



GRAFLARDA REGÜLERİTE VE PROJEKTİF BOYUT

Levent BAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER

AĞRI-2021

(Her Hakkı Saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Levent BAŞ

GRAFLARDA REGÜLERİTE VE PROJEKTİF BOYUT
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER

AĞRI 2021

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GRAFLARDA REGÜLERİTE VE PROJEKTİF BOYUT

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER

2021, 50 Sayfa

Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Ayşenur UÇAR

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah ÇAĞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER

Stanley-Reisner halkaları, değişmeli cebir ile kombinatorik matematik arasında bir bağlantı oluşturarak, birçok değişmeli cebir problemini kombinatorik yapılar ile çözmeye olanak sağlar. Kombinatorik değişmeli cebirin merkez problemi, graflar veya simpleks kompleksler gibi kombinatorik yapıların, Cohen-Macaulaylık, projektif boyut, Castelnuovo-Mumford regüleritesini araştırmaktır. Kombinatorik yapılarda yapılan değişikliklerin Stanley-Reisner halkalarında cebirsel sonuçlarının araştırılması ilgi çekici olmuştur. Böylece, Stanley-Reisner halkaları, değişmeli cebir, cebirsel geometri, homoloji cebiri ve cebirsel topoloji kavramları ile ilişkilidir.

Bu çalışmada, Stanley-Reisner halkalarına giriş yapılacaktır. Bir grafin ve simpleks kompleksin, projektif boyutu ve Castelnuovo-Mumford regüleritesi ile ilgili sonuçlar verilecektir.

2021, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Cohen-Macaulay Halkalar, Stanley-Reisner Halkası, Regülerite, Projektif Boyut.

ABSTRACT
MASTER' S THESIS

REGULARITY AND PROJECTIVE DIMENSION OF GRAPHS

Advisor of Thesis: Assist. Prof. Dr. Alper ÜLKER

2021, 50 Pages

Jury: Assist. Prof. Dr. Ayşenur UÇAR

Assist. Prof. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

Assist. Prof. Dr. Alper ÜLKER

Stanley-Reisner rings provides a connection between commutative algebra and combinatorial mathematics so that many problems related to commutative algebra can be solved in terms of combinatorial structures. The central problem of combinatorial commutative algebra is to study the Cohen-Macaulayness, projective dimension and Castelnuovo-Mumford regularity of combinatorial structures such as graphs or simplicial complexes. The study of how local changes in combinatorial structures apply to the algebraic results of Stanley-Reisner rings is attractive. So, the Stanley-Reisner rings are related to the commutative algebra, algebraic geometry, homological algebra and algebraic topology.

In this study, Stanley-Reisner rings will be introduced. The results in terms of projective dimension and Castelnuovo-Mumford regularity of a graph will be given.

2021, 50 pages

Key Words: Cohen-Macaulay Rings, Stanley-Reisner Rings, Regularity, Projective Dimension.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır. Yüksek lisans tezimin hazırlanması sürecinde benden bilgi ve tecrübelerini esirgemen, çalışmalarımın düzenli bir şekilde ilerlemesi için bir hocadan çok bir arkadaş gibi tezin hazırlanmasında gerekli olan tüm desteği sağlayan çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER' e teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden gördüğüm maddi ve manevi destekten dolayı aileme, yüksek lisans eğitimim boyunca çalışmam için gerekli desteği ve motivasyonu sağlayan eşim Ufuk BAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

14/06/2021

Levent BAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	2
2.1. Değişmeli Cebir Temel Tanımlar ve Teoremler.....	2
2.2. Graflarda Temel Tanımlar ve Teoremler.....	4
2.3. Simpleks Kompleksleri ve Simpleksel Homoloji.....	8
3. STANLEY-REISNER KURAMI.....	13
3.1. Stanley-Reisner Halkaları.....	13
3.2. Ayrıt İdealler	14
4. MATERYAL VE YÖNTEM.....	16
5. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	17
5.1. Bağımsızlık Kompleksleri	17
5.2. Tepe-Ayrıştırma	19
5.3. Projektif Boyut	21
5.4. Graflarda Regülerite	31
5.5. Derinlik ve Kombinatorik Derinlik	42
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$k[\Delta]$	Δ Simpleks Kompleksinin Stanley-Reisner Halkası
$k[x_1, \dots, x_n]$	k Cismi Katsayılı $x_1, \dots, x_n$ Değişkenli Polinom Halkası
$\text{Ind}(G)$	G Grafının Gağımsızlık Kompleksi
$N_G[x]$	x Tepesinin G ' deki Kapalı Komşuluğu
$N_G(x)$	x Tepesinin G ' deki Açık Komşuluğu
$\text{depth}(\Delta)$	Δ kompleksinin derinliği
$\dim(\Delta)$	Δ Kompleksinin Boyutu
$\text{pd}(\Delta)$	Δ Kompleksinin Projektif Boyutu
$\text{reg}(\Delta)$	Δ Kompleksinin Regüleritesi
$\frac{R}{I(G)}$	G Grafının Stanley-Reisner Halkası
$\widetilde{H}_i(\Delta, k)$	Δ Kompleksinin i –inci İndirgenmiş Homoloji Grubu
$M \otimes N$	M ve N Modüllerinin Tensör Çarpımı
$\text{Tor}_n^R(M)$	M Modülünün R Halkası Üzerinde n –inci Tor Modülü
$\sqcup$	Ayrık Bileşim

1. GİRİŞ

Kombinatorik değişmeli cebir alanı, cebirsel kombinatorik, homoloji cebiri, topolojik kombinatorik ve değişmeli cebir konularının arakesitinde bulunan ve halen güncel araştırmaların devam ettiği bir aktif bir alandır. İlk olarak, M. Kneser' in 1955 yılında ortaya attığı problemin, 1978 yılında L. Lovasz tarafından çözülmesi ile birlikte topolojik kombinatorik konusu ortaya çıkmaya başlamıştır. S. Reisner' in Üst Sınır konjektürünü çözmesi ve M. Hochster ve G. Reisner' in yaptığı çalışmalar ile Cohen-Macaulay kompleksler ortaya çıkmış ve cebirsel kombinatorik kavramı matematiğe girmiştir. Böylece, kombinatorik yöntemler ile cebir ve topoloji problemlerinin çözümü matematikte aktif bir alan olmuştur.

Stanley-Reisner halkaları, bir simpleks kompleksi ile polinom halkasını ilişkilendiren bir cebirsel yapıdır. J. S. Provan ve L. J. Billera (1980) yaptığı çalışma ile, komplekslerde tepe-ayrıştırma yöntemini düzenli kompleksler için bulunmuştur. Daha sonra, A. Björner ve M. L. Wachs komplekslerde tepe-ayrıştırma yöntemini düzenli olmayan komplekslere genişletmişlerdir (1996). Böylece, graf ve komplekslerin değişmeli cebirin birçok probleminin çözülmesi mümkün olmuştur. Bu çalışmada, homoloji cebirde önemli kavramlar olan regülerite ve projektif boyut kavramları incelenecektir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlara yer verilecektir. Bu kavramlar, değişmeli cebir, graf teorisi, simpleks kompleksler ve simpleksel homoloji hesaplarını kapsamaktadır.

2.1. Değişmeli Cebir Temel Tanımlar ve Teoremler

Çalışma boyunca kullanılacak olan, değişmeli cebir ve homoloji cebirinin temel kavramları verilecektir.

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde, toplama ve çarpma olarak adlandırılan $+$ ve $\times$ ikili işlemleri, her $a, b, c \in R$ için;

- I. $(R, +)$ bir Abel gruptur,
- II. $\times$ birleşmelidir: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$,
- III. $\times$ işlemi, $+$ üzerinde dağılmalıdır: $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

ve $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$,

aksiyomlarını sağlıyorsa, R' ye bir *halka* denir. Ayrıca, $\times$ işlemi değişmeli ise, R' ye *değişmeli halka* denir. Eğer, her $a \in R$ için $1 \times a = a \times 1 = a$ olacak şekilde $1 \in R$ birim elemanı varsa, R' ye *birimli halka* denir (Dummit Foote 2003).

Tanım 2.1.2. R bir halka olsun. Bir *sol R -modül* M , bir $R \times M \rightarrow M ((r, m) \mapsto rm)$ skalar çarpımı ile birlikte $(M, +)$ Abel gruptur ve her $m, n \in M$ ve her $r, s \in R$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan;

- I. $r(m + n) = rm + rn$,
- II. $(r + s)m = rm + sm$,
- III. $(rs)m = r(sm)$,
- IV. $1m = m$, eğer $1 \in R$ ise,

bir cebirsel yapıdır (Rotman 2002).

Tanım 2.1.3. M bir sağ R –modül ve N bir sol R –modül olsun. $M \times N$ üzerinde, F bir serbest Abel grup olsun. K altgrubu F ’ nin her $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ olmak üzere, aşağıdaki formda,

1. $(m + m', n) - (m, n) - (m', n);$
2. $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$
3. $(mr, n) - (m, rn).$

elemanları ile üretilen bir altgrubu olsun. Bu durumda, $\frac{F}{K}$ bölüm grubuna, M ile N ’ nin tensör çarpımı denir ve $M \otimes_R N$ ile gösterilir (Rotman 2002).

Tanım 2.1.4. M ve N birer modül olsun. Eğer π surjektif dönüşümü ve herhangi bir η dönüşümü için;

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \rho \swarrow & & \searrow \eta & \\
 M & \xrightarrow{\pi} & N & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir ρ dönüşümü varsa, bu durumda R -modül P ’ ye bir *projektif modül* denir (Rotman 2008).

Tanım 2.1.5. M bir modül olsun. M ’ nin bir *projektif çözücüsü*, $n \geq 0$ için P_n modülleri projektif modül olmak üzere,

$$... \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

tam dizisine M modülünün projektif çözücüsü denir.

Şimdi,

$$... \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} B \rightarrow 0$$

Dizisi bir B modülünün bir projektif çözücüsü olsun. Bu çözücünün D modülü ile tensor çarpımı alınırsa,

$$\dots \rightarrow D \otimes P_n \xrightarrow{1 \otimes d_n} D \otimes P_{n-1} \xrightarrow{1 \otimes d_{n-1}} \dots \xrightarrow{1 \otimes d_1} D \otimes P_0 \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} D \otimes B \rightarrow 0,$$

tam dizisi elde edilir (Rotman 2008).

Tanım 2.1.6. D bir sağ R -modül ve B bir sol R -modül olsun. B 'nin sol R -modüller ile herhangi bir projektif çözücüsü alınsın. Her $n \geq 1$ için $1 \otimes d_n: D \otimes P_n \rightarrow D \otimes P_{n-1}$ olsun. Buna göre,

$$\text{Tor}_n^R(D, B) = \text{Çek}(1 \otimes d_n) / \text{Gör}(1 \otimes d_{n+1})$$

dir. Burada,

$$\text{Tor}_0^R(D, B) = \text{Çek}(1 \otimes P_0) / \text{Gör}(1 \otimes d_1)$$

olur (Dummit Foote 2003).

Tanım 2.1.7. R bir halka ve $p_0, p_1, \dots, p_n$ idealleri R 'nin asal idealleri olsunlar. Buna göre asal ideallerin kesin artan;

$$p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_{n-1} \subset p_n$$

dizisinin uzunluğuna R halkasının *Krull boyutu* denir ve $\dim R$ ile gösterilir (Matsumura 1989).

Tanım 2.1.8. R bir halka ve M bir R -modül olsun. $a_1, a_2, \dots, a_k$ dizisi R halkasının elemanlarının bir dizisi olsun. Eğer bu dizi;

1. Herbir $1 \leq i \leq k$ için, a_i elemanı $\frac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M}$ üzerinde sıfır-bölen değildir,
2. $M \neq (a_1, \dots, a_k)M$

Koşullarını sağlıyorsa bu diziye *M-regüler dizi* denir. En uzun M -regüler dizinin uzunluğuna derinlik denir ve bir M modülünün (R halkasının) derinliği $\text{depth}(M)$ ile gösterilir (Matsumura 1989).

Tanım 2.1.9. Herhangi bir R halkası için, eğer $\dim R = \text{depth}(R)$ ise R halkasına *Cohen-Macaulay halka* denir (Bruns Herzog 1998).

2.2. Graflarda Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan, graf teorisi ile ilgili bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1. Bir G grafi, $(V(G), E(G))$ ikilisinden oluşur, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ kümesi G grafinin tepeler kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\} \subseteq V \times V$ kümesi de V 'nin 2-lemenli altkümelerinden oluşan kenarlar kümesidir. Eğer $v_i, v_j \in V(G)$ için $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ ise v_i tepesi v_j tepesine bitişiktir denir ve $v_i v_j$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.2. G bir graf ve $u \in V$ olmak üzere,

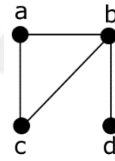
$$N_G(u) = \{v \in V : uv \in E(G)\}$$

kümesine u tepesinin G grafında açık komşuluğu kümesi denir. Ayrıca,

$$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$$

kümesi ise u 'nin kapalı komşuluk kümesi adını alır (Chartrand Zhang 2008).

Örnek 2.2.3. Bir G grafi için $V(G) = \{a, b, c, d\}$ ve $E(G) = \{ab, ac, bc, bd\}$ olarak verilsin. Bu kümelerden oluşan G grafi aşağıdaki şekildeki gibi olur.



Şekil 1 Bir G grafi

Tanım 2.2.4. Bir G grafında tepelerin sayısı, yani $n = |V(G)|$ sayısı grafın mertebesini verir, kenar sayısı yani $m = |E(G)|$ sayısı grafın boyunu verir. Bir G grafi, çoklu kenar ve döngü içermiyorsa *basit graf* adını alır. Bu tez boyunca aksi belirtilmedikçe graflar basit ve yönlendirilmemiş graf olarak kabul edilecektir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.5. G bir graf ve $u \in V(G)$ olsun. u tepesinin G grafında bitişik olduğu tepe sayısına u nun *derecesi* denir ve $\deg u$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile,

$$\deg u = |N_G(u)|$$

dir. G grafında en büyük dereceli tepenin derecesine maksimum derece denir $\Delta(G)$ ile gösterilir, en küçük dereceli tepenin derecesine minimum derece denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Önerme 2.2.6. G grafının mertebesi n olsun. Buna göre herhangi bir u tepesi için,

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg u \leq \Delta(G) \leq n - 1$$

eşitsizliği vardır (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.7. Bir G grafında bulunan tüm tepeler birbiriyle komşulukları varsa, diğer bir ifade ile grafa ait tüm tepeler birbirleri ile bitişik ise bu grafa *tam graf* denir. n tepeli bir tam grafın derecesi $n - 1$ dir ve K_n ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.8. G ve H iki graf olsun. Eğer $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ koşulları sağlanıyorsa H ye G nin bir *alt grafı* denir ve $H \subseteq G$ olarak gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.9. G ve H graf ve $V(H) \subseteq V(G)$ olsun. Eğer her $v_1, v_2 \in V(H)$ için $v_1 v_2 \in E(G)$ oluyorsa, H ye G nin *indirgenmiş alt grafı* denir veya G nin H üzerine indirgenmiş alt grafı denir ve $G[H]$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.10. Bir $G = (V, E)$ grafının tepe kümesinin bir alt kümesi üzerine indirgenmiş alt grafı bir tam graf ise bu indirgenmiş tam alt grafa *klik* denir.

