 2$, $m(G/S_{11}) = 1$ olur ve $ENR_{11}(G) = 2 - 2 - 1 = -1$ bulunur.
- $S_{12} = \{3,5\}$ ise $w(G/S_{12}) = 1$, $m(G/S_{12}) = 2$ olur ve $ENR_{12}(G) = 1 - 2 - 2 = -3$ bulunur.
- $S_{13} = \{4,5\}$ ise $w(G/S_{13}) = 2$, $m(G/S_{13}) = 1$ olur ve $ENR_{13}(G) = 2 - 2 - 1 = -1$ bulunur.
- $S_{14} = \{2,5\}$ ise $w(G/S_{14}) = 1$, $m(G/S_{14}) = 1$ olur ve $ENR_{14}(G) = 1 - 2 - 1 = -2$ bulunur.
- $S_{15} = \{3,4\}$ ise $w(G/S_{15}) = 1$, $m(G/S_{15}) = 1$ olur ve $ENR_{15}(G) = 1 - 2 - 1 = -2$ bulunur.

$|S| = 3$ olsun. S kümeleri

- $S_{16} = \{1,2,3\}$ ise $w(G/S_{16}) = 1$, $m(G/S_{16}) = 1$ olur ve $ENR_{16}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.

- $S_{17} = \{1,2,4\}$ ise $w(G/S_{17}) = 1$, $m(G/S_{17}) = 1$ olur ve $ENR_{17}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.
- $S_{18} = \{1,4,5\}$ ise $w(G/S_{18}) = 1$, $m(G/S_{18}) = 1$ olur ve $ENR_{18}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.
- $S_{19} = \{1,3,5\}$ ise $w(G/S_{19}) = 0$, $m(G/S_{19}) = 0$ olur ve ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanamaz.
- $S_{20} = \{2,3,4\}$ ise $w(G/S_{20}) = 1$, $m(G/S_{20}) = 1$ olur ve $ENR_{20}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.
- $S_{21} = \{3,4,5\}$ ise $w(G/S_{21}) = 1$, $m(G/S_{21}) = 1$ olur ve $ENR_{21}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.
- $S_{22} = \{2,3,5\}$ ise $w(G/S_{22}) = 1$, $m(G/S_{22}) = 1$ olur ve $ENR_{22}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.
- $S_{23} = \{1,2,5\}$ ise $w(G/S_{23}) = 0$, $m(G/S_{23}) = 0$ olur ve ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanamaz.
- $S_{24} = \{2,4,5\}$ ise $w(G/S_{24}) = 1$, $m(G/S_{24}) = 1$ olur ve $ENR_{24}(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ bulunur.

$|S| = 4$ olsun. Her S kümesi için $w(G/S) = 0$, $m(G/S) = 0$ olur ve ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanamaz.

$|S| = 5$ olsun. Her S kümesi için $w(G/S) = 0$, $m(G/S) = 0$ olur ve ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanamaz.

Sonuç olarak ayrıt komşuluk kopma derecesi tanımından

$$ENR(G) = \max\{-3, -3, -3, -1, -1, -3, -2, -3, -2, -1, -1, -3, -1, -2, -2, -3, -3, -3, \emptyset, -3, -3, -3, \emptyset, -3, \emptyset, \emptyset\} = -1$$

bulunur.

Aşağıda ayrıt komşuluk kopma derecesi ile ilgili bilinen bazı genel teoremler verilmiştir.

Teorem 3.1.1. [2] n tepeli bir bağlantılı G grafi için

$$ENR(G) \leq n - 4 \text{ d\u00fcr.}$$

Teorem 3.1.2. [2] G , n tepeli ba\u011flantılı graf, ba\u011fımsızlık sayısı $\alpha(G)$ ve ayırıt komşuluk ba\u011flantılılık sayısı $\lambda_{NB}(G)$ olmak \u00fczere

$$ENR(G) \leq \alpha(G) - \lambda_{NB}(G) - 1 \text{ d\u00fcr.}$$

3.2. Bazı \u00d6zel Grafların Ayırıt Komşuluk Kopma Derecesi

Bu kısımda, bazı \u00f6zel grafların ayırıt komşuluk kopma derecesi verilmiştir.

Teorem 3.2.1. [2] n tam sayı olmak \u00fczere

a) P_n ($n \geq 4$) yol grafi i\u00e7in

$$ENR(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1, & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ d\u00fcr.}$$

b) C_n ($n \geq 6$) \u00e7evre grafi i\u00e7in

$$ENR(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ d\u00fcr.}$$

c) W_n ($n \geq 5$) tekerlek grafi i\u00e7in

$$ENR(W_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 0, 1 \pmod{3} \end{cases} \text{ d\u00fcr.}$$

d) K_n tam grafi i\u00e7in

$$ENR(K_n) = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ d\u00fcr.}$$

Ařa\u011fıda bazı \u00f6zel graflar i\u00e7in bizim tarafımızdan elde edilen teoremler verilecektir.

Teorem 3.2.2. $C_{n,m}$ ($n \geq 6$ ve $m \geq 2$) kuyruklu yıldız grafi i\u00e7in

$$ENR(C_{n,m}) = \begin{cases} m - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ m - 2, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ d\u00fcr.}$$

İspat 3.2.2. S , $C_{n,m}$ grafinin bir ayrıt subversion stratejisi ve $|S| = r$ olsun. Bu durumda, ispat iki durum da incelenmelidir.

Durum 1. $n \equiv 0 \pmod{3}$ için üç tane alt durum elde edilir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \frac{n-3}{3}$ olduğunda $w(C_{n,m}/S) \leq m + r$ ve $m(C_{n,m}/S) \geq 2$ olur.

Buradan,

$$w(C_{n,m}/S) - |S| - m(C_{n,m}/S) \leq m + r - r - 2 = m - 2 \quad (1)$$

olur.

Alt durum 2. $r \geq \frac{n-3}{3} + 1$ olduğunda $w(C_{n,m}/S) \leq m + r$ ve $m(C_{n,m}/S) \geq 1$ olur.

Buradan,

$$w(C_{n,m}/S) - |S| - m(C_{n,m}/S) \leq m + r - r - 1$$

ve

$$ENR(C_{n,m}) \leq m - 1 \quad (2)$$

elde edilir.

Alt durum 3. Diğer taraftan, $|S^*| = \frac{n-3}{3} + 1$ olacak şekilde bir ayrıt subversion stratejisi S^* kolayca seçilebilir ki $w(C_{n,m}/S^*) = m + \frac{n-3}{3} + 1$ ve $m(C_{n,m}/S^*) = 1$

elde edilir. Buradan,

$$ENR(C_{n,m}) = m - 1, n \equiv 0 \pmod{3} \quad (3)$$

bulunur.