Tanım 2.2.11. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer G grafının tepe kümesi $V(G) = X \cup Y$ olacak şekilde X ve Y ayrık kümeler ve her $uv \in E(G)$ için $u \in X$ ve $v \in Y$ ise G ye *iki parçalı graf* denir ve $G = (X, Y; E)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.12. (Yürüyüş) Bir G grafı ve $u, v \in V(G)$ tepeleri verilmiş olsun. Bu durumda, $u - v$ yürüyüşü, u tepesinden başlayıp v tepesine kadar olan tepeler dizisine *yürüyüş* denir. Başlangıç ve bitiş tepeleri farklı olan yürüyüşe *açık yürüyüş*, eğer aynı ise *kapalı yürüyüş* denir. Eğer bir yürüyüşte hiçbir ayrıttan birden fazla geçilmezse buna *patika* denir. Eğer bir yürüyüşte hiçbir tepe tekrar ziyaret edilmezse buna *yol* denir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.13. Bir G grafında, bir kapalı yolda hiçbir ayrıttan birden fazla geçilmezse buna *devre* denir. Örneğin, $u - w - x - y - w - v - u$ bir devredir. Bir devrede hiçbir tepe tekrar edilmezse buna *çevrim* denir. Bir çevrimde ayrıt ve tepe sayısı aynıdır bu çevrenin uzunluğunu verir. Örneğin, $u - v - x - y - u$ bir çevrimdir ve 4 uzunluktadır (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.14. Bir G grafında her u, v tepeleri için bir $u - v$ yürüyüşü bulunuyorsa buna *bağlantılı graf* denir. Aksi halde bağlantısız graftır (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.15. G bir bağlantılı graf olsun. $u, v \in V(G)$ tepeleri için, $u - v$ yollarının en küçük uzunluktaki değeri u ile v arasındaki *uzaklığı* verir ve bu $d(u, v)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.16. $G = (V(G), E(G))$ bir graf olsun. Bir $S \subseteq V(G)$ altkümesinin hiçbir tepesi bitişik değilse bu S kümesine *bağımsız küme* denir. Diğer bir ifade ile, S kümesi bağımsızdır ancak ve ancak her $u, v \in S$ için $uv \notin E(G)$ ' dir. Bir G grafının en büyük bağımsız kümesinin kardinalitesine, G ' nin *bağımsızlık sayısı* denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.17. $G = (V(G), E(G))$ bir graf olsun. Eğer $V(G)$ ' nin herhangi bir tepesi bir $D \subseteq V(G)$ altkümesinin en az bir elemanı ile bitişikse, bu D kümesine *baskın küme* denir. Bir G grafının, baskın kümelerinden en küçük olanının kardinalitesine, G ' nin *baskınlık sayısı* denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Eğer bir $A \subseteq V(G)$ altkümesi bağımsız ve baskın bir küme ise buna *bağımsız baskın küme* denir. Bir kümenin en küçük elemana sahip bağımsız ve baskın kümesinin kardinalitesine, o grafın *bağımsızlık baskınlık sayısı* denir ve $i(G)$ ile gösterilir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.18. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Bir $M \subseteq E$ alt kümesine ait her iki ayrıt birbirine bitişik değilse, bu M kümesine *eşleme* denir. Eğer, bu eşleme kümesinde herhangi iki ayrıtı birleştiren başka bir ayrıt yoksa bu eşlemeye *indirgenmiş eşleme* denir. Bir G grafında, oluşturulabilen en büyük eşleme kümesinin ve indirgenmiş eşleme kümesinin kardinalitesine o grafın sırasıyla *eşleme sayısı* ve *indirgenmiş eşleme sayısı* denir. Bu sayılar $m(G)$ ve $im(G)$ ile gösterilirler (Diestel 2017).

Tanım 2.2.19. Bir G grafi çevrim grafi olsun. G 'nin birbirine komşu olmayan iki tepesini birleştiren ayrıta, bir *kiriş* denir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.20. G bir graf olsun. Eğer G 'de uzunluğu 4 ve daha fazla olan çevrimlerde *kiriş* varsa bu grafa *kirişli* graf denir. Yani *kirişli* graflarda en fazla 3 uzunlukta çevrimler bulunur (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.21. Bir G grafında ve tümleyeninde en fazla 4 uzunlukta çevrim varsa bu grafa *zayıf-kirişli* graf denir (Chartrand Zhang 2008).

Tanım 2.2.22. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer G 'nin her bir ayrıtı, bir $C \subset V$ altkümesinin en bir tepesine komşu ise, C 'ye tepe *örtüm kümesi* denir. En küçük tepe örtüm kümesinin kardinalitesine *tepe örtümü sayısı* denir. Ayrıca, C en küçük tepe örtüm kümesi ise $V - C$ kümesi en büyük bağımsız kümedir (Diestel 2017).

Tanım 2.2.23. G bir graf olsun. Eğer G 'de bir son tepesi $\{w, x\}$ ve diğer son tepesi $\{y, z\}$ üzerinde olan bir ayrıt yoksa, wx ve yz ayrıtları için boşluk oluşturur denir. Böyle ayrıtlara sahip olmayan grafa boşluksuz graf denir (Dao vd. 2013).

2.3. Simpleks Kompleksleri ve Simpleksel Homoloji

Tanım 2.3.1. Bir $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tepe kümesi üzerinde, Δ simpleks kompleksi, V nin simpleks veya yüz adı verilen alt kümelerinin aşağıdaki şartları sağlayan bir koleksiyonudur,

- i) $x \in V$ ise $\{x\} \in \Delta$,
- ii) $\sigma \in \Delta$ ve $\tau \subset \sigma$ ise $\tau \in \Delta$.

Δ bir simpleks kompleksi ve $\sigma \in \Delta$ bir yüz olsun. Böylece, σ ile Δ nın boyutları sırasıyla şu şekildedir;

$$\dim \sigma = |\sigma| - 1 \text{ ve } \dim \Delta = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \Delta\}.$$

Bir q -boyutlu yüze q -simpleks de denir. En yüksek boyutlu yüzlere faset adı verilir (Villarreal 2018).

Tanım 2.3.2. Bir Δ simpleks kompleksinin tüm fasetlerinin boyutu aynı ise bu komplekse *saf kompleks* denir (Villarreal 2018).

Şimdi bir Δ simpleks kompleksinin, silinme, ve bağlantı alt komplekslerinin tanımları verilecektir.

Tanım 2.3.3. Δ bir simpleks kompleks ve $\sigma \in \Delta$ bir yüz olsun. Buna göre,

$$\text{del}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta : \sigma \cap \tau = \emptyset\}$$

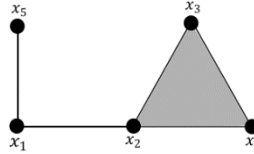
alt kompleksine σ yüzünün Δ kompleksinde *silinmişi* denir.

$$\text{lk}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta : \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$$

alt kompleksine σ yüzünün Δ kompleksinde *bağlantısı* denir (Villarreal 2018).

Tanım 2.3.4. Δ bir d -boyutlu simpleks kompleksi olsun. Δ' nın $q \leq d$ olacak şekilde q -simplekslerinden oluşan komplekse, q -iskeleti denir ve Δ^q ile gösterilir (Villarreal 2018).

Örnek 2.3.5.



Şekil 2 Simpleks kompleks

Yukarıdaki şekilde verilen Δ simpleks kompleksinde,

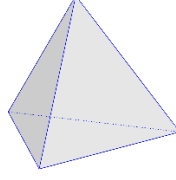
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tepeleri 0-simpleksler,

$x_1x_2, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$ ayrıtları 1-simpleksler,

$x_2x_3x_4$ üçgeni 2-simplekslerdir.

0-simpleksler yani tepeler 0-boyutludur, ayrıtlar 1-simpleksleri oluşturular ve 1-boyutludurlar ve içi dolu üçgenler 2-simplekslerdir ve 2-boyutludurlar. Ayrıca, 4

tepeden oluşan bir dörtyüzlü ya da diğer ifade ile tetrahedron 3-simpleksi oluşturur ve 3-boyutludur.



Şekil 3 Tetrahedron

Bir Δ kompleksinde bir $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_q)$ yüzü q -simpleks olarak alınsın. Bu durumda, eğer $(i_0, i_1, \dots, i_q)$ sıralı $q+1$ -lisi $(j_0, j_1, \dots, j_q)$ sıralı $q+1$ -lisinin bir çift permütasyonu ise, tepelerin

$v_{i_0} < v_{i_1} < \dots < v_{i_q}$ tam sıralaması ile $v_{j_0} < v_{j_1} < \dots < v_{j_q}$ tam sıralaması birbirine denktir denir. Bunlar bir denklik bağıntısı oluşturur çünkü çift permütasyonların kümesi bir grup yapısı oluşturur.

Δ' ya ait yönlendirilmiş bir σ , q -simpleksi bu denklik sınıflarından birinin seçilimidir. $v_0, v_1, \dots, v_q$ bir σ yüzünün tepeleri olsun. $v_0 < v_1 < \dots < v_q$ sıralaması ile belirlenmiş bir yönlendirilmiş simpleks, $[v_0, v_1, \dots, v_q]$ ile gösterilecektir.

R birimli değişmeli bir halka olsun. $C_q(\Delta)$, tabanı yönlendirilmiş q -simplekslerden oluşan bir serbest R -modüldür ($C_q(\Delta)$ serbest abel grup olarak alınabilirdi). $\dim C_q(\Delta)$ değeri Δ' nın q -simplekslerinin sayılarına eşittir. Buna göre, $q \geq 1$ için,

$$\partial_q: C_q(\Delta) \rightarrow C_{q-1}(\Delta)$$

homomorfizması, $\partial_q([v_0, v_1, \dots, v_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_q]$ ile tanımlansın, burada $\hat{v}_i$ ile i -nci tepenin silinmişi gösterilmektedir. $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ olduğundan dolayı $C(\Delta)'$ ye yönlendirilmiş zincir kompleksi denir. Δ' nın uzatılmış yönlendirilmiş zincir kompleksi ise,

$$0 \rightarrow C_d(\Delta) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(\Delta) \xrightarrow{\partial_{d-1}} \dots \rightarrow C_0(\Delta) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

şeklindedir ve burada $\dim \Delta = d$ olup ayrıca her v tepesi için $\varepsilon(v) = 1$ dir. Bu zincir kompleksi $C_*(\Delta)$ ile gösterilir, $\partial_0 = \varepsilon$ ve $C_{-1}(\Delta) = R$ olarak alınır.

Bu zincir kompleksinde,

$$Z_q(\Delta, R) = \ker(\partial_q),$$

$$B_q(\Delta, R) = \text{Im}(\partial_{q+1})$$

olarak ifade edilir. Burada, $Z_q(\Delta, R)$ halkası (grup) ∂_q homomorfizmasının çekirdeğidir ve *devirler* adını alır, $B_q(\Delta, R)$ halkası ∂_{q+1} homomorfizmasının görüntüsüdür ve *sınırlar* adını alır.

$$\tilde{H}_q(\Delta, R) = Z_q(\Delta, R)/B_q(\Delta, R), (q \geq 0)$$

bölüm grubuna, katsayıları R halkasından olan q -uncu indirgenmiş *homoloji* grubu denir. Bu homoloji grupları hesaplanırken uzatılmış zincir kompleksi oluşturulduğundan, indirgenmiş homoloji grupları bulunmuştur (Villarreal 2018). Bir sonraki önerme homoloji grupları ile indirgenmiş homoloji grupları arasındaki ilişkiyi verecektir.

Önerme 2.3.6. Bir Δ boştan farklı simpleks kompleksi olsun. Buna göre,

$$H_0(\Delta, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(\Delta, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \text{ ve tüm } i > 0 \text{ için, } H_i(\Delta, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{Z}) \text{ dır.}$$

Önerme 2.3.7. Δ boştan farklı bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre r sayısı Δ bağlantılı bileşenlerinin sayısı olmak üzere $\tilde{H}_0(\Delta, R)$ grubu rankı $r - 1$ olan bir serbest R -modülüdür (Villarreal 2018).

Örnek 2.3.8. Δ kompleksi, tek bir tepe içeren bir simpleks kompleksi olsun, yani $\Delta = \{u\}$ olsun. Bu durumda, sadece bir tek yönlendirme mümkündür. Tüm $q \neq 0$ değerleri için $C_q(\Delta) = 0$ dır. $C_0(\Delta) = \mathbb{Z}u$ bir serbest gruptur ve tek üretici u dur. Böylece, $q \neq 0$ için $\tilde{H}_q(\Delta) = 0$ dır. Ayrıca, $H_0(\Delta) = \ker(\partial_0)/\text{Im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}$ dır ve böylece $\tilde{H}_0(\Delta) = 0$ olacaktır.

Örnek 2.3.9. Tor yüzeyinin üçgenleştirmesinin homoloji grupları aşağıdaki gibidir.

Tor' un 0-simpleksi v ' dir, o halde $C_0(T) = \mathbb{Z}$ olur. 1-simpleksi a, b ve c dir. Böylece, $C_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olur. 2-simpleksleri U ve L ' dir, $C_2(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olur. Tor yüzeyinin $q \geq 3$ için q -simpleksi olmadığı için $C_q(T) \cong \{0\}$ dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(\Delta) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Delta) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Delta) \xrightarrow{\partial_0} N \xrightarrow{\varepsilon} 0 \text{ dir.}$$

$\text{Im}(\partial_3) \cong \{0\}$ ve $\ker(\partial_0) = C_0(T) \cong \mathbb{Z}$ dir.

$\partial_2: C_2(T) \rightarrow C_1(T)$ homomorfizmasına bakılsın:

$$\begin{aligned} (p\langle U \rangle + q\langle L \rangle) &\rightarrow \partial_2(p\langle U \rangle + q\langle L \rangle) = p\partial_2(\langle U \rangle) + q\partial_2(\langle L \rangle) \\ &= p(c - a - b) + q(a + b - c) = (q - p)(a + b - c) \\ &= r(a + b - c) \end{aligned}$$

olup $\text{Im}(\partial_2) \cong \mathbb{Z}$ dir. $\partial_2(p\langle U \rangle + q\langle L \rangle) = 0$ denirse $(q - p)(a + b - c) \cong 0$ olur. Buradan $q = p$ dir. O halde $\ker(\partial_2) \cong \mathbb{Z}'$ dir.

Şimdi $\partial_1: C_1(T) \rightarrow C_0(T)$ homomorfizmasına bakalım,

$$\begin{aligned} (p_1\langle a \rangle + p_2\langle b \rangle + p_3\langle c \rangle) &\rightarrow \partial_1(p_1\langle a \rangle + p_2\langle b \rangle + p_3\langle c \rangle) \text{ olup, } p_1\partial_1(\langle a \rangle) + \\ p_2\partial_1(\langle b \rangle) + p_3\partial_1(\langle c \rangle) &= p_1(v - v) + p_2(v - v) + p_3(v - v) = 0 \text{ olup,} \end{aligned}$$

$\ker(\partial_1) = C_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ve $\text{Im}(\partial_1) \cong \{0\}$ dir. Ayrıca $\ker(\varepsilon) \cong 0$ dir.

Buna göre $\tilde{H}_0(T; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z} / \{0\} \cong \mathbb{Z}$

$\tilde{H}_1(T; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olarak bulunur.

3. STANLERY-REİSNER KURAMI

3.1. Stanley-Reisner Halkaları

Bu bölümde, polinomlar halkalarının monomial idealleri, Stanley-Reisner idealleri ve Stanley-Reisner halkaları ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

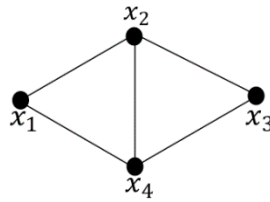
Tanım 3.1.1. $\mathbb{F}$ bir cisim ve $R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ bu $\mathbb{F}$ cismi üzerinde n değişkenli polinom halkası olsun. $\mathbb{R}_+^n$ ile $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri temsil edilsin. Burada her bir $a_i \geq 0$ ve $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{Z}^n$ dir. $a_i \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere, $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ çarpımına bir *monomial* denir (Villarreal 2018).

Tanım 3.1.2. Bir $I \subset R$ ideali, eğer monomialler tarafından üretiliyorsa bu ideale *monomial ideal* denir.

Bir monomial $x^{\mathbf{a}}$ monomialinde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. Eğer her bir a_i için, $a_i = 0$ veya $a_i = 1$ oluyorsa bu monomiale karesiz monomial denir. Karesiz monomiallerin ürettiği monomial ideale *karesiz monomial ideal* denir (Villarreal 2018).

$R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ halkası bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde polinom halkası olsun. Bir Δ kompleksi için $I_\Delta = \langle \{x_{i_1} \dots x_{i_r}\} : i_1 < \dots < i_r, \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \notin \Delta \rangle$ ideale *Stanley-Reisner ideali* denir ve R/I_Δ bölüm halkasına da *Stanley-Reisner halkası* denir ve $\mathbb{F}[\Delta]$ ile gösterilir (Villarreal 2018).

Örnek 3.1.3. Bir 1-boyutlu Δ kompleksi aşağıdaki gibi olsun



Şekil 4 1-boyutlu simpleks kompleks

Buna göre Stanley-Reisner halkası $I_\Delta = \langle x_1 x_3, x_1 x_2 x_4, x_2 x_3 x_4 \rangle$ şeklindedir.

Teorem 3.1.4. Δ kompleksi $V(\Delta) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tepe kümesine sahip bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre Δ 'nın Stanley-Reisner asal ayrışımı

$$I_\Delta = \bigcap_F P_F$$

şeklinde olup, burada arakesit tüm F fasetleri üzerindedir. P_F de $x_i \notin F$ olacak şekilde tüm x_i ' ler tarafından üretilen idealdir. Dahası, $\dim(\mathbb{F}[\Delta]) = \dim \Delta + 1$ dir.

Yukarıdaki teoreme göre, bir Δ simpleks kompleksine ait Stanley-Reisner halkasının Krull boyutu, o kompleksin topolojik boyutundan bir fazladır (Bruns Herzog 1998).

3.2. Ayırıt İdealler

Graflarda ayırıt ideal kavramı, komplekslerde Stanley-Reisner idealine karşılık gelmektedir. Bir grafın bağımsızlık kompleksinin Stanley-Reisner ideali ile o grafın ayırıt ideali aynıdır. Ayırıt idealler, ilk olarak (Villarreal, 1990) tarafından bulunmuştur.

Tanım 3.2.1. G bir graf olsun. $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $E(G)$ de sırasıyla G nin tepe ve ayırıt kümeleri olsun. Bir $R = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ kümesi, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde n değişkenli bir polinomlar halkası olarak alınsın. Buna göre,

$$I(G) = \{x_i x_j \in R : x_i x_j \in E(G)\}$$

kümesine ayırıt ideal denir. Ayrıca, $R/I(G)$ bölüm halkasına da Stanley-Reisner halkası (veya ayırıt halkası) denir. Ayırıt idealler, bir grafın cebirsel ifadesidir. Kısaca, bir G grafında ayırıt ideal, x_i ve x_j tepeleri arasında ayırıt olacak şekilde $x_i x_j$ çarpımından oluşan karesiz monomiallerin ürettiği bir idealdir. Bu yüzden eğer bir G grafında tüm tepeler izole ise, yani diğer bir ifade ile G de ayırıt yok ise $I(G) = (0)$ dır (Villarreal 2018).

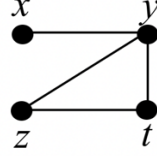
Önerme 3.2.2. R halkasında bir asal ideal $p \subset R$ olsun. Bu p ideali $I(G)$ ayırıt idealinin minimal asal idealidir ancak ve ancak p ideali G ' nin minimal tepe örtümü tarafından üretilir (Villarreal 2018).

Tanım 3.2.3. $I \subset R$ bir ideal olsun. Eğer $\dim\left(\frac{R}{I}\right) = \text{depth}\left(\frac{R}{I}\right)$ ise $\frac{R}{I}$ bölüm halkasına Cohen-Macaulay denir. Ayrıca, $\frac{R}{I}$ Cohen-Macaulay halka ise I ' ya Cohen-Macaulay denir (Villarreal 2018).

Tanım 3.2.4. Bir G grafına Cohen-Macaulay denir ancak ve ancak $\frac{R}{I(G)}$ bir Cohen-macaulay halkadır (Villarreal 2018).

Önerme 3.2.5. Bir G grafi Cohen-Macaulay ise G iyi-örtülmüştür (Villarreal 2018).

Örnek 3.2.6



Şekil 5 Bir G grafi

Şekil 5’ te verilen basit bir G grafi için, ayrıt ideali $I(G) = (xy, yt, zt, yz)$ dir.

Ayrıca bu grafin Stanley-Reisner halkası, $R = \frac{\mathbb{F}[x, y, z, t]}{(xy, yt, zt, yz)}$ dir.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmada, literatürde var olan ve yüksek kaliteli yayınlar incelenmiştir. Bu yayınlarda bulunan sonuçlar araştırılmış ve özellikle grafların parametrelerine bağlı sınırların daha keskin olup olamayacağı üzerine araştırmalar yapılmıştır. Bu araştırmalar yapılırken tepe-ayrıştırma yöntemi birincil yöntem olarak kullanılmıştır. Tepe-ayrıştırma yöntemi hem graflarda hemde komplekslerde cebirsel sonuçlar veren en yaygın yöntemlerden biridir. Bunun dışında, yapılan araştırmalarda işlem hızı ve doğruluğu açısından Sage Math, iGraph ve networkX gibi Python kütüphaneleri kullanılmıştır. Bu yazılımlar ile her graf sınıfı için verilen sonuçların doğruluğu kontrol edilmiştir. Macaulay 2 programı sayesinde, değişmeli cebir hesapları yapılmıştır ve çeşitli cisimler üzerinde hesaplar yapılarak sonuçlar kontrol edilmiştir.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

5.1. Bağımsızlık Kompleksleri

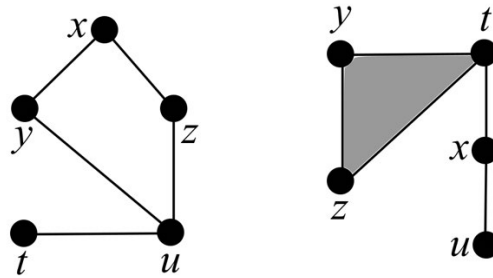
Bu bölümde, graflardan elde edilen bir tür simpleks kompleksleri olan bağımsızlık kompleksleri tanıtılacaktır ve temel kavramları verilecektir. Bağımsızlık kompleksleri, kombinatorik değişmeli cebirde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bağımsızlık komplekslerinin topolojisi ve cebirsel özellikleri ile ilgili çok fazla çalışma vardır.

Tanım 5.1.1. G bir graf olsun. G 'nin *bağımsızlık kompleksi*, yüzleri G 'nin bağımsız kümelerinden oluşan bir simpleks kompleksidir ve $\text{Ind}(G)$ ile gösterilir (Villarreal 2018).

$\text{Ind}(G)$ kompleksi için, $\text{del}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G - x)$ ve $\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G - N_G[x])$ olarak tanımlanır (Dochtermann Engström 2009). Bir $G = (V, E)$ basit grafı için, bu grafın bağımsızlık komplekslerinin diğer özellikleri şu şekildedir:

- i) $X \subseteq V$ ise $\text{Ind}(G[X]) = \text{Ind}(G)[X]$,
- ii) $X, Y \subseteq V$ ise $\text{Ind}(G[X]) \cap \text{Ind}(G[Y]) = \text{Ind}(G[X] \cap G[Y])$.

Örnek 5.1.2.



Şekil 6 Bir basit graf ve bağımsızlık kompleksi

Yukarıda Şekilde 6' te sol tarafta bir basit G grafı ile sağ tarafta o grafın bağımsızlık kompleksi $\text{Ind}(G)$ görülmektedir.

Graflardan elde edilen komplekslerden diğerleri, klik kompleksler ve eşleme komplekslerdir. Bu kompleksler aslında bağımsızlık kompleksleri ile doğrudan ilişkilidir.

Tanım 5.1.3. G bir basit graf olsun. Yüzleri G 'nin kliklerinden oluşan komplekslere *klik kompleks* denir. Bir G grafının klik kompleksi, $\Delta(G)$ ile gösterilir (Stanley 1996).

Açıkcası bir G grafının bağımsızlık kompleksi ile bu grafın tümleyeninin klik kompleksi aynıdır, diğer bir ifade ile $\text{Ind}(G) = \Delta(\bar{G})$ 'dir (Björner vd. 1994).

Tanım 5.1.4. G bir basit graf olsun. Yüzleri G 'nin eşlemelerinden oluşan komplekslere eşleme kompleks denir. Bir G grafının eşleme kompleksi, $M(G)$ ile gösterilir.

Basit bir G grafının çizgi grafının bağımsızlık kompleksi ile onun eşleme kompleksi aynıdır. Diğer bir ifade ile $\text{Ind}(L(G)) = M(G)$ dir.

Bağımsızlık komplekslerinin homoloji gruplarının hesapları önemlidir. Graflarda, projektif boyut ve regülerite hesapları, aslında bu grafarın homoloji grupları ile doğrudan ilişkilidir (Dao Schweig 2013). Grafların bağımsızlık komplekslerinin homoloji hesapları için baskınlık sayısı cinsinden sonuçlar verilecektir.

Teorem 5.1.5. G bir basit graf olsun. Buna göre,

- (i) $\gamma_0(G) > 2k$ ise $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ dır.
- (ii) $W \subset V(G)$ bir bağımsız küme ve $\gamma_0(G, A) > k$ ise $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ dır.
- (iii) G kırıklı graf ve $\gamma(G) > k$ ise $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ dır (Meshulam 2003).

İspat: k sayısı ile ayrıt sayısı $|E|$ üzerinden tümevarım ile ispat yapılacaktır. $k = 0$ olarak alındığında, G grafında boştan farklı baskın kümeler olacağından $\text{Ind}(G) \neq \emptyset$ olduğu sonucunu gerektirir. Böylece $\tilde{H}_{-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ sağlanır. Ayrıca $|E| = 0$ olsaydı $\text{Ind}(G)$ bir simpleks olurdu ve bu durumda tüm homoloji grupları 0 olacaktır.

(i) G grafında bir $e = uv$ ayrıtı olsun. Buna göre, $\gamma_0(G - e) \geq \gamma_0(G) > 2k$ eşitsizlikleri vardır. Tümevarımdan dolayı $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G - e)) = 0$ olur. Bir $S \subseteq V(G) - N_G[u, v]$ kümesi $N_G(S) = V(G) - N_G[u, v]$ 'yi sağlıyorsa $N_G(S \cup \{u, v\}) = V$ olacaktır. Böylece, $\gamma_0(G_0) \geq \gamma_0(G) - 2 > 2(k - 1)$ olup $\tilde{H}_{k-2}(\text{Ind}(G_0)) = 0$ dır. O halde $G_0 = G - N_G[u, v]$ olmak üzere,

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\text{Ind}(G_0)) \rightarrow \tilde{H}_i(\text{Ind}(G)) \rightarrow \tilde{H}_i(\text{Ind}(G - e)) \rightarrow \tilde{H}_{i-2}(\text{Ind}(G_0)) \rightarrow \dots$$

tam dizisinde $i = k - 1$ olarak alınırsa $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ olur.

(ii) $W \subseteq V$ bağımsız kümesi ile $\overline{W} = V - W$ kümesinin herhangi tepeleri arasında bir ayrıt yoksa $\text{Ind}(G) = \text{Ind}(G[W]) * \text{Ind}(G[\overline{W}])$ kompleksinin tüm homoloji grupları sıfırdır, çünkü $\text{Ind}(G[W])$ bir simplekstir. Diğer taraftan, bir $e = uv$ ayrıtı, $u \in \overline{W}$ ve $v \in W$ olacak şekilde alınsın. Bu e ayrıtı için, $\gamma_0(G_0 - e, W) \geq \gamma_0(G, W) > k$ olup tümevarım ile $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G - e)) = 0$ olacaktır. $W_0 = W - N_G[u, v]$ olarak alınsın. Eğer $S \subseteq V - N_G[u, v]$ alt kümesi $W_0 \subset N_G(S)$ kapsamasını sağlarsa, $W \subset N_G(S \cup \{u\})$ olur. Buradan, $\gamma_0(G_0, A_0) \geq \gamma_0(G, A) > k - 1$ elde edilir ve tümevarım ile $\tilde{H}_{k-2}(\text{Ind}(G_0)) = 0$ sonucuna varılır.

(iii) G bir kirişli graf olduğundan bir simpleks tepesi vardır (Dirac, 1961). Bu tepe u olsun. Bir $e = uv$ ayrıtı u ya bitişik bir ayrıtı olsun. $G \setminus e$ alt grafi da kirişli olduğundan ve $\gamma(G - e) \geq \gamma(G) \geq k$ ile birlikte $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G - e)) = 0$ olacaktır. Eğer, $S \subseteq V - N_G[u, v]$ kümesi $G_0 = G - N_G[u, v]$ 'nin bir baskın kümesi olursa, $S \cup \{u\}$ kümesi de G 'nin baskın kümesi olacaktır. Bu durum, $\gamma(G_0) \geq \gamma(G) - 1 \geq k - 1$ olmasını gerektirir. G_0 kirişli bir grafin alt grafi olduğundan kirişli bir graftır. Tümevarım ile $\tilde{H}_{k-2}(\text{Ind}(G_0)) = 0$ olacaktır böylece $\tilde{H}_{k-1}(\text{Ind}(G)) = 0$ olduğu sonucuna varılır.

Bağımsızlık komplekslerinin, homoloji grupları ile ilgili daha fazla sonuçlar için (Dao Schweig 2013) çalışması incelenebilir.

5.2. Tepe-Ayrıştırma

Tepe-ayrıştırma kavramı ilk olarak simpleksler kompleksleri için tanımlanmış olup, daha sonra graflara yorumlanmıştır (Björner Wachs 1996).