Durum 2. $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ için üç tane alt durum elde edilir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ olduğunda $w(C_{n,m}/S) \leq m + r$ ve $m(C_{n,m}/S) \geq 3$

olur. Buradan,

$$w(C_{n,m}/S) - |S| - m(C_{n,m}/S) \leq m + r - r - 3 = m - 3 \text{ tür.} \quad (4)$$

Alt durum 2. $r \geq \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 1$ olduğunda $w(C_{n,m}/S) \leq m + r$ ve $m(C_{n,m}/S) \geq 2$ olur. Buradan,

$$w(C_{n,m}/S) - |S| - m(C_{n,m}/S) \leq m + r - r - 2$$

ve

$$ENR(C_{n,m}) \leq m - 2 \quad (5)$$

elde edilir.

Alt durum 3. Diğer taraftan, $|S^*| = \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 1$ olacak şekilde bir ayrıt subversion stratejisi S^* kolayca seçilebilir ki $w(C_{n,m}/S^*) = m + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 1$ ve $m(C_{n,m}/S^*) = 2$ elde edilir. Buradan,

$$ENR(C_{n,m}) = m - 2, n \not\equiv 0 \pmod{3} \quad (6)$$

bulunur.

(1), (2), (3), (4), (5) ve (6)'dan

$$ENR(C_{n,m}) = \begin{cases} m - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ m - 2, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. G_n ($n \geq 3$) gear grafinin $(2n+1)$ tepe sayısı ve $(3n)$ ayrıt sayısı olmak üzere

$$ENR(G_n) = -1 \text{ dir.}$$

İspat 3.2.3. S , G_n gear grafinin bir ayrit subversion stratejisi olsun. $|S| = r$ olduğunda $w(G_n/S) \leq r$ ve $m(G_n/S) \geq 1$ olacaktır. Buradan,

$$w(G_n/S) - |S| - m(G_n/S) \leq r - r - 1 = -1 \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $|S^*| = n$ olduğunda $w(G_n/S^*) = n$ ve $m(G_n/S^*) = 1$ olur. Buradan,

$$ENR(G_n) = n - n - 1 = -1$$

elde edilir.

3.3. Graf İşlemleri ve Ayrit Komşuluk Kopma Derecesi

Bu kısımda, bazı grafların, graf işlemlerinin ayrit komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

3.3.1. Kuvvet İşlemi

Bu kısımda, P_n yol ve C_n çevre graflarının kuvvet işlemlerinin ayrit komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 3.3.1.1. P_n^d ($n \geq 7$ ve $d \neq 2$), P_n yol grafin kuvvet grafi olsun. Bu durumda,

$$ENR(P_n^d) = \begin{cases} 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 1, 3 \pmod{4}, (n \geq d + 3) \\ \frac{4-n}{2}, & n \equiv 0, 2 \pmod{4}, (n \geq d + 2) \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat 3.3.1.1. S , P_n^d grafinin bir ayrit subversion stratejisi ve $|S| = r$ olsun. O halde ispat iki durum da incelenmelidir.

Durum 1. $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$ için üç tane alt durum elde edilir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3$ olduğunda $r = 1$ ise $w(P_n^d/S) = 1$ ve $m(P_n^d/S) \geq n - 2$ ayrıca $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3$ için $w(P_n^d/S) \leq 2$ ve $m(P_n^d/S) \geq 3$ olur. Buradan,

$$2 - n \leq ENR(P_n^d) \leq 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (7)$$

olur.

Alt durum 2. $r \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ olduğunda $w(P_n^d/S) \leq 2$ ve $m(P_n^d/S) \geq 2$ olur. Buradan,

$$w(P_n^d/S) - |S| - m(P_n^d/S) \leq 2 - r - 2 = -r$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$ENR(P_n^d) \leq \max\{-r\}$$

olur. $f(r) = -r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ 'de alır. Böylece,

$$ENR(P_n^d) \leq 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (8)$$

elde edilir.

Alt durum 3. P_n^d grafında, bir S^* ayrıt subversion stratejisi vardır öyle ki $|S^*| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$, $w(P_n^d/S^*) = 2$ ve $m(P_n^d/S^*) = 2$ elde edilir. Buradan

$$ENR(P_n^d) = 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \equiv 1, 3 \pmod{4}, (n \geq d + 3) \quad (9)$$

bulunur.

Durum 2. $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ için üç tane alt durum elde edilir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 2$ olduğunda $r = 1$ ise $w(P_n^d/S) = 1$ ve $m(P_n^d/S) \geq n - 2$ ayrıca $r = \frac{n}{2} - 2$ ise $w(P_n^d/S) \leq 2$ ve $m(P_n^d/S) \geq 2$ olur. Buradan,

$$2 - n \leq ENR(P_n^d) \leq 2 - \frac{n}{2} \quad (10)$$

bulunur.

Alt durum 2. $r \geq \frac{n}{2} - 1$ olduğunda $w(P_n^d/S) \leq 2$ ve $m(P_n^d/S) \geq 1$ olur. Bu durumda

$$w(P_n^d/S) - |S| - m(P_n^d/S) \leq 2 - r - 1$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$ENR(P_n^d) \leq \max\{1 - r\}$$

olur. $f(r) = 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = \frac{n}{2} - 1$ 'de alır. Böylece,

$$ENR(P_n^d) \leq 2 - \frac{n}{2} \quad (11)$$

elde edilir.

Alt durum 3. P_n^d grafında, bir S^* ayrıt subversion stratejisi vardır öyle ki $|S^*| = \frac{n}{2} - 1$, $w(P_n^d/S^*) = 2$ ve $m(P_n^d/S^*) = 1$ dir. Buradan,

$$ENR(P_n^d) = \frac{4-n}{2}, n \equiv 0, 2 \pmod{4}, (n \geq d + 2) \quad (12)$$

bulunur.

(7), (8), (9), (10), (11) ve (12)'den

$$ENR(P_n^d) = \begin{cases} 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 1, 3 \pmod{4}, (n \geq d + 3) \\ \frac{4-n}{2}, & n \equiv 0, 2 \pmod{4}, (n \geq d + 2) \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1.2. P_n^d ($n \geq 7$ ve $d \neq 2$) grafında $n=d+1$ olursa, P_n^d grafi tam grafa izomorf olacaktır. Teorem 3.2.1'in d şikkından

$$ENR(K_n) = ENR(P_n^d) = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

olur.

Sonuç 3.3.1.3. P_n^2 ($n \geq 4$), yol grafının kuvvet grafi olmak üzere

$$ENR(P_n^2) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1, & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.3.1.4. P_n^d ($n \geq 4$) grafi için $d=1$ olduğunda Teorem 3.2.1'in a şikkından

$$ENR(P_n^1) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1, & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

olduğu açıkça görülür.

Teorem 3.3.1.5. C_n^d ($n \geq 9$ ve $d \neq 2$), C_n çevre grafın kuvvet grafi olsun. O halde

$$ENR(C_n^d) = \begin{cases} 1 - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, & n \equiv 1, 3 \pmod{4}, (n \geq d+5) \\ \frac{4-n}{2}, & n \equiv 0, 2 \pmod{4}, (n \geq d+4) \end{cases} \text{ dır.}$$

İspat 3.3.1.5. İspat, Teorem 3.3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.3.1.6. C_n^d ($n \geq 9$ ve $d \neq 2$) grafında $n=d+2$ olursa, C_n^d grafi tam grafa izomorf olacaktır. Teorem 3.2.1'in d şikkından

$$ENR(K_n) = ENR(C_n^d) = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

olur.