Tanım 5.2.1. (Tepe-ayrıştırma) Bir Δ simpleks kompleksi, eğer bir simpleks veya bir v tepesi için;

1. $\text{del}_\Delta(v)$ ve $\text{lk}_\Delta(v)$ tepe-ayrıştırılabilir,
2. $\text{lk}_\Delta(v)$ 'ye ait hiçbir yüz, $\text{del}_\Delta(v)$ 'nin bir faseti değildir,

koşullarını sağlıyorsa, Δ kompleksine tepe-ayrıştırılabilir denir. Burada 2. koşulu sağlayan tepeye döküm tepe adı verilir.

Tanım 5.2.2. (Tepe-ayrıştırma bağımsızlık kompleksleri) Bir G grafının bağımsızlık kompleksi $\text{Ind}(G)$ olsun. Buna göre, eğer G tamamen ayırık graftır veya bir v tepesi için;

i) $G - v$ ve $G - N_G[v]$ tepe-ayrıştırılabilir,dir,

ii) $G - N_G[v]$ ' de hiçbir bağımsız küme $G - v$ ' de maksimal bağımsız küme değildir,

koşullarını sağlıyorsa, $\text{Ind}(G)$ ' ye tepe-ayrıştırılabilir denir. Bu durumda, G grafına tepe-ayrıştırılabilir graf adı verilir. Benzer şekilde 2. koşulu sağlayan tepeye döküm tepesi denir (Woodroffe 2009).

Graflarda döküm tepe için genel bir tanım şu şekilde verilebilir.

Tanım 5.2.3. G bir graf ve $v \in G$ olsun. Her $A \subseteq G - N_G[v]$ bağımsız alt kümesi için $A \cup \{u\}$ bir bağımsız küme olacak şekilde en az bir $u \in N_G(v)$ varsa, bu v tepesine bir *döküm tepe* denir (Woodroffe 2009).

Yardımcı Teorem 5.2.4 G bir graf ve $u \in G$ bir eş-baskın tepe olsun, diğer bir ifade ile $N_G[v] \subseteq N_G[u]$ olsun. Buna göre u döküm tepedir (Civan Bıyıkoglu 2014).

İspat: u tepesi eş-baskın olduğundan, $v \in N_G(u)$ ' de en bir tepe vardır ve bu iki tepe $N_G[v] \subseteq N_G[u]$ içermesini sağlar. Bir $A \subseteq G - N_G[u]$ bağımsız kümesi alınırsa, açıkça $A \cup \{v\}$ kümesi bağımsız olacaktır. Bu durum u tepesinin bir döküm tepesi olduğu sonucunu verir.

Teorem 5.2.5. G grafı, indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimlerini içermeyen bir graf olsun. Buna göre bir u tepesi döküm tepesidir ancak ve ancak u eş-baskın tepedir (Civan Bıyıkoglu 2014).

Bir G grafı indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimlerini içermediğinde, doğal olarak bu grafın tüm alt grafları indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimlerini içermeyeceğinden, yukardaki teorem aşağıdaki sonucu gerektirecektir.

Sonuç 5.2.6. G grafi, indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimlerini içermeyen tepe-ayrıştırılabilir graf olsun. Buna göre G ardıl-sökülebilir bir graftır.

Bir G grafında x bir tepe olsun. Eğer $N_G[x]$ bir klik oluştuyorsa, bu x tepesine simpleks tepe adı verilir. Her kirişli graf bir simpleks tepe barındırdığından (Dirac, 1961), kirişli grafların tepe-ayrıştırılabilirliği için aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 5.2.7. G bir kirişli graf olsun. Buna göre G tepe-ayrıştırılabilir (Woodroffe, 2009).

İspat: G tamamen bağlantısız olmayan her kirişli grafta bir simpleks tepe vardır (Dirac, 1961). Bu tepe x olsun. O halde, $N_G[x]$ bir klik. Bu $y \in N_G(x)$ için $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ içermesini gerektirir. G kirişli bir graf olduğundan, $G - v$ ve $G - [v]$ alt grafları da kirişli graflardır. Böylece tümevarımdan G tepe-ayrıştırılabilir.

Çevrim graflarının tepe-ayrıştırılabilirliği ile ilgili aşağıdaki sonuç vardır.

Teorem 5.2.8. C_n grafi tepe-ayrıştırılabilir ancak ve ancak $n = 3$ veya $n = 5$ dir (Woodroffe 2009).

Eğer G grafi birden fazla grafın ayrık birleşiminden oluşuyorsa, birleşimin meydana getirdiği bu G grafının tepe-ayrıştırılabilir olması için bu bileşen grafların tepe-ayrıştırılabilir olup olmadığı araştırılmalıdır.

Teorem 5.2.9. $G = H \cup K$ olsun. Buna göre $\text{Ind}(G) = \text{Ind}(H) * \text{Ind}(K)$ kompleksi tepe-ayrıştırılabilir ancak ve ancak H ve K tepe-ayrıştırılabilir (Tuyl Villarreal 2008).

5.3. Projektif Boyut

Projektif modül ve projektif boyut kavramları homoloji cebirinin esas kavramlarındandır. Bu çalışmada bir graf veya simpleks kompleksinin Stanley-Reisner halkasının projektif boyutu incelenecektir. Aslında bir grafın projektif boyutundan bahsedilerek, o grafın bağımsızlık kompleksinin Stanley-Reisner halkasının projektif boyutundan bahsedilmektedir. Auslander-Buchsbaum formülü sayesinde, komplekslerin projektif boyutu, halkanın derinliğini ölçmektedir ve bu

durum ayrıca sıfır olan homoloji grupları için bir üst sınır değeri oluşturmaktadır (Dao Schweig 2013).

$R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ halkası $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir polinomlar halkası olsun.

Δ bir kompleks ve $k[\Delta]$ da Stanley-Reisner halkası olsun. $k[\Delta]$ nin minimal serbest çözücüsü;

$$0 \rightarrow \bigoplus_j R[-j]^{\beta_{l,j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R[-j]^{\beta_{i,j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R[-j]^{\beta_{1,j}} \rightarrow R \rightarrow k[\Delta] \rightarrow 0$$

olarak verilsin, bu durumda, $\beta_{i,j}$ sayılarına $k[\Delta]$ nin Betti sayıları denir. Çözücünün l uzunluğuna da, Δ nın *projektif boyutu* denir ve $\text{pd}(\Delta)$ ile gösterilir. Betti sayıları cinsinden, bir halkanın (ideal veya modül) projektif boyutu aşağıdaki tanımdaki gibidir:

Tanım 5.3.1. Bir $k[\Delta]$ halkasında, $\beta_{i,j}$ sayısı (i, j) – inci derecelendirilmiş Betti sayısı olsun. Buna göre,

$$\text{pd}(k[\Delta]) = \max\{i: \beta_{i,j} \neq 0\}$$

sayısı $k[\Delta]$ nın yada diğer bir ifade ile Δ kompleksinin projektif boyutudur (Villarreal 2018).

Betti sayılarının indirgenmiş alt komplekslerin boyutları toplamı cinsinden hesaplanabilir. Aşağıdaki teorem bunu verir.

Teorem 5.3.2. (Hochster formülü) $i > 0$ için, bir Δ simpleks kompleksinin $\beta_{i,j}$ Betti sayıları,

$$\beta_{i,j}(\Delta) = \sum_{w \in \binom{V(\Delta)}{j}} \dim_k \tilde{H}_{j-i-1}(\Delta[W]; k)$$

şeklindedir (Villarreal 2018).

Bir simpleks kompleksinin projektif boyutu, yukarıda verilen cebirsel tanımın dışında, topolojik olarak vermek mümkündür. Buna durumda, $V(\Delta)$ simpleks kompleksin tepe kümesi ve $W \subseteq V(\Delta)$ olmak üzere, $\text{pd}(\Delta)$ nın değeri, $j >$

0 için $\tilde{H}_{|W|-i-j-1}(\Delta[W]; k) = 0$ olacak şekilde en küçük $i \in \mathbb{N}$ sayısıdır. Bu topolojik tanım, bağımsızlık kompleksleri cinsinden yazılacak olursa, bir G grafinin projektif boyutunun tanımına ulaşılır. Bu durumda, G bir graf ve V de G nin tepe kümesi olsun. Buna göre, G nin projektif boyutu, $\text{pd}(G)$ sayısı, $j > 0$ ve $W \subseteq V$ olmak üzere $\tilde{H}_{|W|-i-j-1}(\text{Ind}(G[W])) = 0$ olacak şekilde en küçük $i \in \mathbb{N}$ sayısıdır (Dao Schweig 2013).

Teorem 5.3.3. G bir n -tepeli graf ve $I(G)$ ayrıt ideali olsun. Buna göre,

$$\text{pd}\left(\frac{R}{I(G)}\right) + \text{depth}\left(\frac{R}{I(G)}\right) = n$$

dir (Auslander Buchsbaum 1957).

Önerme 5.3.4. G bir n -tepeli graf olsun. Buna göre, $t < n - \text{pd}(G) - 1$ için $\tilde{H}_t(\text{Ind}(G)) = 0$ dir (Dao Schweig 2013).

Teorem 5.3.5. Δ bir simpleks kompleksi ve $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olsun. Buna göre, $|V(\Delta)| = n$ ve

$W \subseteq V(\Delta)$ için, $t \leq a|W| + b$ ve $\dim_k \tilde{H}_t(\text{Ind}(G[W])) = 0$ ise,

$$\text{pd}(\Delta) \leq n(1 - a) - b - 1$$

dir (Dochtermann Engström 2009).

İspat: Hochster formülüne göre, her j -elemanlı $W \subseteq V(\Delta)$ alt kümeleri ve,

her $i \geq n(1 - a) - b - 1$ için $\dim_k \tilde{H}_t(\text{Ind}(G[W])) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul gereği, her $j - i - 1 \leq aj + b$ için, $\dim_k \tilde{H}_t(\Delta[W]) = 0$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} j - i - 1 &\leq j - (n(1 - a) - b - 1) - 1 = j - n(1 - a) + b \leq j - j(1 - a) + b \\ &= aj + b \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.6. G grafi n tepeye sahip ve $d \geq 1$ dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$\text{pd}(R/I(G)) \leq n \left(1 - \frac{1}{2d}\right) + \frac{1}{2d}$$

dır (Dochtermann Engström 2009).

İspat: (Aharoni et al. 2000) ve (Meshulam, 2001) homoloji hesaplarından, her $p \leq \frac{n-1}{2d} - 1$ için $\dim_k \tilde{H}_p(\text{Ind}(H)) = 0$ dır. Ayrıca, bir önceki teoremin sonucuna, $a = \frac{1}{2d}$ ve $b = -1 - \frac{1}{2d}$ olarak alırsak, $\text{pd}(R/I(G)) \leq n \left(1 - \frac{1}{2d}\right) + \frac{1}{2d}$ sonucu elde edilir.

Sonuç 5.3.7. G grafi, n tepeye sahip ve $K_{1,3}$ -siz bir graf ve maksimum derecesi $d \geq 1$ olsun. Buna göre,

$$\text{pd}(R/I(G)) \leq n \left(1 - \frac{2}{3d+2}\right) + \frac{2}{3d+2} \text{ dır (Dochtermann Engström 2009).}$$

İspat: Yukarıdaki teoremde, $a = \frac{1}{3d+2}$ ve $b = -1 - \frac{2}{3d+2}$ ifadelerini yerine koyarsak sonuç elde edilir.

Bir grafta, bir tepe ve bir tepenin kapalı komşuluğunun silinmesi ile bu grafın projektif boyutunun üst sınırı belirlenebilir. Bu aşağıdaki yardımcı teorem ile gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 5.3.8. G bir graf ve $x \in G$ herhangi bir tepe olsun. Buna göre,

$$\text{pd}(R/I(G)) \leq \max \left\{ \text{pd} \left(\frac{R}{I(G)N_G[x]} \right) + \deg(x), \text{pd} \left(\frac{R}{I(G \setminus x)} \right) + 1 \right\}$$

dir (Dao Schweig 2013).

İspat: Halkaların homomorfizmalarının,

$$0 \rightarrow \frac{R}{(I(G):x)} \rightarrow \frac{R}{I(G)} \rightarrow \frac{R}{(I(G),x)} \rightarrow 0$$

bir kısa tam dizisi olsun. Bu diziye göre,

$$\text{pd}(R/I(G)) \leq \max \left\{ \text{pd} \left(\frac{R}{(I(G):x)} \right), \text{pd} \left(\frac{R}{(I(G),x)} \right) \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\text{pd}\left(\frac{R}{(I(G):x)}\right) = \text{pd}\left(\frac{R}{(I(G \setminus N_G[x]), N_G(x))}\right)$$

ve buna ek olarak,

$$\text{pd}\left(\frac{R}{(I(G), x)}\right) = \text{pd}\left(\frac{R}{(I(G \setminus x), x)}\right)$$

eşitliklerinden, $\text{pd}\left(\frac{R}{(I(G):x)}\right) = \text{pd}\left(\frac{R}{I(G \setminus N_G[x])}\right) + \deg(x)$ ve $\text{pd}\left(\frac{R}{(I(G), x)}\right) = \text{pd}\left(\frac{R}{I(G \setminus x)}\right) + 1$ ifadeleri elde edilir. Böylece ispat biter.

Bir G grafinın projektif boyutu için graf parametrelerine bağlı üst ve alt sınırlar verilebilir. Sıradaki yardımcı teorem bir ayırıt monomial idealin Alexander dualine ait projektif boyutu için graf parametresi cinsinden bir üst sınır verecektir.

G bir graf olsun ve $C = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_t}\}$ kümesi G nin bir minimal tepe örtüm kümesi olsun. x^C ile bir $R = k[x_1, \dots, x_n]$ polinomlar halkasında bir $x_{k_1}x_{k_2} \dots x_{k_t}$ monomiali ifade edilecektir.

Tanım 5.3.9. (Alexander Dualite) Bir $I = (x_{11}x_{12} \dots x_{1n_1}, \dots, x_{t1}x_{t2} \dots x_{tn_t})$ bir monomial ideal olmak üzere, I idealinin Alexander duali;

$$I^* = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}) \cap \dots \cap (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn_t})$$

olarak tanımlanır. Bir G grafi için, $I(G)^* = (x^C : C \text{ bir minimal tepe örtümüdür.})$ olarak tanımlanır (Tuyl 2008).

Teorem 5.3.10. I karesiz monomial ideali, bir R halkasının ideali olsun. Buna göre,

$$\text{pd}(I^*) = \text{reg}\left(\frac{R}{I}\right)$$

dır (Terai 1998).

Yardımcı Teorem 5.3.11. G bir graf $x \in V(G)$ herhangi bir tepe ve $N_G(x) = \{y_1, \dots, y_t\}$ olsun.

$G_1 = G - x$ ve $G_2 = G - N_G[x]$ olarak alınırsa. Bu durumda,

- (i) $I(G)^* = xI(G_1)^* + y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$;
- (ii) $xy_1 \cdots y_t I(G_2)^* = xI(G_1)^* \cap y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$;
- (iii) R -modüllerin bir,

$$0 \rightarrow xy_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow xI(G_1)^* \oplus y_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow I(G)^* \rightarrow 0$$

şeklinde bir tam dizisi vardır (Khosh-Ahang Moradi 2014).