Sonuç 3.3.1.7. C_n^2 ($n \geq 6$), çevre grafinin kuvvet grafi olmak üzere

$$ENR(C_n^2) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.3.1.8. C_n^d ($n \geq 6$) grafi için $d=1$ olduğunda Teorem 3.2.1'in b şikkından

$$ENR(C_n^1) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

olduğu açıkça görülür.

3.3.2. Tümleyen İşlemi

Bu kısımda, tümleyen işleminin bazı graflardaki ayırıt komşuluk kopma dereceleri hesaplanmıştır.

Teorem 3.3.2.1. $\overline{P}_n$ ($n \geq 4$), bir yol grafin tümleyen grafi olmak üzere, ayırıt komşuluk kopma derecesi

$$ENR(\overline{P}_n) = \begin{cases} 2 - \frac{n}{2} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & n \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \text{ dır.}$$

İspat 3.3.2.1. $S, \overline{P}_n$ grafinin bir ayırıt subversion stratejisi ve $|S| = r$ olsun. O halde ispat iki durumda incelenmelidir.

Durum 1. $n \equiv 0 \pmod{2}$ için üç tane alt durum elde edilir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 2$ olduğunda $r = 1$ için $w(\overline{P}_n/S) = 1$ ve $m(\overline{P}_n/S) \geq n - 2$ ayrıca $r = \frac{n}{2} - 2$ için $w(\overline{P}_n/S) = 1$ ve $m(\overline{P}_n/S) \geq 4$ elde edilir. Buradan, ayırıt komşuluk kopma derecesi aralığı

$$2 - n \leq ENR(\overline{P}_n) \leq -1 - \frac{n}{2} \quad (13)$$

olur.

Alt durum 2. $r \geq \frac{n}{2} - 1$ olduğunda $w(\overline{P_n}/S) \leq 2$ ve $m(\overline{P_n}/S) \geq 1$ olur. Buradan

$$w(\overline{P_n}/S) - |S| - m(\overline{P_n}/S) \leq 2 - r - 1$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$ENR(\overline{P_n}) \leq \max\{1 - r\}$$

olur. $f(r) = 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = \frac{n}{2} - 1$ 'de alır. Böylece,

$$ENR(\overline{P_n}) \leq 2 - \frac{n}{2} \quad (14)$$

elde edilir.

Alt durum 3. $S^*, \overline{P_n}$ grafında bir ayrıt subversion stratejisi olsun. $|S^*| = \frac{n}{2} - 1$, $w(\overline{P_n}/S^*) = 2$ ve $m(\overline{P_n}/S^*) = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan,

$$ENR(\overline{P_n}) = 2 - \frac{n}{2}, n \equiv 0 \pmod{2} \quad (15)$$

bulunur.

Durum 2. $n \not\equiv 0 \pmod{2}$ için üç alt durumda incelenmelidir.

Alt durum 1. $1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ olduğunda $r = 1$ için $w(\overline{P_n}/S) = 1$ ve $m(\overline{P_n}/S) \geq n - 2$ ayrıca $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ için $w(\overline{P_n}/S) = 1$ ve $m(\overline{P_n}/S) \geq 5$ elde edilir. Buradan, ayrıt komşuluk kopma derecesi aralığı

$$2 - n \leq ENR(\overline{P_n}) \leq -2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (16)$$

olur.

Alt durum 2. $r \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ olduğunda $w(\overline{P_n}/S) \leq 2$ ve $m(\overline{P_n}/S) \geq 2$ olur. Buradan

$$w(\overline{P_n}/S) - |S| - m(\overline{P_n}/S) \leq 2 - r - 2$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$ENR(\overline{P_n}) \leq \max\{-r\}$$

elde edilir. $f(r) = -r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ 'de alır.

Böylece,

$$ENR(\overline{P_n}) \leq 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (17)$$

bulunur.

Alt durum 3. $S^*, \overline{P_n}$ grafının bir ayrıt subversion stratejisi olsun. $|S^*| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, $w(\overline{P_n}/S^*) = 2$ ve $m(\overline{P_n}/S^*) = 2$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan,

$$ENR(\overline{P_n}) = 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \not\equiv 0 \pmod{2} \quad (18)$$

bulunur.

(13), (14), (15), (16), (17) ve (18)'den

$$ENR(\overline{P_n}) = \begin{cases} 2 - \frac{n}{2} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & n \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2.2. $\overline{C_n}$ ($n \geq 6$), bir çevre grafın tümleyen grafı olmak üzere ayrıt komşuluk kopma derecesi

$$ENR(\overline{C_n}) = \begin{cases} 2 - \frac{n}{2} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat 3.3.2.2. İspat, Teorem 3.3.2.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

3.4. Gear Grafin Graf İşlemleri

Bu kısımda, gear grafin graf işlemlerinin ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

3.4.1. Tümleyen İşlemi

Bu kısımda, gear grafların tümleyen işleminin ayrıt komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 3.4.1.1. $\overline{G_n}$ ($n \geq 3$), G_n gear grafinin tümleyen grafi olmak üzere

$$ENR(\overline{G_n}) = 1 - n \text{ dir.}$$

İspat 3.4.1.1. S , $\overline{G_n}$ gear grafinin bir ayrıt subversion stratejisi ve $|S| = r$ olsun. İspat için iki durum incelenmelidir.

Durum 1. $1 \leq r \leq n - 2$ ise $r = 1$ için $w(\overline{G_n}/S) \leq 1$ ve $m(\overline{G_n}/S) \geq 2n + 1 - 2 = 2n - 1$, ayrıca $r = n - 2$ için $w(\overline{G_n}/S) \leq 1$ ve $m(\overline{G_n}/S) \geq 5$ olur. Buradan ayrıt komşuluk kopma derecelerinin aralığı

$$-2n + 1 \leq ENR(\overline{G_n}) \leq -2 - n \quad (19)$$

olur.

Durum 2. $r \geq n - 1$ ise $w(\overline{G_n}/S) \leq 2$ ve $m(\overline{G_n}/S) \geq 2$ olur. Buradan,

$$w(\overline{G_n}/S) - |S| - m(\overline{G_n}/S) \leq 2 - r - 2$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$ENR(\overline{G_n}) \leq \max\{-r\}$$

olur. $f(r) = -r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = n - 1$ 'de alır ve

$$ENR(\overline{G_n}) \leq 1 - n \quad (20)$$

elde edilir.

$\overline{G_n}$ tümleyen grafında, $|S^*| = n - 1$ olan bir $S^* \in E(\overline{G_n})$ ayırıt subversion stratejisi vardır ki $w(\overline{G_n}/S^*) = 2$ ve $m(\overline{G_n}/S^*) = 2$ olacaktır. Ayırıt komşuluk kopma derecesi tanımından,

$$ENR(\overline{G_n}) = 2 - n + 1 - 2 = 1 - n \quad (21)$$

bulunur.