İspat: (i) C tepe örtümü, G 'nin bir minimal tepe örtümü olsun. $x \in C$ olarak alınırsa $C' = C \setminus x$ kümesi G_1 'in bir minimal tepe örtümü olacaktır ve böylece $x^C = xx^{C'} \in xI(G_1)^*$ dir. Eğer, $x \notin C$ olursa, bu durumda $\{y_1, \dots, y_t\} \subseteq C$ olacaktır ve $C'' = C \setminus \{y_1, \dots, y_t\}$ kümesi G_2 'nin bir tepe örtümü olacaktır. O halde,

$$x^C = y_1 \cdots y_t x^{C''} \in y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$$

dir. Böylece,

$$I(G_1)^* \subseteq xI(G_1)^* + y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$$

ifadesi elde edilecektir.

Tersine, G_1 grafinin herhangi bir minimal tepe örtümü C' olsun. Böylece $C' = C'' \cup \{x\}$ kümesi G nin bir tepe örtümü olacaktır. O halde $xI(G_1)^* \subseteq I(G)^*$ dir. Ayrıca, C'' tepe örtüm kümesi G_2 grafinin bir minimal tepe örtümü ise $C'' \cup \{y_1, \dots, y_t\}$ kümesi de G' nin tepe örtümü olacaktır. Bu durum, $y_1 \cdots y_t I(G_2)^* \subseteq I(G)^*$ sonucunu verir. Sonuç olarak,

$$xI(G_1)^* + y_1 \cdots y_t I(G_2)^* \subseteq I(G)^*$$

dir. Bu iki kapsamadan istenen eşitlik olan $xI(G_1)^* + y_1 \cdots y_t I(G_2)^* = I(G)^*$ ifadesi elde edilir.

(ii) G_2 'nin herhangi bir C'' tepe örtümü kümesi alınsın. Bu durumda, $C' = C'' \cup \{y_1, \dots, y_t\}$ kümesi G_1 'nin bir tepe örtümü olacaktır. Böylece,

$$xy_1 \cdots y_t x^{C''} = xx^{C'} \in xI(G_1)^* \cap y_1 \cdots y_t I(G_2)^*, \text{ dir.}$$

Tersine, bir $f \in xI(G_1)^* \cap y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$ monomiali alınsın. O halde, $f_1 \in I(G_1)^*$ ve $f_2 \in I(G_2)^*$ monomialleri için $f = xf_1 = y_1 \cdots y_t f_2$ dir. Bu eşitlik, $f_3 \in I(G_2)^*$ için $f_2 = xf_3$ olduğunu verir. Sonuç olarak, $f = xy_1 \cdots y_t f_3 \in xy_1 \cdots y_t I(G_2)^*$ dir ispat biter.

(iii) K ve L halkalarının bir,

$$0 \rightarrow K \cap L \rightarrow K \oplus L \rightarrow K + L \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Bu dizide, $K = xI(G_1)^*$ ve $L = y_1 \cdots y_t I(G_2)^*$ olarak alınırsa, (i) ve (ii)' de elde edilen eşitlikler ile birlikte,

$$0 \rightarrow xy_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow xI(G_1)^* \oplus y_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow I(G)^* \rightarrow 0 \quad \text{kısa tam dizisi elde edilir.}$$

Teorem 5.3.12. G bir graf ve $x \in V(G)$ herhangi bir tepe olsun. Eğer, $G_1 = G - x$ ve $G_2 = G - N_G[x]$ ise,

$$\text{pd}(I(G)^*) \leq \max\{\text{pd}(I(G_1)^*), \text{pd}(I(G_2)^*) + 1\}$$

dir (Khosh-Ahang Moradi, 2014).

İspat: Yukarıdaki yardımcı teoremden,

$$0 \rightarrow xy_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow xI(G_1)^* \oplus y_1 \cdots y_t I(G_2)^* \rightarrow I(G)^* \rightarrow 0$$

tam dizisi göz önüne alınırsa,

$$\text{pd}(I(G)^*) \leq \max\{\text{pd}(xI(G_1)^*), \text{pd}(y_1 \cdots y_t I(G_2)^*), \text{pd}(xy_1 \cdots y_t I(G_2)^*) + 1\}$$

elde edilir. $\text{pd}(xI(G_1)^*) = \text{pd}(I(G_1)^*)$ ve $\text{pd}(xy_1 \cdots y_t I(G_2)^*) = \text{pd}(I(G_2)^*)$ eşitliklerinden dolayı $\text{pd}(I(G)^*) \leq \max\{\text{pd}(I(G_1)^*), \text{pd}(I(G_2)^*) + 1\}$ elde edilir.

Bir graf sınıfında, eğer sınıfa ait grafların barındırdığı bir özellik, alt graflarda da bulunuyorsa bu sınıfa *kalıtsal sınıf* denir. Bir sonraki teorem, grafların projektif boyutlarını graf parametreleri cinsinden üstten sınırlandırmaktadır.

Teorem 5.3.13. Bir $\mathfrak{S}$ graf sınıfı, kalıtsal grafların sınıfı olsun. $f: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

1. Eğer G tamamen izole tepelerden oluşuyorsa diğer bir ifade ile G 'nin hiç ayrıtı yoksa, $f(G) \leq |V(G)|$ dır. Buna ek olarak, en az bir ayrıtı sahip herhangi bir $G \in \mathfrak{S}$ grafi için, $0 \leq i \leq k$ olmak üzere, G 'de $v_1, v_2, \dots, v_k$ tepeler kümesi alındığında $G_i = G - v_1 - v_2 - \dots - v_i$ olarak tanımlansın. (Burada $G = G_0$ kabul edilecektir). Böylece;
2. $0 \leq i \leq k - 1$ için, $f(G_i - N_{G_i}[v_{i+1}]) + 1 \geq f(G)$,
3. $f(\bar{G}_k) + |IZ(G_k)| \geq f(G)$.

Yukarıdaki maddeler sağlanıyorsa, bu durumda $G \in \mathfrak{S}$ için

$$pd(G) \leq |V(G)| - f(G)$$

dir (Dao Schweig 2013). (Burada $IZ(G)$ ve $\bar{G}$ ile sırasıyla G grafinin izole tepeleri ve $G \setminus IZ(G)$ grafini temsil edilmektedir.)

İspat: G grafi minimal sayıda tepeye sahip ve tersine örnek bir graf olsun. Madde 1' den dolayı, G 'nin en az bir ayrıtı olsun. $v_1, v_2, \dots, v_k$ tepeleri Madde 2 ve 3'ü sağlasın. Bir i sayısı üzerinden tümevarım ile her $0 \leq i \leq k - 1$ için

$$pd(G_i) \leq pd(G_{i+1}) + 1$$

olduğu gösterilecektir.

$i = 0$ için, Yardımcı Teorem1 den $pd(G) > pd(G - N_G[v_1]) + \deg v_1$ olduğu gösterilmelidir. Eğer eşitsizlik gerçekleşmezse,

$$pd(G) \leq pd(G - N_G[v_1]) + \deg v_1$$

$$\leq |V(G - N_G[v_1])| - f(G - N_G[v_1]) + \deg v_1$$

$$= |V(G)| - \deg v_1 - 1 - f(G - N_G[v_1]) + \deg v_1$$

$$\leq |V(G)| - f(G).$$

ifadesi gerçekleşecektir. $0 \leq i \leq j - 1$ için $pd(G_i) \leq pd(G_{i+1}) + 1$ olduğu gösterilmiş olsun. Böylece, $pd(G) > pd(G_j - N_{G_j}[v_{j+1}]) + \deg v_{j+1} + j$ olduğu gösterilmelidir. Fakat bu doğru değil ise,

$$\begin{aligned}
\text{pd}(G) &\leq \text{pd}(G_j - N_{G_j}[v_{j+1}]) + \deg_{G_j}(v_{j+1}) + j \\
&\leq |V(G_j - N_{G_j}[v_{j+1}])| - f(G_j - N_{G_j}[v_{j+1}]) + \deg_{G_j}(v_{j+1}) + j \\
&= |V(G)| - j - \deg_{G_j}(v_{j+1}) - 1 - f(G_j - N_{G_j}[v_{j+1}]) + \deg_{G_j}(v_{j+1}) + j \\
&\leq |V(G)| - f(G)
\end{aligned}$$

olur ve bu kabul ile çelişmektedir. Eğer,

$$\text{pd}(G_i) \leq \text{pd}(G_{i+1}) + 1$$

eşitsizliği $0 \leq i \leq k-1$ için gösterilmiş olsaydı, bu $\text{pd}(G) \leq \text{pd}(G_k) + k$ eşitsizliğini gerektirecekti. Madde 3'ten dolayı,

$$\begin{aligned}
\text{pd}(G_k) + k &= \text{pd}(\bar{G}_k) + k \\
&\leq |V(\bar{G}_k)| - f(\bar{G}_k) + k \\
&= |V(G)| - k - |\text{IZ}(G_k)| - f(\bar{G}_k) + k \\
&\leq |V(G)| - f(G)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırdı ve bu kabul ile çeliştiğinden dolayı ispat biter.

Teorem 5.3.14. G grafi n tepeye sahip herhangi bir graf olmak üzere,

$$\text{pd}(G) \leq n - \epsilon(G)$$

dir (Dao Schweig 2013).

İspat: $f(H) = \epsilon(H) + |\text{IZ}(H)|$ olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyonun Teorem 5.3.13' ün koşullarını sağladığı gösterilecektir. Eğer graf tamamen izole tepelerden oluşuyorsa, $\epsilon(H) = 0$ ve $|\text{IZ}(H)| = n$ olacaktır. Böylece koşul 1 sağlanır. Şimdi, en az bir ayrıta sahip bir G grafi verilsin. $v \in V(G)$ bir tepe ve $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ bunun komşuluğu olsun. $G_i = G - v_1 - v_2 - \dots - v_i$ olarak tanımlansın. E kümesi $G - N_{G_i}[v_{i+1}]$ grafının en küçük kardinaliteye sahip ayrıtsal-baskınlık kümesi olsun. Bu E kümesine, $u \in \text{IZ}(G - N_{G_i}[v_{i+1}])$ olmak üzere

uu' ayrıtlarını ekleyerek (burada u' tepeleri u ' nun G deki komşusudur) ve vv_{i+1} ayrıtlarını ekleyerek, E' kümesi elde edilir ve bu küme G' nin ayrıtsal-baskınlık kümesi olacaktır. Bu durum, $f(G - N_{G_i}[v_{i+1}]) + 1 = \epsilon(G - N_{G_i}[v_{i+1}]) + |Z(G - N_{G_i}[v_{i+1}])| + 1 = |E'| \geq \epsilon(G) = f(G)$ anlamına gelmektedir. Böylece koşul 2 sağlanmış oldu.

v tepesi G_k grafında izole bir tepe olacaktır. E kümesi, G_k grafının en küçük kardinaliteye sahip ayrıtsal-baskınlık kümesi olsun. Bu kümeye vv' ayrıtı ile $u \in |Z(G_k)| - v$ olmak üzere, uu' ayrıtlarının eklenmesiyle E' kümesi oluşturulsun. E' kümesi G grafının ayrıtsal-baskınlık kümesi olacaktır. Bu $f(\overline{G_k}) + |Z(G_k)| = \epsilon(G_k) + |Z(G_k)| = |E'| \geq \epsilon(G) = f(G)$ ifadesini verir ve koşul 3 sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olacaktır.

Yardımcı Teorem 5.3.15. I ideali bir karesiz monomial ideal olsun. S polinom halkasının değişkenlerinin bir alt kümesi $\Lambda = \{x_1, \dots, x_i\}$ olsun. Buna göre,

$1 \leq j \leq i$ olmak üzere ($x_0 = 0$ için),

$\text{pd}(S/I) = \text{pd}(S/((I, x_1, \dots, x_{j-1}):x_j))$ ya da $\text{pd}(S/I) = \text{pd}(S/(I, x_1, \dots, x_i))$ dir (Dao vd. 2013).

İspat: $x = x_i$ olarak alınsın. Böylece iddiaya göre,

$$\text{pd}(S/I) = \text{pd}(S/(I, x)) \text{ ya da } \text{pd}(S/I) = \text{pd}(S/(I:x))$$

eşitliklerinden biri doğru olacaktır. Eğer, $\text{pd}(S/I) \neq \text{pd}(S/(I:x))$ olsaydı, (Lyubeznik, 1988) ve (Kummini, 2008)' den dolayı, $\text{pd}(S/I) > \text{pd}(S/(I:x))$ olacaktı. $\text{pd}(S/I) = p$ olarak alınırsa, Tor modüllerinin uzun tam dizileri ile Yardımcı Teorem 1'den,

$$\text{pd}\left(\frac{S}{I}\right) > \text{pd}\left(\frac{S}{I:x}\right)$$

eşitsizliği kullanılarak, her $l > p$ için $\text{Tor}_p^S\left(\frac{S}{I:x}, k\right) \neq 0$ ve $\text{Tor}_p^S(S/(I, x), k) = 0$ olduğunu verir. Böylece $\text{pd}(S/(I, x)) = p$ olacaktır.

5.4. Graflarda Regülerite

Bu bölümde, grafların ve simpleksler komplekslerin Stanley-Reisner halkarının Castelnuovo-Mumford regüleritesi ile ilgili sonuçlar verilecektir. Bir I idealinin Castelnuovo-Mumford regüleritesi bu I idealinin karmaşıklığını ölçen bir kavramdır. Cebirsel geometri ve cebirsel kombinatoriğin en önemli kavramlarından biridir.

$\mathbb{F}$ bir cisim ve $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ bu cisim üzerinde bir polinomlar halkası olsun. M bir sonlu üretilmiş $\mathbb{Z}^n$ – derecelenmiş bir S – modül olsun. M modülünün bir minimal serbest çözücüsü,

$$0 \rightarrow S_p \xrightarrow{d_p} S_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} \dots \xrightarrow{d_2} S_1 \xrightarrow{d_1} S_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

olsun. Bu çözücünde, $S_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}^n} S(-j)^{\beta_{i,j}}$ toplamına eşittir ve $S(-j)$ serbest modülü ile S modülünün derecesinin j ile değiştirilmiş temsil edilmektedir. Burada, $\beta_{i,j}$ pozitif tamsayısına M modülünün Betti sayısı denir. Ayrıca, $\beta_{i,j} = \dim_{\mathbb{F}} \text{Tor}_i(M, \mathbb{F})_j$ dir.

Bir grafin ve kompleksin Castelnuovo-Mumford regüleritesi aşağıdaki gibidir.

Tanım 5.4.1. R bir halka ve $I \subseteq R$ nin bir monomial ideali olsun. Buna göre,

$$\text{reg}(R/I(G)) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}$$

veya bir başka ifade ile

$$\text{reg}(R/I(G)) = \max\{j - i : \text{Tor}_i(R/I(G), k)_j \neq 0\}$$

dır. Bu iki ifadenin yanı sıra, bir de Δ kompleksi için regülerite kavramı;

$$\text{reg}(\Delta) = \{j : \tilde{H}_{j-i}(\Delta[S], k) \neq 0, S \subseteq V(\Delta)\}$$

ile tanımlanır. Bir R polinomlar halkasına ait bir I ideali için $\text{reg}(I) = \text{reg}(R/I) + 1$ eşitliği vardır (Woodroffe, 2014).

Yardımcı Teorem 5.4.2. $\mathbb{F}$ bir cisim ve Δ ile Σ simpleksler kompleksleri olsunlar. Buna göre,

$$\text{reg}_{\mathbb{F}}(\Delta * \Sigma) = \text{reg}_{\mathbb{F}}(\Delta) + \text{reg}_{\mathbb{F}}(\Sigma)$$

dir.

Graflarda regülerite araştırmalarında en önemli sonuçlardan biri, grafin indirgenmiş eşleme sayısının regülerite için bir alt sınır oluşudur (Katzman, 2006). Bunun ispatı geometrik kombinatorik yöntemiyle verilecektir (Woodroofe 2014).

Teorem 5.4.3. G herhangi bir graf olsun. Buna göre,

$$\text{reg}(R/I(G)) \geq \text{im}(G) \text{ dir (Woodroofe 2014).}$$

İspat: G grafinin indirgenmiş eşleme sayısı $\text{im}(G)$ ' nin değeri t olsun. Bu demektir ki G grafında tK_2 indirgenmiş altgraf vardır. Bu durumda, eğer G grafinin bağımsızlık kompleksi $\text{Ind}(G)$ oluşturulursa, bu $\text{Ind}(G)$ kompleksinde, $(t - 1) -$ küre indirgenmiş altkompleks olacaktır. Çünkü, t -tane K_2 altgrafları, $\text{Ind}(G)$ nin bir, $\text{Ind}(K_2) * \text{Ind}(K_2) * \dots * \text{Ind}(K_2)$ altkompleksini meydana getirir ve her bir $\text{Ind}(K_2)$ kompleksi $0 -$ küredir. Bir kompleksin regüleritesi her zaman indirgenmiş alt komplekslerinden büyük olacağından sonuca ulaşılır.

Graflarda regülerite için altsınır ile birlikte üst sınır değerleri de ilgi çekicidir. Bir sonraki sonuç bir grafin regüleritesinin üstten, eş-kiriş-graf kaplama sayısı olan $\text{cochord}(G)$ ile sınırlandırılabilceğini göstermektedir.

Teorem 5.4.4. G herhangi bir graf olsun. Buna göre herhangi bir $\mathbb{F}$ cismi için,

$$\text{reg}(R/I(G)) \leq \text{cochord}(G)$$

dir (Woodroofe 2014).

Bu teoremi ispatlamak için öncelikle aşağıdaki teoremlerin sonuçlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 5.4.5. G grafinin $V(G)$ tepeler kümesi, bir bağımsız A_0 kümesi ile birlikte $A_1, \dots, A_p$ kliklerinin birleşimine eşit olacak şekilde parçalansın, bu durumda,

$$\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) \leq p$$

olur (Woodroofe 2014).

Teorm 5.4.6. G bir graf ve $A \subseteq V(G)$ bir klik olsun. O halde,

$$\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) \leq \text{reg}\left(\frac{R}{I\left(\frac{G}{J}\right)}\right) + 1$$

dir (Woodroofe 2014).

Açıkcası, yukarıda verilen iki teoreme göre, bir graftan bir klik silinirse, bu grafın regülerite değeri en fazla 1 azalacaktır.

Teorem 5.4.7. $\mathbb{F}$ cismi üzerinde, $R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomlar halkasının $I_1, \dots, I_p$ karesiz monomial idealleri verilsin. Buna göre,

$$\text{reg}(R/(I_1 + I_2 + \dots + I_p)) \leq \sum_{j=1}^p \text{reg}(R/I_j)$$

dir (Kalai Meshulam 2006).

Yukardaki teorem, graflara ve ayrıt ideallere göre tekrar ele alınsın. $G_1, \dots, G_p$ grafları aynı $\{x_1, \dots, x_n\}$ tepe kümesi üzerinde tanımlanırsa, bu durumda yukarıdaki teoremin ifadesi,

$$\text{reg}(R/I(\cup_{j=1}^p G_j)) \leq \sum_{j=1}^p \text{reg}(R/I(G_j))$$

olarak yeniden yazılabilir.

İspat (Teorem 5.4.4.): $\text{reg}(R/(H)) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul H nın en az bir ayrıtı sahip eş-kiriş graf olmasıdır. $\text{reg}(R/I(\cup_{j=1}^S G_j)) \leq \sum_{j=1}^S \text{reg}(R/(G_j))$ eşitsizliğinden ve her bir $R/(G_j)$ 'nin regüleritesinin 1 olmasından sonuç elde edilir.

Teorem 5.4.8. $\mathcal{F}$ kümesi bir graf ailesi olsun. Bir $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü, eğer G grafi ayrık ise $\eta(G) = 0$ olacak şekilde tanımlansın. Buna göre, $G \in \mathcal{F}$ grafi için, $E(G) \neq \emptyset$ ve $x \in V(G)$ olmak üzere,

1. $G - x$ ve $G - N_G[x]$ alt grafları $\mathcal{F}$ ailesine aittir,
2. $\eta(G - N_G[x]) < \eta(G)$ ve $\eta(G - x) \leq \eta(G)$

koşulları sağlandığında bu $G \in \mathcal{F}$ grafi için $\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) \leq \eta(G)$ dır (Villarreal, Morey 2011).

İspat: Tepe sayısı üzerinden tümevarım yapılacaktır. G grafi $\mathcal{F}$ ailesinden bir graf olsun. Eğer G bir ayrık graf ise $I(G) = (0)$ olacaktır ve $\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) = \text{reg}\left(\frac{R}{I(0)}\right) = \text{reg}(R) = \eta(G) = 0$ sonucuna varılır. G grafi en az bir ayrıta sahip graf olsun. Şimdi $x \in V(G)$ bir tepe olmak üzere, $G_1 = G - x$ ve $G_2 = G - N_G[x]$ indirgenmiş grafları yukarıdaki koşullardan 1 ve 2' yi sağlayacak şekilde alınsın. R –modüllerin bir

$$0 \rightarrow \frac{R}{(I(G):x)}[-1] \xrightarrow{x} \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{(I(G),x)} \rightarrow 0$$

tam dizisi vardır.

Burada $(I(G):x) = (I(G_2), N_G(x))$ ve $(I(G),x) = (I(G_1),x)$ dir. Ayrıca G_1 ve G_2 grafları G den daha az tepeye sahiptir. Regüleritenin tanımından herhangi bir derecelenmiş M modülü için

$\text{reg}(M)[-1] = \text{reg}(M) + 1$ dir. O halde G_1 ve G_2 ' ye tümevarım hipotezlerini uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \text{reg}(R/(I(G):x)[-1]) &= \text{reg}(R/(I(G):x)) + 1 \\ &= \text{reg}(R'/I(G_2)) \leq \eta(G_2) + 1 \leq \eta(G) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Çünkü, $R = k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası olmak üzere, $R/(x_n) \cong k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ ' dir. Ayrıca, $\text{reg}(R/(I(G),x)) \leq \eta(G_1) \leq \eta(G)$ dir. Burada R' halkası $V(G_2)$ ' deki değişkenlerden oluşmaktadır. O halde $R/I(G)$ ' nin regüleritesinin,

$$\text{reg}(R/(I(G):x)[-1]) \text{ ve } \text{reg}(R/(I(G),x))$$

değerlerinden maksimum olanı tarafından sınırlandırıldığı sonucuna varılır. Böylece,

$$\text{reg}(R/I(G)) \leq \eta(G)$$

dir.

Yardımcı Teorem 5.4.9. G bir graf ve $x \in G$ bir eş-baskın tepe olsun. Buna göre,

$$\text{im}(G - x) \leq \text{im}(G) \text{ ve } \text{im}(G - N_G[x]) < \text{im}(G) \text{ dir (Bıyıkoglu Civan 2014).}$$

İspat: Birinci eşitsizlik olan, $\text{im}(G \setminus x) \leq \text{im}(G)$ ' nin doğru olduğu açıkça görülmektedir. Bir $M \subseteq E(G \setminus N_G[x])$ kümesi indirgenmiş eşleme olarak alınsın. x bir eş-baskın tepe olduğundan $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde en az bir $y \in N_G(x)$ vardır. Buradan, $xy \cup M$ kümesinin G de indirgenmiş bir eşleme olduğu sonucuna varılır. O halde, $\text{im}(G \setminus N_G[x]) < \text{im}(G)$ dir.

Teorem 5.4.10. G grafi indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimleri içermeyen tepe-ayrıştırılabilir bir graf olsun. Buna göre, $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ dir (Bıyıkoglu Civan 2014).

İspat: Herhangi bir G grafi için $\text{reg}(G) \geq \text{im}(G)$ olduğu zaten biliniyor (Katzman, 2006). O halde, G grafi, C_4 ve C_5 çevrimleri içermeyen tepe-ayrıştırılabilir bir graf olduğunda, G ' nin $\text{reg}(G) \leq \text{im}(G)$ sağladığının gösterilmesi yeterli olacaktır. G grafi tepe-ayrıştırılabilir olduğundan bir x döküm tepesi vardır. G grafi indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimleri içermediğinden Teorem X' den dolayı bu döküm tepesi eş-baskındır. Ayrıca, $G \setminus N_G[x]$ ve $G \setminus x$ grafları da indirgenmiş C_4 ve C_5 çevrimleri içermeyen tepe-ayrıştırılabilir. Bu durum Teorem 5.4.8.' den dolayı $\text{reg}(G) \leq \text{im}(G)$ olmasını gerektirecektir. O halde $\text{reg}(G) = \text{im}(G)$ dir.

Yukarıdaki teoremdeki gibi indirgenmiş eşleme sayısı ile regüleritesi eşit olan başka graf sınıflarında vardır. Şimdi bu durumu sağlayan özel başka bir graf sınıfı verilecektir. Bunu göstermek için öncelikle aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır.

Teorem 5.4.11. G bir graf ve $x \in V(G)$ olsun. Buna göre G dizisel Cohen-Macaulay graf ise $G - N_G[x]$ bir dizisel Cohen-Macaulay graftır (Tuyl Villarreal 2008).

Yardımcı Teorem 5.4.12. G iki parçalı graf olsun. Eğer G dizisel Cohen-Macaulay ise derecesi 1 olan bir $x \in V(G)$ vardır (Tuyl Villarreal, 2008).

Teorem 5.4.13. G grafi dizisel Cohen-Macaulay ikiparçalı graf ve $\text{im}(G)$ sayısı G ' nin indirgenmiş eşleme sayısı olsun. Buna göre,

$$\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) = \text{im}(G)$$

dir (Tuyl 2009).

İspat: (Katzman 2006) teoreminden dolayı $\text{im}(G)$ sayısının bir grafın Stanley-Reisner halkası için alt sınır olduğu bilinmektedir. Gösterilmesi gereken bu halka için aynı zamanda üst sınır olduğudur. Teorem (Terai, 1998)' den dolayı $\text{reg}\left(\frac{R}{I(G)}\right) = \text{pd}(I(G)^*)$ eşitliği vardır. Böylece $\text{pd}(I(G)^*) \leq \text{im}(G)$ olduğunu göstermek gerekmektedir. $|V(G)| = n$ üzerinden tümevarım yapılacaktır. Eğer $n = 2$ olsaydı, G grafi tek bir xy ayrıtından oluşacaktı ve $I(G)^* = (x, y)$ olacaktı. Bu durumda, $\text{pd}(I(G)^*) = 1 \leq 1 = \text{im}(G)$ olur.

$n > 2$ olsun. G grafi bir dizisel Cohen-Macaulay iki parçalı graf olduğundan, Yardımcı Teorem 5.4.12' den dolayı derecesi 1 olan bir x tepesi vardır. y tepesi x ' in bir tek komşusu olsun ve $N_G(y) = \{x, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}$ kümesi y ' nin komşuları olsun. Açıkça, W kümesi G grafının bir herhangi bir minimal tepe örtüm kümesi ise, x ve y ' nin her ikisi birden W kümesinde olamaz, çünkü olsaydı $W - x$ kümesi hala bir tepe örtüm kümesi olurdu. Ayrıca, $y \notin W$ durumunda $N_G(y) \subseteq W$ olacaktır. $G' = G - N_G[y]$ ve $G'' = G - N_G[x]$ olarak alınsın. $I(G')^*$ ve $I(G'')^*$ sırasıyla G' ve G'' graflarının örtüm idelleri olsunlar ve $R = k[x_1, \dots, x_n]$ halkasının birer ideali olarak yorumlansınlar. Bu durumda aşağıdaki gerçeklere ihtiyaç vardır:

İddia 1. $I(G)^* = xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* + y I(G'')^*$.

İspat (İddia 1): $m \in I(G)^*$ üreteç olsun bu durumda m , G ' nin minimal tepe örtümü olur. Böylece bu örtüm kümesi x veya y tepelerinden birini içerecektir. Fakat ikisini birden içeremez. Eğer x ' i içerseydi, $N_G(y) = \{x, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}$ ' yi içerecekti. Böylece $m = xx_{i_2} \dots x_{i_t} m'$ dir ve m' burada G' ' nün bir tepe örtümüdür. Böylece $m \in xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^*$ dır. Eğer x değişkeni m' yi bölemez ise $m = ym'$ olacaktır ve m' , G'' ' nün örtümü olmak zorundadır. O halde $m \in y I(G'')^*$ ' dir ve bu da kapsamanın bir tarafını göstermektedir. Kapsamanın diğer yönü benzer şekilde gösterilebilir: eşitliğin sağ tarafı G nin bir örtümüdür ve $I(G)^*$ ye aittir.

İddia 2. $xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* \cap yI(G'')^* = yxx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^*$.

İspat (İddia 2): $yxx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* \subseteq xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^*$ olduğu biliniyor. Eğer $m \in yxx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^*$ ise $m = yxm'$ olacaktır ve burada m' de G'' nün bir tepe-örtümüdür böylece ikinci idelin de bir elemanıdır yani $m \in yI(G'')^*$ dir bu durum iki idaelin arakesitinde olduğunu gerektirir. Diğer taraf için; $xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* \cap yI(G'')^*$ arakesitinde ait bir m elemanı alınsın. Bu durumda $m = xx_{i_2} \dots x_{i_t} m'$ ve $m' \in I(G'')^*$ dir. Fakat $m \in yI(G'')^*$ olduğundan y değişkeni m' yi böler ve bu da $m' = ym''$ olmasını gerektirir. Böylece $m = xx_{i_2} \dots x_{i_t} m''$ dir. Fakat $m'' I(G')^*$ de olmalıdır çünkü hiçbir üretiçi y tarafından bölünmemektedir.

İddia 1 ve İddia 2' nin bir sonucu olarak

$$0 \rightarrow yxx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* \rightarrow xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* \oplus yI(G'')^* \rightarrow I(G)^* \rightarrow 0$$

Tam dizisi elde edilir. ($0 \rightarrow A \cap B \rightarrow A \oplus B \rightarrow A + B \rightarrow 0$ dizisi şeklinde) Bu tam dizi bize $\text{pd}(I(G)^*)$ için aşağıdaki sınırı verir:

$$\text{pd}(I(G)^*) \leq \max\{\text{pd}(yxx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^* + 1), \text{pd}(xx_{i_2} \dots x_{i_t} I(G')^*), \text{pd}(yI(G'')^*)\}.$$

Bir I monomial ideal ve bir m monomiali için, m' nin desteği ile I' nın herhangi bir üretecinin desteği farklıdır bu yüzden $\text{pd}(mI) = \text{pd}(I)$ olup,

$$\text{pd}(I(G)^*) \leq \max\{\text{pd}(I(G')^*) + 1, \text{pd}((G'')^*)\} \text{ elde edilir.}$$

Tümevarım ile $\text{pd}(I(G')^*) + 1 \leq a(G') + 1$ ve $\text{pd}((G'')^*) \leq a(G'')$ dir. Şimdi $a(G'') \leq a(G)$ açıktır ve $a(G')$ nün 3-ayrık kenarları olarak ve ek olarak xy kenarı ile birlikte alınırsa $a(G') + 1$ oluşturulur ve $a(G') + 1 \leq a(G)$ dir.