(19), (20) ve (21)'den

$$ENR(\overline{G_n}) = 1 - n$$

elde edilir.

3.4.2. Kartezyen Çarpım İşlemi

Aşağıda G_n gear grafının K_2 tam graf ile kartezyen çarpım işleminin ayırıt komşuluk kopma derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 3.4.2.1. K_2 tam graf ve G_n ($n \geq 3$) gear graf olmak üzere

$$ENR(K_2 \times G_n) = -1 \text{ dir.}$$

İspat 3.4.2.1. S , $K_2 \times G_n$ 'nin bir ayırıt subversion stratejisi ve $|S| = r$ olsun. İspat için üç durum incelenmelidir.

Durum 1. $r \leq n$ ise $w((K_2 \times G_n)/S) \leq r + 1$ ve $m((K_2 \times G_n)/S) \geq 2$ olur. Buradan,

$$w((K_2 \times G_n)/S) - |S| - m((K_2 \times G_n)/S) \leq r + 1 - r - 2 = -1$$

ve ayrıt komşuluk kopma derecesi tanımından

$$ENR(K_2 \times G_n) \leq -1 \quad (22)$$

olur.

Durum 2. $r > n$ ise $w((K_2 \times G_n)/S) \leq r$ ve $m((K_2 \times G_n)/S) \geq 1$ olur. Buradan,

$$w((K_2 \times G_n)/S) - |S| - m((K_2 \times G_n)/S) \leq r - r - 1 = -1$$

ve ayrıt komşuluk kopma derecesi tanımından

$$ENR(K_2 \times G_n) \leq -1 \quad (23)$$

olur.

Durum 3. $|S^*| = n$ olduğunda $w(G_n/S^*) = n + 1$ ve $m(G_n/S^*) = 2$ olacaktır. Dolayısıyla

$$ENR(K_2 \times G_n) = -1 \quad (24)$$

elde edilir.

(22), (23) ve (24)'den

$$ENR(K_2 \times G_n) = -1$$

bulunur.

4. AYRIT SAÇILIM SAYISI (EDGE SCATTERING NUMBER)

Bu bölümde, ayrıt saçılım sayısının tanımı, bilinen ve hesaplanan bazı teoremler verilmiştir. Daha sonra bazı özel grafların ve graf işlemlerinin ayrıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

4.1. Tanım ve Teoremler

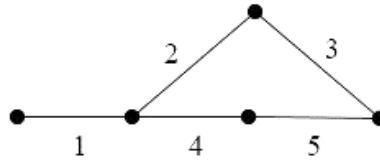
Bu kısımda, ayrıt saçılım sayısının tanımı ve bazı bilinen teoremler verilmiştir.

Tanım 4.1.1. [1] Bağlantılı bir G grafinin ayrıt saçılım sayısı (edge scattering number), S ayrıt kesim kümesi, $G - S$ grafindaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere

$$es(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4.1.1. Şekil 4.1'deki G grafinin ayrıt saçılım sayısını hesaplayalım. S , G grafinin bir ayrıt kesim kümesi olsun. Bu durumda,



Şekil 4.1. Bağlantılı bir G grafi

$|S| = 1$ olsun. S kümeleri

- $S_1 = \{1\}$ ise $w(G - S_1) = 2$ olur ve $es_1(G) = 2 - 1 = 1$.
- $S_2 = \{2\}$ ise $w(G - S_2) = 1$ olur ve bu ise tanımla çelişmektedir. Bu yüzden $es(G)$ hesaplanamaz.
- $S_3 = \{3\}$ ise $w(G - S_3) = 1$ olur ve bu ise tanımla çelişmektedir. Bu yüzden $es(G)$ hesaplanamaz.

- $S_4 = \{4\}$ ise $w(G - S_4) = 1$ olur ve bu ise tanımla çelişmektedir. Bu yüzden $es(G)$ hesaplanamaz.
- $S_5 = \{5\}$ ise $w(G - S_5) = 1$ olur ve bu ise tanımla çelişmektedir. Bu yüzden $es(G)$ hesaplanamaz.

$|S| = 2$ olsun. S kümeleri

- $S_6 = \{1,2\}$ ise $w(G - S_6) = 2$ olur ve $es_2(G) = 0$,
- $S_7 = \{1,3\}$ ise $w(G - S_7) = 2$ olur ve $es_3(G) = 0$,
- $S_8 = \{1,4\}$ ise $w(G - S_8) = 2$ olur ve $es_4(G) = 0$,
- $S_9 = \{1,5\}$ ise $w(G - S_9) = 2$ olur ve $es_5(G) = 0$,
- $S_{10} = \{2,3\}$ ise $w(G - S_{10}) = 2$ olur ve $es_6(G) = 0$,
- $S_{11} = \{2,4\}$ ise $w(G - S_{11}) = 2$ olur ve $es_7(G) = 0$,
- $S_{12} = \{3,5\}$ ise $w(G - S_{12}) = 2$ olur ve $es_8(G) = 0$,
- $S_{13} = \{4,5\}$ ise $w(G - S_{13}) = 2$ olur ve $es_9(G) = 0$,
- $S_{14} = \{2,5\}$ ise $w(G - S_{14}) = 2$ olur ve $es_{10}(G) = 0$,
- $S_{15} = \{3,4\}$ ise $w(G - S_{15}) = 2$ olur ve $es_{11}(G) = 0$ elde edilir.

$|S| = 3$ olsun. S kümeleri

- $S_{16} = \{1,2,3\}$ ise $w(G - S_{16}) = 3$ olur ve $es_{12}(G) = 0$,
- $S_{17} = \{1,2,4\}$ ise $w(G - S_{17}) = 3$ olur ve $es_{13}(G) = 0$,
- $S_{18} = \{1,4,5\}$ ise $w(G - S_{18}) = 3$ olur ve $es_{14}(G) = 0$,
- $S_{19} = \{1,3,5\}$ ise $w(G - S_{19}) = 3$ olur ve $es_{15}(G) = 0$,
- $S_{20} = \{2,3,4\}$ ise $w(G - S_{20}) = 3$ olur ve $es_{16}(G) = 0$,
- $S_{21} = \{3,4,5\}$ ise $w(G - S_{21}) = 3$ olur ve $es_{17}(G) = 0$,
- $S_{22} = \{2,3,5\}$ ise $w(G - S_{22}) = 3$ olur ve $es_{18}(G) = 0$,
- $S_{23} = \{1,2,5\}$ ise $w(G - S_{23}) = 3$ olur ve $es_{19}(G) = 0$,
- $S_{24} = \{2,4,5\}$ ise $w(G - S_{24}) = 3$ olur ve $es_{20}(G) = 0$ elde edilir.