Yardımcı Teorem 5.4.14. $I \subseteq R$ bir monomial ideal ve x de I' nın bazı üreteçlerinde bulunan bir değişken olsun. Buna göre,

$$\text{reg}(I) \leq \max\{\text{reg}(I : x) + 1, \text{reg}(I, x)\}$$

dir. Dahası I ideali karesiz monomial ideal ise $\text{reg}(I) = \text{reg}(I : x) + 1$ veya $\text{reg}(I) = \text{reg}(I, x)$ dir (Dao vd. 2013).

İspat: $0 \rightarrow \frac{R}{(I:x)}[-1] \rightarrow \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{(I,x)} \rightarrow 0$ tam dizisi verilsin. Bu tam dizide ilk dönüşüm x ile çarpım olduğundan -1 ile çarpılmıştır.

İlk önce $\text{reg}(I, x) \leq \text{reg}(I)$ olduğunu gösterilecektir. Bunu göstermek için $\text{reg}(I, x) = m$ olarak alınsın. Böylece, öyle bir τ karesiz monomiali vardır ve $\beta_{j,\tau}(I, x) \neq 0$ ve $|\tau| - j - m$ dir. Burada homolojik dereceli j ve çoklu dereceli τ olmak üzere, $\beta_{j,\tau}$ çoklu dereceli Betti sayıları kullanılmaktadır. (Burada $|\tau|$ ile τ karesiz monomialinin değişken sayısı gösterilmektedir.) L monomialleri, I monomialleri içinde x değişkenini içermeyen monomialler olarak alınırsa, açıkça $(I, x) = (L, x)$ dir.

Eğer x değişkeni τ monomial idealinde bir üreteç değişkeni ise $\text{Tor}_j^R((I, x), \mathbb{F})_\tau = \text{Tor}_{j-1}^R(L, \mathbb{F})_{\frac{\tau}{x}}$ dir. Aksi halde, $\text{Tor}_j^R((I, x), K)_\tau = \text{Tor}_j^R(L, K)_\tau$ dir. İlk durumda $\beta_{j-1, \frac{\tau}{x}}(I) \neq 0$ dir ve ikinci durumda $\beta_{j,\tau}(I) \neq 0$ olacaktır. Her iki durumda da I 'nin regüleritesi en az m ' dir ve iddianın doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi çelişki üretmek için, $\text{reg}(I)$ 'nin eşitsizlikte hiçbir terime eşit olmadığı kabul edilsin. Yukarıdaki paragraftan dolayı $\text{reg}(I:x) + 1 > \text{reg}(I) > \text{reg}(I, x)$ dir. $\text{reg}(I:x) = m$ olarak alınsın. Yani $\beta_{j,\sigma}(I:x) \neq 0$ ve $|\sigma| - j = m$ dir. $I:x$ idealinde, x ile bölünebilen hiçbir minimal üreteç olmadığından, σ da x yoktur. Dahası $\beta_{j,\sigma}(I:x) = \beta_{j+1,\sigma}(R/(I:x))$ dir.

$\tau = x\sigma$ olsun. Şimdi,

$$0 \rightarrow \frac{R}{(I:x)}[-1] \rightarrow \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{(I,x)} \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi Tor uzun tam dizisine uygulanırsa, $\beta_{j+1,\tau}\left(\frac{R}{I}\right) \neq 0$ veya $\beta_{j+2,\tau}\left(\frac{R}{(I,x)}\right) \neq 0$ olur. Birinci durumda, I 'nin regüleritesi en az $|\tau| - j = m + 1$ kadar olur ve bu durum $m + 1 > \text{reg}(I)$ ile çelişir. İkinci durumda, (I, x) 'in regüleritesi en az $|\tau| - (j + 1) = m$ kadardır. $m + 1 = \text{reg}(I:x) + 1 > \text{reg}(I) > \text{reg}(I, x) = m$ olduğundan dolayı bu da bir çelişki olacaktır.

Önerme 5.4.15. G grafi boşluksuz ve izole tepesi olmayan bir graf olsun. x tepesi G 'nin en büyük dereceye sahip tepesi olsun. Buna göre, her $y \in V(G)$ için $d(x, y) \leq 2$ ' dir (Dao vd. 2013).

İspat: Aksi kabul edilsin. O halde öyle bir $y \in V(G)$ vardır ki $d(x, y) = 3$ tür. x tepesinin derecesi k olsun ve $N(x) = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ olarak alınsın. Genelliği bozmadan, herhangi bir $z \in V(G)$ için w_1z ve yz ayrıtları G grafında herhangi iki ayrıt olsun. $2 \leq i \leq k$ için xw_i ve zy boşluk oluşturmaz. Buna göre, bir tepesi xw_i üzerinde diğer tepesi zy üzerinde olan bir ayrıt olmalıdır. $d(x, y)$ ve $d(x, z)$ lerin her ikisi de 1' i geçtiğinden, bu bahsedilen ayrıtın bir ucu kesinlikle x olamaz. Benzer şekilde, w_iy ' de bir ayrıt olamaz, çünkü ayrıt olsaydı $d(x, y) \leq 2$ olacaktı. Böylece $1 \leq i \leq k$ için $w_i z$ kenar olmalı. yz bir ayrıt olduğundan, z ' nin derecesi $k + 1$ olacaktır ve kabul ile çelişir.

Teorem 5.4.16. G grafi, indirgenmiş $K_{1,3}$ içermeyen ve boşluksuz bir graf olsun. Buna göre, $\text{reg}(G) \leq 3$ tür (Dao vd. 2013).

İspat: G grafında izole tepe olmadığı kabul edilsin. Çünkü izole tepeler ayrıt ideale katkı sağlamayacaktır. x derecesi en büyük olan tepe olsun. Yardımcı Teorem 8.11' den, $\text{reg}(G) \leq \max\{\text{reg}(G - N_G[x]) + 1, \text{reg}(G - x)\}$ olduğu biliniyor. $G - N_G[x]$ ve $G - x$ ' nin her ikisi de $K_{1,3}$ ve boşluk içermeyen graflardır. $\text{reg}(G - x) \leq 3$ olduğu G nin tepe sayısı üzerinden tümevarım ile kolayca gösterilebilir. Şimdi $\text{reg}(G - N_G[x]) \leq 2$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. $\overline{G - N_G[x]}$ ' nin 4' den büyük uzunlukta çevrim barındırmadığını göstermek gereklidir. Tersini kabul edilsin, yani $\overline{G - N_G[x]}$ ' de bir $y_1, y_2, \dots, y_n$ çevrimi olsun ve $n \geq 4$ olsun. Yukarıdaki önermeden dolayı, her bir y_i ' nin x ' ten uzaklığı 2'dir. Böylece herhangi bir $w \in V(G)$ için xw ve wy_i ayrıtları vardır. Dahası, y_2y_n bir ayrıttır, çünkü y_2 ve y_n tepeleri, $\overline{G - N_G[x]}$ grafında bitişik değildirler. wx ile y_2y_n bir boşluk oluşturmaması için, wy_2 veya wy_n ' nin birinin ayrıt olması gerekmektedir. Genelliği bozmadan, wy_2 bir ayrıt olsun. Bu durumda, $\{x, w, y_1, y_2\}$ kümesi üzerine indirgenmiş graf bir $K_{1,3}$ oluşturur ve bu çelişkidir.

Önerme 5.4.17. Δ simpleks kompleksi ve $x \in V(G)$ olsun. Buna göre,

$\text{reg}(\Delta) \leq \max\{\text{reg}(\text{del}_\Delta(x)), \text{reg}(\text{lk}_\Delta(x)) + 1\}$ dir (Bıyıkoglu Civan 2013).

İspat: $\text{reg}(\Delta) = d$ ve bir $W \subseteq V$ altkümesi için $\tilde{H}_{d-1}(\Delta[W]) \neq 0$ olsun. Eğer $x \notin W$ olsaydı, bu durumda $W \subseteq V(\text{del}_\Delta(x))$ olacaktı ve bu $\text{reg}(\text{del}_\Delta(x)) \geq d$ eşitsizliğini verirdi. Sonuç olarak $\text{reg}(\text{del}_\Delta(x)) = d$ olurdu ve bu kabul ile çelişir. Bu çelişikiden dolayı $x \in W$ olması gerekir.

Şimdi $\Delta_0 = \Delta[W]$, $\Delta_1 = \text{del}_\Delta(x)[W]$ ve $\Delta_2 = \text{lk}_\Delta(x)[W]$ olarak alınsın. (Δ_0, x)

ikilisine göre.

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_j(\Delta_2) \rightarrow \tilde{H}_j(\Delta_1) \rightarrow \tilde{H}_j(\Delta_0) \rightarrow \tilde{H}_{j-1}(\Delta_2) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_0(\Delta_1) \rightarrow \tilde{H}_0(\Delta_0) \rightarrow 0$$

Mayer-Vietoris tam dizisini yazalım. Burada $\Delta_1 = \text{del}_{\Delta_0}(x)$ ve $\Delta_2 = \text{lk}_{\Delta_0}(x)$ dir. Eğer $\text{reg}(\text{del}_\Delta(x)) < d$ ise $\tilde{H}_{d-1}(\Delta_1) = 0$ olacaktır. Böylece kabul gereği $\tilde{H}_{d-1}(\Delta_0) \neq 0$ olduğundan $\tilde{H}_{d-2}(\Delta_2) \neq 0$ olmalıdır. O halde $\text{reg}(\text{lk}_\Delta(x)) \geq d - 1$ dir.

Castelnuovo-Mumford regüleritesinin simpleksler kompleksleri için homolojik sonuçları vardır. Şimdi, bir kompleksin regüleritesinin alt sınırı ile o kompleksin alt kompleksleri arasındaki ilişki verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.4.18. Bir Δ simpleks kompleksi için aşağıdakiler denktir;

1. $\text{reg}(R/(I_\Delta)) \geq d$.
2. $\Delta[S]$ kompleksi, $S \subseteq V(\Delta)$ alt kümesi indirgenmiş alt kompleks olsun, buna göre $\tilde{H}_{d-1}(\Delta[S]) \neq 0$ dir,
3. Δ' ya ait bazı σ yüzleri için, $\tilde{H}_{d-1}(\text{lk}_\Delta \sigma) \neq 0$ dır (Ha Woodroofe 2014).

Yardımcı Teorem 5.4.19. Δ bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre, herhangi bir $\sigma \in \Delta$ yüzü için, $\text{reg}(R/(I_\Delta)) \geq \text{reg}(R/(I_{\text{lk}_\Delta \sigma}))$ dır (Ha Woodroofe 2014).

İspat: $\sigma \in \Delta$ için $\text{lk}_\Delta(\sigma)$ bir indirgenmiş alt kompleks olduğundan Yardımcı Teorem 5.4.18 (2)' den dolayı ispat biter.

Teorem 5.4.20. Eğer v bir Δ kompleksi için döküm tepe ve $\Delta \setminus v$ sequentially Cohen-Macaulay ise $\text{reg}(\Delta) = \max\{\text{reg}(\text{del}_\Delta(v), \text{reg}(\text{lk}_\Delta(v)) + 1\}$ dir (Ha Woodrooffe 2014).

Bu teoremin ispatını verilmeden önce, ispat için kullanılacak yardımcı teoremler verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.4.21. Eğer σ bir yüz ve v de Δ nın $v \notin \sigma$ olacak şekilde bir döküm tepesi ise, v tepesi $\text{lk}_\Delta(\sigma)$ içinde bir döküm tepedir (Ha Woodrooffe 2014).

İspat: Tanımdan eğer $\tau, \sigma \cup v$ içeren bir yüz ise (v shedding tepe olduğundan) öyle bir w tepesi vardır ki $(\tau - v) \cup w$ bir yüzdür. $\sigma \subseteq (\tau - v) \cup w$ ifadesinde v nin $\text{lk}_\Delta(\sigma)$ için bir döküm tepe olduğu elde edilir.

Δ bir simpleks kompleksi için $\text{reg}(\Delta) = \text{reg}(\text{lk}_\Delta v) + 1$ veya $\text{reg}(\Delta) = \text{reg}(\text{del}_\Delta v)$ dir. Buradan,

$\text{reg}(\Delta) \leq \max\{\text{reg}(\text{lk}_\Delta v) + 1, \text{reg}(\text{del}_\Delta v)\}$ olduğu sonucuna varılabilir. Yardımcı Teorem 5.4.19' dan $\text{reg}(\text{del}_\Delta v) \leq \text{reg}(\Delta)$ elde edilebilir ve böylece regüleritenin maksimumu

$\text{reg}(\text{del}_\Delta v)$ ise $\text{reg}(\text{del}_\Delta v) = \text{reg}(\Delta)$ sonucuna varılabilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 5.4.19' dan $\text{reg}(\Delta)$ ' nın $\text{reg}(\text{lk}_\Delta v)$ ' den daha küçük olamayacağı biliniyor. Eğer Δ herhangi bir kompleks üzerinde v tepeli bir koni olarak düşünülürse, $\text{reg}(\Delta) = \text{reg}(\text{lk}_\Delta v)$ olabilir ve böylece $\text{reg}(\Delta) < \text{reg}(\text{lk}_\Delta v) + 1$ dir.

Yardımcı Teorem 5.4.22. Γ Bir kompleks ve $\tilde{H}_n(\text{lk}_\Gamma v) \neq 0$ olsun. Eğer $(\text{lk}_\Gamma v)^{[n]}$, $\text{del}_\Gamma v$ nin bir Γ_0 alt kompleksi içinde olsun ve $\tilde{H}_n(\Gamma_0) = 0$ olsun. O halde $\tilde{H}_{n+1}(\Gamma) \neq 0$ dır (Ha Woodrooffe 2014).

İspat: $\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(\Gamma) \xrightarrow{g} \tilde{H}_n(\text{lk}_\Gamma v) \xrightarrow{f} \tilde{H}_n(\text{del}_\Gamma v) \rightarrow \dots$ Mayer-Vietoris tam dizisini kullanırsak ve f nin içirme dönüşümü olduğundan sonuç çıkar.

Tanım 5.4.23. $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. Eğer Δ simpleks kompleksi için, $\tilde{H}_k(\Delta[T], \mathbb{F}) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $T = [n]$ ise bu Δ simpleks kompleksine *tepe minimal k-çevrim* adı verilir (Baletti 2017).

Teorem 5.4.24. Δ bir tepe minimal k -çevrim kompleks ve T kümesi de Δ 'nın tepe kümesi V 'nin bir altkütmesi olsun. Eğer, $\Delta[T]$ bağlantısız ise $\text{reg}(\mathbb{F}[\Delta - T]) \geq k$ dır (Baletti, 2017).