$|S| = 4$ olsun. S kümeleri

- $S_{25} = \{1,2,3,4\}$ ise $w(G - S_{25}) = 4$ olur ve $es_{21}(G) = 0$,
- $S_{26} = \{1,2,4,5\}$ ise $w(G - S_{26}) = 4$ olur ve $es_{22}(G) = 0$,
- $S_{27} = \{1,2,3,5\}$ ise $w(G - S_{27}) = 4$ olur ve $es_{23}(G) = 0$,

- $S_{28} = \{2,3,4,5\}$ ise $w(G - S_{28}) = 4$ olur ve $es_{24}(G) = 0$,
- $S_{29} = \{1,3,4,5\}$ ise $w(G - S_{29}) = 4$ olur ve $es_{25}(G) = 0$ elde edilir.

$|S| = 5$ olsun. S kümesi $S_{30} = \{1,2,3,4,5\}$ ise $w(G - S_{30}) = 5$ olur ve $es_{26}(G) = 0$ elde edilir.

Ayrıt saçılım sayısı tanımından,

$$es(G) = \max_{1 \leq i \leq 30} \{w(G - S_i) - |S_i| : S_i \subseteq E(G), w(G - S_i) > 1\}$$

$$= \max\{1, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, 0\} = 1$$

elde edilir.

Aşağıda ayrıt saçılım sayısı ile ilgili bilinen bazı genel teoremler verilmiştir.

Teorem 4.1.1. [1] G bir bağlantılı graf ve $\delta(G)$, G grafının minimum derecesi olsun. Bu durumda,

$$es(G) \geq 2 - \delta(G) \text{ dır.}$$

Teorem 4.1.2. [1] G bir graf olsun. G grafi λ -ayrıt bağlantılı ise

$$es(G) \geq 2 - \lambda(G) \text{ dır.}$$

Teorem 4.1.3. [1] G bir bağlantılı graf olsun. Bu durumda,

$$es(G) \leq 1 \text{ dir.}$$

4.2. Bazı Özel Grafların Ayırıt Saçılım Sayısı

Bu kısımda, bazı özel grafların ayırıt saçılım sayısı verilmiştir.

Teorem 4.2.1. [1] n ve m tam sayı olmak üzere

- a) T ağaç grafi için $es(T)=1$;
- b) P_n yol grafi için $es(P_n)=1$;
- c) $K_{1,n-1}$ yıldız grafi için $es(K_{1,n-1})=1$;
- d) C_n çevre grafi için $es(C_n)=0$;
- e) K_n tam grafi için $es(K_n)=3-n$;
- f) $C_{n,m}$ kuyruklu yıldız grafi için $es(C_{n,m})=1$ dir.

Teorem 4.2.2. G_n ($n \geq 3$) gear grafinin ayırıt saçılım sayısı 0 dir.

İspat 4.2.2. S , G_n gear grafinin bir ayırıt kesim kümesi olsun. Bu durumda, $|S| = r$ olduğunda en fazla r tane bileşen ortaya çıkar. Ayırıt saçılım sayısı tanımından

$$w(G_n - S) - |S| \leq r - r = 0$$

olur. Her iki tarafın maksimumunu alındığında

$$es(G_n) \leq 0 \tag{25}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\delta(G_n) = 2$ olduğu görülür. Teorem 4.1.1'den

$$es(G_n) \geq 2 - \delta(G_n) = 2 - 2 = 0 \tag{26}$$

elde edilir. (25) ve (26) eşitsizliklerinden

$$es(G_n) = 0$$

bulunur.

4.3. Graf İşlemleri ve Ayırıt Saçılım Sayısı

Bu kısımda, bazı grafların, graf işlemlerinin ayırıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

4.3.1. Kuvvet İşlemi

Bu kısımda, P_n yol graf ve C_n çevre grafının kuvvet işleminin ayırıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

Teorem 4.3.1.1. P_n^d ($n \geq 4$), P_n yol grafının kuvvet grafı olmak üzere

$$es(P_n^d) = 2 - d \text{ dir.}$$

İspat 4.3.1.1. S , P_n^d 'nin bir ayırıt kesim kümesi $|S| = r$ ve $\delta(P_n^d)$, P_n^d grafının minimum derecesi olsun. P_n^d grafını parçalamak için uygun olacak şekilde en az ayırıt seçerek geriye kalan grafın bileşen sayısı arttırılmalıdır. Şekil 2.7 göze alındığında $\delta(P_5^2) = 2$ olduğu açıktır. O halde P_n^d grafı için minimum tepe derecesi $\delta(P_n^d) = d$ olduğu da görülür. Ayırıt saçılım sayısını bulmak için üç durum incelenmelidir.

Durum 1. $r < \delta(P_n^d) = d$ alınırsa $w(P_n^d - S) = 1$ elde edilir fakat tanım gereği çelişkidir.

Durum 2. $d + 1 \leq r \leq E(P_n^d)$ olduğunda $r = d + 1$ için $w(P_n^d - S) \leq \left\lfloor \frac{r}{d} \right\rfloor + 1$ ayrıca $r = E(P_n^d)$ için $w(P_n^d - S) \leq n$ olur. Buradan, ayırıt saçılım sayısı aralığı $(E(P_n^d) = (n - 1) + (d - 1)(n - d) + \sum_{i=1}^{d-1} (d - i - 1))$

$$n - E(P_n^d) \leq es(P_n^d) \leq \left\lfloor \frac{r}{d} \right\rfloor - d \quad (27)$$

olur.

Durum 3. $r = \delta(P_n^d) = d$ alınırsa $w(P_n^d - S) \leq 2$ olacağı açıktır. Ayırıt saçılım sayısı tanımından,

$$es(P_n^d) \leq w(P_n^d - S) - |S| = 2 - d \quad (28)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, P_n^d grafinin minimum derecesi $\delta(P_n^d) = d$ dir. Teorem 4.1.1'den

$$es(P_n^d) \geq 2 - d \text{ dir.} \quad (29)$$

(27), (28) ve (29)'dan

$$es(P_n^d) = 2 - d$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1.2. P_n^d ($n \geq 4$) grafinde $n=d+1$ olursa, P_n^d grafi tam grafa izomorf olacaktır. Teorem 4.2.1'in e şikkından

$$es(K_n) = es(P_n^d) = 3 - n$$

olur.

Sonuç 4.3.1.3. P_n^d grafi için $d=1$ olduğunda Teorem 4.2.1'in b şikkından

$$es(P_n^1) = 1 \text{ dir.}$$

Teorem 4.3.1.4. C_n^d ($n \geq 4$), C_n çevre grafinin kuvvet grafi olmak üzere

$$es(C_n^d) = 1 - d \text{ dir.}$$

İspat 4.3.1.4. İspat, Teorem 4.3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.3.1.5. C_n^d ($n \geq 4$) grafinde $n=d+2$ olursa, C_n^d grafi tam grafa izomorf olacaktır. Teorem 4.2.1'in e şikkından

$$es(K_n) = es(P_n^d) = 3 - n$$

olur.

Sonuç 4.3.1.6. C_n^d grafi için $d=1$ olduğunda Teorem 4.2.1'in d şikkından

$$es(C_n^1) = 0 \text{ dir.}$$

4.3.2. Tümleyen İşlemi

Bu kısımda P_n yol grafinin ve C_n çevre grafinin tümleyenlerinin ayrıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

Teorem 4.3.2.1. $\overline{P}_n$ ($n \geq 4$), tümleyen yol grafinin ayrıt saçılım sayısı

$$es(\overline{P}_n) = 5 - n \text{ dir.}$$

İspat 4.3.2.1. $S, \overline{P}_n$ grafinin bir ayrıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. Ayrıt saçılım sayısını bulmak için aşağıdaki dört durum incelenmelidir.

Durum 1. $r < n - 3$ olarak alınırsa $w(\overline{P}_n - S) = 1$ olur fakat tanım ile çelişmektedir.

Durum 2. $r = n - 3$ alınırsa $w(\overline{P}_n - S) \leq 2$ olur. Bu durumda

$$es(\overline{P}_n) \leq w(\overline{P}_n - S) - |S| \leq 2 - n + 3 = 5 - n \quad (30)$$

elde edilir.

Durum 3. $n - 2 \leq r \leq E(\overline{P}_n)$ olduğunda $r = n - 2$ için $w(\overline{P}_n - S) \leq 2$ ayrıca $r = E(\overline{P}_n)$ için $w(\overline{P}_n - S) \leq n$ olur. Buradan, ayrıt saçılım sayısı aralığı $(E(\overline{P}_n) = 3 + \sum_{i=3}^{n-2} i)$

$$n - E(\overline{P_n}) \leq es(\overline{P_n}) \leq 4 - n \quad (31)$$

olur.

Durum 4. $\overline{P_n}$ grafının minimum derecesi $\delta(\overline{P_n}) = n - 3$ tür. Teorem 4.1.1'den

$$es(\overline{P_n}) \geq 2 - (n - 3) = 5 - n \text{ dir.} \quad (32)$$

(30), (31) ve (32)'den

$$es(\overline{P_n}) = 5 - n$$

bulunur.

Teorem 4.3.2.2. C_n ($n \geq 5$) çevre grafi olmak üzere tümleyeninin ayrıt saçılım sayısı

$$es(\overline{C_n}) = 5 - n \text{ dir.}$$

İspat 4.3.2.2. İspat, Teorem 4.3.2.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

4.4. Gear Grafin Graf İşlemleri

Bu kısımda, gear grafların işlemlerinin ayrıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

4.4.1. Tümleyen İşlemi

Aşağıdaki teoremde gear grafin tümleyeninin ayrıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

Teorem 4.4.1.1. $\overline{G_n}$ ($n \geq 3$), G_n gear grafinin tümleyen grafi olmak üzere

$$es(\overline{G_n}) = 2 - n \text{ dir.}$$

İspat 4.4.1.1. $\overline{G_n}$ grafinin, iki tane K_{n1} ve K_{n2} tam alt grafi vardır. K_{n1} grafinin her bir tepesi K_{n2} grafinin tepelerine $(n - 2)$ ayrıtla birleştirilmiştir. S , $\overline{G_n}$ grafinin bir ayrıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. Bu durumda iki tane durum elde edilir.

Durum 1. $1 \leq r < n$ ise

$$w(\overline{G_n} - S) = 1 \text{ dir.}$$

Fakat bu eşitlik ayrıt saçılım sayısı tanımı ile çelişir. Tanımımız gereği $w(\overline{G_n} - S) > 1$ eşitsizliği sağlanmalıydı.

Durum 2. $n \leq r < E(\overline{G_n})$ ise en fazla $\left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + 1$ bileşen elde edilir. Böylece,

$$w(\overline{G_n} - S) - |S| \leq \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + 1 - r$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$es(\overline{G_n}) \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + 1 - r \right\}$$

elde edilir. $f(r) = \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = n$ 'de alır ve

$$es(\overline{G_n}) \leq 2 - n \tag{33}$$

elde edilir. $\overline{G_n}$ grafında, bir S^* ayrıt kesim kümesi vardır öyle ki $|S^*| = n$ ve $w(\overline{G_n} - S) = 2$ dir. Buradan,

$$es(\overline{G_n}) = 2 - n \tag{34}$$

bulunur.

(33) ve (34)'den

$$es(\overline{G_n}) = 2 - n$$

elde edilir.

4.4.2. Kartezyen Çarpım İşlemi

Bu kısımda, $K_2 \times G_n$ ve $G_m \times G_n$ kartezyen çarpım graflarının ayrıt saçılım sayısı hesaplanmıştır.

Teorem 4.4.2.1. K_2 tam grafi ve G_n ($n \geq 3$) gear grafi olsun. Bu durumda

$$es(K_2 \times G_n) = -1 \text{ dir.}$$

İspat 4.4.2.1. $K_2 \times G_n$ grafinin tepe sayısı $4n+2$ 'dir ve ayrıca G_{n1} ve G_{n2} olan iki alt grafi vardır. S , $K_2 \times G_n$ grafinin bir ayrıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. $K_2 \times G_n$ grafi için $\lambda(K_2 \times G_n) = 3$ elde edilir. Teorem 4.1.2.'den

$$es(K_2 \times G_n) \geq 2 - 3 = -1 \quad (35)$$

olur. $r < 3$ olduğunda $w((K_2 \times G_n) - S) = 1$ olacağından tanımdan dolayı çelişkidir.

$r \geq 3$ olduğunda $w((K_2 \times G_n) - S) = \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor + 1$ elde edilir. Buradan,

$$w((K_2 \times G_n) - S) - |S| \leq \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor + 1 - r$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$es(K_2 \times G_n) \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor + 1 - r \right\}$$

elde edilir. $f(r) = \left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor + 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = 3$ 'te alır ve

$$es(K_2 \times G_n) \leq -1 \text{ dir.} \quad (36)$$

(35) ve (36) eşitsizliklerinden

$$es(K_2 \times G_n) = -1$$

bulunur.

Teorem 4.4.2.2. $m \geq 3$ ve $n \geq 3$ tam sayıları olmak üzere $G_m \times G_n$ grafin ayrıt saçılım sayısı -3 tür.

İspat 4.4.2.2. $\lambda(G_m \times G_n)$, $G_m \times G_n$ grafinin ayrıt bağlantılılık sayısı olsun. $G_m \times G_n$ grafi için $\lambda(G_m \times G_n) = 5$ olur. Teorem 4.1.2'den

$$es(G_m \times G_n) \geq 2 - \lambda(G_m \times G_n) = -3 \quad (37)$$

elde edilir.

$r < 5$ ise $w((G_m \times G_n) - S) = 1$ olacağından tanımdan dolayı çelişkidir.

Diğer taraftan, S , $G_m \times G_n$ grafinin bir ayrıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. $r \geq 5$ ise $w((G_m \times G_n) - S) \leq \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + 1$ olur. Buradan,

$$w((G_m \times G_n) - S) - |S| \leq \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + 1 - r$$

ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$es(G_m \times G_n) \leq \max\left\{\left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + 1 - r\right\}$$

elde edilir. $f(r) = \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = 5$ 'de alır ve

$$es(G_m \times G_n) \leq -3 \quad (38)$$

olur.