İspat: $U_1 \subseteq T$ altkütmesi, $\Delta[U_1]$ indirgenmiş alt kompleksi $\Delta[T]$ 'nin bir bağlantılı bileşeni olacak şekilde alınsın. $U_2 = T - U_1$ olarak alınsın. $\Gamma_1 = \Delta[V - U_2]$ ve $\Gamma_2 = \Delta[V - U_1]$ olsun. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Delta$ ve $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Delta[V - T]$ dır. Mayer-Vietoris tam dizisi Γ_1 ve Γ_2 üzerine uygulanırsa,

$0 \rightarrow \tilde{H}_k(\Delta; \mathbb{F}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\Delta[V - T]) \rightarrow \dots$ tam dizisi elde edilir. Burada $\tilde{H}_k(\Gamma_1; \mathbb{F}) = \tilde{H}_k(\Gamma_2; \mathbb{F}) = 0$ dır çünkü $V - U_1$ ve $V - U_2$ 'ler V 'nin öz altkümeleridir. Bu ilk homoloji değerlerinin 0 olmasının sebebini verir. Δ bir tepe minimal k -çevrimdir ve $\tilde{H}_k(\Delta; \mathbb{F}) \neq 0$ olduğundan, $\tilde{H}_{k-1}(\Delta[V - T]; \mathbb{F}) \neq 0$ olacaktır. O halde

$$\text{reg}(\mathbb{F}[\Delta - T]) \geq k \text{ dır.}$$

5.5. Derinlik ve Kombinatorik Derinlik

Bu bölümde, Stanley-Reisner Halkalarının, derinlik sonuçları verilecektir.

Teorem 5.5.1. Δ bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre,

$$\text{depth}(\mathbb{F}[\Delta]) = 1 + \max\{i: \mathbb{F}[\Delta^i] \text{ Cohen-Macaulay dır}\} \text{ (Fröberg, 1990).}$$

İspat: $k[x] = k[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ bölüm halkasının Krull boyutu d olsun. $\mathbb{F}[x]$ 'nin derinliği $\max\{j: i > n - j \text{ için } \text{Tor}_i^R(k[\Delta]; \mathbb{F}) = 0\}$ 'a eşittir. $\sigma = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d})$ 'yı Δ 'ya ait maksimal yüz olarak alalım. σ 'yı Δ 'dan silerek (sadece maksimal simpleks silinecek ve diğer simpleksler kalacak şekilde), bu durumda, Stanley-Reisner halkası $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(I + (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d})) = \mathbb{F}[\Delta - \sigma]$ olan bir kompleks kalacaktır.

Şimdi $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -modüllerinin bir,

$$0 \rightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d}) \rightarrow \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[\Delta - \sigma] \rightarrow 0$$

tam dizisini ele alınsın. $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_d})$ şeklinde bir çekirdeğin $\mathbb{F}[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 'ye izomorfik olduğu kolayca görülür.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_i^R(K, \mathbb{F}) \rightarrow \text{Tor}_i^R(\mathbb{F}[\Delta], \mathbb{F}) \rightarrow \text{Tor}_i^R(\mathbb{F}[\Delta - \sigma], \mathbb{F}) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^R(K, \mathbb{F}) \\ \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}[\Delta], \mathbb{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

tam dizisi ile birlikte $i > n - d$ için $\text{Tor}_i^R(K, \mathbb{F}) = 0$ (çünkü $\text{depth}(K) = d$) gerçeğini ve $\text{Tor}_{n-d}^R(K, \mathbb{F}) \neq 0$ ifadesini göz önüne alarak,

$$i > n - d + 1 \text{ için } \text{Tor}_i^R(\mathbb{F}[\Delta], \mathbb{F}) \cong \text{Tor}_i^R(\mathbb{F}[\Delta - \sigma], \mathbb{F})$$

olduğu sonucuna varılır. Ayrıca,

$$0 \rightarrow \text{Tor}_{n-d+1}^R(\mathbb{F}[\Delta], \mathbb{F}) \rightarrow \text{Tor}_{n-d+1}^R(\mathbb{F}[\Delta - \sigma], \mathbb{F})$$

dizisi tamdır. Böylece $\mathbb{F}[\Delta]$ Cohen-Macaulay değilse, $\text{depth}(\mathbb{F}[\Delta]) = \text{depth}(\mathbb{F}[\Delta - \sigma])$ olduğunu görülür. Bu şekilde devam ederek, $\text{depth}(\mathbb{F}[\Delta]) = \text{depth}(\mathbb{F}[\Delta^{d-1}])$ eşiliğine varılır. Eğer, $\mathbb{F}[\Delta^{d-1}]$ Cohen-Macaulay ise sonuç tamamlanır fakat değil ise $\text{depth}(k[\Delta^{d-1}]) = \text{depth}(k[\Delta^{d-2}])$ bulunur ve devam edilir.

Yardımcı Teorem 5.5.2. G bir graf ve v tepesi G' nin bir izole tepesi olsun. Eğer $\text{Ind}(G - v)$ kompleksi k -boyutlu saf ve tepe - ayrıştırılabilir ise $\text{Ind}(G)$ ' de $k + 1$ -boyutlu saf ve tepe ayrıştırılabilir (Ziegler 1994).

Bir sonraki teorem, kombinatorik olarak bir Grafın (veya onun bağımsızlık kompleksinin) derinliğinin derecesi cinsinden değeri verilmektedir.

Teorem 5.5.3. G grafi n tepeli bir graf olsun. d tam sayısı G grafının tepelerinin en büyük derecesine eşit veya daha küçük olsun. Eğer $k < (n/2d)$ ise $\text{Ind}(G)$ kompleksi k -boyutlu saf ve tepe-ayrıştırılabilir (Dochtermann Engström 2009).

İspat: Eğer $d = 0$ olsaydı $\text{Ind}(G)$ bir simpleks olacaktı, bu tepe-ayrıştırılabilir olmasını gerektirirdi. $d \geq 1$ olsun. G grafının en büyük bağımsız kümesinde en az $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ eleman olacağından, $\text{Ind}(G)$ kompleksinin bir faseti en az $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ tepeye sahip olacaktır. Böylece $\text{Ind}(G)$ kompleksi saf olacaktır.

n üzerinde tümevarım yapılacaktır. $n = 0$ olursa kompleks boştur ve boş kompleksler tepe-ayrıştırılabilir.

$n > 0$ olsun. $u \in G$ sabit bir tepe olsun ve $N_G(u) = \{v_1, \dots, v_c\}$ olsun. Burada $c \leq d$ dir.

$$k - 1 \leq \frac{n}{2d} - 1 = \frac{n - 2d}{2d} \leq \frac{|V(G) - N_G[u]|}{2d}$$

olduğundan tümevarım ile $\text{Ind}(V(G) - N[u])$ kompleksi $(k - 1)$ -boyutlu saf ve tepe - ayrıştırılabilir. Böylece Yardımcı Teorem 9.1' den $\text{Ind}(V(G) - N(u))$ kompleksi k -boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir olur.

Şimdi $\text{Ind}(G - \{v_1, v_2, \dots, v_{c-1}\})$ kompleksinin k - boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir olduğu gösterilecektir. $\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v_c)$ kompleksi $\text{Ind}(V(G) - N(u))$ olup k -boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir. $\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v_c)$ kompleksi, $\text{Ind}(V(G) - (N_G(u) \cup N_G(v_c)))$ kompleksi olup $(k - 1)$ -boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir, çünkü; $k - 1 \leq \frac{n}{2d} - 1 = \frac{n - 2d}{2d} \leq \frac{|V(G) - (N_G(u) \cup N_G(v_c))|}{2d}$ dir. Sonuç olarak, $\text{Ind}(G - \{v_1, v_2, \dots, v_{c-1}\})$ kompleksi $(k - 1)$ -boyutlu tepe-ayrıştırılabilir. Aynı adımları tekrarlayarak, $\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v_{c-1})$ ile $\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v_{c-1})$ komplekslerinin tepe-ayrıştırılabilir olduğu görülür. Burada, $\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v_{c-1})$ kompleksi $\text{Ind}(G - (\{v_1, v_2, \dots, v_{c-1}\} \cup N_G(v_{c-1})))$ kompleksi olup $(k - 1)$ -boyutludur, çünkü

$$k - 1 \leq \frac{n}{2d} - 1 = \frac{n - 2d}{2d} \leq \frac{|V(G) - (\{v_1, v_2, \dots, v_{c-1}\} \cup N_G(v_{c-1}))|}{2d}$$

dir. O halde, $\text{Ind}(G - \{v_1, v_2, \dots, v_{c-1}\})$ kompleksi k -boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir. Bu işlem, $c - 2$ kere uygulanarak $\text{Ind}(G)$ kompleksinin k -boyutlu ve tepe-ayrıştırılabilir olduğu görülür.

Bir sonraki teorem bir kompleksin Stanley-Reisner halkasının derinliğinin o kompleksin maksimum boyutlu Cohen-Macaulay iskeleti ile hesaplanabileceğini göstermektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Graflarda regülerite hesaplanırken cochord sayısı üst sınır oluşturmaktadır. Bu parametre aslında hesaplanması kolay olmayan bir parametre olup yüksek değerlerde regülerite değerini fazla aşmaktadır. Bu yüzden bu parametre yerine daha yakın değerler bulabilen parametre aramak kombinatorik değişmeli cebirde oldukça ilgi çekici sonuçlar ortaya çıkarabilecektir. Bu regülerite değeri aslında grafin projektif boyutu ile ilişkilidir. Bu sayede, Auslander-Buchsbaum formülü yardımıyla, grafin Stanley-Reisner halkası için derinlik değerini vererek bunun yanında, bağımsızlık kompleksinin homoloji grupları içinde sonuçlar vermektedir. Bu çalışmalarda kullanılan yöntemler, daha yerel özelliklere sahip graflar içinde uygulanabilir ve birçok grafin projektif boyutu veya regüleritesi hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- Aharoni, R. and Haxel, P. 2000. Hall's theorem for hypergraphs. *J. Graph Theory*, 2, 83-88.
- Auslander, M., Buchsbaum, D.A., 1957. Homological dimension in local rings, *Transactions of the American Mathematical Society*, 85, 390–405.
- Banetti, G., 2017. Connectivity Through Bounds For The Castelnuovo-Mumford Regularity. *J. Combin. Theory Series A*, 147, 46-54.
- Bıyıkoglu, T., Civan, Y., 2014. Vertex-decomposable Graphs Codismantlability Cohen Macaulayness and Castelnuovo-Mumford regularity. *Electronic Journal of Combinatorics*, 21, 1-17.
- Bıyıkoglu, T., Civan, Y., 2013. Bounding Castelnuovo-Mumford Regularity of Graphs Via Lozin's Transformation, *Arxiv*, 1-12.
- Björner, A., Lovasz, L., Vrecica, S.T., Zivaljevic, R. T., 1994. Chessboard Complexes and Matching Complexes, *Journal of the London Mathematical Society*, 49, 25-39.
- Björner, A., Wachs, M., 1996. Shellable nonpure complexes and posets. I. *Trans. Amer. Math. Society*, 348, 1299-1327.
- Bruns, W. and Herzog, J., 1998. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, 465 p, Cambridge, UK.
- Chartrand, G. and Zhang, P. 2008. *Chromatic Graph Theory*. Chapman And Hall, 504 p.
- Dao H. and Schweig, J. 2013. Projective Dimension, Graph Domination Parameters, and Independence Complex Homology, 120, 453-469.
- Dao H., Huneke C., Schweig J., 2013. Bounds On The Regularity and Projective Dimension of Ideals Associated to Graphs. *J. Algebraic Combinatorics*, 38, 37-55.

- Dirac, G. A. 1961. On rigid circuit graphs, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Der Universitat Hamburg*, 25, 71-76.
- Diestel, R. 2017. *Graph Theory*. Springer, 446 p.
- Dummit, D. S. and Foote, R. S., 2003. *Abstract Algebra*. Wiley Publication, 944 p.
- Dochtermann, A. and Engström, A., 2009. Algebraic Properties of Edge Ideals Via Combinatorial Topology, 16, 1-24.
- Fröberg, R. 1990. On Stanley-Reisner Rings. *Topics In Algebra*, 26, 1-14.
- Herzog, J. and Hibi, T., 2011. *Monomial Ideals*. 322 p, Springer, London.
- Hochster, M., 1977. Cohen-Macaulay Rings, Combinatorics, and Simplicial Complexes, in *Proceedings of the Second Oklahoma Ring Theory Conference* Marcel-Dekker, 171, 223 p.
- Hu, H. T., Woodroffe, R., 2014. Results On The Regularity of Square-Free Monomial Ideals. *Advances in Applied Mathematics*, 58, 21-36.
- Kalai, G., Meshulam, R., 2006. Intersections of Leray complexes and regularity of monomial ideals. *Journal of Combin. Theory*. 113, 1586-1592.
- Katzman, M. 2006. Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 113, 435–454.
- Khosh-Ahang, F. and Moradi, S. 2014. Regularity and projective dimension of the edge ideal of C_5 -free vertex decomposable graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(5), 1567-1576.
- Kneser, M., 1955. Aufgabe 300. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein*, 58.
- Kummini, M. 2008. Homological invariants of monomial and binomial ideals, Ph.D. Thesis, University of Kansas, Kansas, USA.
- Lovasz, L., 1978. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy., *J. Combin. Theory Ser. A*, 25, 319–324.

- Lyubeznik, G. 1988. The minimal non-Cohen-Macaulay monomial ideals, *J. Pure Appl. Algebra*, 51, 261-266.
- Matsumura, H. 1989. *Commutative Ring Theory*. Cambridge, 336 p.
- Meshulam, R. 2001. The clique complex and hypergraph matching. *Combinatorica*, 1, 89-94.
- Meshulam, R., 2003. Domination Numbers and Homology, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 102, 321-330.
- Provan, J. S., Billera, L.J., 1980. Decomposition of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra. *Math. of Operational Research*, 5, 576–594.
- Reisner, G. A., 1976. Cohen-Macaulay Quotients of Polynomial Rings. *Advances in Mathematics*, 21, 30-49.
- Rotman, J. J. 2002. *Advanced Modern Algebra*. Pearson, 1012 p.
- Rotman, J. J. 2008. *An Introduction To Homological Algebra*. Springer, 724 p.
- Stanley, R., 1996. *Combinatorics and Commutative Algebra*. Birkhauser, 168 p.
- Tuyl, A. V., 2008. Sequentially Cohen–Macaulay Bipartite Graphs: Vertex Decomposability and Regularity. *Arch. Math.*, 93, 451-459.
- Tuyl, A. V. And Villarreal, R.H., 2008. Shellable Graphs and Sequentially Cohen–Macaulay Bipartite Graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 115, 799–814.
- Villarreal, R. H. 2018. *Monomial Algebras*. Chapman and Hall, 704 p.
- Villarreal R. H. 1990. Cohen-Macaulay Graphs. *Manuscripta Mathematica*, 66, 277-293.
- Ziegler, G.M., 1994. Shellability of Chessboard Complexes. *Israel Journal of Mathematics*, 87, 97-110.
- Woodroffe, R., 2009. Vertex Decomposable Graphs and Obstructions to Shellability. *Proc. Amer. Math. Society*. 137, 3235-3246.

Woodrooffe, R., 2014. Matchings Coverings and Castelnuovo-Mumford Regularity. *Journal of Commutative Algebra*. 6, 287-304.