(37) ve (38) eşitsizliklerinden

$$es(G_m \times G_n) = -3$$

bulunur.

4.4.3. Ardışık Toplama İşlemi (Sequential Join)

Bu kısımda $G_m + G_n$ ve $G_3 + G_4 + \dots + G_n$ graflarının ayrıt saçılım sayısı verilmiştir.

Teorem 4.4.3.1. G_m ve G_n gear graflar ve $3 \leq m \leq n$ olsun. Bu durumda

$$es(G_m + G_n) = -2m - 1 \text{ dir.}$$

İspat 4.4.3.1. $\delta(G_m + G_n)$, $G_m + G_n$ grafinin minimum derecesi olmak üzere $\delta(G_m + G_n) = 2m + 3$ tür. Teorem 4.1.1'den

$$es(G_m + G_n) \geq 2 - \delta(G_m + G_n) = 2 - 2m - 3 = -2m - 1 \quad (39)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, S , $G_m + G_n$ 'nin bir ayrıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. $r \geq 2m + 3$ olduğunda $w((G_m + G_n) - S) = \left\lfloor \frac{r}{2m+1+2} \right\rfloor + 1$ olur. Ayrıt saçılım sayısı tanımından,

$$w((G_m + G_n) - S) - |S| \leq \left\lfloor \frac{r}{2m+3} \right\rfloor + 1 - r$$

olur ve her iki tarafın maksimumu alındığında

$$es(G_m + G_n) \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{r}{2m+3} \right\rfloor + 1 - r \right\}$$

olur. $f(r) = \left\lfloor \frac{r}{2m+3} \right\rfloor + 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = 2m + 3$ 'de alır ve

$$es(G_m + G_n) \leq -2m - 1 \text{ dir.} \quad (40)$$

(39) ve (40) eşitsizliklerinden

$$es(G_m + G_n) = -2m - 1$$

bulunur.

Sonuç 4.4.3.2. $G_3 + G_4$ gear grafları için

$$es(G_3 + G_4) = -7 \text{ dir.}$$

Teorem 4.4.3.3. $G_3 + G_4 + \dots + G_n$ ($n \geq 5$) gear grafları olmak üzere

$$es(G_3 + G_4 + \dots + G_n) = -9 \text{ dur.}$$

İspat 4.4.3.3. $S, G_3 + G_4 + \dots + G_n$ grafinin bir ayırıt kesim kümesi ve $|S| = r$ olsun. $\lambda(G_3 + G_4 + \dots + G_n) = 11$ olduğu kolayca görülür. Teorem 4.1.2'den

$$es(G_3 + G_4 + \dots + G_n) \geq 2 - 11 = -9 \text{ dur.} \quad (41)$$

Diğer taraftan iki durum elde edilir.

Durum 1. $r < 11$ ise $w((G_3 + G_4 + \dots + G_n) - S) = 1$ olur ve tanım ile çelişmektedir.

Durum 2. $r \geq 11$ ise $w((G_3 + G_4 + \dots + G_n) - S) = \left\lfloor \frac{r}{11} \right\rfloor + 1$ 'dır. Ayırıt saçılım sayısı tanımından,

$$es(G_3 + G_4 + \dots + G_n) \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{r}{11} \right\rfloor + 1 - r \right\}$$

olur. $f(r) = \left\lfloor \frac{r}{11} \right\rfloor + 1 - r$ azalan fonksiyonu maksimum değerini $r = 11$ 'de alır ve

$$es(G_3 + G_4 + \dots + G_n) \leq -9 \quad (42)$$

elde edilir. (41) ve (42) eşitsizliklerinden

$$es(G_3 + G_4 + \cdots + G_n) = -9 \text{ dur.}$$



5. SONUÇ

Bu bölümde, 3. ve 4. bölümdeki grafların, ayrıt komşuluk kopma dereceleri (ENR) ve ayrıt saçılım sayıları (es) tablolar halinde karşılaştırılmıştır.

- Tablo 5.1’de $C_{n,m}$ kuyruklu yıldız grafinin ayrıt komşuluk kopma dereceleri (ENR) ve ayrıt saçılım sayıları (es) verilmiştir.

Tablo 5.1. $C_{n,m}$ kuyruklu yıldız grafinin ENR ve es değerleri

		$C_{n,m}$ kuyruklu yıldız graf	
n	m	ENR	es
6	2	1	1
6	3	2	1
6	4	3	1
7	2	0	1
7	3	1	1
7	5	3	1
8	6	4	1
10	10	8	1

Tablo 5.1 incelendiğinde, Teorem 4.2.1’in f şıkkındaki herhangi n ve m değerleri için $es(C_{n,m}) = 1$ olacağından ayrıt saçılım sayısı (es) ayrıt edici özelliğe sahip değildir. Çünkü n sayısı değiştiğinde es ölçümü değişmeyecektir. Bu yüzden ayrıt komşuluk kopma derecesi (ENR) ayrıt edici özelliğe sahiptir.

- G_n ($n \geq 3$) gear grafinin ayrıt komşuluk kopma derecesi (ENR) için Teorem 3.2.3’den $ENR(G_n) = -1$ ve Teorem 4.2.2’den ayrıt saçılım sayısı (es) için $es(G_n) = 0$ dır. Buradan kolayca görüleceği üzere G_n gear grafi için ENR ve es ölçümü ayrıt edici değildir. Çünkü n sayısı değiştiğinde G_n gear grafinin ayrıt komşuluk kopma derecesi (ENR) ve ayrıt saçılım sayısı (es) değişmeyecektir.

- Tablo 5.2’de P_n^d ($n \geq 7$ ve $d \neq 2$) kuvvet grafinin ayırt komşuluk kopma dereceleri (ENR) ve ayırt saçılım sayıları (es) verilmiştir.

Tablo 5.2. P_n^d kuvvet grafinin ENR ve es değerleri

		P_n^d kuvvet graf	
n	d	ENR	es
7	3	-2	-1
7	4	-2	-2
8	3	-2	-1
8	4	-2	-2
9	3	-3	-1
9	4	-3	-2
9	5	-3	-3
9	6	-3	-4
10	4	-3	-2
10	5	-3	-3
10	6	-3	-4
10	8	-3	-6
11	4	-4	-2
11	5	-4	-3
11	6	-4	-4
11	8	-4	-6
12	5	-4	-3
12	6	-4	-4
12	8	-4	-6
15	8	-6	-6

Tablo 5.2 incelendiğinde, Teorem 3.3.1.1’den görülür ki P_n^d grafinin ENR ölçümünün hesabı n seviyesine bağlıdır fakat aynı grafin Teorem 4.3.1.1’deki es ölçümünün hesabı n seviyesine bağlı değil, d derecesine bağlıdır. Bu yüzden ENR ve es ölçümü ayırt edicidir ancak P_n^d grafinde:

n çift sayısı için $d = \frac{n}{2}$ ve n tek sayısı için $d = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ olduğunda ENR ve es ölçümleri ayırt edici ölçüm değildir.

- Tablo 5.3’de $\overline{P}_n$ ($n \geq 4$) tümleyen grafinin ayırt komşuluk kopma dereceleri (ENR) ve ayırt saçılım sayıları (es) verilmiştir.

Tablo 5.3. $\overline{P}_n$ tümleyen grafinin ENR ve es değerleri

	$\overline{P}_n$ tümleyen graf	
n	ENR	es
4	0	1
5	-1	0
6	-1	-1
7	-2	-2
8	-2	-3
9	-3	-4
10	-3	-5
12	-4	-7
15	-6	-10

Tablo 5.3 incelendiğinde, $\overline{P}_n$ tümleyen grafinin zedelenebilirliği için $n = 6, 7$ olduğunda ENR ve es ölçümü ayırt edici değildir fakat diğer durumlarda ENR ve es ölçümü ayırt edicidir.

- Tablo 5.4’de $\overline{G}_n$ ($n \geq 3$) tümleyen gear grafinin ayırt komşuluk kopma dereceleri (ENR) ve ayırt saçılım sayıları (es) verilmiştir.

Tablo 5.4. $\overline{G}_n$ tümleyen grafinin ENR ve es değerleri

	$\overline{G}_n$ tümleyen graf	
n	ENR	es
3	-2	-1
4	-3	-2
7	-6	-5
8	-7	-6
9	-8	-7
10	-9	-8
12	-11	-10
15	-14	-13

Tablo 5.4 incelendiğinde $\overline{G}_n$ tümleyen grafinin zedelenebilirliği için ENR ve es ölçümü ayırt edicidir.

- $K_2 \times G_n$ grafinin ayırt komşuluk kopma derecesi (ENR) için Teorem 3.4.2.1'den $ENR(K_2 \times G_n) = -1$ ve Teorem 4.4.2.1'den ayırt saçılım sayısı $es(K_2 \times G_n) = -1$ dir. Buradan $K_2 \times G_n$ grafi için ENR ve es ölçümü ayırt edici değildir. Çünkü n sayısı değiştiğinde $K_2 \times G_n$ grafinin ayırt komşuluk kopma derecesi (ENR) ve ayırt saçılım sayısı (es) değişmeyecektir.
- Tablo 5.1-5.4'deki ölçüm değerlerinin, bazı özel graflar için belirleyici olduğu görülmüştür. ENR ve es ölçümü için çıkarılacak genel sonuç:
 - Bir grafin ayırt saçılım sayısı (es) hesaplanırken izlenecek yol, grafi en az ayırt sayısı ($|S|$) ile parçalayıp en fazla bileşen sayısı (w) elde etmek olacaktır, fakat grafin sahip olduğu ayırt sayısı arttıkça (n, d, m seviyesine göre) ayırt saçılım sayısı (es) azalmaktadır.
 - Bir grafin ayırt komşuluk kopma derecesi (ENR) hesaplanırken izlenecek yol, grafi en az ayırt sayısı ($|S|$) ile parçalayıp en az tepe sayısı (m) ve en fazla bileşen sayısı (w) elde etmek olacaktır. Genel olarak düşünüldüğünde ENR ölçümü, es ölçümünden daha az değer alacaktır fakat es ölçümü, çok ayırt içeren graflarda ayırt edici ölçüm olmayacağından ENR ölçümünü kullanmak bir grafin zedelenebilirliğini değerlendirmek açısından daha avantajlı olacaktır.
 - Bir grafin ENR ve es değeri tepe sayısına yakın bir değer çıktığında graf oldukça hassas, negatif bir değer çıktığında graf oldukça kuvvetli olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Aslan E. A Measure of Graphs Vulnerability: Edge Scattering Number. Bulletin of The International Mathematical Virtual Institute. 2014, 4, 53–60.
- [2] Aslan E. Edge-Neighbor-Rupture Degree of Graphs. Journal of Applied Mathematics. 2013, 2013, Makale No: 783610, 5 s.
- [3] Aslan, E. Edge-Rupture Degree of A Graph. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms. 2015, 22, 155–161.
- [4] Aslan, E. Graflar ve Zedelenabilirlik Ölçümleri. Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı, İzmir, 2007, 52 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [5] Bagga, K. S., Beineke, L. W., Goddard, W. D., Lipman, M. J., Pippert, R. E. A Survey of Integrity. Discrete Applied Mathematics. 1992, 37/38, 13–28.
- [6] Bagga, K. S., Beineke, L. W., Pippert, R. E., Sedlmeyer, R. L. Some bounds and an algorithm for the edge-integrity of trees. Ars Combinatoria. 1993, 35A, 225–238.
- [7] Barefoot, C. A., Entringer, R., Swart, H. Vulnerability in graphs a comparative survey. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 1987, 1, 13–22.
- [8] Bondy, J. A., Murty, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier Science Publishing, New York, USA, 1976, 264 s.
- [9] Brandstädt, A., Le, V. B., Spinrad J. P. Graph Classes: A Survey. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1999, 304 s.
- [10] Buckley, F., Harary, F. Distance in Graphs. Addison-Wesley Publishing, New York, USA, 1990, 335 s.
- [11] Chartrand G., Lesniak, L. Graphs and Digraphs. Chapman and Hall, California, USA, 1996, 421 s.
- [12] Doty, L. L. A new bound for neighbor-connectivity of abelian Cayley graphs. Discrete Mathematics. 2006, 306, 1301–1316.

- [13] Gross, J. L., Yellen, J. Handbook of Graph Theory. Ed: Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, Boca Raton, USA, 2004, 1155 s.
- [14] Gunther, G. Neighbour-connectivity in regular graphs. Discrete Applied Mathematics. 1985, 11(3), 233–243.
- [15] Harary, F. Graph Theory. Addison-Wesley Publishing, New York, USA, 1969, 274 s.
- [16] Jung, H. A. On a Class of Posets and the Corresponding Comparability Graphs. Journal of Combinatorial Theory Series B. 1978, 24(2), 125–133.
- [17] Wei, Z., Li, Y., Zhang, J. Edge-neighbor-scattering number of graphs. Ars Combinatoria. 2007, 85, 271–277.
- [18] Zhao, X., Zhang, Z., Ren, Q. Edge neighbor connectivity of Cartesian product graph $G \times K_2$. Applied Mathematics and Computation. 2011, 217, 5508–5511.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ
Doğum Yeri ve Yılı : Ankara, 1991
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : omurkivanc@outlook.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir İnönü Lisesi, 2009
Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014
Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2016

Yayınları

- [1] Aslan E., Kurkcu O. K. Edge Scattering Number of Gear Graphs. Bulletin of The International Mathematical Virtual Institute. 2015, 5, 25–31.
- [2] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. Applied Mathematics and Computation. 2016, 276, 324–339.
- [3] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A novel collocation method based on residual error analysis for solving integro-differential equations using hybrid Dickson and Taylor polynomials. Sains Malaysiana. 2016, (Basım aşamasında).
- [4] Aslan E., Kürkçü, Ö. K. Edge geometric-arithmetic index of carbon nanocones and an algorithm. Bulgarian Chemical Communications. 2016, (Basım aşamasında).